

Os Números Complexos em Instituições de Ensino Superior do Paraná

Complex Numbers in Higher Education Institutions of Paraná

Kelly Roberta Mazzutti Lübeck¹  

Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

RESUMO

Noções de número marcam presença na história de diferentes culturas, épocas e locais, algumas evoluindo para os atuais sistemas de numeração, em que se destacam os números reais. Uma concepção que ajudou a elucidar este conceito, e a desvinculá-lo das ideias atreladas unicamente a quantidade, foi o conjunto dos números complexos. Presente na matemática desde os meados do século XVI, documentos apontam que os imaginários estão sendo excluídos do currículo das escolas no Ensino Médio. Assim, neste trabalho mostramos nuances de como os complexos são abordados em cinco Instituições de Ensino Superior do estado do Paraná buscando compreender como este conjunto é introduzido aos futuros professores, responsáveis pelo posterior ensino da matemática no Ensino Médio, a fim de apresentarmos considerações vinculadas ao uso da história da matemática que reforcem a importância e necessidade da permanência deste assunto na formação do licenciando em matemática. A pesquisa mostrou que todos os cursos das instituições investigadas discutem o assunto em suas grades curriculares, no geral, como parte integrante de disciplinas mais amplas, sendo que os documentos apontam que as matérias não fazem referência ao uso de fatos históricos para o desenvolvimento do conteúdo de números complexos ou incentivam o estudo de aplicações que utilizam este conteúdo, fazendo-se necessário repensar maneiras de ensinar frente aos entraves epistemológicos advindos da teoria e, neste contexto, reforçamos a importância da história da matemática como promotora desses entendimentos.

Palavras-chave: Ensino; História da Matemática; Matemática.

ABSTRACT

Notions of number mark present in the history of different cultures, times and places, some evolving into the current numbering systems, in which real numbers stand out. One definition that helped to elucidate this concept, and to separate it from ideas linked solely to quantity, was of the set of complex numbers. Present in mathematics since the mid-16th century, documents indicate that imaginary numbers are being excluded from the curriculum of high school students. Thus, in this work we show nuances of how complex numbers are approached in five Higher Education Institutions in the state of Paraná, seeking to understand how this set is introduced to future teachers, responsible for later teaching mathematics in high school, in order to present considerations linked to the use of the history of mathematics that reinforce the importance and need for this subject to remain in the education of undergraduate mathematics students. The research showed that all courses at the institutions investigated discuss the subject in their curricula, in general, as an integral part of broader disciplines, and the documents indicate that the subjects do not refer to the use of historical facts for the development of complex numbers content or encourage the study of applications that use this content, making it necessary to rethink ways of teaching in the face of epistemological obstacles arising from theory and, in this context, we reinforce the importance of the history of mathematics as a promoter of these understandings.

Keywords: Teaching; History of Mathematics; Mathematics.

INTRODUÇÃO

O conceito de número surgiu desde os primórdios da civilização, juntamente com a necessidade de registro para diferentes necessidades humanas. Povos de diversas localidades desenvolveram seus sistemas de registros, baseados em suas observações, suas crenças, seus costumes e, segundo Ifrah (2005, p. 11), em relação a este conceito, “[...] é também uma história completamente anônima, apesar da importância das invenções. Feito por e para as coletividades, ela não concedeu certificados”. Ademais,

¹ Doutorado pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Foz do Iguaçu, Brasil. E-mail: kelly.lubeck@unioeste.br.

A arte da numeração ou da contagem, em seus primórdios, prescindiu a qualquer sistematização. Como as coleções pertinentes a vida dos povos eram pequenas, não havia necessidade de uma arte de contar desenvolvida, pois ela não ia além da enunciação de um pequeno número de palavras ou de assinalar os equivalentes símbolos. Todavia, a contagem não se restringia apenas às coleções domésticas, visto que os grupamentos de dias em luas e os cálculos de dias do ano retomam ao início das civilizações (Mendes, 2006, p. 2).

Assim, o que se iniciou com simples contagens e associações bijetivas entre objetos e/ou objetos e palavras, com o passar dos anos evoluiu para códigos mais complexos e, com as trocas de informações e conhecimentos, aprimorou-se em sistemas numéricos eficientes e abrangentes. Hoje, o sistema de numeração indo-arábico está mundialmente difundido e, quando pensamos em numeração, é o conjunto dos números reais, com suas respectivas operações de soma e produto, que nos vem à mente. Ainda, “[...] nosso atual sistema de numeração não só possibilita uma maneira simples e concisa de registrar números. O mais importante é que a própria notação ajuda imensamente a execução de cálculos” (Gundlach, 1992, p. 31).

