

Riemann ou Riemann-Dini? Qual o nome do teorema sobre séries condicionalmente convergentes?

Riemann or Riemann-Dini? What is the name of the theorem on conditionally convergent series?

Mateus Bernardes¹  

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

RESUMO

As séries numéricas convergentes podem ser divididas em duas categorias: aquelas que são absolutamente convergentes, isto é, que convergem mesmo quando seus termos são tomados em módulo; e aquelas que são condicionalmente convergentes, isto é, aquelas que quando seus termos são tomados em módulo, se tornam divergentes. Esta divisão não é apenas retórica, estes dois tipos de séries têm propriedades bastante distintas, entre elas aquela sobre a validade da propriedade comutativa da soma: ela vale para séries absolutamente convergentes e não vale para as condicionalmente convergentes. Este resultado é conhecido desde a primeira metade do século XIX, tendo sido citada por Dirichlet, que não a demonstrou. A primeira demonstração do resultado é devida a Riemann, e posteriormente por Dini, que teria acrescentado uma pequena contribuição àquela demonstração de Riemann. Tanto na bibliografia clássica de Análise Matemática quanto na científica, em geral, o resultado aparece citado ora como teorema de Riemann, ora como teorema de Riemann-Dini. No Brasil, parece haver uma distinção temporal: enquanto as primeiras referências da primeira metade do século XX nomeiam o resultado como Riemann-Dini, as referências modernas parecem preferir a versão que credita o resultado apenas a Riemann. Neste trabalho investigamos a trajetória deste resultado surgido em meados do século XIX, passando pelos matemáticos alemães e italianos e a forma como o resultado chega ao Brasil no início do século XX, permitindo discutir a forma como resultados clássicos são nomeados.

Palavras-chave: Séries numéricas; Convergência Absoluta; Comutatividade; Teorema de Riemann; Teorema de Riemann-Dini.

ABSTRACT

Convergent numerical series can be divided into two categories: those that are absolutely convergent, meaning they converge even when their terms are taken in absolute value; and those that are conditionally convergent, meaning that when their terms are taken in absolute value, they become divergent. This division is not merely rhetorical—these two types of series have distinct properties, including the validity of the commutative property of addition. This property holds for absolutely convergent series but fails for conditionally convergent ones. This result has been known since the first half of the 19th century, having been cited by Dirichlet, who did not prove it. The first proof is attributed to Riemann, and later refined by Dini, who reportedly added a minor contribution to Riemann's original demonstration. In both classical mathematical analysis literature and broader scientific works, the result is alternately referred to as Riemann's theorem or the Riemann-Dini theorem. In Brazil, a chronological distinction appears: early 20th-century references label it the Riemann-Dini theorem, while modern sources tend to credit Riemann alone. This work investigates the trajectory of this result, which emerged in the mid-19th century through the contributions of German and Italian mathematicians and explores how it reached Brazil in the early 20th century. This historical analysis provides a basis for discussing the naming conventions of classical mathematical results and the evolution of academic attribution.

Keywords: Numerical Series; Absolute Convergence; Commutativity; Riemann's Theorem; Riemann-Dini Theorem.

INTRODUÇÃO

Um resultado clássico em análise matemática estabelecido na segunda metade do século XIX, lida com o comportamento de séries infinitas de números reais que são condicionalmente convergentes. Afirma que um reordenamento nas parcelas da série pode mudar o valor da soma e que, com

¹ Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia (UFPR). Professor Associado (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil.
E-mail: mbernardes@utfpr.edu.br.

o reordenamento adequado destes termos, a série pode convergir para qualquer valor previamente fixado. Já para as séries que são absolutamente convergentes qualquer permutação na ordem em que são somadas as parcelas mantém a soma inalterada.

Na bibliografia de análise o resultado é geralmente citado como teorema de Riemann ou então teorema de Riemann-Dini. Aparentemente a escolha por uma das formas de referenciar o resultado depende, *grosso modo*, da origem geográfica do autor: em geral as referências anglo-saxônicas atribuem o resultado exclusivamente a Riemann, enquanto que as italianas preferem Riemann-Dini, ainda que possa ser considerada a hipótese de que Dini tenha incluído uma pequena contribuição ao resultado de Riemann. Cabe também ressaltar que o resultado era certamente conhecido antes desses dois matemáticos, pois havia sido enunciado antes por Dirichlet. Quando se trata das referências brasileiras em análise, as duas formas ocorrem e parecem depender mais da época em que foram escritas do que de outros fatores.

O nome Riemann associado ao teorema deve-se, naturalmente, a Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemão de grande proeminência por suas contribuições sobretudo na teoria da integração e geometria diferencial. Já o nome Dini refere-se a Ulisse Dini (1845-1918), matemático italiano de obra relevante em diversas áreas, entre elas a análise matemática.

Neste trabalho pretendemos discutir e compreender as circunstâncias envolvidas numa e noutra nomeação, e mesmo que não aponte para uma conclusão clara e definitiva – mesmo porque talvez a tarefa seja irrealizável – veremos que a investigação parece sugerir a maneira sinuosa como alguns resultados importantes circularam durante a era de ouro da análise, época de sua Aritmetização na segunda metade do século XIX.

Este trabalho está baseado em ampla pesquisa bibliográfica que fornece elementos para uma comparação e análise qualitativa dos textos e obras, tanto as originais de Riemann e Dini, quanto as de caráter didático – livros-texto de análise matemática dedicados ao ensino da disciplina. Também faremos referências a artigos científicos que citam o teorema, ainda que seu objetivo não seja especificamente discuti-lo, mas dentro dos quais este aparece como resultado auxiliar. Esta análise tem por objetivo abrir uma discussão sobre a autoria de determinados resultados em matemática e a forma como ela é, em muitos casos, designada.

