

A evolução da geometria euclidiana de Euclides a Proclo

The evolution of Euclidean geometry from Euclid to Proclus

Bruno Felipe Gonçalves Diamantino da Silva¹  

Universidade Federal de Goiás – UFG

Humberto de Assis Clímaco²  

Universidade Federal de Goiás – UFG

RESUMO

O assunto da crítica à axiomática euclidiana foi mormente tratado como um tópico da história das geometrias não euclidianas. Por mais que esse seja um tópico privilegiado dentro dessa história, essa abordagem não permite uma análise que para ele se volte exclusivamente e que seja capaz de revelar outras contribuições mais específicas a este assunto. O objetivo do presente estudo é fugir dessa prática e fornecer uma análise, a partir de uma pesquisa bibliográfica, cuja ferramenta principal de análise é o método semiótico peirceano, de como se deu a história da geometria euclidiana a partir da crítica a axiomática originalmente proposta por Euclides em seu *Os Elementos* que contribua para a concepção da geometria euclidiana como um objeto do conhecimento humano, que se transforma através de um processo evolutivo (ou genético) na medida em que é humanamente construído. Atingidos esses objetivos, influencia-se claramente certa prática pedagógica, na medida em que as conclusões a que se chega pela mencionada análise, envolvem determinada epistemologia que, por sua vez, orienta determinada concepção de Educação Matemática.

Palavras-chave: Euclides de Alexandria; axiomática; geometria euclidiana; História da Matemática grega; semiótica.

ABSTRACT

The critique of the Euclidean axiomatics has mostly been discussed as a topic of the history of non-Euclidean geometries. As much as this is a privileged topic within this history, this approach does not allow for an analysis that focuses exclusively on it and that is capable of revealing furthermore contributions to this subject. The aim of this study is to move away from this practice and provide an analysis, based on bibliographical research, whose main tool of analysis is the Peircean semiotic method, of how the history of Euclidean geometry has developed from the criticism of the axiomatics originally proposed by Euclid in his *The Elements*, which contributes to the conception of Euclidean geometry as an object of human knowledge, which is transformed through an evolutionary (or genetic) process as it is humanly constructed. Once these goals have been achieved, a certain educational view will be influenced, insofar as the conclusions reached by this analysis involve a certain epistemology which, in its turn, guides a certain conception of Mathematical Education.

Keywords: Euclid of Alexandria; axiomatics; Euclidean geometry; History of Greek Mathematics; semiotics.

INTRODUÇÃO

Por volta do ano 300 a. C., no Egito governado pela dinastia dos Ptolomeus, mais especificamente e muito provavelmente na cidade de Alexandria, apareceu um tratado que reunia grande parte do conhecimento matemático grego até então produzido, intitulado *Os Elementos*. Seu compilador, Euclides (fl. 300 a. C.), provavelmente fez parte da escola platônica por volta do mesmo tempo em que viveu Aristóteles (384 – 322 a. C.); não se sabe, no entanto, se isso se deu antes ou depois de este último ter deixado a Academia, pouco antes de 350 a. C. De qualquer modo, parece ter sido o caso que o ambiente filosófico das discussões aristotélicas acerca dos princípios primeiros das ciências e da lógica tenha exercido alguma influência sobre a obra euclidiana, pois *Os Elementos*

¹ Licenciando em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Bolsista pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG), na cidade de Goiânia, Goiás, Brasil. E-mail: diamantino@discente.ufg.br.

² Doutor em Educação pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Professor adjunto no Instituto de Matemática e Estatística (IME) da UFG na cidade de Goiânia, Goiás, Brasil. E-mail: humberto_climaco@ufg.br.

não é somente um compêndio de resultados matemáticos: trata-se, na verdade, de uma tentativa de organizar os conhecimentos até então produzidos de maneira sistemática, através da *dedução* dos mais complexos a partir dos mais simples. Para tal, seria necessário, a fim de se evitar uma espécie de círculo vicioso, que se partisse de definições e de afirmações não demonstradas, ou seja, de *princípios* sobre os quais se construiria o todo do tratado. É, inclusive, este o sentido do seu nome: pois, assim como os gregos consideravam o fogo, o ar, a água e a terra como os *elementos* constituintes de todo o universo, os princípios enunciados por Euclides se constituem como os *elementos* a partir dos quais se forma toda a teoria matemática que ele pretendia discutir (*Comentário*,³ 72-73). Embora estes princípios sejam referidos por Euclides a partir de duas nomenclaturas diferentes – que serão expostas logo mais – já nos tempos de Aristóteles, o termo $\alpha\chi\iota\omega\mu\alpha$ (transl. *axioma*)⁴ era utilizado para designá-los (*An. Post.* 72a 14). Por essa razão, a esse esforço organizacional se passou a chamar *axiomatização*; por sua vez, ao conjunto dos $\alpha\chi\iota\omega\mu\alpha\tau\alpha$ (transl. *axiómata*) elencados para esse tipo de realização, pode-se, como faz De Risi (2016), através de um empréstimo de um termo eminentemente moderno (Abbagnano, 2007, p. 102), dar o nome de *axiomática*.

Os Elementos, embora também lide com assuntos relacionados, por exemplo, à teoria dos números, majoritariamente trata sobre geometria.⁵ Discussões sobre a axiomática originalmente proposta por Euclides em seu trabalho geralmente se confundem com discussões relacionadas à fundamentação teórica da própria geometria.

