

A teoria da especulação de Louis Bachelier, considerações de Norbert Wiener e o movimento browniano: aproximações com o mercado financeiro

Louis Bachelier's theory of speculation, considerations by Norbert Wiener and the Brownian movement: approximations to the finance market

Douglas Gonçalves Leite¹  

Instituto Pecege

Kleyton Vinicyus Godoy²  

Universidade Federal de Lavras – UFLA

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma breve análise histórica da contribuição de Louis Bachelier para o desenvolvimento das teorias matemáticas aplicadas ao mercado financeiro no início do século XX. Filho de um comerciante de vinhos, Bachelier apresentou, em 1900, sua tese de doutorado, intitulada *Théorie de la Spéculation*, na qual propôs que o movimento dos preços de ativos no mercado financeiro poderia ser descrito por meio de uma abordagem probabilística. Orientado por Henri Poincaré, Bachelier inicialmente recebeu pouca atenção acadêmica, uma vez que o tema não gerava grande interesse na época. Como resultado, seu trabalho permaneceu relativamente desconhecido nos primeiros anos após sua publicação. Décadas mais tarde, Norbert Wiener apresentou o conceito do movimento browniano, que descreve a aleatoriedade do movimento de partículas e sua independência em relação aos movimentos anteriores. Tanto as ideias de Bachelier quanto as de Wiener se baseiam no estudo da probabilidade. O objetivo deste trabalho é contextualizar historicamente a proposta de Bachelier, explorar suas conexões com as ideias de Wiener e destacar as relações entre sua teoria e o movimento browniano.

Palavras-chave: Louis Bachelier; Norbert Wiener; Movimento Browniano.

ABSTRACT

This paper presents a brief historical analysis of Louis Bachelier's contribution to the development of mathematical theories applied to the financial market in the early 20th century. The son of a wine merchant, Bachelier presented his doctoral thesis, *Théorie de la Spéculation*, in 1900, in which he proposed that the movement of asset prices in the financial market could be described through a probabilistic approach. Supervised by Henri Poincaré, Bachelier initially received little academic attention, as the topic did not generate significant interest at the time. As a result, his work remained relatively unknown in the years following its publication. Decades later, Norbert Wiener introduced the concept of Brownian motion, which describes the randomness of particle movement and its independence from prior movements. Both Bachelier's and Wiener's ideas are grounded in the study of probability. The aim of this paper is to historically contextualize Bachelier's proposal, explore its connections to Wiener's ideas, and highlight the relationships between his theory and Brownian motion.

Keywords: Louis Bachelier; Norbert Wiener; Brownian Motion.

INTRODUÇÃO

O matemático francês Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier (1870-1946) é amplamente reconhecido por suas contribuições associando o estudo de probabilidades ao movimento do preço de ativos na bolsa de valores. Filho de Jean Etienne Alphonse Bachelier (1840-1889), um comerciante de vinhos, Louis Bachelier ingressou na Universidade de Sorbonne em 1892, onde teve a oportunidade de estudar sob a orientação de Jules Henri Poincaré (1854-1912), um dos mais influentes

¹ Doutor em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp). Orientador de MBA no Instituto Pecege, Piracicaba, São Paulo, Brasil. E-mail: douglas.g.leite@unesp.br.

² Doutor em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (Unesp). Docente na Universidade Federal de Lavras (UFLA), Lavras, Minas Gerais, Brasil. E-mail: kleyton.godoy@ufla.br.

matemáticos franceses de sua época. Oito anos após seu ingresso, em 29 de março de 1900, Bachelier apresentou sua tese de doutorado intitulada *Théorie de la Spéculation* (A Teoria da Especulação) que, de acordo com Taqqu (2001), marca o início das finanças matemáticas (*mathematical finance*).

Em sua tese, Bachelier propôs uma nova visão para modelar a dinâmica dos preços dos ativos no mercado financeiro. Combinando elementos da teoria dos jogos e da probabilidade, ele considerou que, no curto prazo, os preços dos ativos poderiam seguir um padrão de movimento aleatório. Essas mesmas ideias foram posteriormente tratadas por Norbert Wiener (1894-1964), que estabeleceu uma conexão entre movimentos aleatórios observados por Robert Brown (1773-1858), conhecidos como movimento browniano, e a teoria das equações diferenciais estocásticas para tratar de diversos assuntos, entre eles, o movimento de ativos no mercado financeiro.