UMA CLASSIFICAÇÃO PARA AS SÉRIES NUMÉRICAS

Uma série numérica é uma soma com infinitos termos como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots,$$

onde cada a_i na expressão acima é um número real.

Uma série pode ser convergente, quando esta soma resulta num número real ou divergente, caso contrário. Dizer que a soma resulta num número real significa entender a soma como um processo limite, isto é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N)$$

de tal forma que a convergência depende da existência deste limite.

Dentre aquelas que convergem ainda podemos fazer uma distinção entre as que são absolutamente convergentes e as que são condicionalmente convergentes.

Uma série como a acima é absolutamente convergente quando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| + \dots$$

é convergente, isto é, quando a convergência da série ocorre mesmo com as parcelas sendo tomadas em valor absoluto. Um exemplo é a série:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots,$$

que converge para 1. Sabe-se da teoria de séries que, toda série que converge absolutamente, também converge. Portanto a série

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots,$$

é absolutamente convergente pois, com os valores absolutos a série é exatamente a anterior. Entretanto a recíproca não é válida, isto é, existem séries convergentes que não são absolutamente convergentes como atesta o contraexemplo clássico, a série harmônica alternada:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots,$$

que converge para $\ln 2$, entretanto não converge em módulo, pois a série tomada com os módulos dos termos,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots,$$

trata-se da série harmônica, que é reconhecidamente divergente.

Entretanto, a distinção que mais nos interessa neste trabalho diz respeito à validade ou não da propriedade comutativa para estas somas. Veremos ao longo deste texto como se chegou à conclusão de que, enquanto para as séries absolutamente convergentes a propriedade é válida, para as condicionalmente convergentes pode não ser. Sendo $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma permutação da ordem dos números naturais, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)} + a_{\varphi(4)} + a_{\varphi(5)} + \dots$$

será considerada um reordenamento da série original, com a ordem dos termos trocada. Assim, por exemplo:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \dots$$

é um reordenamento da série harmônica alternada apresentada acima, que converge para $3/2 \ln 2$. Fato é que, para uma série que não seja absolutamente convergente, a permutação na ordem dos termos da série pode resultar numa outra soma que não a original, ou seja, a propriedade comutativa típica das somas finitas deixa de valer aqui.

O TEOREMA SOBRE REORDENAMENTO DE SÉRIES POR DIRICHLET

Segundo Laugwitz (2008) a convergência das séries acima para $\ln 2$ e $3/2 \ln 2$, já era conhecido desde os tempos de Euler. Entretanto não eram consideradas como tendo sido obtidas uma da outra por permutação de seus termos, mas como objetos completamente distintos, derivados da expansão em série de Taylor de diferentes funções. De tal sorte que essa discussão sobre comutatividade estava fora de cogitação na época.

Foi só em 1837 que Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) citou de maneira um tanto marginal este importante resultado, afirmando que para séries absolutamente convergentes a propriedade comutativa da soma estava garantida (Hairer; Wanner, 1995). Neste trabalho ele mostra que é possível encontrar infinitos números primos em progressão aritmética que tenham o primeiro termo e a razão, primos entre si (Dirichlet, 1837). Em tradução livre temos:

[...] a diferença essencial que existe entre dois tipos de séries infinitas. Se considerarmos cada valor [absoluto] em vez de cada termo ou, sendo imaginário, seu módulo, então dois casos podem acontecer. Ou é possível fornecer um valor finito que seja maior que a soma de qualquer um de muitos desses valores ou módulos, ou esta condição não pode ser satisfeita por qualquer número finito. No primeiro caso, a série sempre converge e tem uma soma completamente definida, independentemente de como os termos da série são ordenados [...]. No segundo caso, a série também pode convergir, mas a convergência depende essencialmente do tipo de ordem dos termos. Estando a convergência mantida para uma ordem específica, então ela pode parar [de convergir] quando esta ordem for alterada, ou, se isso não acontecer, então a soma das séries pode vir a ser completamente diferente. Assim, por exemplo, das duas séries formadas a partir dos mesmos termos:

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots \\ &1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \end{aligned}$$

apenas a primeira converge, enquanto para as seguintes:

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \\ &1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots \end{aligned}$$

ambas convergem, mas com somas diferentes (Dirichlet, 1837, p. 48-49).

O texto original exibimos nas Figuras 1 e 2 adiante, extraídas diretamente do trabalho de Dirichlet (1837). Um comentário aqui é fundamental: Dirichlet reconhece as somas como diferentes e as entende como uma sendo obtida da outra através de um reordenamento de seus termos. Entretanto, apesar de saber que o fato estava associado à característica de a série ser ou não absolutamente convergente, Dirichlet não provê uma demonstração do resultado, e tampouco justifica sua supressão.

Figura 1 – Texto original de Dirichlet (1837, p. 48).

Ehe wir weiter gehen, ist es nöthig, den Grund der oben gemachten Voraussetzung anzugeben, nach welcher $s > 1$ sein sollte. Man überzeugt sich von der Nothwendigkeit dieser Beschränkung, wenn man auf den wesentlichen Unterschied Rücksicht nimmt, welcher zwischen zwei Arten von unendlichen Reihen Statt findet. Betrachtet man statt jedes Gliedes seinen Zahlenwerth oder wenn es imaginär ist, seinen Modul, so können zwei Fälle eintreten. Es läßt sich nämlich entweder eine endliche GröÙe angeben, welche die Summe von irgend welchen und noch so vielen dieser Zahlenwerthe oder Moduln stets übertrifft, oder diese Bedingung wird von keiner noch so großen aber endlichen Zahl erfüllt. Im ersteren Falle ist die Reihe immer convergirend und hat eine völlig bestimmte Summe, welche von der Anordnung der Glieder ganz unabhängig ist, sei es nun, daß diese nur nach einer Dimension, sei es, daß sie nach zwei oder mehr Dimensionen fortschreiten, und eine sogenannte Doppel- oder vielfache Reihe bilden. Im zweiten der eben unterschiedenen Fälle kann zwar die Reihe auch noch convergiren, aber diese Eigenschaft, so wie die Summe der Reihe, werden wesentlich durch die Art der Aufeinanderfolge der Glieder bedingt sein. Findet die Convergenz für eine gewisse Ordnung Statt, so kann sie durch Änderung

Fonte: Foto do autor, da obra (Dirichlet, 1837, p. 48).

