

Definições e demonstrações segundo a característica geométrica de Leibniz

Definitions and demonstrations according to Leibniz's geometric characteristic

Fernando Antonio de Araujo Carneiro¹  

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

RESUMO

Este trabalho consiste no estudo de alguns textos de Leibniz a respeito da característica geométrica por ele criada e desenvolvida, estudo em andamento com o objetivo de encontrar diferenças e semelhanças entre sua nova geometria e a geometria de Euclides ou da geometria de Descartes e de responder algumas perguntas a seguir: Em que Leibniz se distingue do que veio antes? Que motivação ele apresentou para tentar renovar a Geometria? Havia motivos somente teóricos ou também havia motivos práticos na tentativa de criação da característica de Leibniz? O que ele conseguia definir e provar com sua nova Geometria que não havia sido feito antes? A partir de algumas cartas importantes de Leibniz sobre o assunto e artigos de alguns historiadores que escreveram a respeito deste assunto, podemos nos aproximar da resposta de alguns das perguntas. Também empreendemos a análise e explicação de várias definições e demonstrações novas de Leibniz que tiveram importância fundamental no posterior desenvolvimento axiomático da Geometria.

Palavras-chave: Característica Geométrica; Leibniz; Linguagem Universal; Euclides.

ABSTRACT

This work consists of the study of some texts by Leibniz regarding the Geometrical Characteristic created and developed by him, an ongoing study with the aim of finding differences and similarities between his new Geometry and the Geometry of Euclid or the Geometry of Descartes and to answer some following questions: How does Leibniz differ from what came before? What motivation did he present for trying to renew Geometry? Were there only theoretical reasons or were there also practical reasons in the attempt to create the Leibnizian Characteristic? What could he define and prove with his new Geometry that hadn't been done before? From some important letters by Leibniz on the subject and articles by some historians who wrote about this subject, we can get closer to the answer to some of these questions. We also undertake the analysis and explanation of several new definitions and demonstrations by Leibniz that had fundamental importance in the later axiomatic development of Geometry.

Keywords: Geometrical Characteristic; Leibniz; Universal Language; Euclid.

INTRODUÇÃO

Estudaremos os seguintes textos de Leibniz (1646-1716): a carta a Huygens (1629-1695), seus dois suplementos (Loemker, 1976), e o texto de *Circa Geometrica Generalia et Calculus Situs*, editado por Javier Echeverria (Leibniz, 1991).

O presente trabalho é uma análise bibliográfica destes principais textos de Leibniz a respeito da criação e desenvolvimento da sua característica geométrica e comparação com alguns importantes textos anteriores de Descartes e Euclides, com o objetivo de determinar a originalidade de Leibniz, o que ele toma emprestado dos geômetras anteriores e o que o motivou a iniciar este empreendimento.

Esta criação de Leibniz antecipa muito do que foi feito posteriormente em Lógica e Geometria por autores como Hermann Grassmann (1809-1877), Mario Pieri (1860-1913) e Alfred Tarski (1901-1983), o que mostra a importância do feito pioneiro de Leibniz e mostra também como

¹ Doutor em Matemática. Professor Associado da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Rio de Janeiro, Brasil. Email: carneiro@ime.uerj.br

parte desse empreendimento seguiu vivo na pesquisa em Lógica e Geometria ainda em meados do século passado.

A motivação de Leibniz é em parte a mesma motivação do seu projeto de criação da característica universal e em parte preencher o que ele via como lacunas e imperfeições das geometrias de Euclides e Descartes. A lacuna da geometria dos Elementos de Euclides seria a definição muito vaga de linha, superfície e outros objetos básicos. A imperfeição da de Descartes seria não partir de um conceito geométrico elementar como o ponto, mas partir de um menos elementar, como a magnitude.

Na segunda seção falaremos das motivações de Leibniz, na terceira seção apresentaremos algumas definições e demonstrações de Leibniz utilizando a sua característica geométrica. Na última seção faremos nossas considerações finais.

