

Equações quadráticas e GeoGebra: uma releitura da resolução de Agnesi

Quadratic equations and GeoGebra: a reinterpretation of Agnesi's solution

Vívia de Souza Marins¹  

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

Roseli Alves de Moura²  

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

Renan de Souza Teixeira³  

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

RESUMO

Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), estudiosa italiana do século XVIII, destacou-se por suas contribuições no estudo da matemática na Itália setecentista, sendo principalmente conhecida pela curva que leva seu nome, *Bruxa de Agnesi*. Em sua obra *Instituzioni Analitiche ad uso Della Gioventù Italiana* (1748), ancorada nas ideias de René Descartes, ela abordou a resolução de equações quadráticas sob uma perspectiva geométrica e algébrica. Fruto de um experimento didático desenvolvido na Atividade Acadêmica NEPE *Softwares*, no curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, o propósito deste trabalho é apresentar, sob uma perspectiva histórica e a partir de tecnologias educacionais, o tratamento dado por Agnesi à estas resoluções, utilizando o *software* GeoGebra. A atividade, mediante o mesmo propósito, referiu-se à uma tentativa de favorecer a compreensão do processo utilizado na busca pelas soluções geométricas e algébricas, de modo diverso do usual, principalmente pautado no uso de fórmulas resolutivas. Metodologicamente, no experimento e nesta apresentação, estabeleceu-se um diálogo no âmbito da História da Matemática e o uso de Tecnologias Digitais, a partir de um estudo de natureza bibliográfica de caráter qualitativo, buscando legitimar pesquisas com possibilidades de aplicação no ensino. Resultados que depreendem do experimento nos levam a considerar que o uso de régua e compasso e a geometria sintética, em voga no período que viveu Agnesi, e o uso de ferramentas tecnológicas, dos dias atuais, retratam práticas distintas e nos convidam à reflexão acerca de procedimentos matemáticos culturalmente aceitos, para além da possibilidade de resoluções intuitivas ou independente da utilização de fórmulas resolutivas.

Palavras-chave: Equações Quadráticas; História da Matemática; Maria Gaetana Agnesi, Tecnologias Educacionais, GeoGebra.

ABSTRACT

Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), an 18th-century Italian scholar, stood out for her contributions to the study of mathematics in 18th-century Italy, and is best known for the curve that bears her name, Agnesi's Witch. In her work *Instituzioni Analitiche ad uso Della Gioventù Italiana* (1748), anchored in the ideas of René Descartes, she addressed the resolution of quadratic equations from a geometric and algebraic perspective. The result of a didactic experiment developed in the NEPE Softwares Academic Activity, in the undergraduate mathematics course at Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, the purpose of this work is to present, from a historical perspective and based on educational technologies, the treatment given by Agnesi to these resolutions, using the GeoGebra software. The activity, with the same purpose, referred to an attempt to favor the understanding of the process used in the search for geometric and algebraic solutions, in a different way than usual, mainly based on the use of resolution formulas. Methodologically, in the experiment and in this presentation, a dialogue was established within the scope of the History of Mathematics and the use of Digital Technologies, based on a bibliographic study of a qualitative nature, seeking to legitimize research with possibilities of application in teaching. Results that emerge from the experiment lead us to consider that the use

¹ Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: vivasouza.dsm@gmail.com.

² Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP. Professora Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: rmoura@ufrrj.br.

³ Doutorado em Engenharia de Defesa – IME. Professor Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: rsteixeira@ufrrj.br.

of ruler and compass and synthetic geometry, in vogue during the period in which Agnesi lived, and the use of technological tools, today, portray distinct practices and invite us to reflect on culturally accepted mathematical procedures, beyond the possibility of intuitive resolutions or independent of the use of resolution formulas.

Keywords: Quadratic Equations; History of Mathematics; Maria Gaetana Agnesi, Educational Technologies, GeoGebra.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Atualmente há um aumento de pesquisas e estudos que visam refletir acerca de teorias e práticas passíveis de favorecer a aprendizagem e melhor compreensão da matemática, de forma geral. Neste cenário, um diálogo entre concepções no âmbito da História da Matemática e Tecnologias Digitais, é favorecido mediante criação de formas visuais e lúdicas para representações matemáticas, ferramentas tecnológicas e/ou softwares e outras tecnologias, que como sinalizam Sousa e Felipe (2021) e Sousa (2020; 2023) emergem como possibilidades, no ensino. Porém, frente à matemática escolar com que ainda nos deparamos no presente, robusta de representações algébricas e que são replicadas de forma veemente, observa-se que tais possibilidades ainda são consideradas esparsas e requerem uma mudança no paradigma atual na área de educação matemática.