Figura 2 – Texto original de Dirichlet (1837, p.49).

dieser Ordnung aufhören, oder es kann, wenn dies nicht der Fall ist, die Summe der Reihe eine ganz andere werden. So ist z. B. von den beiden aus denselben Gliedern gebildeten Reihen

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

nur die erste convergirend, während die folgenden

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

zwar beide convergiren, aber keinesweges dieselbe Summe haben.

Fonte: Foto do autor, da obra (Dirichlet, 1837, p. 49).

O TEOREMA SOBRE REORDENAMENTO DE SÉRIES POR RIEMANN

Foi só no ano de 1868 que a primeira prova deste resultado foi publicada. Seu autor, Riemann, havia falecido dois anos antes de ver o resultado publicado e aparentemente não tinha a intenção de fazê-lo. Ele o obtivera em 1854 quando apresentava sua habilitação para professor em Göttingen (Laugwitz, 2008; Gray, 2015). Na ocasião Riemann apresenta um trabalho sobre representação

de funções em séries de Fourier, fortemente influenciado por Dirichlet (Gray, 2015), de quem era admirador e que havia conhecido na passagem deste último por Göttingen.

Quem publica o resultado é Richard Dedekind, também professor em Göttingen e com quem Riemann mantinha uma longa relação de amizade. O texto aparece no anuário de pesquisa da universidade referente aos anos de 1866-67, e na apresentação Dedekind escreve:

Este tratado foi apresentado em 1854 pelo autor para sua habilitação na Universidade de Göttingen na Faculdade de Filosofia. Embora o autor aparentemente não pretendesse publicá-lo, a publicação aqui na sua forma completamente inalterada é suficiente tanto pelo grande interesse do próprio assunto como pela forma como trata os princípios mais importantes da análise infinitesimal, parece justificada² (Riemann, 1868, p. 87).

Mais uma vez, o resultado aparece no texto de maneira relativamente marginal, uma vez que o objetivo do trabalho incluía resultados mais robustos que este. Em relação ao que Dirichlet havia proposto anos antes, a diferença é que Riemann agrega ao comentário uma demonstração. Inicialmente Riemann repete o comentário de Dirichlet a respeito da classificação das séries em duas categorias:

[...] as séries infinitas se enquadram em duas classes essencialmente diferentes, dependendo se permanecem convergentes ou não quando todos os elementos se tornam positivos. Na primeira, os membros podem ser posicionados conforme desejado, mas o valor [da soma] na segunda depende da ordem dos membros (Riemann, 1868, p. 97).

Em seguida, insere um resultado preliminar:

Na verdade, numa série da segunda classe, denotamos os termos positivos, por sua vez, por

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

os negativos por

$$-b_1, -b_2, -b_3, \dots$$

Portanto, é claro que tanto $\sum a$ como $\sum b$ devem ser infinitos, porque se ambas fossem finitas, a série convergiria depois de os sinais serem equalizados; mas, se uma delas fosse infinita, a série divergiria (Riemann, 1868, p. 97).

Em seguida Riemann enuncia e demonstra o resultado sobre a não-comutatividade de séries alternadas, que exibimos integralmente na Figura 3, podendo ser livremente traduzido por:

Aparentemente a série pode agora assumir qualquer valor C através de um arranjo adequado dos membros. Se você pegar alternadamente esses grandes membros positivos da série até que seu valor seja maior que C , e esses grandes membros negativos até que seu valor se torne menor que C , então o desvio em relação a C nunca será maior que o valor anterior ao da última mudança do membro do elemento. Uma vez que tanto as quantidades a como as quantidades b eventualmente se tornam infinitamente pequenas à medida

² Diese Abhandlung ist im Jahre 1854 von dem Verfasser behuf seine Habilitation an der Universität zu Göttingen der philosophische Facultät eingereicht. Wiewohl der Verfasser ihre Veröffentlichung, wie es scheint, nicht beabsichtigthat, so wird doch die hiermit erfolgnede Herausgabe derselben in gänzlich ungeänderter Form sowohl durch das hohe Interesse des Gegenstandes an sich als durch die in ihr niedergelegte Behandlungsweise der wichtigsten Principien der Infinitesimal-Analysis wohl hinlänglich gerechtfertigt erscheinen.

que o índice aumenta, os desvios em relação à C também se tornarão arbitrariamente pequenos se avançarmos suficientemente na série, ou seja, a série convergirá para C (Riemann, 1868, p. 97)

Figura 3 – Texto original de Riemann.