MOTIVAÇÕES – O QUE É UMA CARACTERÍSTICA E AS MOTIVAÇÕES PARA DESENVOLVÊ-LA

Entre o ano de 1679 e o fim de sua vida Leibniz escreveu a respeito de sua característica geométrica, que consistia numa nova maneira de definir e demonstrar fatos básicos da geometria euclidiana. Entre estes textos estão a Carta a Huygens (Loemker, 1976), dois suplementos (Loemker, 1976) e *Circa Caracteristica Geometrica* (Leibniz 1991). Com base nestes documentos tentamos compreender as novas bases sobre as quais Leibniz tentou fundamentar a geometria euclidiana, e algumas das motivações por ele apresentadas em alguns desses documentos.

O que é essa característica que Leibniz tenta criar, que ele busca construir? Primeiro, Leibniz queria criar uma característica universal, que é uma espécie de linguagem universal, uma linguagem artificial que pudesse ser aprendida e utilizada, em teoria, por qualquer ser humano. Segundo Paolo Rossi (Rossi, p. 339 a 341), o objetivo da característica universal de Leibniz é ser uma linguagem universal, superior a qualquer linguagem internacional (porque ela não é só internacional, ela tem as vantagens das linguagens internacionais e mais algumas); é exprimir diretamente conceitos e pensamentos; ser falada e escrita; poder ser aprendida em tempo breve; ser enciclopédica (uma organização racional de todo conhecimento humano); ser um remédio para a memória fraca; ser tal que a conexão entre seus caracteres corresponde à ordem e ligação que existe entre as coisas. Nas palavras de Leibniz no texto “Característica Geral”:

E apesar de homens letrados tenham há já algum tempo pensado em algum tipo de linguagem ou característica universal por meio da qual todos os conceitos e coisas pudessem ser colocadas em bela ordem, e com cuja ajuda diferentes nações pudessem comunicar seus pensamentos e cada uma ler em sua própria língua o que a outra escreveu em sua própria língua, ninguém até o momento tentou criar uma linguagem ou característica que incluísse ao mesmo tempo as artes da descoberta e do julgamento, isto é, uma cujos signos e caracteres servem ao mesmo propósito que signos aritméticos servem para números e signos algébricos para quantidades tomadas abstratamente (Loemker, p. 222, 1976).

Portanto, os signos servem para resolver problemas teóricos como signos algébricos nos ajudam a resolver problemas algébricos. Nas próximas seções veremos que Leibniz consegue fazer demonstrações com a manipulação dos símbolos de sua característica geométrica.

Disse que assim como as categorias ou classes de conceitos simples, deveríamos ter uma nova classe de categorias na qual proposições ou termos complexos pudessem ser arranjados em sua ordem natural. Porque eu não tinha ainda sonhado com demonstrações àquela época e não sabia que geômetras fazem exatamente o que eu buscava quando eles ordenavam proposições numa ordem tal em que uma é demonstrada a partir da outra (Loemker, p. 222, 1976).

O que Leibniz está dizendo é algo que caracteriza, por exemplo, o primeiro livro dos Elementos de Euclides, em que quase toda proposição, de quarenta e oito totais, segue da proposição anterior.

Agora, nas palavras de Javier Echeverria (Echeverria, 1991), especialista em Leibniz e seus textos sobre a característica geométrica, a característica geométrica tem os seguintes elementos:

1. Um sistema de signos (caracteres) que expressam as relações geométricas que não dependem de magnitudes: posição, sítio, copresença. 2. Axiomas gerais e distintos aos de Euclides, que sejam universalmente válidos e expressos combinatoriamente por meio do novo sistema de signos. 3. A nova característica havia de ser capaz também de expressar, construir e demonstrar a partir dos novos axiomas todos os problemas, figuras e demonstrações dos Elementos de Euclides e das Cônicas de Apolônio 4. A nova característica devia ser capaz de engendrar novos problemas, novos objetos e novos teoremas em Geometria, partindo de noções como posição, congruência, espaço, etc. (Echeverria, 1999).