Desde a Renascença, a preocupação artística com a *perspectiva* começou a produzir interesse num tipo de geometria essencialmente distinto daquela estudada por Euclides: a *geometria projetiva* (Bongiovanni, 2007). A história viu então florescer e se desenvolver a concepção de diferentes tipos de geometria, não fundamentalmente baseadas no famoso *postulado das paralelas* – a ser discutido mais adiante. O percurso histórico viria a revelar para a comunidade matemática o qual central seria a negação ou a suposição deste postulado para a caracterização das teorias geométricas. Assim, a geometria do postulado das paralelas, muito embora se distancie hoje em dia de muitos aspectos da axiomática presente em *Os Elementos*, passou a ser conhecida como *geometria euclidiana*, em distinção das outras *geometrias não euclidianas* que surgiam a partir da negação e subsequente substituição do postulado das paralelas.

Importa conhecer a história da geometria euclidiana e das transformações da fundamentação axiomática pelas quais ela passou principalmente para se compreender como surgiram e em qual sentido se desenvolvem as geometrias não euclidianas. Dessa forma, quase sempre, o assunto da crítica à axiomática euclidiana é discutido como um tópico da história das geometrias não euclidianas.⁶ O objetivo do presente trabalho é expandir este tópico, tratando-o não com vistas a compor um quadro sobre a história das geometrias não euclidianas, mas, sim, para propor uma visão da recepção do texto euclidiano pela comunidade matemática, mais especificamente daquela que

³ Este é *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides* de Proclo, o Diádoco. A convenção geral adotada por aqueles que escrevem sobre este texto, particularmente importante para a história da matemática, é abreviá-lo e citar a paginação da edição de Gottfried Friedlein de 1873. Além de seguir este padrão de citação, essa obra será referida de agora em diante apenas como *Comentário*. A edição consultada, no entanto, foi a segunda de Glenn R. Morrow (Proclo, 1992); todas as citações deste texto aqui contidas são traduções próprias dos autores, feitas a partir da tradução de Morrow para o inglês.

⁴ Os parâmetros de transliteração utilizados para a escrita deste trabalho são de Prado (2006).

⁵ Unguru (1975) e Unguru e Rowe (1981; 1982) defendem a exclusividade do pensamento geométrico nas atividades matemáticas desenvolvidas na Grécia Antiga. É, em linhas gerais, com sua visão historiográfica que os autores deste artigo se alinham.

⁶ Por exemplo, ao perpassar os anais do Seminário Nacional de História da Matemática, agora em sua décima sexta edição, percebe-se que o tema da crítica à axiomática euclidiana aparece apenas em trabalhos como os de Bongiovanni (2007), Montoito (2011) e Nascimento (2021), que apenas o discutem como tópico preliminar da história das geometrias não euclidianas.

desenvolveu seus trabalhos depois de Euclides até Proclo, cujo *Comentário*, além de ser um documento importantíssimo para as pesquisas em História da Ciência e da Matemática na Antiguidade Clássica, também marca profundamente a história da crítica à axiomática euclidiana.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

A principal fonte bibliográfica deste trabalho é Heath (1908a; 1921a; 1921b). É verdade que os autores do presente trabalho tenhamos iniciado nossos esforços investigativos em História da Matemática ancorados principalmente nas discussões historiográficas propostas por autores como Szabó (1978), Unguru (1975), Unguru e Rowe (1981; 1982) e Fowler (1999), que enxergam a historiografia de figuras como Sir Thomas Little Heath, Hyeronimus Georg Zeuthen e Paul Tannery como insuficiente para representar o processo histórico pelo qual passou a matemática na Grécia Antiga. No entanto, Heath, como grande classicista que era, fornece até hoje uma das revisões mais abrangentes e úteis dos conteúdos da Matemática grega. Sua contribuição para essa pesquisa é a de fornecer o panorama, isto é, o quadro geral dos movimentos de crítica e de aceitação da axiomatização proposta por Euclides. A análise dependerá de uma abordagem teórica diferente, a ser explicada mais adiante.

Heath, no entanto, assim como a maior parte da comunidade científica, aceita a opinião de Johan Ludvig Heiberg como definitiva para a recomposição do texto euclidiano original a partir, principalmente, de fontes greco-bizantinas. Por outro lado, a leitura de Knorr (2001) sugere que isso possa ser tão *certo* e que a opinião de Martin Klamroth, que prefere os manuscritos latinos, possa ser preferível a de Heiberg. Exige-se, portanto, cuidado para que o que aqui se possa dizer acerca da axiomática euclidiana original não se torne totalmente obsoleto se novas pesquisas vierem a confirmar a primazia das fontes medievais latinas e árabes na conservação do material que originalmente compunha *Os Elementos*.

Assim, a partir do quadro apresentado em De Risi em seu importante *The development of Euclidean axiomatics: The systems of principles and the foundations of mathematics in editions of the Elements in Early Modern Age* (2016), procurou-se discutir as transformações pelas quais passou a fundamentação da geometria euclidiana a partir de uma axiomática que mais ou menos representasse o conjunto de princípios que muito provavelmente compunham o tratado euclidiano original.

Uma das fontes analisadas por Heath (1908a; 1921a; 1921b) é central para a composição do presente trabalho. Trata-se do *Comentário* de Proclo, o Diádoco (412 – 485). Ela foi efetivamente consultada e citada durante todo o texto.

Proclo estudou sob Plutarco (c. 350 – c. 430) e Siriano, sucedendo a este último na direção da escola dos neoplatônicos de Atenas quando morreu este último, por volta de 437, até a sua própria morte, quando foi sucedido por Marino de Flávia Neápolis (c. 450 – c. 500). Considerando, portanto, este contexto, seria lúcido duvidar de uma prática historiográfica que se amparasse exageradamente em seu texto, pois muitos dos apontamentos de Proclo podem se constituir como reconstruções hipotéticas nada imparciais que valorizassem a escola à qual os neoplatônicos acreditavam suceder: a Academia de Platão. É preciso, portanto, cautela no tratamento deste documento.