Frente a tal quadro, estas investigações se mostram necessárias, justificadas pelo fato que a matemática é uma área criativa e potencialmente explorável, e inexoravelmente vinculada com a cultura e civilização de diferentes épocas. Não foram poucos os estudiosos, que antes mesmo do florescimento da álgebra analítica e do desenvolvimento do cálculo, que hoje conhecemos, utilizavam-se da geometria para resolver exercícios/problemas, os quais nos pautamos hoje, principalmente por meio de recursos algébricos. Esta prática sustentada por uma geometria sintética⁴ foi, por muito tempo, a principal ferramenta de que os estudiosos se valiam.

O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido ao longo de uma Atividade Acadêmica, denominada NEPE⁵–*Softwares* Educacionais, vinculada ao Departamento de Matemática, e voltada ao Ensino, Pesquisa e Extensão da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Realizada de forma remota, ao longo do ano de 2021, período pandêmico, a primeira autora atuou como discente e a segunda autora como orientadora da atividade, cujo propósito principal era apresentar aos graduandos, futuros professores de matemática, maneiras, materiais e metodologias, passíveis de auxiliarem na condução de suas práticas futuras, adicionando a isso, o conhecimento de outras práticas, não usuais nos dias de hoje, do fazer matemático.

O trabalho de Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), matemática e filósofa italiana do século XVIII, nascida em Milão e que desde sua infância desenvolveu um interesse em estudos de ciências e matemática, se insinuou pertinente para o propósito de uma das atividades que desenvolvemos, justamente pelo fato da estudiosa resolver equações quadráticas a partir da geometria sintética, metodologia distinta das fórmulas resolutivas principalmente utilizado atualmente.

⁴ Segundo Mazzoti (2007, p. 108), a álgebra no setecentos se mostrava principalmente associada com a engenharia prática e às artes, ao passo que a geometria sintética, ao estilo dos antigos, se sobressaía sobre quaisquer outras formas de conhecimento humano – além da teologia – em função da sua certeza, elegância e relevância metafísica.

⁵ Núcleo de Ensino, Pesquisa e Extensão são atividades extensionistas teórico-práticas obrigatórias aos alunos do curso de matemática licenciatura com o propósito de fortalecer o tripé universitário, preceito constitucional que rege as universidades brasileiras e ajuda a definir o seu papel perante a sociedade. O artigo 207 da Constituição Federal, diz que as universidades precisam obedecer ao “princípio de indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão”. Há, na grade atual de nossa universidade, cinco NEPEs ao longo da graduação.

Apesar de não ter dedicado toda sua vida aos estudos, a estudiosa se destacou à época, mas obscurecida a partir do século XIX. Como menciona Moura (2021), em sua única obra, *Instituzioni Analitiche ad uso Della Gioventù Italiana*, de 1748, Agnesi alerta quanto a dificuldade de obter materiais para o ensino de matemática, e é sobre isso que ela se busca apresentar, em um período em que o ensino, na forma como temos hoje, ainda se mostrava distante, era restrito a famílias privilegiadas.

No decorrer do texto serão expostos os passos de construção descritos por Agnesi, as respostas da atividade obtidas e a construção no GeoGebra desta representação. Pretendemos, com isto, expor a importância da geometria, especialmente aquelas demonstradas há anos, mas que foram descartadas pelo comodismo da álgebra.

METODOLOGIA

Esta apresentação é fruto de algumas aulas de História da Matemática, em sua primeira etapa, com temática previamente selecionada, que emergiu da atividade acadêmica NEPE–Softwares, e na segunda etapa utilizou-se ferramentas do *software* GeoGebra para realizar construções que emergiram da análise do material verificado na primeira etapa. O propósito neste momento foi encontrar as soluções de equações quadráticas a partir da movimentação de seletores, que oportunamente apresentaremos, representando os coeficientes das equações quadráticas.

Assim, metodologicamente entendemos que a primeira etapa, refere-se a um estudo de natureza bibliográfica, conforme sinaliza Mattos (2020, p. 52), pois foram utilizados documentos já elaborados, tendo em vista que um dos objetivos foi analisar as resoluções de equação quadrática extraída da tese de Moura (2017) com pequenos adendos atuais⁶. A abordagem desta pesquisa assume caráter qualitativo que, para Mattos (2020) se trata de entender como o objeto pesquisa acontece, e assim não nos preocupamos em quantificar, mas sim em aprofundar a compreensão do problema e em desenvolver conhecimentos particulares.

A segunda etapa, tendo como foco principal a utilização de um *software* de matemática dinâmica GeoGebra, permitiu analisar os diferentes casos explicitados por Agnesi, na resolução de equações quadráticas.