A percepção de aleatoriedade associada à movimentação de ativos no mercado, tratada por Bachelier, assim como por Wiener, tornou possível investigar a oscilação do preço desses ativos por meio de uma abordagem probabilística. Por volta de 1850, a Bolsa de Paris se consolidou como um dos principais mercados para a negociação de títulos do governo francês. Esses títulos desempenhavam o papel de uma “Renda Fixa”: quando o governo precisava captar recursos por meio de empréstimos, ele emitia tais papéis.

A estabilidade dos títulos era assegurada pelo Estado francês e pelo valor do franco-ouro, e, até 1914, a inflação era quase inexistente, com a taxa de juros variando entre 3% e 5% ao ano (Taqqu, 2001). No período em que Bachelier desenvolveu seus estudos, os movimentos dos ativos na bolsa de valores eram predominantemente analisados por meio de abordagens qualitativas e intuitivas. Investidores e especuladores tomavam decisões com base em informações econômicas e políticas, além de tendências de mercado frequentemente influenciadas por eventos sazonais ou rumores (Aliber, Kindleberger, 2015).

De acordo com Taqqu (2001), Bachelier foi a pessoa certa no momento certo. Naquele período, Paris era um importante centro de especulação de títulos, e a matemática desenvolvida por Poincaré e seus alunos não estava voltada para esse tema. Grande parte da teoria produzida pela academia matemática francesa no final do século XIX estava relacionada ao estudo de funções de variáveis complexas, teoria da medida, assim como teoria dos conjuntos.

Na época, a tese de Louis Bachelier não obteve reconhecimento imediato. No entanto, algumas décadas mais tarde, os conceitos por ele introduzidos contribuíram para o desenvolvimento da teoria relacionada às Equações Diferenciais Estocásticas. Um dos principais marcos dessa evolução foi o trabalho *Differential Space* (Espaço Diferencial), desenvolvido por Norbert Wiener, que, como professor no *Massachusetts Institute of Technology*³ (MIT), dedicou-se extensivamente à teoria probabilística associada ao campo da física.

Wiener é amplamente reconhecido por formalizar a teoria matemática do movimento browniano, estabelecendo as bases dos processos estocásticos e contribuindo para a criação do que hoje conhecemos como cálculo estocástico. Seus trabalhos colaboraram indiretamente para o desenvolvimento da análise de risco associada ao mercado financeiro.

³ Instituto de Tecnologia de Massachusetts.

De maneira geral, há uma vasta produção acadêmica⁴ no cenário internacional que explora as conexões entre a teoria desenvolvida por Bachelier, os textos de Wiener e o movimento browniano. O objetivo deste trabalho é apresentar as aproximações entre algumas das principais ideias abordadas por esses autores a partir de uma perspectiva da História da Matemática, aproximando-as daquilo que se tornou conhecido como movimento browniano.

Entre o final do século XIX e a primeira metade do século XX, houve um aumento significativo no número de trabalhos dedicados ao estudo das probabilidades em diversas áreas do conhecimento. Muitos autores estabeleceram conexões entre esse tema e campos como a Teoria dos Jogos, a Genética Quantitativa e a Teoria da Evolução.

Textos como *Le Hasard* (O Acaso), de Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956), tornaram-se conhecidos por desenvolverem discussões a respeito das aplicações da teoria das probabilidades a temas como Teoria dos Jogos, herança genética, Física, entre outras áreas.

Além de Borel, Karl Pearson (1857-1936), um dos principais estatísticos desse período, apresentou uma definição para o conceito de correlação, assim como de regressão à média. Alguns de seus trabalhos relacionavam o campo da matemática à Teoria da Evolução. Em 1896 Pearson publicou o texto *Contribuições Matemáticas para a Teoria da Evolução, –III. Regressão, Hereditariedade, e Panmixia* (*Mathematical Contributions to the Theory of Evolution, –III. Regression, Heredity, and Panmixia*).

Neste texto, o autor buscou demonstrar como determinadas condições matemáticas podem ser empregadas para investigar as influências que moldam a formação genética de um indivíduo. Pearson utilizou conceitos como a regressão à média para analisar a transmissão de traços hereditários. Assim como Francis Galton⁵ (1822-1911), Pearson contribuiu para a compreensão das dinâmicas populacionais e suas implicações genéticas.