Portanto, uma característica é um método de expressar conceitos por meio de signos, caracteres, e produzir definições, axiomas e demonstrações de teoremas por meio da manipulação combinatória desta linguagem de caracteres. Os geômetras antigos demonstravam proposições complexas a partir de proposições mais simples e básicas, mas não a partir de conceitos e signos mais básicos. Novamente, nas palavras de Leibniz:

Eu necessariamente cheguei a este pensamento digno de nota, de que um tipo de alfabeto de pensamentos humanos pudesse ser criado e que tudo pudesse ser descoberto e julgado por comparação entre letras deste alfabeto e uma análise de palavras produzidas por ele (Loemker, p. 222, 1976).

Portanto, tudo poderia ser julgado verdadeiro ou falso por uma análise de signos e caracteres, não somente por uma análise de proposições. Por exemplo, se A, B e C são caracteres que representam pontos, AB, AC e BC representam segmentos e ABC representa um triângulo. Se a congruência de dois triângulos, ABC e DEF, for equivalente à congruência dos lados respectivos, AB congruente a DE, AC a DF, BC a EF, então essas equivalências poderiam ser usadas para demonstrações por manipulação de signos, como veremos nas próximas seções.

Por que Leibniz procurou criar uma característica geométrica? O que o motivou? Em sua carta a Huygens (Loemker, 1976), ele diz que

Apesar do progresso feito, ainda não estou satisfeito com a Álgebra, pois não fornece os métodos mais econômicos ou as construções mais belas da Geometria. É por isso que acredito que, no que concerne à Geometria, precisamos de uma outra análise que seja especificamente geométrica ou linear e que expresse posição [situs] diretamente como a álgebra expressa a magnitude diretamente (Loemker, 1976, p. 248-249).

O trecho apresenta uma primeira motivação para a criação deste método geométrico: em vez de expressar diretamente magnitudes, expressa diretamente uma qualidade geométrica como a posição. Pelo exemplo anterior, vemos que por meio dos signos dos pontos, que são objetos que se diferenciam somente pela posição, podemos passar a expressar relações entre segmentos, triângulos, e assim podemos tentar construir toda a geometria por meio dessa nova álgebra de signos geométricos. No primeiro suplemento de sua carta (Loemker), Leibniz também diz que

A Álgebra é a característica somente dos números indeterminados ou magnitudes, mas não expressa a posição, ângulos, e o movimento corretamente. Portanto, costuma ser difícil analisar as propriedades de uma figura por meio dos cálculos, e mais difícil ainda encontrar demonstrações geométricas e construções realmente convenientes, mesmo quando o cálculo algébrico está completo (Loemker, 1976, p. 250).

Leibniz, neste trecho, apresenta outra motivação: que a característica represente diretamente qualidades geométricas e que nos torne capazes de encontrar demonstrações e construções geométricas convenientes diretamente da formulação do problema por meio da característica. A álgebra de magnitudes de Descartes nem sempre torna claras as construções correspondentes às equações manipuladas. Veremos na próxima seção alguns exemplos dessas demonstrações dadas por Leibniz.

Leibniz ainda apresenta mais razões para a criação de tal característica:

... Seu maior valor se assenta no raciocínio que pode ser feito e nas conclusões que podem ser inferidas por meio das operações com seus caracteres, que não poderiam ser expressas por figuras e menos ainda por modelos, sem que seja necessário multiplicá-los imensamente ou confundi-los com excesso de pontos e linhas no curso de muitas tentativas fúteis que somos obrigados a fazer. ... Não tenho esperanças de que podemos ir muito longe na Física até encontrarmos tal método de resumo para aliviar o fardo da imaginação (Loemker, p. 250, grifos do autor).