ÜB. D. DARSTELLBARK. E. FUNCTION DURCH E. TRIGONOMETR. REIHE. 97

Die Erkenntniss des zur Lösung dieser Aufgabe einzuschlagenden Weges ergab sich ihm aus der Einsicht, dass die unendlichen Reihen in zwei wesentlich verschiedene Klassen zerfallen, je nachdem sie, wenn man sämtliche Glieder positiv macht, convergent bleiben oder nicht. In 'den ersteren können die Glieder beliebig versetzt werden, der Werth der letzteren dagegen ist von der Ordnung der Glieder abhängig. In der That, bezeichnet man in einer Reihe zweiter Klasse die positiven Glieder der Reihe nach durch

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

die negativen durch

$$-b_1, -b_2, -b_3, \dots,$$

so ist klar, dass sowohl $\sum a$, als $\sum b$ unendlich sein müssen; denn wären beide endlich, so würde die Reihe auch nach Gleichmachung der Zeichen convergiren; wäre aber eine unendlich, so würde die Reihe divergiren. Offenbar kann nun die Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder einen beliebig gegebenen Werth C erhalten. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Werth grösser als C wird, und so lange negative, bis ihr Werth kleiner als C wird, so wird die Abweichung von C nie mehr betragen, als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes. Da nun sowohl die Grössen a , als die Grössen b mit wachsendem Index zuletzt unendlich klein werden, so werden auch die Abweichungen von C , wenn man in der Reihe nur hinreichend weit fortgeht, beliebig klein werden, d. h. die Reihe wird gegen C convergiren.

Fonte: Foto do autor, da obra (Riemann, 1868, p. 97)

Este resultado é auxiliar na construção daqueles que seriam o *core* da apresentação de Riemann e possivelmente seja por isso que ele não lhe tenha dedicado excessiva atenção. Também não cita diretamente o comentário de Dirichlet a este respeito no artigo de 1837, que dificilmente ele desconheceria.

O TEOREMA SOBRE REORDENAMENTO DE SÉRIES POR DINI

A próxima referência a este mesmo resultado devemos a Ulisse Dini, matemático italiano da segunda metade do século XIX, a quem devemos resultados importantes da análise, principalmente na teoria da integração (Baroni; Otero-Garcia, 2014). Sua carreira como matemático e professor inicia-se na universidade de Pisa, no ano de 1866, o ano da morte de Riemann.

Dini era “o pupilo favorito” de Enrico Betti (Ford, 1920), que não por acaso estivera na Alemanha com Riemann anos antes e o recebera na Itália quando este veio cuidar da sua saúde. Segundo (Laugwitz, 2008) Betti era, na Itália, a pessoa com quem Riemann tinha maior proximidade. Em 1877 Dini publica um famoso tratado chamado Fundamentos para a teoria das funções de variável real (*Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*) (Dini, 1878). Segundo Walter Ford, que escreveu o obituário de Dini para a Sociedade Matemática Americana, este trabalho “era totalmente original consigo e desde então passou a ser encarado como basal na teoria de funções de variável real” (Ford, 1920, p. 174).

Neste primeiro período de sua vida, entretanto, Dini ainda não havia iniciado as pesquisas que o fariam famoso nem havia entrado ainda neste vasto campo chamado análise pura, em cujo desenvolvimento estaria destinado a desempenhar um papel atuante. A transição dos seus interesses e trabalhos neste campo aconteceram por volta de 1870. Nesta data comparativamente prematura deve ser recordado que esta nova e mais rigorosa análise (assim chamada “análise moderna” hoje em dia) era pouco conhecida no mundo como um todo, estando o espírito dos seus métodos confinado a uma limitada escola de pupilos em torno de Weierstrass na Alemanha³ (Ford, 1920, p. 174).

É neste trabalho de 1877 onde consta o resultado sobre séries condicionalmente convergentes que discutimos no presente texto. O capítulo sobre séries inicia com a definição de séries de números reais ou complexos passando pela sua convergência e divergência. É neste que se comenta que “se demonstra que para que uma série real ou complexa seja convergente independente da ordem dos termos é necessário e suficiente que a série formada com os valores absolutos ou com os módulos dos mesmos termos seja convergente”⁴ (Dini, 1878, p. 95).

Em seguida, ele enuncia o resultado sobre a não comutatividade de séries que não são absolutamente convergentes, aquilo que seria o teorema de Riemann. O trecho original incluímos nas Figuras 4 e 5, e a tradução livre exibimos abaixo.

Sendo dada uma série real:

$$(5) u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

cujos termos são em parte positivos e em parte negativos e tendem a zero com o crescimento infinito de n , e sendo:

$$(6) \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

³ At this early period of his life, however, Dini had not yet begun the researches for which he is to be regarded as famous nor had he in fact even entered seriously into that broad field, namely pure analysis, in whose development he was destined soon to play an active part. The transition of his interest and labors to this latter field took place about 1870. At this comparatively early date it will be recalled that the newer and more rigorous analysis (the so-called “modern analysis” of to-day) was but little known to the world at large, At this comparatively early date it will be recalled that the newer and more rigorous analysis (the so-called “modern analysis” of to-day) was but little known to the world at large, the spirit of its methods being virtually confined to the limited school of pupils immediately surrounding Weierstrass in Germany

⁴ Si dimostra che onde una serie reale o complessa sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini è necessario e sufficiente che la serie formata coi valori assoluti o coi moduli degli stessi termini sia convergente.

$$(7) \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n + \dots$$

as séries de termos positivos e dos valores absolutos dos termos negativos:

1º. Se estas duas séries (6) e (7) são ambas convergentes, a série dada (5) é convergente independentemente da ordem se seus termos:

2º. Se só uma das séries (6) e (7) é divergente, a série dada (5) é divergente em qualquer ordem que se tomem os seus termos:

3º. Se as séries (6) e (7) são ambas divergentes, poder-se-á sempre mudar a ordem dos termos na série (5) de modo a fazer com que essa se torne convergente e tenha como soma uma quantidade qualquer dada, ou se torne divergente ou se torne indeterminada; e isso poderá ser feito de um número infinito de formas (Dini, 1878, p. 98).

