

Leibniz e Huygens: correspondências de 1691 sobre equações diferenciais separáveis

Leibniz and Huygens: correspondences from 1691 about separable differential equations

Anna Karla Silva do Nascimento¹  

Universidade Federal do Cariri – UFCA

Iran Abreu Mendes²  

Universidade Federal do Pará – UFPA

RESUMO

O artigo trata sobre parte da investigação feita no doutorado, na qual aborda um intercâmbio intelectual entre Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) e Christiaan Huygens (1629-1695), em que se analisou quatro cartas trocadas entre eles no início de 1691. O objetivo é apresentar algumas discussões presentes nas correspondências que influenciaram a resolução de problemas de curvas, a partir de Equações Diferenciais com suas soluções gerais ou particulares. A investigação se concentra na forma como as correspondências contribuíram para o desenvolvimento das Equações Diferenciais, especialmente o método das separáveis. O estudo contextualiza diálogos científicos dentro do cenário sociocultural do século XVII e destaca como a comunicação de ideias por meio de trocas epistolares também contribuiu para o progresso matemático. Além de problemas matemáticos, como curvas e resistência do ar, elas apontam questões filosóficas e científicas, na quais revelava uma dinâmica colaborativa entre os dois estudiosos, embora houvesse divergências interpretativas. A metodologia é baseada em uma abordagem qualitativa, utilizando a técnica da análise de conteúdo para interpretar os documentos, bem como analisar as contribuições das discussões para o desenvolvimento das Equações Diferenciais. Como resultados, foram observadas a importância das soluções gerais e particulares dessas Equações Diferenciais, além de demonstrar como as correspondências entre Leibniz e Huygens ajudaram a consolidar conceitos fundamentais para o cálculo diferencial e a modelagem de fenômenos naturais. Conclui-se que as cartas registraram progressos científicos, assim como ilustraram como o pensamento matemático da época estava associado à filosofia natural e à observação empírica, que fortaleceu a matemática moderna.

Palavras-chave: História da Matemática; Equações Diferenciais; Método das Separáveis; Correspondências científicas; Desenvolvimento matemático.

ABSTRACT

The article addresses part of the research conducted during the doctoral studies, focusing on an intellectual exchange between Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) and Christiaan Huygens (1629–1695). It analyzes four letters exchanged between them at the beginning of 1691. The objective is to present some discussions contained in these correspondences that influenced the resolution of problems related to curves, based on Differential Equations and their general or particular solutions. The investigation focuses on how these correspondences contributed to the development of Differential Equations, particularly the method of separation of variables. The study contextualizes scientific dialogues within the sociocultural framework of the 17th century, highlighting how the exchange of ideas through letters also fostered mathematical progress. In addition to mathematical problems such as curves and air resistance, these letters address philosophical and scientific issues, revealing a collaborative dynamic between the two scholars, despite interpretative differences. The methodology is based on a qualitative approach, employing content analysis techniques to interpret the documents and investigate the contributions of these discussions to the advancement of Differential Equations. The results highlight the importance of general and particular solutions of these equations and demonstrate how the correspondence between Leibniz and Huygens helped consolidate fundamental concepts of differential calculus and the modeling of natural phenomena. It is concluded that the letters not only recorded scientific progress but

¹ Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora Adjunta da Universidade Federal do Cariri (UFCA), Brejo Santo, Ceará, Brasil. E-mail: karla.nascimento@ufca.edu.br.

² Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor Titular da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. E-mail: iamendes1@gmail.com.

also illustrated how the mathematical thought of the time was intrinsically linked to natural philosophy and empirical observation, which strengthened the foundations of modern mathematics.

Keywords: History of Mathematics; Differential Equations; Method of Separables; Scientific Correspondence; Mathematical Development.

INTRODUÇÃO

As cartas têm sido utilizadas como meio de comunicação ao longo dos séculos para trocar informações, expressar sentimentos, conduzir negócios, assim como para uma série de outros propósitos, como discussões científicas que contribuíram para o desenvolvimento matemático. Esse episódio aconteceu em diversos momentos da história, dos quais ressaltamos o recorte temporal do final do século XVII quando pesquisadores como Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) e Christiaan Huygens (1629-1695) se correspondiam frequentemente.

As correspondências ocorriam devido à necessidade dos estudiosos de discutirem o conhecimento científico e manterem-se conectados à rede de informações que circulava pela Europa. Pesquisadores da Inglaterra, Prússia, Berlim, Suíça, bem como outras localidades da Europa mantinham-lhes essa comunicação ativa, de modo que houvesse uma interlocução contínua de ideias e descobertas.

Diante das discussões mobilizadas nas cartas, destacamos quatro delas trocadas entre Huygens e Leibniz, datadas entre janeiro e abril de 1691, de modo a interpretar/esclarecer seus pensamentos/ideias referentes ao estudo das Equações Diferenciais, bem como a maneira de resolvê-las e apresentá-las por meio de soluções. O estudo nos permitiu encontrar o método das separáveis utilizado para resolver os problemas da época.