A utilização desses procedimentos ocorreu da seguinte forma: na primeira etapa os estudos foram iniciados pautados na pesquisa bibliográfica, priorizando aspectos que abordavam a vida, as obras e o contexto que Agnesi viveu. Como a questão da pouca disponibilidade de tempo para desenvolver o trabalho, ao longo da condução da Atividade, nos atemos no referencial de Moura (2017, 2021), em função da obra ser uma tese elaborada sob as premissas e literatura necessária de que nos valem. Não houve preocupação em fazer levantamento de outros materiais pois o objetivo do experimento era trazer uma discussão acerca da resolução de equações quadráticas na obra de Agnesi.⁷ A atividade acadêmica foi desenvolvida por duas professoras da Universidade, porém, tais procedimentos foram adotados ao longo de três encontros em dias distintos e ministrados quin-

⁶ Sobre isso, nos respaldamos no Presentismo Pedagógico apregoado por Fendler (2009, p. 4) que defende o uso de relatos históricos que incorporem, de forma deliberada, perspectivas estrategicamente presentistas que permitem a exploração de conceitos da história do passado, pautadas e projetadas em resoluções atuais, de modo facilitador em diálogo com nosso espaço e tempo, mas que não se confunde com o anacronismo.

⁷ Importante destacar que a atividade foi desenvolvida em período de pandemia (2021) e até aquele momento somente a tese de Moura trazia esta abordagem, pautada na obra de Maria Gaetana Agnesi.

zenalmente com somente uma delas, a segunda autora deste trabalho. Cada encontro foi de duas horas (120 minutos, especificamente), momento em que se buscou uma condução de aula, a partir da explanação sobre o desenvolvimento da matemática europeia nos séculos XVII e XVIII, de forma não delimitada, focando na matemática italiana Maria Gaetana Agnesi, em momento oportuno, seu legado e o contexto histórico da época, dentre outros aspectos relevantes e necessários para a compreensão das práticas matemáticas, no cenário setecentista.

Após esta aula, foi enviado um arquivo⁸ com diversas citações, retiradas da obra de Agnesi (1748) e da tese de Moura (2017), tanto traduzidas como na língua italiana toscana, e utilizadas por Agnesi em seus escritos matemáticos, proporcionando aos estudantes uma familiarização com retóricas diferentes. No arquivo enviado há, ainda, o passo-a-passo da resolução matemática e construção da resolução de equação quadrática da forma $xx + ax - bb = 0$, dentre quatro casos abordados por Agnesi em seu tratado matemático. Na sequência, foi disponibilizada uma atividade que pedia para, usando o *software* GeoGebra, refazer as hipóteses desenvolvidas por Agnesi e analisar este método, o qual, para os estudantes, representava nuances da álgebra já conhecida, contudo, sem utilização da usual fórmula resolutive⁹ que utilizamos no Ensino Básico. Na etapa final, foram elaboradas construções no GeoGebra das outras resoluções de equações, as quais, após algumas alterações e adições, se materializam no presente trabalho.

Importante destacar que o GeoGebra é um site ou *software* de matemática dinâmica que permite realizar construções geométricas e disponibiliza diversas ferramentas para realizar tais estudos, como explicitado no trabalho de Dantas, Aparecida e Baldini (1997). Assim, ao longo da realização da atividade foram utilizadas a construção de pontos, retas, segmentos, circunferência e reta tangente, conceitos que estamos familiarizados, e a construção do controle deslizante, que é uma ferramenta que oportuniza que uma incógnita possa assumir um determinado valor dentro de um intervalo, de modo que este valor seja escolhido pelo utilizador, ao deslizar o controle.

Na próxima seção trataremos as descrições algébricas e construções – traduzidas para o português – feitas por Agnesi em sua obra, que retratam o encontro das raízes de equações do segundo grau.

AGNESI E EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Como anteriormente mencionado, o trabalho aqui apresentado foi desenvolvido ao longo de uma Atividade Acadêmica no NEPE–Núcleo de Ensino, Pesquisa e Extensão, em que nos valem da aliança entre a História da Matemática e Software GeoGebra (conforme Sousa 2020; 2023). Delimitamos o trabalho na resolução de equações quadráticas, a partir da obra de Agnesi, *Istituzioni Analitiche*, em seu primeiro volume, a qual, nas palavras da autora, surge para favorecer o ensino para os jovens italianos, que careciam de material adequado para tanto (Moura, 2017).