Parte dos trabalhos dedicados ao campo da probabilidade e estatística no início do século XX estavam relacionados à Biologia e à Teoria dos Jogos. Nesse contexto, o texto de Louis Bachelier (1870-1946), publicado em 1900, se destaca por abordar especificamente a aplicação da teoria das probabilidades ao campo das finanças, o que o torna distinto das abordagens de muitos de seus contemporâneos.

Por se tratar de um tema pouco explorado naquele contexto, a Tese de Bachelier permaneceu, durante muitos anos, desconhecida por parte da comunidade matemática. Foi apenas na década de 1950 que Paul Samuelson (1915-2009), professor de economia do MIT, iniciou a divulgação das teorias de Louis Bachelier. Em sua sala de trabalho, Samuelson⁶ se deparou com o estudo de um matemático francês.

⁴ No âmbito brasileiro, identificamos que as contribuições de Bachelier são exploradas especialmente em pesquisas de finanças quantitativas e matemática financeira. Contudo, quando concebido historicamente, há uma escassez de trabalhos nessa temática.

⁵ Francis Galton tornou-se amplamente conhecido como um dos principais proponentes da teoria da eugenia.

⁶ Paul Samuelson, influente economista do século XX, foi um importante defensor da utilização da matemática em investigações relacionadas às Ciências Econômicas. Ao integrar a matemática à Economia, permitiu uma análise mais profunda dos fenômenos econômicos e abriu caminhos para o desenvolvimento de modelos econômicos mais sofisticados e precisos. Laureado com o Prêmio Nobel de Economia em 1970, seu livro *Fundamentos da Análise Econômica* tornou-se uma importante referência para gerações posteriores.

Para sua surpresa, ele descobriu que, embora não tivesse ouvido falar de Bachelier, muitas das considerações feitas por esse teórico já haviam sido exploradas em outros trabalhos, chegando a influenciar profundamente suas próprias pesquisas na área de economia e finanças:

Em 1900, esse personagem Bachelier aparentemente havia elaborado grande parte da matemática que Samuelson e seus alunos estavam apenas agora adaptando para uso em economia — matemática que Samuelson achava ter sido desenvolvida muito mais recentemente, por matemáticos cujos nomes Samuelson sabia de cor porque estavam vinculados aos conceitos que eles supostamente haviam inventado. Processos de Wiener. Equações de Kolmogorov. Martingales de Doob. Samuelson achava que isso era algo de ponta, com vinte anos no máximo. Mas lá estava tudo, na tese de Bachelier (Weatherall, 20, p. 4, tradução nossa)⁷.

Por meio de Samuelson, as contribuições de Bachelier se tornaram amplamente reconhecidas, e seus resultados foram utilizados para o desenvolvimento de modelos de precificação de opções, entre eles, o modelo de Black-Scholes, desenvolvido por Fischer Sheffey Black (1938-1995) e Myron Samuel Scholes (1941-) na década de 1970. Além disso, cem anos após a publicação da tese de doutorado de Bachelier, em 2000, foi realizado o primeiro evento da *Bachelier Finance Society*, em Paris, em homenagem às contribuições desse matemático de grande importância para o desenvolvimento da matemática associada ao mercado financeiro.

BACHELIER, IDEIAS INICIAIS

Entre as principais características tratadas por Louis Bachelier, temos que, para ele, os movimentos dos preços dos ativos na bolsa de valores seguiam um comportamento aleatório. A determinação das oscilações dos preços estava subordinada a uma infinidade de fatores; desse modo, seria impossível obter uma previsão matemática do preço de um ativo em um determinado período (Bachelier, 1900).

Entre os diversos fatores envolvidos, o comportamento humano é um agente relevante no processo de (des)valorização de um ativo, pois, por meio de visões pessoais e ações coletivas, podem ser produzidas grandes movimentações de preços.

Bachelier tinha pleno conhecimento disso e deixou claro em sua tese que esse seria um fator relevante no processo de tomada de decisão. Para ele, duas probabilidades eram fundamentalmente importantes:

1° A probabilidade que poderíamos chamar de matemática é aquela que podemos determinar a priori; é a que estudamos nos jogos de azar.

2° A probabilidade que depende de fatos futuros e, portanto, impossível de prever de uma forma matemática. É essa última probabilidade que o especulador busca prever; ele analisa as razões que podem influenciar a alta ou a baixa e a amplitude dos movimentos.