Na sua versão, Dini generaliza o resultado de Riemann incluindo a possibilidade de que, permutando-se os termos da série condicionalmente convergente, ela seja divergente, algo que não aparecia na versão original de Riemann. Além disso, a demonstração é mais algébrica, mais formal do que aquela apresentada pelo alemão. Ressalte-se também que Dini não cita não Dirichlet, tampouco Riemann. É bastante improvável que ele desconhecesse os resultados, principalmente o de Riemann, pela relação que ambos tinham com Enrico Betti. Tanto que, num outro artigo de 1873 sobre unicidade do desenvolvimento de funções em série (Dini, 1875), ele cita o artigo de Riemann onde aparece o resultado sobre não-comutatividade de séries condicionalmente convergentes.

Os motivos pelos quais os resultados originais não são citados por Dini estão inacessíveis, e só podemos especular a respeito. A impressão que fica é que, dada a marginalidade dos resultados tanto em Dirichlet (1839) quanto em Riemann (1868), Dini não tenha achado necessária a citação. É até mesmo possível que esta comutatividade de séries condicionalmente convergentes fosse de domínio comum mesmo antes de Dirichlet.

Figura 4 – Texto original de Dini.

$$(5) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

i cui termini sono in parte positivi e in parte negativi e tendono a zero col crescere indefinitamente di n , e essendo:

$$(6) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

$$(7) \quad \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n + \dots$$

le serie dei termini positivi e dei valori assoluti dei termini negativi:

1.º *Se queste due serie (6) e (7) sono ambedue convergenti, la serie data (5) è convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini:*

2.º *Se una sola delle serie (6) e (7) è divergente, la serie data (5) è divergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini:*

3.º *Se le serie (6) e (7) sono ambedue divergenti, si potrà sempre*

Fonte: Foto do autor, da obra (Dini, 1878, p. 98)

Figura 5 – Texto original de Dini.

— 99 —

cambiare l'ordine dei termini nella serie (5) in modo da far sì che essa divenga convergente e abbia per somma una quantità qualunque data, o venga divergente o venga indeterminata; e ciò potrà anche farsi in un numero infinito di modi.

Fonte: Foto do autor, da obra (Dini, 1878, p. 99)

O TEOREMA SOBRE REORDENAMENTO DE SÉRIES: UM RESUMO

Esta última hipótese mereceria uma investigação mais detalhada. Por exemplo, um trabalho menos conhecido chamado Sobre Séries Infinitas e sua Convergência (*Über unendliche Reihen und deren Convergenz*) de Wilhelm Scheibner (1826-1908), lançado em 1860, traz o teorema de Riemann e uma demonstração. Scheibner parece ter sido um matemático de carreira discreta, de quem se tem pouca informação. Foi professor em Leipzig e doutorou-se em Halle sob a orientação de Carl Gustav Jakob Jacobi (1805-1851). Talvez por ter este perfil, seu nome não tenha sido historicamente associado ao resultado.

Fato é que, de tudo que foi visto até agora, a não comutatividade de uma série condicionalmente convergente foi estabelecida em três etapas, ao longo do terço médio do século XIX. Dirichlet enunciou o resultado, em seguida Riemann e Scheibner (1860) o demonstraram. Finalmente, Dini generalizou o mesmo, incluindo o caso divergente.

Na literatura científica encontramos variedade de citações do resultado. Investigamos seis textos, dos quais quatro citam o resultado como teorema de Riemann e dois deles como de Riemann-Dini. Desses dois, um é de autores italianos e outro de autor brasileiro.

Por exemplo: em Smith (1975); Cowen, Davidson e Kaufman (1980); Stout (1986) e Gilula (2021) encontramos uma discussão sobre a classe de permutações na ordem dos termos de uma série condicionalmente convergente. São resultados que partem do fato que este tipo de soma não goza da propriedade comutativa, e em todos estes, cita-se o resultado como teorema de Riemann. Tratam-se de autores norte-americanos ou radicados nos Estados Unidos.

Em Rao e Tulone (2007) o objetivo é apresentar um análogo ao resultado discutido neste texto para integrais que não são absolutamente convergentes. Botelho (2001) descreve as séries incondicionalmente convergentes no contexto da Análise Funcional, para séries formadas por elementos de um espaço normado. Nestes trabalhos a referência é feita a Riemann e Dini quando o resultado é citado.

O TEOREMA DE RIEMANN-DINI NO BRASIL

É interessante notar como a oposição entre as séries absolutamente e condicionalmente convergentes quanto à comutatividade de seus termos aparece na bibliografia brasileira de análise matemática.

Tendo a criação da USP e a instituição da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras em 1934 como ponto de partida para a modernização da matemática e do seu ensino, a influência da ma-

temática italiana parece ter sido inevitável, principalmente pela chegada de professores vindos da Itália, notadamente Fantappiè (Silva, 2006) (Lima; Dias, 2010a e 2010b).

Fantappiè veio para colaborar na implantação deste projeto moderno de ensino, ciências e matemática e era, de acordo com Táboas (2005), discípulo de Vito Volterra (1860-1940). Volterra, um eminente matemático italiano que por sua vez, era discípulo de Dini (Biacino, 2019). Silva (2006) e Otero-Garcia (2011) trazem em sua seção de anexos o programa de Análise Matemática proposto para o primeiro ano do curso de matemática, em 1935. Nestes anexos encontramos o teorema citado como de Riemann-Dini. Provavelmente foi inserido no programa por Fantappiè no contexto do estudo das séries absolutamente convergentes, como parte da reestruturação do ensino de análise, uma vez que “percebe-se uma atenção destacada para a disciplina: Análise Matemática, que parece ser o eixo condutor do curso de Ciências Matemáticas” (Silva, 2006; p. 58).