Não são poucos os estudos dedicados à Agnesi (1718-1799) e ao seu tratado matemático, mas há evidências de que a historiografia tradicional pouco espaço lhe reservou. O historiador D. J. Struik, em *História Concisa da Matemática* não apresenta o trabalho da estudiosa, mas em seu *A Source Book in Mathematics 1700-1800*, somente refere-se a ela de forma apologética, comparando-a a Hypatia (datas?). Na mesma direção, C. Boyer (ano?) enfatiza, em sua *History of Analytic Geometry*, que a estudiosa não traz material novo, ao tratar da geometria analítica que supostamente

⁸ <https://drive.google.com/drive/folders/1Uuub8w3lrFlggzOhUGJSPjPsLJrXFXEy?usp=sharing>

⁹ A fórmula resolutive do segundo grau é descrita da seguinte forma $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

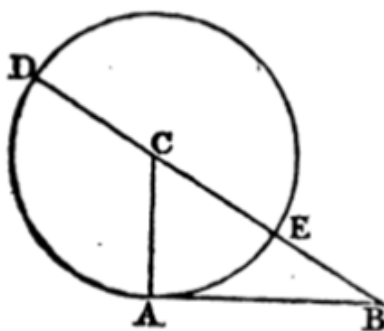
teria encontrado na obra de Agnesi, como destaca Moura (2017). Por sua vez, Eves (1995), em uma edição de *Introdução à História da Matemática*, apresenta uma biografia da estudiosa e comentários acerca da expressão Bruxa de Agnesi (Eves, 1995, pp. 479-83), envolta a equívocos.¹⁰

Nos ateremos neste trabalho, a apresentar aspectos das resoluções de equações publicadas na obra de Agnesi(ano?), intitulada *Instituzioni Analitiche*, que se apresenta dividida em quatro seções, pautadas em diferentes assuntos da matemática. Nos valemos do já elaborado por Moura (2017) para ilustrar a forma como Agnesi, na segunda seção, utiliza construções geométricas para determinar valores desconhecidos. A referida matemática coloca de forma explícita e detalhada a resolução de quatro casos que, descrevem, segundo ela, todas as equações do segundo grau possíveis, na forma $xx \pm ax \pm bb = 0$:

Portanto, para construir as duas, a primeira e a segunda, tem-se $CA = \frac{1}{2}$, AB em um ângulo reto é igual a b, e com o raio CA se descreve o círculo AED. Do ponto B prolonga-se a linha BD até D, passando pelo centro C; e será BE a quantidade positiva da incógnita, que é a verdadeira raiz, ou a raiz positiva da equação $xx + ax - bb = 0$, assim como a raiz correspondente à BD será a falsa ou negativa. De modo contrário, BD corresponde à raiz verdadeira, e BR à raiz falsa, na equação $xx - ax - bb = 0$. (Moura, 2017, p. 130 *apud* Agnesi, 1748, p. 112).

Na Figura 1 temos a representação da construção, onde CA, corresponde ao raio da circunferência de centro C, mede metade de , ou seja, é a medida do diâmetro da circunferência e é a medida de um segmento perpendicular ao segmento CA, portanto o segmento AB será tangente à circunferência no ponto A. Esta Figura 1 corresponde à equações escritas nas formas $xx + ax - bb = 0$ ou $xx - ax - bb = 0$

Figura 1 – Representação geométrica das equações de termo “bb” negativo.



Fonte: M.G.Agnesi, *Analytical Institutions* (1801)

Nosso propósito é somente destacar o que não está explícito na observação da figura, e de que Agnesi se vale, a partir de estudos da obra cartesiana, que escolheu para direcionar seu trabalho e que destacamos a seguir.

E, de fato, resolver as duas equações, são $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$ e $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, e pela construção, sabendo que $CA = CE = CD = \frac{1}{2}a$, $AB = b$, CB é igual a $\sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, e BE é igual a $\sqrt{\frac{aa}{4} + bb} - \frac{a}{2}$, quantidade positiva da incógnita na primeira equação e BD tomando como quantidade nega-

¹⁰ Mais a este respeito vide Moura (2017) que elenca alguns autores italianos mais recentes que se envolvem nesta discussão.

tiva é igual a $-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$. O mesmo acontecerá tomando BD como o valor positivo, igual a $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, da incógnita na segunda equação, e como CB é maior do que CE, EB é igual a $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, sendo o valor negativo. (Moura, 2017, p. 132 *apud* Agnesi, 1748, p. 112-113).