Para este trabalho, no entanto, considerou-se que as informações fornecidas por Proclo acerca das críticas à axiomatização d'*Os Elementos* não poderia se distanciar muito de uma representação fidedigna dos movimentos de crítica filosófica e matemática da obra euclidiana. Pois, mesmo que

suas identificações dos *críticos e comentadores* do texto possam não ser suficientemente precisas, parece seguro crer que o ambiente filosoficamente diverso por ele retratado em seu *Comentário* tenha realmente se constituído naquele intervalo de tempo—entre 300 a. C. e a metade do século V.

METODOLOGIA

A pesquisa bibliográfica foi a metodologia a partir de qual se produziu a maior parte do texto deste trabalho. Ela foi realizada a partir das orientações de Lakatos e Marconi (2003).

Procurou-se consultar, sempre que possível, fontes bibliográficas – discutidas em *Referencial teórico* – que amparassem as análises do conteúdo das fontes primárias que aqui se realizaram. Essas análises foram importantes para a composição de quadros ausentes nas fontes bibliográficas utilizadas – como é o caso da ênfase na comparação em *A axiomática euclidiana original* entre as listas de postulados e noções comuns (serão discutidos posteriormente) dos manuscritos greco-bizantinos e dos manuscritos latinos medievais.

Estudos historiográficos mais recentes (indicados em *Referências*) foram sempre consultados a fim de se atingir as conclusões deste estudo sem uma ingênua fundamentação em trabalhos que podem, pela ação do tempo, se tornar defasados.

Para uma análise de todo o panorama histórico construído a partir dessa primeira abordagem metodológica, etapa da pesquisa bibliográfica que fundamental a difere da *revisão da literatura* (Witter, 1990), se escolheu como abordagem metodológica a semiótica peirceana, a partir da qual se pôde compreender a *história evolutiva* (ou *genética*) da geometria euclidiana.

Para Peirce, o *conceito* deve ser compreendido a partir de sua origem (isto é, de sua *gênese*) e da sua *evolução* ao longo da história (Clímaco *et al.*, 2024, p. 202). É com base nessa visão que o entendimento de evolução da geometria euclidiana – que será explicada mais adiante – presente neste trabalho se ancora seguramente.

Foi também particularmente importante a abordagem semiótica para a compreensão do conhecimento estudado como *construção* do sujeito, de modo que o papel da subjetividade, segundo a epistemologia peirceana, entra em relevo, o que resulta em claras implicações filosóficas e, consequentemente, também pedagógicas (Monteiro, 2021). A investigação das consequências que um estudo como este podem trazer para a prática de ensino de Matemática e para a compreensão do lugar que ocupa a geometria dentro da Educação Matemática, no entanto, não são o alvo dessa pesquisa, e portanto, nenhuma abordagem metodológica a este tipo de investigação relacionada foi empregada aqui. Trabalhos posteriores podem investigar as consequências de se assumir esse tipo de postura metodológica de análise no ambiente pedagógico.

Os autores, entretanto, enxergam a necessidade de se compreender a matemática e, em particular, a geometria como um objeto do conhecimento passível de ser concebido tanto a partir da sua compreensão como *produção* quanto como *descoberta* humana. A interação entre esses pontos de vista, acreditam os autores, deve eliminar a dualidade tradicional e substituí-la pela noção de complementaridade, fundamentalmente ancorada na abordagem semiótica (Clímaco *et al.*, 2024).

ANÁLISES E RESULTADOS

A axiomática euclidiana original

Na primeira metade da década de 1880, houve um curto debate entre Johan Ludvig Heiberg, um filólogo e historiador dinamarquês especialista em História da Matemática grega, e Martin Klamroth, um historiador especialista em estudos orientais. A questão discutida era a primazia dos manuscritos que deveriam ser considerados para a composição de uma edição crítica d’*Os Elementos* que reproduzisse mais fidedignamente o texto original.

Por volta do final do século IV, surgiu uma recensão do texto euclidiano que serviria de base para a cópia dos manuscritos mais antigos que se tem hoje d’*Os Elementos* de Euclides. Essa recensão tinha sido produzida por Teão, que também viveu em Alexandria, pouco menos de 700 anos depois do próprio Euclides. Em 1808, um filólogo francês chamado François Peyrard percebeu que um dos manuscritos d’*Os Elementos* da Biblioteca Apostólica Vaticana, o famoso *Vat. gr. 190*, provavelmente escrito por volta do início do século IX, período em que a Grécia já estava em seu período bizantino, além de não ser encabeçado por dizeres como “... da edição de Teão” (como era o caso de todos os outros até então conhecidos) não continha também um certo corolário no final do Livro VI, que Teão dizia explicitamente ser adição sua (Knorr, 2001, p. 134). A visão de Peyrard, endossada por uma série de especialistas e por Heiberg, era de que o escriba do manuscrito *Vat. gr. 190* muito possivelmente tinha diante de si uma cópia tanto do texto de Teão, quanto de uma versão d’*Os Elementos* que historicamente antecedia esta recensão do final do século IV.

A edição crítica de Heiberg (Euclides, 1883-1888) tem no manuscrito *Vat. gr. 190*, a que ele chamou P, sua principal fonte. Por outro lado, Klamroth primava pelos manuscritos medievais latinos, que, por sua vez, tinham sido compostos a partir das versões árabes dos textos, os quais, conforme sua análise, representavam mais fidedignamente o texto euclidiano original.