O conteúdo abordado é bastante variado, pois abrange questões sobre marés, exponenciais e longas discussões sobre curvas, que eram observadas em problemas da Filosofia Natural. Este último tema é amplamente discutido neste trabalho, pois as observações enfatizadas dizem respeito a estudos de Equações Diferenciais, que, geometricamente, podem ser representadas por meio de curvas.

Dado que o estudo é protagonizado pelo estudo de curvas que resultavam em Equações Diferenciais, bem como possíveis soluções que Leibniz indicava. Norteamos-nos pela seguinte questão: Qual a relação dessas cartas com a discussão sobre as Equações Diferenciais, sobretudo, o método das separáveis?

O objetivo é apresentar algumas discussões presentes nas correspondências que contribuíram para a resolução de problemas de curvas, a partir de Equações Diferenciais com suas soluções gerais ou particulares. Previamente, informamos que algumas dessas soluções apontavam, por meio de parâmetros, valores pontuais a serem resolvidos.

Para esclarecer sobre a maneira que a pesquisa foi conduzida, apresentamos na próxima seção os procedimentos metodológicos adotados, detalhando o tipo de pesquisa, análise e interpretação, bem como as ferramentas e técnicas utilizadas ao longo do processo investigativo.

METODOLOGIA

Esta pesquisa analisou quatro cartas trocadas entre Leibniz e Huygens durante os primeiros meses de 1691, as quais abordavam assuntos diversos, entre eles questões científicas, enfatizando o estudo de curvas, discussões sobre Equações Diferenciais e suas peculiaridades. Escritas em francês, e disponibilizadas atualmente online, elas fornecem discussões sobre fenômenos que permitiram a observação de curvas gerando Equações Diferenciais.

Optamos pela realização de uma pesquisa de abordagem qualitativa, apropriada para investigar aspectos sociais e históricos, dada a natureza dos documentos do século XVII, que refletem sociedades distintas da atual. Essa escolha metodológica permitiu o aprofundamento da compreensão dos contextos históricos que influenciaram o desenvolvimento dos métodos de resolução das Equações Diferenciais.

A perspectiva mencionada alinha-se ao pensamento de Laville e Dionne (1999, p. 227), pois “[...] essa estratégia supõe a presença de uma teoria sobre a qual o pesquisador apoia-se para imaginar um modelo do fenômeno ou da situação em estudo”. Os autores julgam relevante que os estudiosos tenham embasamento conceitual para a elaboração da representação do fenômeno em análise a partir do tipo de pesquisa escolhido.

No que se refere ao objetivo, a pesquisa é classificada como exploratória e descritiva. Segundo Gil (2008), a abordagem exploratória oferece um panorama amplo do tema abordado, o que é, nesse caso, de suma relevância, considerando os poucos trabalhos existentes sobre investigações históricas das Equações Diferenciais. E a pesquisa se caracteriza como descritiva porque o conteúdo das cartas é observado, registrado e analisado, com vistas a identificar nesses documentos Equações Diferenciais, soluções e informações sobre curvas. Além disso, ela ainda assume um caráter documental e bibliográfico, envolvendo o levantamento de fontes primárias para uma análise do desenvolvimento matemático e científico no período em questão.

Diante dessas considerações, a técnica adotada foi a análise de conteúdo, proposta por Bardin (2016), para a averiguar as fontes primárias, uma vez que se torna relevante para compreender o momento histórico em que as cartas foram escritas, assim como o processo de desenvolvimento matemático, alinhando-se ao objetivo da pesquisa.

Na primeira etapa da Análise de Conteúdo — a Pré-análise —, realizou-se, inicialmente, uma leitura flutuante do material para uma compreensão panorâmica do conteúdo. Foram encontradas algumas fontes primárias relacionadas à questão norteadora, incluindo textos sobre Equações Diferenciais e métodos de resolução. Em seguida, foram selecionadas bibliografias que orientaram os objetivos da pesquisa, gerando hipóteses iniciais.

A escolha dos documentos, correspondências, foi realizada mediante sua leitura e tradução. Essas fontes forneceram insights sobre estudiosos do século XVII e seu papel no desenvolvimento das Equações Diferenciais e métodos de resolução. A análise de conteúdo inicial foi concluída a partir da utilização dessas fontes primárias para a categorização e interpretação do conteúdo, contribuindo para o progresso da pesquisa.

A segunda etapa, que compreende a exploração do material, envolve a categorização dos textos, a fim de identificar padrões. Ao longo dela, os documentos foram classificados com vistas a

organizar o conteúdo de forma sistemática, permitindo sua divisão em subtemas. A categorização e a codificação dos elementos dos textos escolhidos como fontes primárias para a pesquisa buscam levantar informações relevantes para responder à questão norteadora.

A análise inicial incluiu a codificação conjunta das correspondências entre Leibniz e Huygens, com a catalogação de elementos relacionados aos problemas que motivaram buscar informações sobre as Equações Diferenciais, assim como o método de resolução das separáveis. A terceira etapa da Análise de Conteúdo, que é o tratamento dos dados, está delineada na tese referenciada Nascimento (2024), acompanhada das discussões acerca da análise epistemológica retratada.

CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DO DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Na tentativa de explicar o desenvolvimento das Equações Diferenciais na Europa, julgamos importante examinar o contexto histórico em que elas estavam inseridas para apontar algumas motivações que provocaram descobertas matemáticas capazes de solucionar problemas do século XVII. Para isso, fizemos uso da História da Matemática para compreender os problemas daquele período que culminaram com a evolução da temática, bem como a formulação de novas ferramentas capazes de solucioná-los. A seguir, a Figura 1 apresenta parte do mapa europeu que explicita lugares em que Leibniz e Huygens viveram.

Figura 1 – Mapa continente europeu



Fonte: Nascimento (2024)

A Figura 1 apresenta o mapa de parte do continente europeu que são os lugares de origem de Leibniz e Huygens, Leipzig e Amsterdã, respectivamente, além de Paris que foi a cidade que eles se conheceram. Ambos transitavam por cidades que permitia a troca de informações acerca do que era pesquisado, assim como fortalecia a rede de contatos.

Ao resgarmos essa história das Equações Diferenciais, procuramos analisar as circunstâncias em que elas estavam inseridas, dado que, tal como defende Mendes (2015), é importante considerar aspectos históricos a fim de contextualizar o desenvolvimento matemático. Para o autor, “as práticas socioculturais ao longo de toda a nossa história humana, os problemas surgem e os grupos sociais,

em todas as suas formas de organização, tentam responder às questões evidenciadas por tais problemas” (Mendes, 2015, p. 62).

Nessa linha, as práticas socioculturais explicam o pensamento utilizado pelos grupos sociais durante a escolha do caminho a ser seguido, ao justificarem, de maneira contextualizada, a abordagem utilizada para responder aos problemas em aberto. Diante dessa compreensão, reportar-nos-emos à Idade Moderna, que, devido a alguns movimentos, como o Renascentista, segundo Alfonso-Goldfarb (1994, p. 76), foi “[...] um período de redescoberta da cultura clássica e de novas culturas”. A autora considera que essa época marcou avanços culturais, no que se inclui a valorização da cultura clássica e a exploração de novas perspectivas culturais. No entanto, podemos enfatizar que o progresso científico também protagonizou o período, sobretudo a busca pelo conhecimento científico.

Vale salientar que havia a necessidade de discutir assuntos do campo acadêmico, como o científico, porém muitos deles não eram permitidos nos ambientes universitários. Diante dessa necessidade, surgiram as academias — como a Royale des Sciences, em Paris (1666) —, que eram locais em que temas como arte, literatura, filosofia, ciência e política eram questionados livremente, pois ofereciam um ambiente intelectual propício à discussão das ideias e à promoção do conhecimento.

Nesse contexto, Burke (2003, p. 37) retrata que “[...] grupos estabelecidos há mais tempo tendiam a ser hostis às novas ideias, numa nova espécie de instituição que criaram para si mesmos, a ‘academia’”, porém as instituições mais jovens tendiam a ser mais abertas, como a universidade de Leiden. Apesar dos impasses, consideramos que o Humanismo e as academias contribuíram na ascensão do pensamento crítico, na valorização da cultura clássica e na transição de ideais advindos do período medieval para uma mentalidade mais moderna na Europa.

Outros movimentos de comunicação e informação que aconteceram na Idade Moderna são jornais, periódicos e bibliotecas, no século XVII, que proporcionou espaços para a troca e discussão dos conhecimentos produzidos. As cartas também ganharam destaque nesse cenário, pois foi importante como meio de comunicação pessoal entre os eruditos, tal como entre as revistas científicas, que surgiram com a finalidade de divulgar os temas discutidos entre os estudiosos — apresentando artigos que resumiam os processos de investigação em andamento.

Esses meios de comunicação também impactaram as matemáticas, uma vez que os trabalhos publicados e/ou as cartas trocadas entre os estudiosos discutiam e repercutiam problemas que emergiam por meio de observações e questionamentos gerados para compreender o funcionamento do universo. Vale salientar que cartas e periódicos foram fontes que também contribuíram com o desenvolvimento de métodos de resolução de Equações Diferenciais.

As correspondências permitiam que estudiosos divulgassem seu conhecimento, com informações de resultados de pesquisas, propostas de novas teorias, resolução de problemas em conjunto etc. Elas facilitavam o intercâmbio de informações, além da promoção do trabalho colaborativo que contribuía para o avanço do conhecimento matemático e científico.

As discussões que proporcionavam chegar a resultados mostraram que, segundo Rossi (2001, p. 27), a “[...] ciência moderna não nasceu no campo da generalização de observações empíricas, mas no terreno de uma análise capaz de abstrações”. Esses conceitos abstratos foram capazes de justificar os fenômenos naturais por meio de conceitos físicos, os quais Rossi (2001, p. 27) denominou “matematização da física”.

A matematização da física, conforme mencionado pelo autor, contribuiu com uma compreensão matemática, ao revelar os fatos narrados pela própria natureza, impulsionando, assim, descobertas e avanços. Essa integração foi importante para a ciência, como exemplificado pelos modelos de Equações Diferenciais que explicam os fenômenos naturais. Vale salientar que segundo Rossi (Rossi, 2001),

[...] a nova matemática que vem consolidando-se entre a primeira metade do século XVII e o começo do XVIII é sem dúvida o mais poderoso instrumento teórico que tenha sido construído pelos seres humanos no decorrer da história” (Rossi, 2001, p. 252).