O que se depreende do mencionado pela estudiosa, é ela afirmar que a medida dos segmentos DB e EB representam as incógnitas da equação e, as medidas de DC, CE e CA são conhecidas, dada a construção. Para a equação $xx+ax-bb = 0$, a medida de EB corresponde à solução positiva, restando assim o segmento DB como solução negativa. O inverso ocorre para a equação $xx-ax-bb = 0$. Temos também, por construção, que o triângulo ABC é retângulo, com ângulo reto em A, e utilizando o teorema de Pitágoras, chegamos à seguinte fórmula:

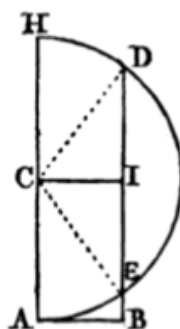
$$\begin{aligned} AB^2 + CA^2 &= CB^2 \Rightarrow AB^2 + CA^2 = (CE + EB)^2 \Rightarrow \\ b^2 + \frac{1}{4}a^2 &= \left(\frac{1}{2}a + x\right)^2 \Rightarrow \pm\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a + x \Rightarrow \\ x &= \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a \end{aligned}$$

Se o segmento EB for o valor negativo -x, de maneira análoga, chegaremos na equação $xx-ax-bb = 0$. Até o presente momento só foram mencionadas as equações onde o termo “bb” é negativo, isto porque neste caso teremos uma raiz negativa e outra positiva.

Para os outros dois casos, em que o terceiro termo é positivo, ou ambas as raízes são positivas ou negativa, como exposto por Agnesi é representado pela Figura 2:

A terceira e quarta fórmula são assim construídas: Tomando $CA = \frac{1}{2}$ e $AB = b$, formando um ângulo reto, tal como nas construções anteriores, descreve-se com o raio CA, o semi-círculo ADH, e conduzindo BD paralelo à AC. As duas retas BE e BD serão os dois valores, ou seja, as duas raízes negativas da equação $xx+ax+bb = 0$, e também as duas positivas da equação $xx-ax+bb=0$. (Moura, 2017, p. 135 *apud* Agnesi, 1748, p. 113).

Figura 2 – Representação geométrica das equações de termo “bb” positivo.



Fonte: M.G.Agnesi, *Analytical Institutions* (1801)

Para as duas últimas equações a construção utiliza-se de um semicírculo de raio $\frac{1}{2}$, um segmento AB de medida b , perpendicular à CA—semelhante à construção anterior—, e cria-se um segmento paralelo ao diâmetro a partir do ponto B, encontrando assim dois pontos de intersecção entre o segmento criado e o semicírculo. Neste segmento temos as duas incógnitas negativas da equação $xx+ax+bb=0$ e as duas positivas de $xx-ax+bb=0$.

Assim, resolvendo as equações, a terceira raiz será $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e a quarta raiz, $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$. Agora, conduzindo as linhas CD, CE e CI perpendicular a BD, temos que ID = IE = $\sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$ e BE será a raiz negativa e é igual a $-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, o valor negativo da incógnita desconhecida na terceira equação, sendo BI maior do que o IE; os negativos dessa mesma terceira equação. O oposto será BD positivo será igual a $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e BE positivo será igual a $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, ambos os valores positivos da incógnita na quarta equação. (Moura, 2017, p. 136 *apud* Agnesi, 1748, p. 113).

Apesar de não sabermos se Agnesi utilizou o teorema de Pitágoras no triângulo CEI, retângulo em I, nos valem dele para favorecer à compreensão, tal como anteriormente feito. Temos que CI é paralelo a AB, por construção, logo CI = AB = b , e, pelo semicírculo, que CA = CE = IB = $\frac{1}{2}$. Por fim, tem-se que IE = IB – EB. Utilizando as raízes positivas (ou seja, EB = x) segue que:

$$\begin{aligned} CI^2 + IE^2 &= CE^2 \Rightarrow CI + (IB - EB)^2 = CE^2 \Rightarrow \\ b^2 + \left(\frac{1}{2}a - x\right)^2 &= \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow \frac{1}{2}a - x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \Rightarrow \\ x &= \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \end{aligned}$$

Para as raízes negativas, ou seja, quando EB = $-x$ é realizado de forma análoga, chegando à $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Para maiores aprofundamentos sobre o trabalho de Agnesi sugerimos a obra de Moura (2017), não sendo nosso propósito, neste trabalho, enveredarmos em detalhes relacionados à geometria sintética utilizada pela autora e demais singularidades observadas em relação ao fazer matemático que direciona o trabalho da estudiosa nos anos setecentos italiano. Na próxima etapa, apresentaremos os resultados relacionados ao experimento didático elaborado no software GeoGebra.

Na sequência mostraremos as construções feitas no *Software* GeoGebra dos casos descritos na presente seção, alterando os valores dos termos e, então, analisando como são representados geometricamente.