As principais edições árabes são as duas de al-Ḥajjāj b. Yūsuf b. Maṭar (do final do século VIII e do início do século IX) e a de Abū Ya‘qūb Ishāq b. Ḥunain b. Ishāq al-‘Ibādī (da metade do século IX), revisada pelo grande matemático Thābit b. Qurra, que, em geral, se costuma ter como uma versão mais confiável que as duas de al-Ḥajjāj (De Risi, 2016, p. 596).⁷ Um importante comentário aos Livros I-VI d’*Os Elementos*, produzido por Abū ‘l ‘Abbās al-Faḍl b. Ḥātim an-Nairīzī (c. 865 – c. 922) sobrevive no *Codex Leidensis* 399 junto com uma das traduções de al-Ḥajjāj. Da Ma’mūnī, se produziu a importante tradução latina de Adelardo de Bath, da primeira metade do século XII; da tradução de Ishāq, veio a importante edição latina d’*Os Elementos* de Gerardo de Cremona, na metade do século XII (De Risi, 2016, p. 639-640). Gerardo também produziu, por volta do mesmo período, uma tradução dos comentários de an-Nairīzī (De Risi, 2016, p. 640). Esses últimos três textos latinos compõem a base de fontes latinas mais importantes para Klamroth (Knorr, 2001).

Knorr (2001) adverte que o debate foi encerrado muito prematuramente – apenas dois artigos foram publicados por cada um dos debatedores – e que a “vitória” de Heiberg deveria ser problematizada e investigada com maior cautela pelos historiadores e editores da obra euclidiana. Para que a análise aqui proposta possa, portanto, abranger as posições de ambos os lados, procurou-se esclarecer em quais pontos os manuscritos greco-bizantinos de Heiberg e os manuscritos medievais de Klamroth concordavam entre si, no que se refere a suas respectivas listas de princípios.

⁷ Os nomes árabes, diferentemente do que se fez para os nomes gregos, foram mantidos na sua forma transliterada. Todas as transliterações são dadas a partir das fontes em língua inglesa.

Conforme De Risi (2016, p. 638-642), em todos os manuscritos greco-bizantinos consultados por Heiberg, que são sete, e em todos as edições manuscritas medievais latinas, que são oito, cinco *postulados* aparecem sempre:

- 1) Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
- 2) Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
- 3) E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
- 4) E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
- 5) E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (Euclides, 2009, p. 98).

Enquanto grande parte dos princípios e definições podem ser considerados como compilações de outros matemáticos anteriores, este quinto postulado, conforme sugere Heath (1921a, p. 339) parece ser original de Euclides.⁸ As discussões acerca dele são bem expressivas. Ele será referido, de agora em diante, como o *postulado das paralelas*.

Esta primeira lista de princípios, que em todos os manuscritos greco-bizantinos são chamados αἰτήματα (transl.: *aitēmata*) e na maior parte dos textos latinos são designados por *petitiones* (isto é, “petições”, “postulados”), se identificam mais ou menos com o conceito aristotélico de *noções específicas*.⁹ Estas são *princípios* e, portanto, são assumidas e não demonstradas. Particularmente, dizem respeito a objetos próprios da teoria que se pretende com eles “fundar”.

Alguns manuscritos, quatro greco-bizantinos e todos os latinos, com a exceção das já mencionadas traduções de Gerardo, trazem ainda um sexto postulado: que “[...] duas retas não contém uma área” (Euclides, 2009, p. 99). Gerardo, reproduzindo o texto de an-Nairīzī, conta este postulado como uma *noção comum* (De Risi, 2016, p. 639-640).

Este segundo grupo de princípios euclidianos, designados em todos os manuscritos greco-bizantinos por κοινὰ ἔννοιαι (transl.: *koinaì énnōiai*) e geralmente chamadas em latim de *communes animi conceptiones* (isto é, “concepções (ou noções) comuns de princípios que, ao contrário das *noções específicas*, se referem a objetos universais a todas as ciências.¹⁰

Existem inúmeras divergências entre os manuscritos com relação ao número das noções comuns. Seis, entretanto, aparecem em todos os manuscritos consultados por Heiberg e em todos os manuscritos latinos:

1. *As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.*
2. *E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.*
3. *E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.*
4. *E, caso iguais sejam adicionados a desiguais, os todos são desiguais.*

⁸ Bicudo (2005) ampara essa posição.

⁹ Szabó (1978) adverte sobre os perigos de se realizar uma identificação ingênua entre a divisão aristotélica dos princípios primeiros das ciências e a divisão euclidiana exposta em *Os Elementos*. Wilck (2020), por outro lado, sugere uma proximidade muito maior entre *Os Elementos* e a filosofia aristotélica do que se costuma pensar haver.

¹⁰ Inclusive, no texto de Adelardo, as κοινὰ ἔννοιαι dos manuscritos gregos são chamadas de *scientia universaliter communis* (“ciência (ou conhecimento) universal comum”).

[...]]

7. *E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.*

8. *E o todo [é] maior do que a parte* (Euclides, 2009, p. 99).

Uma sétima noção comum aparece em todos os manuscritos greco-bizantinos e nas duas traduções de Gerardo já mencionadas: que “[...] os dobros da mesma coisa são iguais entre si”. Uma oitava noção comum só não se encontra presente em um dos manuscritos de Heiberg e na tradução de Gerardo dos comentários de an-Nairīzī: que “[...] as metades da mesma coisa são iguais entre si”.

Todas essas noções comuns, juntamente com o “sexto postulado” acima exposto, compõem a lista das noções comuns que aparece na edição preparada por Irineu Bicudo (Euclides, 2009). Heiberg considerava apenas as noções comuns 1, 2, 3, 7 e 8 como genuínas (Euclides, 1883-1888). Heath argumenta que apenas 1, 2 e 3 estavam verdadeiramente presentes no texto original (1921a, p. 376). Por sua vez, nunca foi preparada uma edição crítica fundamentada nos manuscritos medievais.