Começa-se a trabalhar a Análise Matemática, na FFCL da USP, de uma maneira mais rigorosa. Influência direta de Luigi Fantappiè, conforme citado por Catunda no prefácio do 1º. Volume do seu Curso de Análise Matemática, bem como pode-se ver na 1ª. página do “livro” Curso de Catunda Análise Matemática de Fantappiè por Catunda (Silva; 2006, p. 60).

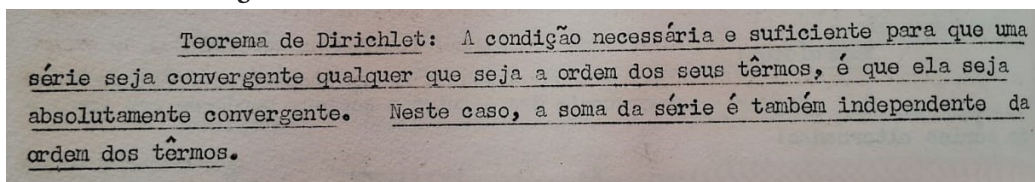
Nos programas da disciplina para os anos seguintes este teorema, em qualquer uma das suas nomenclaturas, não aparecer mais explicitamente no restante da documentação incluída nos anexos dos trabalhos citados acima.

Ele **só** vai aparecer no curso de análise de Omar Catunda.

Existem alguns motivos para destacar Omar Catunda (1906-1986) como um importante personagem da história da matemática no Brasil [...]. Ele foi um dos principais representantes e divulgadores da escola matemática implantada na Universidade de São Paulo (USP) pelo italiano Luigi Fantappiè [...] de quem foi o primeiro assistente e com quem colaborou intensamente na implantação do Departamento de Matemática. Catunda sucedeu a Fantappiè na cátedra de análise matemática do Departamento, como interino em 1939 e como efetivo em 1945, sendo também seu diretor durante muitos anos. Aposentou-se na USP em 1962 e transferiu-se para a Universidade da Bahia (UBa) em janeiro de 1963, onde tornou-se diretor do Instituto de Matemática e Física (IMF), que ajudara a fundar em 1960 (Lima; Dias, 2010a).

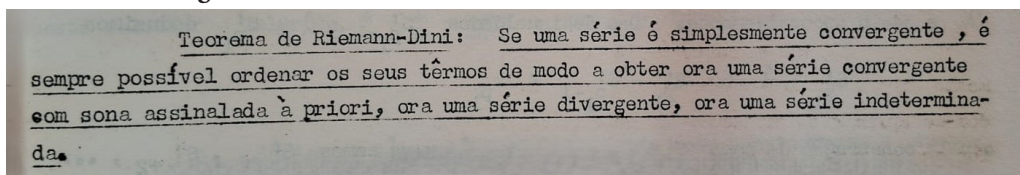
No Curso de Análise volume 1 de Omar Catunda, editado em 1962 pela Universidade de São Paulo, encontramos o teorema de Dirichlet e o de Riemann-Dini sobre a comutatividade de séries absolutamente convergentes. Algo que parece muito natural dada a relação de Catunda com Fantappiè, além do fato de que a primeira versão do texto de Catunda baseava-se em notas de aula do mestre italiano (Lima Dias, 2010a e 2010b). Nas figuras 6 e 7 exibimos os teoremas de Dirichlet e de Riemann-Dini, respectivamente, como aparecem em Catunda (1962).

Figura 6 – Teorema de Dirichlet no texto de Omar Catunda



Fonte: Foto do autor, da obra Catunda (1962).

Figura 7 – Teorema de Riemann-Dini no texto de Omar Catunda



Fonte: Foto do autor, da obra Catunda (1962).

Obras de autores contemporâneos a Catunda, como Abdelhay (1955) e Cossi (1960) também trazem a versão de Riemann e Dini para o teorema. José Abdelhay era professor na Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil (RJ), enquanto Ernesto Bruno Cossi era professor do Instituto de Pesquisas Físicas da Universidade do Rio Grande do Sul. Os três estiveram no Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática, ocorrido em Poços de Caldas-MG no ano de 1957 (Calabria; Nobre, 2013).

Outra influência italiana pode ter sido o texto de Francesco Severi (1879-1961), *Lezioni di Analisi*, de 1933, que recebeu uma análise extensa em Oliveira (2004). Severi teria indicado Fantappiè a Teodoro Ramos por ocasião da criação da USP (Táboas, 2005). O livro de Severi seria o livro texto adotado por Fantappiè na USP (Otero-Garcia, 2011), e que foi usado apenas no primeiro ano do curso, segundo Oliveira (2004). Neste texto o resultado faz referência tanto a Riemann quanto a Dini (Oliveira, 2004).

Fato é que na próxima geração de textos didáticos de análise matemática, ou não aparece mais a que seria a versão estendida do teorema, devida a Dini, ou, quando aparece, seu nome é suprimido. Nos referimos aqui aos livros de Lima (1976), Figueiredo (1996) – cuja primeira edição é de 1975 – e Ávila (1999). Curiosamente, apenas em Figueiredo (1996) o resultado sobre a não comutatividade das séries condicionalmente convergentes é nomeado como teorema de Riemann, ainda que nos três textos o resultado seja creditado a Riemann.

O seguinte resultado, devido a Riemann, contém a recíproca do teorema anterior.
Teorema 23: Seja $\sum a_n$ uma série condicionalmente convergente. Dado qualquer número real c , existe uma reordenação (b_n) dos termos de $\sum a_n$, tal que $\sum b_n = c$ (Lima, 1976, p. 120).