Para o autor, a matemática formalizada entre os séculos XVII e XVIII foi uma ferramenta muito influente para o desenvolvimento científico, sendo uma realização intelectual da humanidade. Mediante o propósito de compreender a matemática detentora de instrumentos teóricos importantes para aquela época, buscamos assimilar o processo que conduziu Leibniz, em 1684, a explicitar em um artigo — em uma publicação que tratava sobre máximos e mínimos, ou seja, tópico correspondente ao Cálculo Diferencial — uma Equação Diferencial.

Nesse contexto, Nascimento (2024) defende que o desenvolvimento do cálculo infinitesimal deu suporte para que os problemas relativos aos fenômenos da natureza fossem solucionados e os que, até aquele momento, estavam em aberto fossem resolvidos. Por consequência do desenvolvimento científico, novos questionamentos apareciam, gerando mais problemas em aberto, como aqueles voltados para a observação do vento, da luz ou até mesmo do movimento de uma partícula.

Destacamos que Leibniz introduziu o termo Equação Diferencial na comunidade científica, fato que ocorreu no periódico *Acta Eruditorum*, no ano de 1684. À época, ele a descreveu como uma expressão composta por igualdades e letras. Hoje, conforme Zill (2016, p. 2), a Equação Diferencial é definida como uma expressão matemática que “[...] contém derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais funções não conhecidas (ou variáveis dependentes), em relação a uma ou mais variáveis independentes”.

A definição apresentada reflete os estudos atuais sobre Equações Diferenciais, considerando o progresso da compreensão desse conceito que proporcionou a construção de uma linguagem mais precisa para descrever modelos matemáticos e nominá-los, bem como estabeleceu as bases para um universo que se formou com o progresso do tema, que era um dos objetivos de Leibniz, a constituição da linguagem universal. Assim, testemunhamos o surgimento de uma disciplina que teve origem na resolução de questões matemáticas e físicas, porém que agora se estende a generalizações abrangentes.

Na próxima seção, daremos continuidade ao relato histórico acerca do desenvolvimento das Equações Diferenciais, dando ênfase às discussões existentes nas correspondências realizadas entre Huygens e Leibniz.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SEPARÁVEIS

As cartas, conforme visto anteriormente, foram importantes meios de comunicação que promoveram a divulgação científica que também contribuíram para o desenvolvimento das Equações

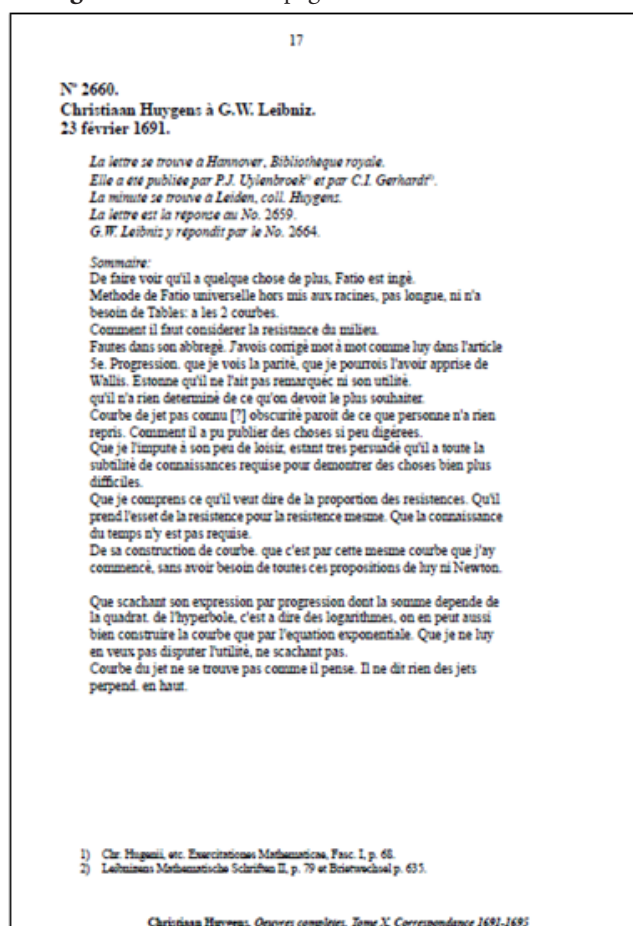
Diferenciais, que se constituíram como ferramentas na modelagem e análise de fenômenos na matemática, ciência e engenharia.

Diante disso, iniciamos as discussões dos correspondentes pela carta enviada por Huygens no dia 23/02/1691, cujo conteúdo foi iniciado com um desabafo no qual expressou descontentamento devido aos desentendimentos recorrentes com Leibniz, principalmente em relação à interpretação das discussões relatadas em cartas anteriores sobre resistência: Huygens a via como perda de velocidade, enquanto Leibniz a considerava como pressão do meio.