A terceira motivação seria, portanto, evitar sobrecarregar a imaginação, criar uma característica que nos permitisse evitar o recurso a diagramas e figuras tão comuns às edições dos Elementos de Euclides. Essa motivação está relacionada à motivação da característica geral, a que afirma que esta deve ser uma linguagem que pode ser aprendida facilmente sem sobrecarregar a memória. A criação da característica geométrica faz parte da criação de uma característica universal. Leibniz tentava também criar uma tal linguagem, não só para objetos matemáticos ou, particularmente, geométricos, mas todos os objetos e conceitos existentes, e nisso foi influenciado por Dalgarno e Wilkins, que criaram linguagens universais antes dele.

DEFINIÇÕES E DEMONSTRAÇÕES

Nesta seção estudaremos algumas das definições que Leibniz dá de objetos geométricos como a reta e o círculo, o plano e a esfera, por meio de sua característica geométrica.

Carta a Huygens e seus suplementos

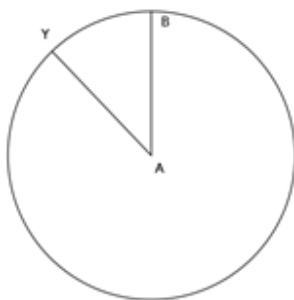
A primeira definição de Leibniz é a de congruência, que ele representa pelo símbolo $\cong$. Dois triângulos ABC e DEF são congruentes, $ABC \cong DEF$, respeitando a ordem dos pontos, “se eles puderem ocupar exatamente o mesmo lugar, ou se um puder ser colocado sobre o outro sem mudar

nada das duas figuras a não ser suas posições” (Loemker, 1976, p. 251). É o mesmo princípio usado na quarta proposição do primeiro livro dos Elementos de Euclides, que demonstra o critério LAL de congruência de triângulos (Euclides, 2009, p.101).

A segunda definição de Leibniz é a de espaço infinito em todas as direções como o locus dos pontos $Y \cong A$ (Y congruente a A), dado um ponto A (Loemker, 1976, p. 251). O espaço, portanto, é o lugar dos pontos que são congruentes a um ponto A determinado. Como todos os pontos sempre são congruentes entre si, para Leibniz, a congruência é válida para todos os pontos do espaço.

A terceira é a da esfera: “dados os pontos A e Y dois pontos, e (Y) significando uma variável de pontos do espaço, $AY \cong A(Y)$ é a esfera de centro A e raio AY ” (Loemker, 1976, p. 252). Essa definição é clássica, a esfera é o lugar dos pontos cujo segmento até dado centro A é congruente a outro segmento cujos extremos são A e um determinado ponto Y .

Figura 1 – A definição de esfera

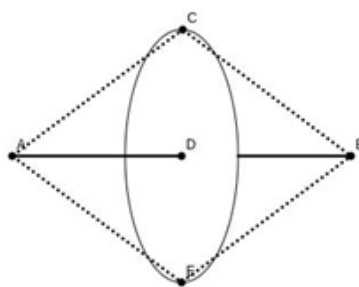


Fonte: O próprio autor (2025).

Para definir planos basta usarmos a mesma congruência de segmentos da definição da esfera: dados A e B dois pontos, “ $AX \cong BX$ é um plano” (Loemker, 1976, p. 252). No espaço tridimensional o lugar dos pontos equidistantes a dois pontos determinados A e B é o plano mediatriz do segmento AB , o plano que passe pelo ponto médio do segmento AB e é ortogonal a AB .

No caso do círculo, $ABC \cong ABY$ define um círculo de centro D (base da altura relativa à base AB) e raio CD (Loemker, 1976, p. 252). Observe que temos um triângulo determinado ABC e outro de mesma base AB , cujo vértice oposto a esta base é a variável Y , que podemos visualizar girando em torno da base AB mantendo a distância a AB , ou seja, teremos Y girando em torno do ponto base da altura relativa a AB , cujo raio é exatamente esta altura.

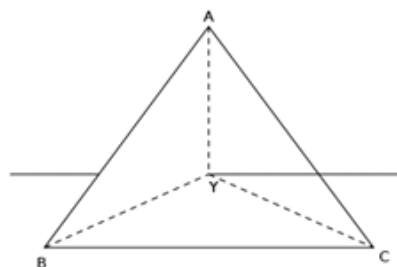
Figura 2 - A definição de círculo



Fonte: O próprio autor (2025).