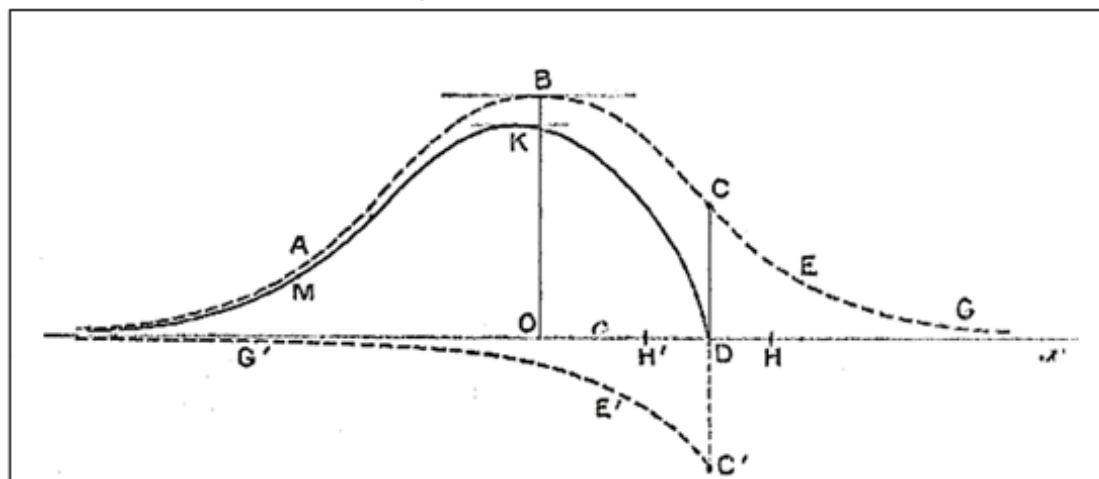
⁷ No original: “By 1900, this Bachelier character had apparently worked out much of the mathematics that Samuelson and his students were only now adapting for use in economics — mathematics that Samuelson thought had been developed far more recently, by mathematicians whose names Samuelson knew by heart because they were tied to the concepts they had supposedly invented. Wiener processes. Kolmogorov’s equations. doob’s martingales. Samuelson thought this was cutting-edge stuff, twenty years old at the most. But there it all was, in Bachelier’s thesis”.

Suas induções são absolutamente pessoais, uma vez que sua contraparte necessariamente tem a opinião oposta (Bachelier, 1900, p. 31, tradução nossa).⁸

Ele estava interessado em desenvolver uma forma de mensurar uma expectativa matemática para a o movimento do preço de um ativo em um determinado período. De acordo com Weatherall (2013), Bachelier havia descoberto que se o preço de uma ação realiza um comportamento aleatório, a variação do preço ao longo do tempo segue uma distribuição gaussiana (p. 14). Ao abordar a distribuição de probabilidade, Bachelier destacou que não é suficiente apenas conhecer a probabilidade de o preço ser atingido antes do instante t ; é igualmente necessário entender a lei de probabilidade no instante t , caso o preço não tenha sido alcançado, ou seja, o tempo percorrido também influencia no cálculo de probabilidade.

Ele argumenta que a probabilidade de atingir um valor c no instante t corresponde à área DCEG sob a curva de distribuição (Figura 1). Além disso, pontua que a área total da curva de probabilidades deve, nesse contexto, ser ajustada, subtraindo-se uma quantidade igual a DCEG, dado que a probabilidade total P é o dobro da probabilidade associada à área DCEG.

Figura 1 - Distribuição Normal



Fonte: Bachelier, 1900.

Louis Bachelier, ao explorar a distribuição de probabilidades, sugeriu que determinadas oscilações poderiam ser modeladas por teorias matemáticas análogas às utilizadas por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) para descrever a propagação do calor. Em uma espécie de analogia, Bachelier introduziu o conceito que denominou de “Radiação da Probabilidade” (*Rayonnement de la Probabilité*). A chamada Radiação da Probabilidade considera que:

Cada preço x irradia durante o elemento de tempo para o preço vizinho uma quantidade de probabilidade proporcional à diferença de suas probabilidades.
Digo proporcional, pois devemos levar em conta a razão de Δx para Δt .

⁸ No original: “1° La probabilité que l’on pourrait appeler mathématique, c’est celle que l’on peut déterminer a priori ; celle que l’on étudie dans les jeux de hasard.

^{2°} La probabilité dépendant de faits à venir et, par conséquent, impossible à prévoir d’une façon mathématique. C’est cette dernière probabilité que cherche à prévoir le spéculateur ; il analyse les raisons qui peuvent influer sur la hausse ou sur la baisse et sur l’amplitude des mouvements. Ses inductions sont absolument personnelles, puisque sa contrepartie a nécessairement l’opinion inverse.”