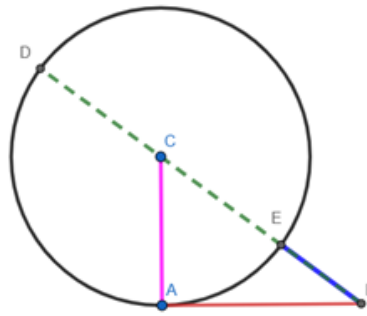
ANÁLISES E RESULTADOS

As equações descritas por Agnesi da forma $xx \pm ax \pm bb = 0$ foram tratadas duas a duas na seção de referencial teórico e, para melhor organização, manteremos a mesma divisão durante esta seção. Abordaremos, primeiro, o caso em que o termo conhecido “bb” é negativo e, posteriormente, o caso onde o terceiro termo é positivo e as construções elaboradas no *software* GeoGebra.

Primeiros casos: $xx+ax-bb=0$ e $xx-ax-bb=0$

A descrição da construção feita por Agnesi para os casos $xx+ax-bb=0$ e $xx-ax-bb=0$, encontrada no referencial teórico, foi reproduzida no GeoGebra, onde a e b correspondem aos controles deslizantes para possibilitar a flexibilidade dos testes. A Figura 3 representa a construção elaborada no *software*.

Figura 3 – Representação geométrica feita no GeoGebra.

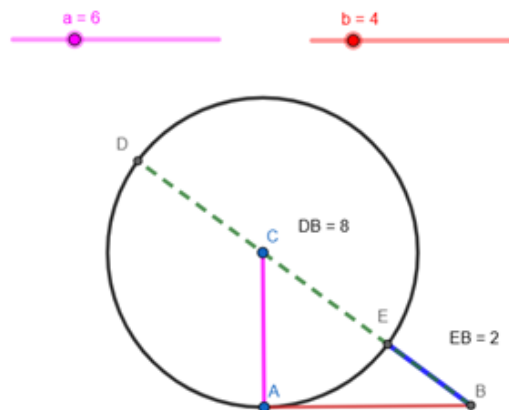


Fonte: Elaborado pela Autora.

Observe que a reta verde pontilhada (DB) corresponde a uma das raízes e a reta azul (EB) a outra raiz. A partir desta construção serão feitos os testes, mostrando as medidas de ambas essas retas em diferentes situações. Em adição, também serão expostas as medidas de AB e CA, em forma de controle deslizante (tamanho de b e $1/2 a$, respectivamente).

A primeira situação tratada é quando $a, b \neq 0$ (Figura 4). Sejam, então, $a=6$ e $b=4$, teremos $xx+6x-16=0$ e $xx-6x-16=0$. Se calcularmos com as ferramentas que temos atualmente, obtemos as duas raízes para a equação onde a é positiva serão $x=-8$ e $x=2$ e para a equação onde a é negativa serão $x=-2$ e $x=8$. Pela construção descrita chegamos na mesma resposta.

Figura 4 – Exemplo feito no GeoGebra com valores para a e b diferentes de zero.

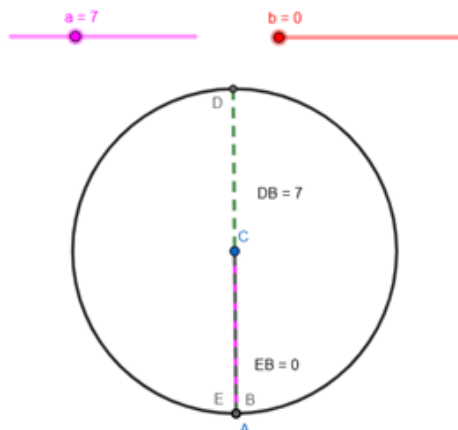


Fonte: Elaborado pela Autora.

Agnesi afirma que há a raiz falsa (negativa) e verdadeira (positiva) e que estas dependem somente de qual dos dois casos estamos analisando, de forma análoga ao direcionamento por Descartes (1596-1650), em sua obra de 1637. O próximo exemplo será se $a \neq 0$ e $b=0$. Quando isto acontece,

não teremos mais um triângulo formado, pois $A=B=E$, portanto $AB=BE=0$. Dados $a=7$ e $b=0$ chegamos em:

Figura 5 – Exemplo feito no GeoGebra com igual à zero.

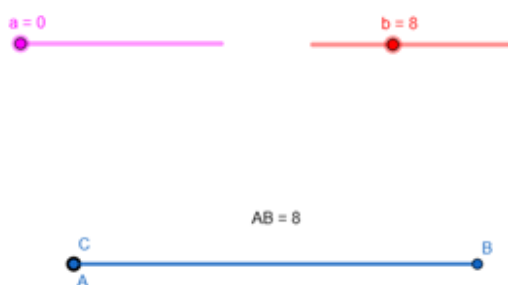


Fonte: Elaborado pela Autora.

Com estas condições uma das raízes (EB) sempre será 0, independente do valor de a , pois, pela construção, esta incógnita influencia apenas o raio da circunferência e, consequentemente, a raiz representada por DB. A Figura 5 representa as equações $xx+7x=0$, com raízes $x=0$ e $x=-7$, e $xx-7x=0$, onde suas raízes são $x=0$ e $x=7$.