E uma reta será, dados os pontos A, B e C, o “locus dos pontos Y tais que $AY \checkmark BY \checkmark CY$ é uma reta” (Loemker, 1976, p. 252). Isto é, a reta é o lugar dos pontos do espaço que são equidistantes a A, B e C, três pontos não-colineares (Leibniz não menciona a condição de não-colinearidade, mas é uma comunicação por carta, com certa informalidade); portanto, é a reta que passa pelo circuncentro de ABC e é ortogonal ao plano do triângulo ABC.

Figura 3 - Definição de reta



Fonte: O próprio autor (2025).

Não basta, para Leibniz, ser capaz de definir planos, esferas, círculos e retas por meio de pontos e da relação de congruência. É preciso que essas definições sejam úteis às demonstrações.

A primeira demonstração da carta a Huygens é a demonstração de que a interseção de duas esferas é um círculo (Loemker, 1976, p. 253): “A expressão do círculo é $ABC \checkmark ABY$; logo, $AC \checkmark AY$ e $BC \checkmark BY$. O locus das duas congruências são duas esferas, uma de centro A e raio AC, a outra de centro B e raio BC”. No fim das contas ele está mostrando que um círculo pode ser descrito como a interseção de duas esferas e não que a interseção de quaisquer duas esferas é um círculo. Mas observe que a demonstração decorre de uma mera manipulação dos caracteres, dos símbolos do enunciado do problema. A esta demonstração seguem-se as demonstrações de que a interseção entre um plano e uma esfera é um círculo e a de que a interseção de dois planos é uma reta.

Interseção entre plano e esfera é um círculo (Loemker, 1976, p. 253): “A expressão da esfera é $AC \checkmark AY$, a do plano é $AY \checkmark BY$.” Leibniz não considera o problema de quando podemos expressar ambos a esfera e o plano dessa forma, ao mesmo tempo. Continuando (Loemker, 1976, p. 253): “Portanto, $AC \checkmark BC$. Agora, como $BC \checkmark AC$ e $AC \checkmark AY$, segue que $BC \checkmark AY$; e como $AY \checkmark BY$, temos $BC \checkmark BY$. Juntando as duas congruências, temos $ABC \checkmark ABY$ ”. Novamente, a demonstração decorre da mera manipulação dos caracteres do enunciado do problema.

Interseção entre dois planos (Loemker, 1976, p. 253): “Sejam duas congruências, $AY \checkmark BY$ para um plano, $AY \checkmark CY$ para o outro. Então teremos $AY \checkmark BY \checkmark CY$, cujo locus é uma reta”. Aqui, teríamos o problema de verificar quando dois planos podem ser escritos ao mesmo tempo um como o lugar dos pontos equidistantes a A e B, e o outro como o lugar dos pontos equidistantes a A e C. E, novamente, a demonstração segue imediatamente da manipulação dos caracteres do enunciado do problema.

No segundo suplemento da carta a Huygens (Loemker, 1976, p. 254), Leibniz cita o *De datis* de Euclides (Taisbak, 2003).

Os antigos tinham outro tipo de análise, diferente da álgebra, que se preocupava com a posição. Ela lida com dados e co posições de entidades desconhecidas ou suas posições. Essa é a tendência do livro de Euclides *De datis*, a respeito do qual há um comentário feito por Marinus (Leibniz, 1679, Loemker, p. 254, grifos do autor).