A lei precedente pode, por analogia com certas teorias físicas, ser chamada de lei de radiação ou de difusão da probabilidade (Bachelier, 1900, p. 46, tradução nossa)⁹.

Em seguida, Bachelier apresenta a equação que descreve a variação da probabilidade de oscilação do preço de um ativo ao longo do tempo t , considerando também a flutuação do preço x do ativo. A expressão proposta é:

$$c^2 \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

Nessa equação, P representa a função de probabilidade associada ao preço do ativo, t é o tempo, e x é o preço do ativo. O termo c^2 está relacionado à taxa de variação do preço, refletindo a difusão das flutuações de preços ao longo do tempo. A equação é uma forma da equação diferencial conhecida como equação de difusão, que descreve a propagação de probabilidades no espaço de preços, e se assemelha à equação de calor, usada na física para modelar a transferência de calor em um corpo.

Atualmente, as ferramentas desenvolvidas por Joseph Fourier desempenham um papel importante no estudo da movimentação de preços no mercado financeiro. Diversos modelos matemáticos empregam conceitos como as séries de Fourier, para criar projeções futuras de uma classe de ativos, muitas dessas abordagens estão diretamente relacionadas ao estudo de séries temporais¹⁰.

No relatório redigido por Henri Poincaré, em 1900, com relação à tese de Bachelier, reconhece que, com um pouco de reflexão, é possível mostrar que há uma analogia entre a teoria analítica da propagação do calor, proposta por Fourier, e o estudo de probabilidades de Bachelier e que essa comparação é legítima¹¹.

De acordo com Taqqu (2001), a tese de Bachelier não havia sido reconhecida como um trabalho sobre probabilidade. Bru (cf. Taqqu 2001) argumenta que o texto do matemático francês foi reconhecido como uma tese sobre Física Matemática, um trabalho sobre Bolsa de Valores, o qual não era um assunto amplamente investigado pela comunidade acadêmica daquele período.

Para Bachelier, uma de suas principais preocupações não era demonstrar a previsibilidade dos movimentos dos preços, mas sim evidenciar a possibilidade de uma lei que regulasse a variação dos ativos. Para ele, essa lei era a lei da probabilidade. Nas últimas linhas de sua tese, Bachelier reforça a ideia de que existe uma lei capaz de descrever, com certa precisão, o comportamento dos ativos no mercado financeiro, sendo essa lei, conforme ele propôs, a lei de probabilidade.

Uma última observação talvez não seja inútil. Se, em relação a várias questões tratadas neste estudo, comparei os resultados da observação aos da teoria, não foi para verificar fórmulas estabelecidas por métodos matemáticos, mas apenas para mostrar que o mercado, sem saber, obedece a uma lei que o domina: a lei da probabilidade (Bachelier, 1900, p. 86, tradução nossa)¹².

⁹ No original: “Chaque cours x rayonne pendant l’élément de temps vers le cours voisin une quantité de probabilité proportionnelle à la différence de leurs probabilités. Je dis proportionnelle, car on doit tenir compte du rapport de Δx à Δt . La loi qui précède peut, par analogie avec certaines théories physiques, être appelée la loi du rayonnement ou de diffusion de la probabilité.”

¹⁰ Séries temporais são conjuntos de dados registrados ao longo de um intervalo de tempo específico. Por exemplo, o histórico das variações no preço de um ativo financeiro durante um período determinado, como os últimos cinco anos, constitui uma série temporal.

¹¹ Luis Bachelier, *Aux origines de la finance mathématique*, p.26.

¹² No original: “Une dernière remarque ne sera peut-être pas inutile. Si, à l’égard de plusieurs questions traitées dans cette étude,

Em seu relatório, Poincaré destacou que, de fato, o tema escolhido se distanciava dos assuntos geralmente abordados pelos candidatos. Os resultados obtidos por ele inserem-se em um conjunto de investigações que ganharam destaque a partir da década de 1920, com o avanço da teoria das probabilidades aplicada ao mercado financeiro.

Nesse período, equações estocásticas e modelos econométricos passaram a ser incorporados ao processo de análise e projeção de preços de ativos. Com o advento da computação, muitos dos modelos desenvolvidos na primeira metade do século XX passaram a ser aplicados de forma prática às flutuações de preços no mercado financeiro. Esse progresso culminou no surgimento de diversas teorias e ferramentas voltadas para a precificação de ativos, entre as quais se destaca o modelo de Black-Scholes, as ferramentas computacionais, assim como os modelos quantitativos.