No entanto, em seguida, ele reconheceu semelhanças entre seus estudos sobre a quadratura da hipérbole e a solução de Leibniz com logaritmos, ao finalizar a carta expressou o desejo de reencontrar o amigo em breve.

A seguir, na Figura 2, apresentamos um modelo de carta disponibilizado nos sites que armazenam informações acerca da vida e obra de Christiaan Huygens, como o Biblioteca Digital de Literatura Holandesa (DBNL)³.

Figura 2 – Modelo de página inicial da carta analisada



Fonte: Huygens (1905, p. 17)

³ Site que estão armazenadas as cartas que Christiaan Huygens. Disponível em: <<https://www.dbnl.org/>>. Acesso em: 14 outubro 2024.

O modelo de carta disponibilizada na Figura 2 foi escrita por Christiaan Huygens, datada de 02 de fevereiro de 1691. Nessa página, identificamos discussão sobre conceitos de resistência de materiais e métodos para resolução de equações, além da citação de pesquisadores que Huygens se comunicava. O documento seguinte é uma resposta de Leibniz que veio alguns dias depois, mais precisamente na carta com data de 02/03/1691. Inicialmente, ele, reconheceu o ato falho e expressou arrependimento por ter mencionado que Huygens suspeitava de suas posições, pedindo desculpas pelo equívoco. Essa atitude de Leibniz reforça a afirmação de Martins (2006, p. 22), ao argumentar que,

A ciência não brota pronta, na cabeça de “grandes gênios”. Muitas vezes, as teorias que aceitamos hoje foram propostas de forma confusa, com muitas falhas, sem possuir uma base observacional e experimental. Apenas gradualmente as ideias vão sendo aperfeiçoadas, através de debates e críticas, que muitas vezes transformam totalmente os conceitos iniciais.

O autor compartilhou da ideia de que a ciência não surge pronta para os pesquisadores, mas muitas vezes é proposta de forma confusa, com falhas e sem uma base observacional e experimental sólida. A evolução das ideias acontece gradualmente, por meio de observações, questionamentos, discussões e críticas, capazes de transformar os conceitos iniciais, de modo que essa perspectiva aponte o desenvolvimento dinâmico da natureza e o progresso constante do conhecimento científico.

A carta prosseguiu com a retomada da discussão sobre resistência do ar em relação à velocidade de um corpo. Incluiu também breves comentários sobre assuntos científicos e filosóficos, dos quais destacou a variação da agulha magnética, paralelas, leis da mola, exponenciais, magnetismo, isocronismo, o problema das marés, iniciado por Descartes e continuado por outros pesquisadores.

No que se refere às curvas, Leibniz citou as geradas por meio de Equações Diferenciais e que várias delas satisfazem uma equação. Nesse caso, chamamos atualmente de família de curvas, devido à semelhança das características. Para concluir, ele percebeu que encontrava soluções particulares para uma Equação Diferencial, porque sempre que resolvia os problemas, constituía uma quantidade C , que chamamos de constante real.

Com isso, para todo C real, há uma função correspondente que chamamos de solução particular. Para esse caso, Leibniz considerou a Equação Diferencial (1) que está disposta na nota de rodapé da carta, ou seja, não encontramos no corpo do texto. Porém, ao resolvê-la, verificamos que suas soluções coincidem com a descrita na (1) correspondência $ax \, dx = y\sqrt{aa - xx}dy$

No texto original, está na sexta nota de rodapé da seguinte forma,

De fato, a solução geral do problema, que equivale à integração da equação diferencial $ax \, dx = y\sqrt{aa - xx}dy$, pode ser escrita: $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - Cy^2 + C^2$. Leva, portanto, para $C = a^2$, à segunda das equações mencionadas por Leibniz, e, para $C=0$ à primeira, após a correção que Leibniz lhe trouxe em sua Carta de 20 de abril de 1691 (Huygens, 1905, p. 50, tradução nossa)⁴.

⁴ “En effet, la solution générale du problème, qui revient à l’intégration de l’équation différentielle $ax \, dx = y\sqrt{aa - xx}dy$ peut s’écrire: $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - Cy^2 + C^2$. Elle conduit donc, pour $C = a^2$, à la seconde des équations mentionnées par Leibniz, et, pour $C=0$ à la première, après la correction que Leibniz y apporta dans sa Lettre du 20 avril 1691” (Huygens, 1905, p. 50).

A citação anterior apresenta a Equação Diferencial cuja resolução supomos que foi realizada por meio da utilização do método das separáveis, como denominamos atualmente. Logo, para resolvê-la, basta isolar as variáveis (nomenclatura utilizada atualmente), ou seja, dada uma função $y = f(x)$, a variável y será colocada em um membro e a variável x , colocada no outro. Após isso, o passo seguinte é o cálculo da integração de ambos os membros para encontrar a solução geral da Equação Diferencial.