A crítica à axiomática euclidiana original e o surgimento de novas axiomáticas

A revisão de Heath (1908a; 1921a; 1921b) do *Comentário* de Proclo revela a participação de pelo menos sete matemáticos na crítica ativa da axiomática disposta originalmente por Euclides em *Os Elementos*. São eles: Apolônio de Perga (c. 262 – 194 a. C.), Possidônio de Apameia (c. 135 – c. 51 a. C.), Gêmino de Rodes (fl. 70 a. C.), Cláudio Ptolomeu (c. 100 – c. 170), Herão de Alexandria (século II ou III, não depois de Papo e não muito antes de c. 150),¹¹ Papo de Alexandria (c. 290 – c. 350) e o próprio Proclo, que limita o escopo desta pesquisa.

Apolônio foi o autor de *Cônicas*. Quando jovem, tinha sido aluno dos discípulos de Euclides em Alexandria; já no reinado de Ptolomeu Filopátor (247 – 222 a. C.), era tido como um renomado astrônomo (Heath, 1921b, p. 126). No que se refere à crítica da axiomática euclidiana, Apolônio se apoiou em outros princípios relacionados ao espaço que os objetos geométricos ocupam para fornecer uma demonstração para a primeira noção comum euclidiana, a saber, que “as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si” (*Comentário*, 195). Para além disso, não se conhece que ele tenha produzido alguma outra crítica a algum outro princípio.

Possidônio e Gêmino entram na história da crítica da axiomática euclidiana ao tentarem formular novas interpretações para a teoria das paralelas.

A história da crítica à teoria euclidiana das paralelas é aparentemente movida por um estranhamento quanto ao caráter do postulado das paralelas, em que ela está fundamentalmente ancorada:

Consideremos, como foi hábito fazê-lo até o século XIX, que a geometria, costumeiramente chamada euclidiana, descreva, de fato, o espaço físico que nos circunda e suas propriedades. Desse ponto de vista, os postulados, sobre que se baseia essa geometria, deveriam ser abstraídos da experiência [...]. Não exige qualquer esforço a aceitação dos dois primeiros como abstração de nossa experiência no traçado de retas, fazendo uso de régua. Do mesmo modo, o terceiro representa nossa experiência com a utilização de um compasso. Talvez o quarto postulado seja o menos imediato, como uma abstração, mas, por certo, é derivado da nossa experiência com medidas de ângulo e com a constatação de que, se dois ângulos retos quaisquer forem adjacentes, os lados não comuns estarão sobre

¹¹ Sobre as dificuldades de se precisar quando viveu Herão, cf. Heath (1921b, p. 298-307).

uma reta. O V Postulado é diferente, pois não podemos, pela experiência, saber se as retas se encontrarão ou não, uma vez que a experiência só nos permite traçar segmentos. Podemos estender os segmentos mais e mais, porém não eternamente. Além do que, sabemos que duas linhas podem-se aproximar ilimitadamente sem nunca se encontrarem, como é o caso de uma curva e de sua assíntota -por exemplo, uma hipérbole e sua assíntota (aliás, em grego, “linhas assíntotas” quer dizer “linhas que não se encontram”) O V Postulado afirma que isso não acontece com duas linhas retas, o que, para todos os efeitos da experiência, não era intuitivamente claro (Bicudo, 2005, p. 12-13).

Possidônio e Gêmino são os protagonistas do primeiro episódio de que se tem notícia relacionado à história dessa crítica. Possidônio forneceu uma nova definição para o conceito de *paralelismo*, que, para todos os efeitos, levava a uma abordagem diferente da teoria das paralelas: enquanto, para Euclides, retas paralelas eram retas que, prolongadas em qualquer um dos lados indefinidamente, jamais se interceptavam (Euclides, 2009, p. 98), para Possidônio, elas eram as retas equidistantes.¹² Gêmino, que muito provavelmente tinha sido aluno de Possidônio, por sua vez, possuindo uma teoria classificativa de postulados e axiomas (*Comentário*, 182), tomou o quarto postulado, segundo o qual são iguais entre si todos os ângulos retos, como um teorema, ou seja, nem como postulado, nem como noção comum. Como, ao defender a classificação do postulado das paralelas como um teorema, Proclo se vale da afirmação de Gêmino de que não se deve “[...] prestar atenção a imaginações plausíveis” (*Comentário*, 192) para defender que a plausibilidade do postulado das paralelas não deveria servir de critério para contá-lo entre os postulados da geometria; pode-se inferir, então, que Gêmino também pensava que este postulado fosse um teorema. No entanto, a possível demonstração que ele pode ter delineado não sobreviveu ao tempo.

Ptolomeu, o autor de *Almagesto*, é o protagonista do segundo episódio da história das críticas à teoria euclidiana das paralelas. Este episódio, no entanto, é de particular interesse, pois a demonstração que tentou fornecer Ptolomeu para a validade postulado das paralelas sobreviveu. Ela está conservada em *Comentário*, 362-363, 365-367. Uma apresentação mais sucinta de sua prova pode ser encontrada em Barbosa (2007, p. 18-19).

Justamente pelo fato de este episódio ser tão emblemático na história da crítica à axiomática euclidiana, a discussão dele já se encontra robustamente colocada na literatura nacional sobre o assunto. A leitura indicada acima fornece apontamentos acerca das falhas lógicas dos argumentos de Ptolomeu. Adicionalmente, cf. Heath (1908b, p. 204-206).