Adiante, ao final da página, Elon Lima ainda insere uma observação que estabelece: “Um raciocínio análogo (mais simples) mostra que uma conveniente mudança na ordem dos termos de uma série condicionalmente convergente pode fazer com que suas reduções tendam a $+\infty$ ou a $-\infty$ ”. (Lima, 1976, p. 120).

O enunciado incluído por Djairo Figueiredo no seu texto segue um exemplo sobre a reordenação da série harmônica alternada, similar à exibida aqui.

Teorema de Riemann: Seja $\sum a_n$ uma série condicionalmente convergente e seja c , um real qualquer. Então existe uma reordenação da série que converge para c . Além disso, existem reordenações da série que divergem para $-\infty$ e para $+\infty$ (Figueiredo, 1996, p. 214).

A versão do teorema que aparece no livro de Geraldo Ávila talvez seja a mais econômica, por assim dizer. Ele também parte da série harmônica alternada como exemplo para exibir o resultado e faz referência ao original de Riemann (1868):

Esse surpreendente resultado, que discutiremos a seguir, é descrito e demonstrado por Riemann [...] em seus comentários sobre o trabalho de Dirichlet.

3.29. Teorema: Se uma dada série $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, seus termos podem ser reordenados de maneira que a série convirja para qualquer número S que se prescreva (Ávila, 1999, p. 67).

Dessa geração, sabemos que Geraldo Ávila estudou na USP, tendo usado o livro de Catunda (1962) no curso de análise como mostram Lima e Dias (2010a). Quanto aos outros dois não temos notícia sobre sua relação com esse texto. Os três tiveram passagem pelos Estados Unidos na pós-graduação entre o final da década de 50 e início dos anos 60, e certamente essa passagem influenciou a forma como conceberam seus cursos de análise.

Uma das referências que é comum aos três textos é o *Princípios de Análise Matemática* de Walter Rudin, cuja primeira edição é de 1953. Curiosamente, neste texto o resultado é creditado a Riemann, ainda que a versão nele apresentada seja mais parecida com a de Dini, incluindo a possibilidade de que a reordenação dos termos leve a série à divergência (Rudin, 1976). O teorema enunciado aqui faz-se em termos de limites superiores e inferiores, que é o mesmo caminho adotado por Apostol (1974). Uma possibilidade para que esta escolha tenha sido feita desta maneira encontramos na lista de referência de ambos os textos: trata-se do livro de Konrad Knopp (1882-1957), matemático alemão que foi professor em Berlim e Tübingen. *Teoria e Aplicações das Séries Infinitas* é citado na sua versão inglesa (Knopp, 1947), baseada na primeira edição alemã de 1921. Knopp enuncia o resultado que exibimos na versão original em inglês nas Figuras 8 e 9, como:

Teorema do rearranjo de Riemann: Se $\sum a_n$ é uma série condicionalmente convergente, nós podemos, através de um reordenamento adequado, obter a série $\sum a'_n$ com qualquer uma das seguintes propriedades:

Convergindo para uma soma prescrita arbitrariamente, s' ;

Divergindo para $+\infty$ ou para $-\infty$;

Exibindo como limites superior e inferior de suas somas parciais, dois números arbitrários μ e χ , com $\mu \geq \chi$ (Knopp, 1947, p. 318-319).

Figura 8 – Teorema do rearranjo de Riemann, enunciado por Konrad Knopp

187. Riemann's rearrangement theorem. *If $\sum a_n$ is a conditionally convergent series, we may, by a suitable rearrangement (v. 27, 3), deduce a series $\sum a'_n$ with any one of the following properties:*

Fonte: Foto do autor, da obra Knopp (1947, p. 318).

Figura 9 – Teorema do rearranjo de Riemann, enunciado por Konrad Knopp**§ 44. Rearrangement of conditionally convergent series. 319**

- a) *to converge to an arbitrary¹⁶ prescribed sum s'* ;
 b) *to diverge to $+\infty$ or to $-\infty$* ;
 c) *to exhibit as upper and lower limits of its partial sums two arbitrary numbers μ and κ , with $\mu \geq \kappa$.*

Fonte: Foto do autor, da obra Knopp (1947, p. 319).

Na referência numerada com 16 no item a) da Figura 9, Knopp cita o texto original de Riemann (1868), de onde podemos entender que ele interpreta que o resultado original compreendia até este item apenas. Observamos também que, em seguida ao enunciado do teorema de Riemann, Figueiredo (1996) enuncia uma proposição com o mesmo resultado sobre limites superiores e inferiores citados acima, o que nos parece uma clara influência da perspectiva adotada nestes textos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O teorema de Riemann ou de Riemann-Dini estabelece um fato notável a respeito das séries ditas condicionalmente convergentes: é possível reordenar seus termos de forma conveniente de maneira a fazer com a série convirja para qualquer valor previamente fixado, inclusive é possível fazê-la divergir a partir de um reordenamento adequado. Esse resultado é tão forte que estabelece que para uma série desta natureza – que afinal de contas é uma soma – a propriedade comutativa não está garantida.

O resultado estabelecido aos poucos ao longo do terço médio do século XIX teve contribuições de Dirichlet, Riemann e Dini. Não há unanimidade quando se trata de nomear o resultado que geralmente leva o nome de Riemann, eventualmente acompanhado pelo de Dini. A escolha por uma ou outra nomenclatura parece depender de fatores distintos, e seria leviano de nossa parte apontá-los de maneira definitiva, dada a natureza qualitativa de nossa análise. Um indício repousa sobre a origem da citação: parece haver uma preferência pela forma teorema de Riemann por autores anglo-saxões, enquanto os italianos preferem teorema de Riemann-Dini. Uma investigação mais profunda poderia confirmar ou refutar esta hipótese.