Observemos que a notação utilizada por Leibniz difere daquela que usualmente é trabalhada nos livros de Equações Diferenciais Ordinárias; porém, podemos trazer para a forma de escrita aplicada. Vejamos a Equação Diferencial e sua solução, pelo método das separáveis, como tratamos nos dias de hoje:

$$ax \, dx = y\sqrt{a^2 - x^2} \, dy \quad (2)$$

Iniciando a resolução desta Equação Diferencial, utilizaremos o método das separáveis, para isso, isolaremos as variáveis em seus respectivos membros.

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = y dy \quad (3)$$

Integrando ambos os membros $\int \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int y dy \quad (4)$

A integral do primeiro membro pode ser resolvida pela técnica da substituição de variáveis e do segundo, por meio da integral de um polinômio. Verificamos que o resultado é: .

$$-a\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{y^2}{2} + C \quad (5)$$

A solução geral, de modo que ambos os membros sejam elevados ao quadrado é: .

$$a^4 - a^2 x^2 = \frac{1}{4} y^4 - C y^2 + C^2 \quad (6)$$

A expressão (6) é a representação da solução geral da Equação Diferencial apresentada inicialmente em (1). Como pode ser observado, ela gerou constantes C , conforme discutido por Leibniz para mostrar que, ao atribuir valores distintos a essa constante, obtêm-se curvas distintas, mas que são soluções da equação inicial.

Um elemento proeminente nas correspondências foram as revelações de discussões significativas sobre matemática e filosofia natural com uma consonância interessante na busca comum por soluções matemáticas e geométricas, pois os pesquisadores estavam interessados em resolver problemas matemáticos complexos, como o cálculo de áreas e a identificação das curvas. Essa busca pela resolução de questões matemáticas demonstrou a convergência de seus objetivos intelectuais.

Também foi observado que as cartas refletem a inventividade de Huygens e Leibniz na busca por soluções matemáticas e científicas, bem como sua capacidade de pensar de forma criativa para resolver problemas e colaborar de maneira produtiva, mesmo em meio a divergências conceituais. Isso pode ser percebido quando Huygens reconheceu uma relação entre a quadratura da hipérbole que desenvolveu com a solução logarítmica feita por Leibniz, revelando uma abordagem criativa para compreender e relacionar diferentes conceitos matemáticos.

O diálogo por correspondências continuou e Huygens respondeu a carta em 26/03/1691, na qual iniciou elogiando Leibniz por seus trabalhos e por ter encontrado as curvas, embora tenha colocado em dúvida a existência das curvas que satisfaçam a condição inicial. Também responde que Fatio não cita sequer a colaboração de Leibniz para sua pesquisa, embora Huygens julgue que seria pertinente o trabalho conjunto deles, por considerar que o inglês não conseguiria resolver sozinho seus problemas. Em seguida, sugeriu que Leibniz compartilhasse seus estudos sobre quadratura, conforme Huygens (1905, p. 56), pois:

Favoreceria o público ao apresentar o seu método de quadratura, do qual você exemplificou elegantemente na curva que propus, ou seja, $2aaxx \propto aayy - y^4$, em que certamente admiro sua habilidade e a excelência de sua regra, embora limitada, assim como a outra, na minha opinião⁵.

Nesse caso, Huygens sugeriu que Leibniz compartilhasse seus cálculos sobre as curvas para que a comunidade científica tivesse acesso. Eram soluções de Equações Diferenciais resolvidas pelo método das separáveis. A carta também é complementada com temas sobre marés, agulha magnética, isocronismo de vibrações da mola, refração e dióptrica. As questões matemáticas, mais precisamente o estudo de curvas, teve mais ênfase, visto que o assunto gerava questionamentos e que ambos os pesquisadores não se contentavam com as justificativas do outro.

Como mencionado anteriormente, as correspondências eram escritas com forte periodicidade. Em 20 de abril de 1691, Leibniz respondeu a Huygens e iniciou a escrita expressando sua satisfação pela solução alcançada e, em seguida, procurou esclarecer os questionamentos levantados por Huygens. Esse último havia expressado dúvidas sobre a capacidade de uma Equação Diferencial gerar tanto uma solução geral quanto soluções particulares. Esse questionamento, nos dias de hoje, é um conceito demonstrado e validado pela comunidade científica.

Para sanar as dúvidas de seu correspondente acerca da existência de várias linhas que podem fornecer uma subtangente, Leibniz respondeu o seguinte, conforme Huygens (1905, p. 83, tradução nossa): “o senhor duvida do que eu disse, que existem várias linhas que podem gerar a subtangente $yy\sqrt{aa - xx} : ax$, e isso até lhe parece impossível. No entanto, aqui está uma, cuja equação é $xx = 2yy - \frac{1}{4aa}y^4 - 3aa$ ”⁶. Como pode ser observado, o autor respondeu a essas dúvidas apresentando um caso específico com uma equação que respaldava sua perspectiva, porque, se considerarmos $c = 2aa$, teremos a expressão mencionada por Leibniz.