O último caso é quando $a=0$ e $b \neq 0$. Neste caso, o raio da circunferência será 0 e a figura será colapsada para um ponto, ou seja, $C=A$. O segmento AB ainda existirá pois este, por construção, tem um ângulo reto em A e seu tamanho depende apenas de b . Apesar de não podermos afirmar muitas coisas sobre o segmento AB, dada a inexistência da circunferência, ele existirá. Seja $b=8$, uma representação pode ser vista na Figura 6.

Figura 6 – Exemplo feito no GeoGebra com igual à zero.

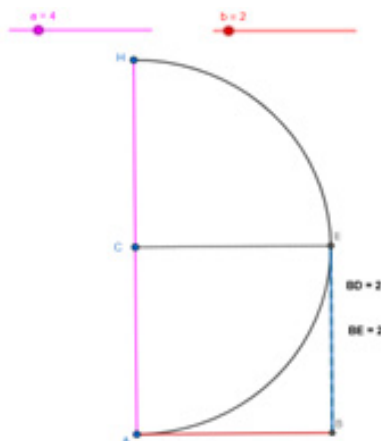


Fonte: Elaborado pela Autora.

O caso demonstrado na Figura 6 é algebricamente descrito por $xx-64=0$, na qual suas raízes são $x=\pm 8$.

Há, ainda, uma situação que ocorreria quando $a=b=0$, porém este exemplo é trivial. Em todos os casos, os valores de a , $b \neq 0$ foram arbitrários, e quaisquer que fossem esses valores as representações seriam semelhantes, apenas com as mudanças métricas necessárias.

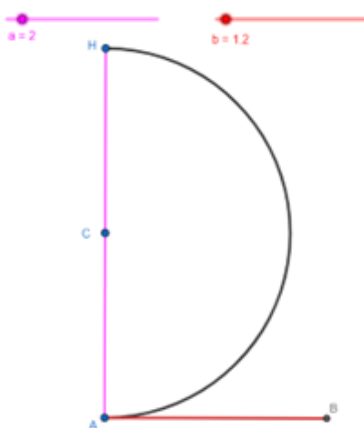
Dois últimos casos: $xx+ax+bb=0$ e $xx-ax+bb=0$

Figura 9 – Exemplo feito no GeoGebra com $\frac{1}{2}a=b$ 

Fonte: Elaborado pela Autora.

A construção na Figura 9 representa as raízes negativas da equação $xx+4x+4=0$ e as raízes positivas da equação $xx-4x+4=0$. Como é possível observar, as duas raízes são iguais, isto porque $AB = \frac{1}{2}a$ (raio) e, portanto, a o segmento que se inicia no ponto B terá apenas uma intersecção com a semicircunferência, que será o ponto onde $D = E$, logo $DB = EB$.

Na Figura 10, por sua vez, temos a representação de outro caso, onde é um valor diferente de zero qualquer e $b > \frac{1}{2}a$. Nesta situação, o segmento AB será maior do que a semicircunferência e, portanto, não haverá pontos de intersecção. No exemplo foram escolhidos os valores de $a=2$ e $b=1.2$.

Figura 10 – Exemplo feito no GeoGebra com $a \neq 0$ e $b > \frac{1}{2}a$.

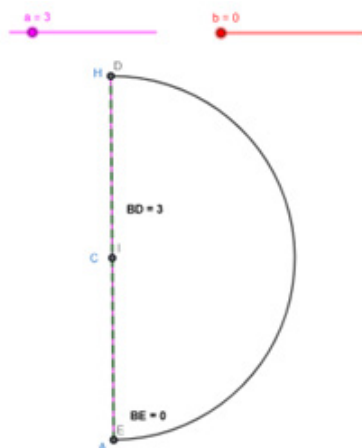
Fonte: Elaborado pela Autora.

As raízes DB e EB não aparecem, pois não são valores reais. Ao calcular as raízes de $xx \pm 2x + 1.2 = 0$, acharemos valores complexos correspondentes. Portanto, esta representação geométrica de equações quadráticas não é útil quando se estuda raízes complexas.

Seja, agora, a um valor arbitrário diferente de 0 e $b=0$. Para este caso, ainda teremos a circunferência de diâmetro a , porém, como o segmento AB tem medida 0, tem-se $A = B$ e os pontos de intersecção com a circunferência estarão nos extremos na mesma, diante disso $E = A = B$ e $D = H$ e, conseqüentemente, $BE = 0$ e $BD = AH = a$. Para visualização, escolhemos $a=3$.