Tendo vindo antes ou depois de Ptolomeu (é difícil afirmar com certeza), Herão, o representante de uma emblemática virada na tradição matemática grega, do estilo euclidiano tradicional para a matemática das mensurações, volta a crítica para outros princípios da axiomática euclidiana. Para ele, que “o todo é maior do que a parte” e que “as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si” não deveriam ser verdades contadas entre as noções comuns. Segundo Proclo (*Comentário*, 196), ele defendia apenas que as três primeiras noções comuns fossem verdadeiros princípios; as demais deveriam ser demonstradas.

Papo, que – assim como Euclides – era um grande compendiador da matemática até então produzida, também propôs alterações à axiomática euclidiana. Ele introduziu princípios que dão propriedades relacionadas a desigualdades: “caso desiguais sejam adicionados a desiguais, o excesso

¹² É possível mostrar que a existência de um par de retas equidistantes num plano implica a validade do postulado das paralelas, e vice-versa. Cf. Barbosa (p. 14-15).

de uma das somas sobre a outra é igual ao excesso de uma das quantidades adicionadas sobre a outra” e o seu complemento, “caso iguais sejam adicionados a desiguais, o excesso de uma das somas sobre a outra é igual ao excesso de uma das quantidades originais sobre a outra” (*Comentário*, 197). Além desses, também é de sua opinião que outros princípios deveriam ser contados entre as noções comuns: que “todas as partes de um plano e todas as partes de uma reta coincidem entre si”, que “um ponto divide uma reta e uma reta divide um plano” e que “infinito em magnitude existe tanto por adição, quanto por remoção, ainda que potencialmente em cada caso” (*Comentário*, 198). Além disso, pode também ser a ele que se deve a inclusão do “sexto postulado” e da noção comum 4 na segunda lista de princípios euclidianos, a das κοινὰ ἔννοιαι (*Comentário*, 196-197).

Na opinião de Proclo, todas essas adições de Papo são inapropriadas em virtude do fato de que todas elas são consequências de princípios e definições previamente assumidos. Inclusive, o *Comentário*, a obra de referência desse importantíssimo autor, foi composta também como uma crítica aos matemáticos anteriormente discutidos. Ele critica Apolônio por tentar fornecer demonstrações aos axiomas (ou seja, às noções comuns), numa clara contradição ao método aristotélico de separação entre o *postulado*, que se assume por *convencimento*, e o *axioma* (ou *noção comum*), que se assume por *clareza* (*Comentário*, 183). Também aponta falhas lógicas no argumento de Ptolomeu para a validade do postulado das paralelas como um teorema (*Comentário*, 368) e afirma a excessividade da parcimônia de Herão (*Comentário*, 196) e da ingênua liberalidade de Papo (*Comentário*, 196-198) na elaboração de novas listas de noções comuns a partir da lista euclidiana original. Posto que as visões de todos esses autores se fundamentam em posições filosóficas relacionadas aos conceitos de axioma e de postulado, por exemplo, o *Comentário* de Proclo é verdadeiramente um testemunho da Filosofia da Matemática até então desenvolvida e um comentário crítico muitíssimo robusto da matemática euclidiana. Seria impossível esgotar a crítica de Proclo nas páginas desse trabalho, pois uma análise detalhada de seu trabalho poderia ser alvo de um livro inteiro.

Proclo é o último personagem de interesse para o enfoque dessa pesquisa. É, portanto, importante mencionar pelo menos um aspecto da sua crítica: sua tentativa de demonstrar o postulado das paralelas. Proclo protagoniza, assim, o terceiro e último episódio da história da crítica à teoria euclidiana das paralelas. Assim como era o caso de Ptolomeu, sua demonstração também sobreviveu. Está conservada em *Comentário*, 369-373. Uma representação simplificada e vertida em linguagem moderna pode ser encontrada em Barbosa (2007, p. 19-20) e Freitas Júnior e Cavalari (2013, p. 6-7); outra representação comentada pode ser encontrada em Heath (1908b, p. 206-208). Assim como era o caso de Ptolomeu, a demonstração de Proclo já foi discutida largamente. As leituras acima indicadas são suficientes para a compreensão das falhas lógicas em seus argumentos.

A GEOMETRIA EUCLIDIANA COMO OBJETO DO CONHECIMENTO HUMANO

Já é parte do entendimento comum que a *geometria euclidiana* hoje estudada não é a mesma geometria que concebeu Euclides em seu *Os Elementos*. Já existem trabalhos, como Freitas e Lübeck (2021), que se ocupam de discutir essas diferenças. Pouco, no entanto, se percebe que esta mesma geometria foi concebida por meio de diversos olhares mesmo na Antiguidade Clássica, por matemáticos imediatamente posteriores a Euclides.

Por exemplo, a preferência de Euclides por construir sua teoria das paralelas com base na definição do *paralelismo* como a não intersecção entre duas retas e a opção de Possidônio por definir o

mesmo fenômeno a partir da noção de equidistância configuram duas formas possíveis de se conceber a caracterização fundamental da *geometria euclidiana*. Por Euclides, é o postulado das paralelas que *forma* o espaço euclidiano; por outro lado, seguindo a interpretação de Possidônio, deveria ser, em seu lugar, a existência de um par de retas equidistantes a desempenhar o mesmo papel.