Mostramos preliminarmente que a equação (6) representada por $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - Cy^2 + C^2$ apresenta a solução geral da Equação Diferencial $ax \, dx = y\sqrt{aa - xx}dy$. Usaremos um caso particular que, de acordo com Leibniz (Huygens, 1905), considerou $c = 2aa$. Para isso, realizamos uma substituição na solução geral, obtendo a expressão: $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2aay^2 + (2aa)^2$. (7)

⁵ “Vous obligeriez aussi le public en produisant vostre methode des quadratures dont vous venez de donner un si joli echantillon dans la courbe que je vous avois proposée, scavoir $2aaxx \propto aayy - y^4$, où j’admire certes vostre adresse et l’excellence de vostre regle, quoique limitée aussi bien que l’autre, comme je crois.” (Huygens, 1905, p. 56)

⁶ “Ce que j’avois dit, c’est qu’il y a plusieurs lignes qui peuvent donner la tangente $yy\sqrt{aa - xx} : ax$, et même cela vous semble impossible. En voici cependant une, dont l’équation est $xx = 2yy - \frac{1}{4aa}y^4 - 3aa$ ” (Huygens, 1905, p. 83).

Colocando toda a expressão na notação mais usual, temos:

$$a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2a^2y^2 + (2a^2)^2 \quad (8)$$

Que é equivalente à expressão: $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2a^2y^2 + 4a^4 \quad (9)$

Operando termos semelhantes, $-a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2a^2y^2 + 3a^4 \quad (10)$

Multiplicando a expressão por $-\frac{1}{a^2}$, $x^2 = 2y^2 - \frac{1}{4a^2}y^4 - 3a^2 \quad (11)$

Como podemos observar, Leibniz estava correto ao apresentar a equação (11) como uma solução particular da Equação Diferencial contestada, pois era mais uma expressão que a satisfazia. Vale lembrar que eles fizeram parte da época em que o Cálculo Diferencial e Integral foi desenvolvido, por isso, as cartas explicitavam tantos questionamentos acerca das demonstrações realizadas, além de refinar os conceitos matemáticos.

Posteriormente, Leibniz fez uma correção pontual referente ao equívoco escrito na carta de 02/03/1691, e afirma que diz respeito a “ $aaaxx = a^4 - x^4$, que lhe enviei, percebo que nos meus rascunhos está $aaaxx = a^4 - \frac{y^4}{4}$; (isto é, $4aaaxx = 4a^4 - y^4$), o que não havia notado quando escrevi”. Nesse caso, ele enviou uma equação faltando informações, cuja expressão correta foi apresentada na carta de 20/04/1691, na escrita da expressão cuja curva correta é $aaaxx = a^4 - \frac{y^4}{4}$ que é uma solução particular da equação

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2(4a^2 - y^2)}{2aaax} \quad (12)$$

Observe que a equação (12) possui um modelo semelhante ao da Equação Diferencial (3). Devido às similaridades, em relação à problemática da carta que se referia às possibilidades de uma equação gerar uma família de curvas, e a maneira pela qual elas eram escritas, podemos separar suas variáveis e escrevê-la da seguinte forma $\frac{dx}{dy} = f(x)g(y)$, cuja solução é por meio de separação de variáveis.

Vale salientar que duvidaram da possibilidade de equações desse tipo gerarem famílias de curvas subtangentes (conforme mencionado por Leibniz no decorrer da carta). No momento, ele apresentou possíveis soluções particulares para a equação mencionada; porém, sua solução não está explícita, portanto, a fizemos para apreciação do/da leitor/a.

Trazendo a equação para a notação atual, temos: $\frac{dx}{dy} = \frac{y^2(4a^2 - y^2)}{2a^2x} \quad (13)$

Agora resolveremos a Equação Diferencial pelo método das separáveis.

Fazendo a separação de variáveis, temos: $2a^2x \, dx = y^2(4a^2 - y^2)dy \quad (14).$

Para iniciar a resolução da Equação Diferencial, podemos utilizar o método da substituição simples, ou multiplicar y^2 pela expressão para aplicar no segundo membro. Escolhemos a segunda opção, cuja solução é a integração de um polinômio, ficando: $2a^2x \, dx = y^2(4a^2 - y^2)dy. \quad (15)$

Aplicando a integral em ambos os membros da Equação Diferencial:

$$\int 2a^2x \, dx = \int (4a^2y^2 - y^4)dy \quad (16)$$

$$\text{Integrando, temos: } 2a^2\frac{x^2}{2} = 4a^2\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + C \quad (17)$$

$$\text{Simplificando a expressão: } a^2x^2 = \frac{4}{3}a^2y^3 - \frac{y^5}{5} + C \quad (18)$$

Portanto, a solução geral da Equação Diferencial $\frac{dx}{dy} = \frac{y^2(4a^2 - y^2)}{2a^2x}$ que Leibniz enviou para Huygens com a intenção de justificar as subtangentes geradas é $a^2x^2 = \frac{4}{3}a^2y^3 - \frac{y^5}{5} + C$. Observe que, para resolvê-la, precisamos separar as variáveis e depois integrá-las para ser solucionada. Toda essa discussão foi benéfica ao desenvolvimento matemático do século XVII, porque os questionamentos sobre curvas contribuíram para o pensamento criativo desses estudiosos, pois Leibniz e Huygens estavam envolvidos em discussões matemáticas e científicas.