A Figura 11, então, mostra geometricamente as raízes das equações $xx+3x=0$ e $xx-3x=0$, que serão 0 e $\pm a$. O exemplo em que $a=0$ e $b\neq 0$ é semelhante aos casos apresentados anteriormente (onde “ bb ” negativo).

Figura 11 – Exemplo feito no GeoGebra com $a\neq 0$ e $b=0$.



Fonte: Elaborado pela Autora.

A seguir traremos algumas reflexões e resultados que emergiram ao longo da dinâmica utilizada na condução desta atividade em complemento com a fórmula resolutive quando estudado o assunto de equação do segundo grau.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O experimento e a construção geométrica utilizada mediante o uso do Geogebra se revelaram simples, apesar de serem necessárias ferramentas de medição para obter um resultado suficientemente próximo, e curiosa, dado o fato de as raízes serem o comprimento de dois segmentos. Também, este método se mostrou útil quando há raízes irracionais, não em questão de precisão, pois há uma perda das casas decimais quando se utiliza régua e compasso, por exemplo, mas em questão de facilidade em reconhecer e descobrir estes valores. Tais fazeres matemáticos se revelaram não usuais e despertaram o interesse dos licenciandos em matemática.

Atualmente, observamos o desestímulo no aprendizado da matemática, sob muitos aspectos, em decorrência do excesso de fórmulas decoradas e falta de compreensão, como enfatizado por Resende e Mesquita (2013). Apesar da fórmula resolutive da equação do segundo grau ter uma demonstração, a álgebra envolvida tem se mostrado desinteressante aos estudantes, incentivando-os a memorizar uma fórmula, a qual, além de ser um desafio em alguns casos, dificilmente se mostra uma forma efetiva a longo prazo.

Em linhas gerais, o experimento suscitou reflexões que nos levam a considerar que, o uso de régua e compasso e a geometria sintética, do período que viveu Agnesi, juntamente com o uso de ferramentas tecnológicas, dos dias atuais, despontam como reflexos de paradigmas distintos, e nos convidam, para além da possibilidade de resoluções intuitivas ou independente da utilização de fórmulas resolutivas, à reflexões acerca de distintas práticas matemáticas que sinalizam potencialidade de aliança entre história da matemática e tecnologias digitais, conforme aponta Sousa (2020; 2023).

REFERÊNCIAS

- AGNESI, Maria Gaetana. **Instituzioni Analitiche ad Uso Della Gioventú Italiana**. Nella Regia Ducal Corte, 1748.
- BOYER, Carl. **História da Matemática**. trad. E. F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- DANTAS, Sérgio; APARECIDA, Loreni; BALDINI, Ferreira. **Produção de Conhecimentos Matemáticos e Tecnológicos na Resolução de Problemas com o GeoGebra**, 1997.
- DESCARTES, Rene. **The Geometry of Rene Descartes**. with a fac-símile of the first edition, translated by D.E.Smith & M.L.Latham, New York: Dover Publications, 1954.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. trad. H.H.Domingues, Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1995.
- FENDLER, I. The upside of Presentism. Professorado. **Revista de Currículum y Formación de Profesorado**, v. 13, n. 2, pp. 1-15, Universidade de Granada, España, 2009.
- MATTOS, Sandra Maria Nascimento de. **Conversando sobre metodologia da pesquisa científica**. Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2020.
- MAZZOTI, Massimo. **The World of Maria Gaetana Agnesi, Mathematician of God**, Baltimore: The John Hopkings University Press, 2007.
- MOURA, Roseli Alves de; SAITO, Fumikazu. Disseminação do estudo de Análise Matemática e a Repercussão de Instituzioni Analitiche de Maria Gaetana Agnesi. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Pós-Graduandos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 23, n. 1, p. 810-832, 2021. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p810-832>.
- RESENDE, G.; MESQUITA, M. da G. B. de F. (2013). Principais Dificuldade Percebidas no Processo Ensino-Aprendizagem de Matemática em Escolas do Município de Divinópolis, MG. **Em Teia | Revista De Educação Matemática E Tecnológica Iberoamericana**, 3(3). Recuperado de <https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/2193>.
- SOUSA, Gisele C. De.; FELIPE, Pérola D. G. História Quadrinhos na Educação. **In: al-Biruni e sua Matemática em História em Quadrinhos**. Fortaleza, 2021.
- SOUSA, Giselle Costa de. **Aliança entre História da Matemática e Tecnologias via Investigação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2020.
- SOUSA, Giselle Costa de. **Aliança entre história da matemática e tecnologias digitais na educação matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2023.
- STRUICK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. Tradução J.C.S. Guerreiro, 2. Ed., Lisboa: Ciência Aberta, Gradiva, 1992.