Essa multiplicidade de olhares e a constituição desse ambiente receptor da axiomática euclidiana como eminentemente crítico e revisionista permitem a visão da geometria euclidiana como um conhecimento humano, construído a partir de um processo histórico. Este conhecimento avança *evolutiva e geneticamente*, segundo a interpretação peirceana (Monteiro, 2021; Clímaco *et al.*, 2024): o *gene* é a axiomática proposta pela primeira vez no primeiro manuscrito d’*Os Elementos* que produziu Euclides por volta de 300 a. C., pois é de lá que vem o postulado das paralelas, fundante da concepção mais nuclear do que é a geometria euclidiana (Heath, 1921a, p. 339); a *evolução* se dá na crítica, na reavaliação, nos comentários e nas revisões dos vários matemáticos por quem passou este texto.

Compreendendo-se o processo dialógico de construção da geometria euclidiana e da interação semiótica dos sujeitos matemáticos com ela, ressalta-se a concepção epistemológica que põe em relevo o papel da subjetividade na *construção* do conhecimento. A geometria, desse modo, se desvela como inacabada, como uma área em constante evolução, mas cuja história genética revela o que é este objeto de que aqui se fala. A consequência é o olhar para o conhecimento dos objetos geométricos como um processo de aprendizagem, de interpretação e de apreensão dos significados.

Este trabalho, portanto, ao buscar uma melhor compreensão histórica acerca do fenômeno da evolução da geometria euclidiana, se conclui também com contribuições interessantes para a prática pedagógica. Pois ele insere uma compreensão filosófica acerca dos objetos matemáticos que, no diálogo com as várias outras concepções possíveis, implica (seja consciente ou inconscientemente) numa visão particular de Educação Matemática que orienta determinadas práticas de ensino (Thom, 1973).

Assim, como objeto histórico, o texto de Euclides pode ser entendido não como aquele modelo consagrado de procedimento matemático conforme concebe Freudenthal (1977, p. 191), mas como um documento, que nunca passou pelas mãos da comunidade matemática sem que a arte dos comentários dele criticamente partisse para a construção cada vez mais robusta desta área do conhecimento que nos tempos presentes se chama *geometria euclidiana*. E, na qualidade de objeto do conhecimento estudado até os dias atuais, a geometria pode passar a ser vista não apenas como um conjunto de teoremas e de resoluções de problemas, ou como uma descrição do espaço real, ou, ainda, como um conjunto sem significado de fórmulas e símbolos; mas, também, como um conhecimento humanamente construído a partir de um processo dinâmico e vivo, envolvendo várias fases e níveis de compreensão humana (Monteiro, 2021).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao desvincular o estudo da história da crítica à axiomática euclidiana da história das chamadas geometrias não euclidianas, este trabalho se volta exclusivamente para a revisão do processo histórico relacionado a fundamentação da geometria euclidiana. Neste sentido, procurou-se responder, segundo o ponto de vista semiótico, o que é a *geometria euclidiana*. A análise deste trabalho permite ver que até mesmo a delimitação de uma lista original de princípios euclidianos é uma tarefa complicada diante do sem-número de transformações sugeridas pelos comentadores e matemá-

ticos que estudaram ativamente a *geometria euclidiana*. Através de uma perspectiva semiótica, se pôde interpretar as transformações reveladas pelo levantamento bibliográfico como um processo evolutivo pelo qual passou a geometria euclidiana.

Uma importante consequência da análise aqui presente foi a influência que a interpretação semiótica da história da geometria euclidiana, a partir da qual ela é concebida como conhecimento humanamente produzido, pode exercer sobre a prática pedagógica nas salas de aula de matemática.

Duas linhas de pesquisa podem ampliar os resultados aqui obtidos. Uma seria a avaliação dos escritos matemáticos de Apolônio, Ptolomeu, Herão, Papo e Proclo (*Cônicas*, *Almagesto*, *Coleção*, entre outros), pois não só a crítica à axiomática é suficiente para a compreensão de toda a geometria; abordagens demonstrativas, opções linguísticas e simbólicas, entre outras, por exemplo, são importantes aspectos do trabalho matemático do geômetra. Uma averiguação mais pormenorizada desses detalhes poderia revelar ainda mais nuances da história evolutiva da geometria euclidiana.

Outra linha estaria relacionada à investigação acerca de quais são as implicações de se assumir um posicionamento filosófico alinhado com a teoria peirceana na sala de aula. Quais seriam os ganhos e os desafios de um trabalho orientado segundo uma perspectiva semiótica e da metodologia que dela surge, a complementaridade otteana?

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG).

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.
- ARISTÓTELES. **Posterior Analytics**. Tradução de E. S. Bouchier. Oxford: B. H. Blackwell, 1901.
- BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- BICUDO, Irineu. Histórias Paralelas: O V Postulado de Euclides e o Axioma da Escolha. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [s. l.], v. 5, n. 9, p. 5-17, abr./set. 2005. DOI: [10.47976/RBHM2005v5n905-17](https://doi.org/10.47976/RBHM2005v5n905-17).
- BONGIOVANNI, Vincenzo. Euclides, Hilbert e Birkhoff: História da geometria e do seu ensino. In: Seminário Nacional de História da Matemática–SNHM, 7., 2007, Guarapuava. **Anais [...]**. Guarapuava: Unicentro, 2007. p. 19-35.
- CLÍMACO, Humberto de Assis; PAULA, Jacqueline Borges de; SANTANA, Geslane Figueiredo da Silva. Metodologia de Pesquisa em Educação Matemática: Complementaridade Otteana baseada na Semiótica. **Revista Pesquisa Qualitativa**, São Paulo, v. 12, n. 31, p. 190-217, maio/ago. 2024. DOI: [10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666](https://doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666).
- DE RISI, Vincenzo. The development of Euclidean axiomatics: The systems of principles and the foundations of mathematics in editions of the *Elements* in Early Modern Age. **Archive for History of Exact Sciences**, [s. l.], v. 70, n. 6, p. 591-676, fev. 2016. DOI: [10.1007/s00407-015-0173-9](https://doi.org/10.1007/s00407-015-0173-9).