Leibniz tentava criar uma característica que usasse a posição em vez da magnitude, opção de Descartes, e definia retas, superfícies e demonstrava fatos básicos a seu respeito melhor do que Euclides nos *Elementos*. Esta outra obra euclidiana, o *De datis*, guarda alguma semelhança com a característica geométrica de Leibniz. No *De datis*, Euclides não tenta criar uma lógica que reduz as demonstrações a meros cálculos, mas nele os objetos geométricos estão determinados pela posição, forma ou magnitude (Taisbak, 1991, 2003). Por exemplo, um segmento está dado em magnitude se está determinado seu comprimento, um triângulo está dado em posição se as posições de seus vértices e lados estão determinados, um triângulo está dado em forma se, como diríamos hoje, sua classe de semelhança está determinada. Uma afirmação típica dos *De datis* de Euclides é: se um segmento está dado em posição, está dado em magnitude, que hoje em dia poderíamos dizer do seguinte modo: se os extremos de um segmento estão determinados, então o comprimento, que é a distância entre eles, está determinado. Neste tipo de teoria a posição determina as outras informações: forma e magnitude. Do *De datis* de Euclides Leibniz herdou a percepção de que a posição é o elemento mais básico da geometria.

A verdadeira *análise da situação* deve, portanto, ser suprida. Esta necessidade pode ser mostrada pelo fato de que todos os analistas, se usam álgebra da nova maneira ou lidam com o dado e o desconhecimento segundo o padrão antigo, devem supor muitas coisas de geometria elementar que não são derivadas da consideração da magnitude, mas da figura, e que não foram ainda explicadas de maneira definitiva. Euclides mesmo foi forçado a supor certos axiomas obscuros, sem demonstrá-los, para proceder com o resto. E a demonstração de teoremas e solução de problemas nos *Elementos* às vezes parece ser conseguida por meio de trabalho duro do que por método e engenho. (Leibniz, 1679, Loemker, p. 254, grifos do autor).

CIRCA GEOMETRICA GENERALIA ET CALCULUS SITUS

No *Circa Geometrica Generalia* (Leibniz, 1999) temos um amadurecimento das pesquisas de Leibniz para criar e desenvolver sua característica geométrica. Este documento consiste em oitenta afirmações geométricas. Ele apresenta o que seriam os axiomas da característica geométrica de Leibniz, em contraste com as cartas a Huygens, que apresentam objetos, definições e as soluções de alguns problemas.

Por exemplo, as afirmações (18) e (19) são as seguintes: “(18) Se $a.b.c$ está dado, então $a.b$ está dado. (19) Se $a.b$, $a.c$ e $b.c$ estão dados, então $a.b.c$ está dado” (Leibniz, 1991, p. 56). O que é significado pelas notações $a.b$ e $a.b.c$ está definido na afirmação anterior às duas: “(17) $a.b$ significa as posições entre os pontos a e b e $a.b.c$ significa as posições entre três pontos a , b e c ” (Leibniz, 1991, p. 56). Isto é, $a.b$ representa o segmento que une a e b , $a.b.c$ significa o triângulo cujos vértices são a , b e c . Explicando melhor as afirmações (18) e (19), a primeira significa que, se o triângulo está dado, determinado, então cada lado está determinado; a segunda significa que se cada um dos três lados estão dados, determinados, então o triângulo está determinado. Agora, vejamos as duas seguintes: “(21) Se $a.b \equiv l.m$, $a.c \equiv l.n$ e $b.c \equiv m.n$, então $a.b.c \equiv l.m.n$. (22) Se $a.b.c \equiv l.m.n$ então $a.b \equiv l.m$ e assim por diante, dois a dois correspondentes” (Leibniz, 1991, p. 56-57). A primeira, (21), é o

critério LLL de congruência de triângulos transformado em axioma: se, dados dois triângulos ABC e LMN, AB e LM congruentes, BC e MN congruentes e AC e LN congruentes, então os triângulos são congruentes. A segunda, (22), é a sua recíproca.

No texto do *Circa Geometrica Generalia* Leibniz apresenta um desenvolvimento maior da característica geométrica do que nos anteriores. No *Circa*, ele explicita a relação “ponto” (no sentido de ponto da pontuação, não de ponto como objeto geométrico), $a.b$, como uma relação que representa as posições entre dois pontos a e b , e, portanto, representa um segmento de reta, e explicita também a relação “ponto” entre três pontos a , b e c , $a.b.c$, como representante das posições entre os três pontos a , b e c , ou seja, como representante do triângulo de vértices a , b e c .