MOVIMENTO BROWNIANO, BACHELIER E NORBERT WIENER

Entre 1920 e 1940, temos um número crescente de pesquisadores que conecta os conceitos do campo da probabilidade e da estatística ao mercado financeiro. Entre os principais nomes dessa corrente, destacam-se Norbert Wiener, já citado anteriormente, além de Andrey Kolmogorov (1903-1987), John Maynard Keynes (1883-1946) e Charles B. Davenport (1866-1944), entre outros.

Norbert Wiener contribuiu para a teoria da probabilidade no contexto do movimento browniano e da teoria do ruído, influenciando a modelagem estocástica de processos financeiros, especialmente na criação de modelos que descrevem as flutuações de preços no mercado. Andrey Kolmogorov formalizou as bases da teoria das probabilidades, proporcionando fundamentos matemáticos para a análise probabilística aplicada ao mercado financeiro, o que possibilitou o desenvolvimento de modelos mais robustos de previsão e análise de risco.

John Maynard Keynes, embora mais conhecido por estudos relacionados à economia, também contribuiu para o desenvolvimento de teorias relacionadas ao estudo das expectativas e incertezas no mercado financeiro. De forma semelhante, Charles B. Davenport, conhecido por suas contribuições à genética estatística, também aplicou modelos probabilísticos para compreender o comportamento dos preços das ações e os mecanismos de mercado, antecipando discussões sobre análise quantitativa em finanças.

Esses autores se tornaram amplamente reconhecidos por suas investigações envolvendo temas como probabilidade aplicada ao mercado financeiro. De forma geral, todos compartilham um princípio comum: existe certa aleatoriedade nos movimentos dos ativos, consequentemente não é possível determinar com precisão o preço exato de um ativo em um período específico.

Trabalhos como *Théorie et Pratique des Opérations Financières* (Teoria e Prática das Operações Financeiras), escrito por Alfred Barriol¹³ (1873-1959), publicado em 1908, levaram as ideias desenvolvidas por Bachelier adiante. Nesse livro, Barriol discute detalhadamente a realização de operações em títulos públicos, cálculo de renda perpétua e temporária, taxa de retorno, assim como probabilidades e esperança matemática.

j'ai comparé les résultats de l'observation à ceux de la théorie, ce n'était pas pour vérifier des formules établies par les méthodes mathématiques, mais pour montrer seulement que le marché, à son insu, obéit à une loi qui le domine : la loi de la probabilité."

¹³ Alfred Barriol, que, após se formar na Escola Politécnica e tornar-se economista atuário, se estabeleceu como uma referência no campo das finanças e da estatística. Barriol não só foi o primeiro professor de finanças no Instituto de Estatística da Universidade de Paris, mas também atuou como consultor financeiro de diversos governos franceses, contribuindo significativamente para a aplicação das teorias probabilísticas em questões econômicas.

As conexões entre as obras de Bachelier e Wiener podem ser observadas, considerando que ambos os autores trabalharam com conceitos probabilísticos para descrever fenômenos que, na época, ainda não eram amplamente compreendidos de forma sistemática no campo da probabilidade e estatística

Norbert Wiener é amplamente reconhecido como o pai da cibernética. Nos seus primeiros anos de pesquisa no MIT, aos 26 anos, publicou um artigo considerado como um dos primeiros trabalhos a formalizar matematicamente o conceito de movimento browniano. Em 1923, ao publicar o trabalho *Differential Space* no *Journal of Mathematics and Physics*, Wiener apresentou uma formalização matemática para os experimentos observados por Robert Brown, expressando-os da seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi A(t_1 - t)}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{A(t_1 - t)}} dx$$

A fórmula acima descreve a probabilidade de que a diferença $x_{t_1} - x_t$ representando o deslocamento de uma partícula, esteja dentro do intervalo $[a, b]$. Essa probabilidade é expressa como uma integral da função densidade de probabilidade correspondente, que possui a forma de uma distribuição gaussiana. O termo multiplicador da integral garante a normalização da densidade, enquanto o expoente reflete a dispersão estatística do deslocamento em função do tempo decorrido.