EUCLIDES. *Euclidis Elementa*. In: HEIBERG, Johan Ludvig (ed.); MENGE, Heinrich (ed.). **Euclidis Opera Omnia**. Leipzig, Teubner, 1883-1888. 4. v.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FOWLER, David. **The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction**. 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 1999.

FREITAS, Gabriela Daiani de; LÜBECK, Kelly Roberta Mazzutti. A axiomática de Euclides e Hilbert: Apontamentos históricos e considerações. In: Seminário Nacional de História da Matemática, 14., 2021, Uberaba. **Anais [...]** Uberaba: UFTM, 2021. p. 338-353.

FREITAS JÚNIOR, Francisco de Assis; CAVALARI, Mariana Feiteiro. Um estudo histórico de algumas tentativas de demonstração do quinto postulado de Euclides de Alexandria. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 10., 2013, Campinas. **Anais eletrônicos [...]** [s. l.]: [s. n.], 2013. Disponível em: <https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/article/view/42>. Acesso em: 28 out 2024.

FREUDENTHAL, Hans. What is Algebra and What has it been in History? **Archive for History of Exact Sciences**, [s. l.] v. 16, n. 3, p. 189-200, jan. 1977. DOI: [10.1007/BF00328154](https://doi.org/10.1007/BF00328154).

HEATH, Thomas Little. **A History of Greek Mathematics**. Oxford: Clarendon Press, 1921a, v. 1.

HEATH, Thomas Little. **A History of Greek Mathematics**. Oxford: Clarendon Press, 1921b, v. 2.

HEATH, Thomas Little. Introduction. In: EUCLIDES. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Tradução de Sir Thomas Little Heath. Cambridge: Cambridge University Press, 1908a. v. 1. p. 1-151.

HEATH, Thomas Little. Noteworthy attempts to prove the Postulate. In: EUCLIDES. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Tradução de Sir Thomas Little Heath. Cambridge: Cambridge University Press, 1908b. v. 1. p. 204-219.

KNORR, Wilbur Richard. On Heiberg's Euclid. **Science in Context**, [s. l.], v. 14, n. 1-2, p. 113-143, jun. 2001. DOI: [10.1017/S0269889701000059](https://doi.org/10.1017/S0269889701000059).

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Maria de Andrade. **Fundamentos da Metodologia Científica**. São Paulo: Atlas, 2003.

MONTEIRO, Lúcia Cristina Silveira. **Semiótica na didática da matemática: interpretações das interpretações das interpretações....** 1. ed. Curitiba: Appris, 2021.

MONTOITO, Rafael. Por Que Tardaram a Aparecer as Geometrias Não-Euclidianas?. In: Seminário Nacional de História da Matemática-SNHM, 9., 2011, Aracaju. **Anais [...]** [s. l.]: [s. n.], 2011. Disponível em: https://www.crephimat.com.br/visor_anais.php?id_t=9&tbl=snhm. Acesso em: 28 out 2024.

NASCIMENTO, Anna Karla Silva do. Um breve percurso histórico desde a geometria euclidiana até as geometrias não-euclidianas. In: Seminário Nacional de História da Matemática, 14., 2021, Uberaba. **Anais [...]** Uberaba: UFTM, 2021. p. 576-591.

PRADO, Ana Lia do Amaral de Almeida. Normas para a transliteração de termos e textos em grego antigo. **Revista Brasileira de Estudos Clássicos**, [s. l.] v. 19, n. 2, p. 298-299, 2006. DOI: [10.24277/classica.v19i2.123](https://doi.org/10.24277/classica.v19i2.123).

PROCLO. **A Commentary on the First Book of Euclid's Elements**. Tradução de Glenn R. Morrow. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 1992.

SZABÓ, Árpád. **The beginnings of Greek mathematics**. Tradução de A. M. Ungar. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1978.

THOM, René. Modern Mathematics: does it exist? In: HOWSON, Albert Geoffrey (ed.). **Developments in Mathematical Education**. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. p. 194-210. DOI: [10.1017/CBO9781139013536.011](https://doi.org/10.1017/CBO9781139013536.011).

UNGURU, Sabetai. On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics. **Archive for History of Exact Sciences**, [s. l.], v. 15, n. 1, p. 67-114, dez. 1975. DOI: [10.1007/BF00327233](https://doi.org/10.1007/BF00327233).

UNGURU, Sabetai; ROWE, David E. Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of “Geometric Algebra”, “Application of Areas”, and Related Problems. **Libertas Mathematica**, [s. l.] v. 1, p. 1-49, 1981. DOI: [10.14510%2Fflm.v1i0.354](https://doi.org/10.14510%2Fflm.v1i0.354).

UNGURU, Sabetai; ROWE, David E. Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of “Geometric Algebra”, “Application of Areas”, and Related Problems. **Libertas Mathematica**, [s. l.], v. 2, p. 1-62, 1982. DOI: [10.14510%2Fflm.v2i0.710](https://doi.org/10.14510%2Fflm.v2i0.710).

WILCK, Benjamin. Euclid's Kinds and (Their) Attributes. **History of Philosophy & Logical Analysis**, [s. l.] v. 23, n. 2, p. 362-397, dez. 2020. DOI: [10.30965/26664275-02302005](https://doi.org/10.30965/26664275-02302005).

WITTER, Geraldina Porto. Pesquisa bibliográfica, pesquisa documental e busca de informação. **Estudos de Psicologia**, [s. l.], v. 7, n. 1, p. 5-30, jan./jul. 1990.