Quanto à nomenclatura mais utilizada no Brasil, o fator mais importante parece ser o temporal: o resultado chega na primeira metade do século XX por influência de analistas italianos como teorema de Riemann-Dini, mas ao longo do século essa denominação aos poucos vai sendo abandonada em detrimento da nomeação teorema de Riemann, muito provavelmente devido a maior circulação de analistas brasileiros pelos Estados Unidos e Europa como parte de uma política de qualificação do corpo docente e científico nacional ocorrido a partir da década de 1950, permitindo maior acesso a textos de matemática – em particular de análise – mais modernos e atualizados.

Não consideramos as influências e impactos que diferentes nomenclaturas possam exercer sobre a forma como os resultados são apresentados em cursos de licenciatura e acreditamos que estes possam ser um interessante tema de pesquisa futuro.

REFERÊNCIAS

- ABDELHAY, José. **Curso de Análise Matemática, vol. III**. Rio de Janeiro: Editora Científica, 1955.
- APOSTOL, Tom. **Mathematical Analysis**. Amsterdam: Addison Wesley, 1974.
- ÁVILA, Geraldo. **Introdução à Análise Matemática**. São Paulo: Blucher, 1999.
- BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; OTERO-GARCIA, Sílvio César. **Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.
- BIACINO, Loredana. Contribution of Italian Mathematicians to Real Analysis in the last Decades of Nineteenth Century. **Transversal: International Journal for the Historiography of Science**. v.7, p. 1-24, 2019. <http://dx.doi.org/10.24117/2526-2270.2019.i7.02>
- BOTELHO, Geraldo. Séries incondicionalmente convergentes: de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers. **Revista Matemática Universitária**, n. 30, p. 103-111, 2001.
- CALÁBRIA, Angélica Raiz; NOBRE, Sérgio Roberto. Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática: Registros e Personagens. **REMATEC**, ano 8, n.12. 2013
- CATUNDA, Omar. **Curso de Análise Matemática, vol. I**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1962.
- COSSI, Ernesto Bruno. **Análise Matemática, vol. VIII**. Porto Alegre: Universidade do Rio Grande do Sul, 1960.
- COWEN, C. C.; DAVIDSON, K. R.; KAUFMAN, R. P. Rearranging the Alternating Harmonic Series. **The American Mathematical Monthly**, v. 87, n. 10, pp. 817-819, 1980.
- DINI, Ulisse. Sulla unicità degli sviluppi delle funzioni di una variable in serie di funzioni X_n . **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, serie II, tomo VI, p. 216-115. 1875.
- DINI, Ulisse. **Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali**. Pisa: T. Nistri, 1878.
- DIRICHLET, Gustav Peter Lejeune. Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. **Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1837 – Mathematische Abhandlungen**, p. 45–81, 1839.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
- FORD, Walter B. A Brief account of the life and work of the late professor Ulisse Dini. **Bull. Amer. Math. Soc.** 26(4), p.173-177, 1920.
- GILULA, M. A Class of Simple Rearrangements of the Alternating Harmonic Series. **The American Mathematical Monthly**, v. 125, n. 3, p. 245–256, 2018. <https://doi.org/10.1080/00029890.2017.1409571>
- GRAY, Jeremy. **The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century**. Heidelberg: Springer, 2015.
- HAIRER, Ernst; WANNER, Gerhard. **Analysis by its history**. New York: srpringer, 1995.
- KNOPP, Konrad. **Theory and Application of Infinite Series**. London: Blackie and Son Ltd., 1947.

LAUGWITZ, Detlef. **Bernhard Riemann 1826 – 1866: Turning Points in the Conception of Mathematics**. Boston: Birkhauser, 2008.

LIMA, Eliane Barbosa; DIAS, André Luís Mattedi Dias. O Curso de análise matemática de Omar Catunda: uma forma peculiar de apropriação da matemática moderna. **Revista Brasileira de História da Ciência**. Rio de Janeiro, v. 3, n. 2, p. 211-230. 2010a.

LIMA, Eliane Barbosa; DIAS, André Luís Mattedi Dias. A Análise Matemática no Ensino Universitário Brasileiro: a contribuição de Omar Catunda. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35B, p. 453 a 476, 2010b.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise, vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

OLIVEIRA, Antônio Sylvio Vieira de Oliveira. **O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica de São Paulo, no ano de 1904: uma análise documental**. 135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2003.

OTERO-GARCIA, Sílvio César. **Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento sobre seu Ensino – Volume I**. 528f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2011.

RAO, Giuseppe; TULONE, Francesco. Analogue of Dini-Riemann Theorem for Non-Absolutely Convergent Integrals. **Le Matematiche**, vol. LXII, Fasc. 1, p. 129-134, 2007.

RIEMANN, Bernhard. Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. **Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen – dreizenter band von den jahren 1866 und 1867**, p. 87–131, 1868.

RUDIN, Walter. **Principles of mathematical analysis**. New York: McGraw-Hill, 1976.

SCHEIBNER, Wilhelm. **Über unendliche Reihen und deren Convergenz**. Leipzig, 1860.

SILVA, Luiz Roberto Rosa. **Prof. J. O. Monteiro e o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise na Universidade de São Paulo**. 233f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2006.

SMITH, John Howard. Rearrangements of Conditionally Convergent Real Series with Preassigned Cycle Type. **Proc. of the American Mathematical Society**, v. 47, n. 1, January 1975.

STOUT, Quentin F. On Levi's Duality Between Permutations and Convergent Series. **J. London Math. Soc.** (2), 34, p.67-80, 1986.

TÁBOAS, Plínio Zornoff. **Luigi Fantappiè: Influências na Matemática Brasileira – Um Estudo de História como Contribuição para a Educação Matemática**. 207f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2005.