Wiener propôs que, no contexto do movimento browniano, as partículas se deslocam de maneira aleatória, e os movimentos em intervalos de tempo sucessivos são independentes entre si. Ele descreve essa independência da seguinte forma:

Espaço Diferencial. No movimento browniano, não é a posição de uma partícula em um momento que é independente da posição da partícula em outro momento; é o deslocamento de uma partícula em um intervalo que é independente do deslocamento da partícula em outro intervalo (Wiener, 1923, p. 135, tradução nossa)¹⁴.

Esse está entre os primeiros conceitos a contribuir para a formação da teoria dos processos estocásticos, que mais tarde se tornaria essencial em várias áreas da matemática aplicada, incluindo as finanças. Ao formalizar matematicamente esse fenômeno, Wiener não apenas contribuiu para a compreensão dos processos aleatórios, mas também apresentou elementos que figuram a base para a modelagem de sistemas dinâmicos complexos que dependem de variáveis probabilísticas

De fato, ao discutir a independência entre séries de eventos, Wiener prosseguiu no desenvolvimento das ideias de Bachelier, considerando que os movimentos entre ativos na bolsa poderiam ser descritos como processos aleatórios. Nesse sentido, a percepção da aleatoriedade no movimento de um objeto constitui o ponto de conexão entre as abordagens de Wiener, Bachelier e os experimentos observados por Robert Brown, estabelecendo uma linha de continuidade entre os fenômenos naturais e suas aplicações no campo financeiro.

Em 1828, Robert Brown publicou o trabalho *A brief account of microscopical observations made on the particles contained in the pollen of plants* (Um breve relato de observações microscópicas feitas

¹⁴No original: “Differential-Space. In the Brownian movement, it is not the position of a particle at one time that is independent of the position of a particle at another; It is the displacement of a particle over one interval that is independent of the displacement of the particle over another interval.”

nas partículas contidas no pólen das plantas), contendo algumas de suas principais considerações relacionadas ao movimento do pólen sobre a superfície de um fluido. De acordo com as palavras de Brown:

Ao examinar a forma dessas partículas imersas em água, observei várias delas muito evidentemente em movimento; seu movimento consistindo não apenas em uma mudança de lugar no fluido, manifestada por alterações em suas posições relativas, mas também, não raramente, em uma mudança de forma na própria partícula; uma contração ou curvatura ocorrendo repetidamente em torno do meio de um lado, acompanhada por um inchaço ou convexidade correspondente no lado oposto da partícula. Em alguns casos, a partícula foi vista girando em seu eixo mais longo. Esses movimentos eram tais que me satisfaziam, após observação frequentemente repetida, que não surgiam nem de correntes no fluido, nem de sua evaporação gradual, mas pertenciam à própria partícula (Brown, 1828, p. 161-162, tradução nossa)¹⁵.

O movimento observado por Brown nas partículas imersas em água, que exibem tanto alterações de posição quanto variações na forma, como contrações e expansões, pode ser compreendido a partir das abordagens desenvolvidas por Bachelier e Wiener sobre o comportamento aleatório. As partículas, em seu incessante movimento, não se deslocam de maneira determinística, mas sim de forma irregular, resultante de forças microscópicas internas ao sistema, o que prenuncia o conceito de um processo estocástico.

Bachelier, ao aplicar os conceitos de probabilidade ao mercado financeiro, e Wiener, ao formalizar o movimento browniano matematicamente, revelam que tais trajetórias não podem ser previstas com certeza, mas seguem padrões probabilísticos e descontínuos, muito semelhantes aos movimentos observados por Brown. Ambos os teóricos oferecem a chave para compreender os fenômenos de variabilidade e aleatoriedade nas partículas como expressões de processos estocásticos, nos quais os movimentos das partículas não se devem a causas externas diretas, mas a flutuações internas de natureza imprevisível, caracterizando o movimento browniano como um exemplo claro de processos dinâmicos complexos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Louis Bachelier, com sua teoria de Difusão da Probabilidade, e considerando que os movimentos dos preços seguem uma distribuição gaussiana, busca representar matematicamente a aleatoriedade existente no movimento dos ativos. Suas considerações tornaram-se parte integrante da teoria associada a processos estocásticos. Seus resultados foram fundamentais para o desenvolvimento de modelo de preço de opções denominado de Black-Scholes. Assim como para Bachelier, no modelo de Black-Scholes o preço do ativo varia no tempo, ou seja, conforme o prazo de vencimento se aproxima, o ativo tem seu preço modificado.