O processo criativo aconteceu quando eles abordaram a resolução de problemas matemáticos e a exploração de equações para encontrar soluções. Isso envolve a geração de hipóteses, a experimentação com equações e a busca por soluções que atendam aos critérios específicos dos problemas discutidos.

Adicionalmente, a correspondência aborda a problemática da quadratura de curvas, envolvendo a discussão sobre a quadratura do círculo e elipse. Paralelamente, explorou questões científicas, como a declinação do magnetismo, e demonstra a grande valia da exposição de Huygens sobre os princípios da refração. A carta também inclui solicitações pessoais, como a busca de informações históricas sobre alguns conhecidos em comum.

Nas quatro cartas citadas no presente trabalho, observamos um diálogo intelectual colaborativo que abrange temáticas matemáticas, científicas e históricas. Leibniz e Huygens compartilharam problemas, soluções e teorias, demonstrando um compromisso com a exploração do conhecimento e a resolução de problemas. Suas discussões englobam uma variedade de tópicos, desde Equações Diferenciais, quadratura de curvas, até questões científicas, como a refração da luz e a declinação do magnetismo. Essas correspondências revelam apreço pela pesquisa e o pensamento criativo que caracterizaram esses dois pesquisadores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, constatamos que Leibniz e Huygens possuíam uma relação mediada pelo uso de cartas, pois se utilizavam desse tipo de documento para trocarem ideias que favoreceu o desenvolvimento das Equações Diferenciais, bem como o estudo das curvas por eles observadas. Nelas também estavam evidentes as discussões sobre suas soluções gerais, além dos seus significados geométricos feitos pelas análises das curvas.

Para que isso pudesse ser observado, apresentamos quatro correspondências e discutimos alguns pontos do que elas traziam, desde assuntos que eram citados, até conteúdos mais aprofundados como por exemplo, as curvas observadas. Esse intercâmbio intelectual entre os dois pensadores contribuiu para o desenvolvimento das equações diferenciais, sobretudo, o método das separáveis, bem como o estudo das curvas, que eram temas amplamente discutidos na matemática e na filosofia natural.

Tal discussão favoreceu um diálogo colaborativo de modo a promover o desenvolvimento matemático da época, pois, as cartas revelaram que Leibniz e Huygens buscaram entender e formalizar as soluções gerais das equações diferenciais, destacando ainda os significados geométricos dessas soluções, que frequentemente se relacionavam a curvas observadas em fenômenos naturais.

Esse diálogo foi, portanto, uma importante via de comunicação científica e colaborativa, promovendo a construção de ideias que impactaram o pensamento matemático e a formalização de conceitos da época, nesse caso o método das separáveis e a ampla discussão sobre os tipos de solução que as curvas geravam. Leibniz defendia que essas curvas poderiam ter soluções gerais mas caso necessitasse, poderiam particularizá-las em situações mais específicas, ele o fez quando atribuiu valores constantes ao C.

Dessa forma, as cartas revelaram o avanço do conhecimento sobre equações diferenciais, além disso, ilustrou como a matemática da época estava relacionada com questões filosóficas e à observação dos fenômenos naturais. A análise das correspondências mostra que a colaboração entre Leibniz e Huygens auxiliou a compreensão de problemas que, na época, eram questionamentos em plena discussão, mas que não possuíam resposta.

REFERÊNCIAS

- ALFONSO-GOLDFARB, Ana Maria. **O que é história da ciência?** São Paulo: Brasiliense, 1994.
- ALMEIDA, Ítalo D'Artagnan. **Metodologia do trabalho científico** / Ítalo D'Artagnan Almeida. – Recife: Ed. UFPE, 2021.
- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.
- GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2008.
- HUYGENS, Christiaan. **Oeuvres complètes**: tome x. Correspondance 1691-1695. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1905. 916 p. Disponível em: <https://www.dbnl.org/tekst/huyg003oeuv10_01/colofon.php>. Acesso em: 20 maio 2023.
- LAVILLE C., DIONNE J. **A construção do saber – manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Belo Horizonte, Editora UFMG, 1999, 340 p.
- MARTINS, Roberto de Andrade. Introdução. A história das ciências e seus usos na educação. p. xxi-xxxiv. In: SILVA, Cibelle Celestino (ed.). **Estudos de história e filosofia das ciências: subsídios para aplicação no ensino**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- MENDES, I. A. **História da Matemática no ensino**: entre trajetórias profissionais, epistemologias e ensino. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em Sala de Aula**: Tecendo Redes Cognitivas na Aprendizagem. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2009.
- NASCIMENTO, Anna Karla Silva do. **Um estudo histórico acerca de métodos de resolução de equações diferenciais: método das separáveis e método das lineares** / Anna Karla Silva do Nascimento. – 2024. 282 f.: il. Tese (doutorado)–Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Natal, RN, 2024.

ROSSI, Paolo. **O nascimento da ciência moderna na Europa** / Paolo Rossi ; tradução de Antonio Angonese. – Bauru; SP: EDUSC, 2001.

STRUIK, D. J. (editor), **A Source Book in Mathematics (1200-1800)**. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1969.

ZILL, Denis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.