Essa maneira de apresentar as proposições básicas, ou seja, os axiomas da característica geométrica, confirma a influência do *De datis* de Euclides sobre o empreendimento de Leibniz. E a maneira como Leibniz desenvolve esses axiomas foi seguida por alguns geômetras do começo do século passado, época de várias tentativas de se refundar a geometria euclidiana.

Esse estilo de escrever a teoria não foi seguido por Hilbert (1862-1943), que postulava como objetos básicos da Geometria o ponto, a reta e o plano, e várias relações entre eles. Mas Leibniz foi seguido por Mario Pieri e por Alfred Tarski. Pieri axiomatizou a geometria euclidiana tomando como objetos primitivos somente pontos e uma só relação primitiva, a relação isósceles (Marchisotto, 2007). Tarski axiomatizou a geometria euclidiana tomando como objetos primitivos, além dos pontos, a relação de congruência, envolvendo quatro pontos, e a relação de ordem entre três pontos, quando um está no segmento determinado pelos outros dois) (Givant, 1999; Tarski, 1959).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelo que foi apresentado nas seções anteriores, percebemos que Leibniz é em parte original, em parte herdeiro de algumas concepções dos gregos antigos, as quais ele mesmo cita. Leibniz criou uma álgebra geométrica nova cujo precursor era o Euclides do *De datis*, uma álgebra que tomava o ponto e sua posição como as informações mais básicas, como Euclides fez, mas também algebrizava a relação de congruência e as relações que representam as posições delimitadas por dois ou três pontos, respectivamente, o segmento e o triângulo. Além disso, foi capaz de demonstrar, por meio de sua característica, alguns fatos simples como a natureza das interseções entre planos, entre esferas e entre esfera e plano.

Há muito mais a se explorar e se estudar em relação a este assunto: relações entre a característica geométrica de Leibniz e outras linguagens criadas na época (que foi uma época de criação de muitas linguagens artificiais); as relações entre a característica geométrica e a geometria projetiva da época e anterior.

Outra possibilidade de estudo seria a análise do uso que Leibniz faz da relação de semelhança, que também aparece em alguns dos textos mencionados acima como o segundo suplemento da carta a Huygens e o *Circa Geometrica Generalia*.

REFERÊNCIAS

ECHEVERRIA, Javier. Cálculos Geométricos en Leibniz. **Theoria: Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia** 6 (1-2), p. 29-54, 1991.

GIVANT, Steven; TARSKI, Alfred. Tarski's system of geometry. **Bulletin of Symbolic Logic** 5(2). p. 175-214, 1999. <https://doi.org/10.2307/421089>

EUCLIDES. **Elementos**. São Paulo: UNESP, 2009.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. Circa geometrica generalia et calculum situs seu picturam characteristicam observationes miscellae constituendae analysi geometricae plane novae praeludentes. **Theoria: Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia** 6(1), p. 55-66, 1991.

LOEMKER, Leroy E. (org.). **Gottfried Wilhelm Leibniz: Philosophical Papers and Letters**. Holland, Boston: D. Reidel Pub. Co., 1976.

MARCHISOTTO, Elena; SMITH, James. **The legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic**. New York/London: Birkhauser, 2007.

ROSSI, Paolo. **A chave universal**. Bauru: EDUSC, 2004.

TAISBAK, Christian Marinus. Elements of Euclid's Data. **Apeiron**, 24 (4), p. 135-171, 1991. <https://doi.org/10.1515/APEIRON.1991.24.4.135>

TAISBAK, Christian Marinus. **Dedomena: The importance of being given**. London, Museum Tusculanum Press, 2003.

TARSKI, Alfred. What is Elementary Geometry? **Studies in Logic and the Foundations of Mathematics** 27, p. 16-29, 1959.