¹⁵ No original: I observed many of them very evidently in motion; their motion consisting not only of a change of place in the fluid, manifested by alterations in their relative positions, but also not unfrequently of a change of form in the particle itself; a contraction or curvature taking place repeatedly about the middle of one side, accompanied by a corresponding swelling or convexity on the opposite side of the particle. In a few instances the particle was seen to turn on its longer axis. These motions were such as to satisfy me, it after frequently repeated observation, that they arose neither from currents in the fluid, nor from its gradual evaporation, but belonged to the particle itself.

Wiener, por sua vez, com sua teoria sobre o movimento browniano, não apenas fez avanços significativos na compreensão dos processos estocásticos, mas também contribuiu para a criação de uma ponte entre a matemática e o mercado financeiro. Norbert Wiener figura entre os principais teóricos que se dedicaram a tratar do movimento browniano no séc. XX. Seu trabalho fundamenta áreas como o cálculo estocástico, as equações diferenciais estocásticas, assim como parte da modelagem financeira moderna.

O movimento browniano é um conceito fundamental estudado em diversas áreas, como matemática, física, e mercado financeiro, devido à sua relevância na modelagem de fenômenos aleatórios e processos dinâmicos. Na matemática, é amplamente analisado dentro da teoria dos processos estocásticos, enquanto na física, desempenha um papel crucial na compreensão da difusão e do comportamento de partículas em suspensão.

Décadas antes, Albert Einstein (1879-1955) investigou o movimento de partículas pequenas suspensas em líquidos¹⁶ e sugeriu a possibilidade de aleatoriedade no movimento causado pelo impacto entre moléculas. Isso o levou a considerar a existência de um fenômeno que poderia fugir das leis da termodinâmica clássica e do estudo molecular cinético.

De fato, no início do século XX, vimos emergir um novo campo da matemática que não apenas se consolidou como uma ferramenta indispensável para diversas ciências. O estudo de Probabilidade e Estatística se estabeleceu com “corpo próprio” com contribuições específicas para o avanço da própria ciência.

A teoria estatística, juntamente com os processos estocásticos, está entre as principais áreas de pesquisa científica e acadêmica da atualidade. Esses campos não apenas têm se expandido de maneira notável, mas também se relacionado com diversas áreas, como física, biologia, finanças e engenharia, tornando-se essenciais para a modelagem de sistemas complexos e contribuindo diretamente para a organização de um volume grande de informações.

Aceitando a existência da aleatoriedade nos fenômenos a nossa volta, somos capazes de pensar nas possibilidades que permeiam a dinâmica de sistemas naturais e artificiais, conduzindo a novas descobertas e aplicações inovadoras. Bachelier e Wiener são dois representantes dessa criatividade para além do próprio campo de estudo, seus resultados possibilitaram a ampliação da utilização do conhecimento para os mais diversos campos da ciência.

REFERÊNCIAS

ALIBER, Robert Zelwin; KINDLEBERGER, Charles Poor. **Manias, panics, and crashes: a history of financial crises**. Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2015.

BACHELIER, Louis Jean-Baptiste Alphonse. **Théorie de la spéculation**. Annales scientifiques de l'École normale supérieure. Paris, 1900. p. 21-86. Disponível em: http://archive.numdam.org/article/ASENS_1900_3_17_21_0.pdf. Acesso em: 28 de fev. 2025.

BARRIOL, Alfred. **Théorie et pratique des opérations financières**. Paris: Gaston Doin, 1914.

¹⁶ Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.

BOREL, Félix Édouard Justin Émile. **Le Hasard**. Nouvelle Collection Scientifique. Libraire Félix Alcan, 1938.

BROWN, Robert. XXVII. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. **The philosophical magazine**, v. 4, n. 21, p. 161-173, 1828.

EINSTEIN, Albert. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. **Annalen der Physik**, v. 4, p. 549-560, 1905.

PEARSON, Karl. VII. Mathematical contributions to the theory of evolution.—III. Regression, heredity, and panmixia. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. Series A, containing papers of a mathematical or physical character, v. 187, p. 253-318, 1896.

TACQU, M. S. **Bachelier and his times**: A conversation with Bernard Bru. Finance and Stochastics, v. 5, p. 3-32, 2001.

WEATHERALL, J. Q. **The physics of Wall Street**: a brief history of predicting the unpredictable. New York: Houghton Mifflin Harcourt, 2013.

WIENER, Norbert. Differential-space. **Journal of Mathematics and Physics**, v. 2, n. 1-4, p. 131-174, 1923.