Entretanto, quando falamos em número, este conceito extrapola suas relações quantitativas e um exemplo tácito disto diz respeito aos números complexos, assunto que possui uma das mais ricas histórias registradas, tanto do conteúdo de matemática quanto dos personagens envolvidos nas descobertas. O conjunto dos números complexos, juntamente com suas operações de soma e produto, denotado por $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, representa um produto da engenhosidade humana que, infelizmente, está sendo abandonado dos currículos do Ensino Médio (EM). De fato, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) excluiu este conteúdo de seu texto, intercorrendo dúvidas sobre sua permanência no EM e implicando em questionamentos inclusive sobre a importância em se discutir esse assunto, frente a tantas outras necessidades, junto aos cursos de Licenciatura em Matemática.

Assim, neste trabalho pretendemos apresentar como os números complexos estão sendo trabalhados em cinco cursos de Licenciatura em Matemática do estado do Paraná como forma de trazer à luz o atual quadro do Ensino Superior com relação aos complexos, no intuito de apresentar discussões, vinculadas ao uso da história da matemática, que reforcem a importância e necessidade da permanência deste assunto na formação do licenciando em matemática.

METODOLOGIA

A pesquisa se deu em duas etapas. A primeira de caráter bibliográfico e histórico, ou seja, levantamento de informações históricas sobre todo o desenrolar dos números complexos, de sua descoberta, com Rafael Bombelli (1526-1572) até a formalização final dos conceitos, caracterizada pelos trabalhos da apresentação vetorial de William Hamilton (1805-1865) e, também, da formalização de Augustin Cauchy (1789-1857). Obviamente, durante os mais de 300 (trezentos) anos de desenvolvimento, muitos outros matemáticos contribuíram para elucidar diversas questões a respeito dos números imaginários. Esses dados podem ser revisitados nas obras de Garbi (2007), Katz (2010) e Eves (2011).

A segunda etapa se destinou a escolha das cinco Instituições de Ensino Superior (IES) pesquisadas e posterior análise do objeto investigado: “números complexos” nos documentos que norteiam os seus cursos de Licenciatura em Matemática. Como critério de seleção, tomamos as IES públicas mais antigas do estado do Paraná. Assim, selecionamos: Universidade Federal do Paraná (UFPR) fundada em 1912, Universidade Estadual de Maringá (UEM) e Universidade Estadual de Ponta

Grossa (UEPG) fundadas em 1969, Universidade Estadual de Londrina (UEL) fundada em 1970 e Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste) fundada em 1987, com o curso de Matemática de Cascavel, pois a Unioeste possui duas licenciaturas em Matemática, sendo uma no campus de Foz do Iguaçu e a mais antiga no campus sede de Cascavel.

Para a investigação, além dos Projetos Pedagógicos de Cursos (PPC) apanhados nos sites destas IES, também obtivemos os planos de ensino dos últimos dois anos das disciplinas que contemplam os números complexos em suas ementas. Os planos foram logrados através de contato (via *e-mail*) junto as secretarias dos cursos. Após a realização da leitura destes documentos, buscou-se estabelecer as devidas interpretações, lembrando que a leitura interpretativa procura conferir significado mais amplo aos resultados obtidos, buscando relacionar as afirmações do autor com os problemas para os quais busca por solução (Gil, 2008; Marconi e Lakatos, 2003).

REFERENCIAL TEÓRICO

Os números complexos não surgiram da impossibilidade de extração de raízes quadráticas negativas, associadas a resolução de equações de grau dois, como alguns pensam e disseminam, mas de um problema de raiz de uma equação cúbica estudado por Bombelli, a saber: $x^3 = 15x + 4$. Ele conhecia a raiz $x = 4$ e, ao aplicar os coeficientes desta equação na já conhecida fórmula de Cardano², fórmula publicada no *Ars Magna*, em 1545, de Girolamo Cardano (1501-1576), ele se deparou com o resultado $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. A partir disto, elaborou regras para manipular este novo número (Garbi, 2007; Katz, 2010; Eves, 2011).

Assim, foi a necessidade de se validar um procedimento algébrico que impulsionou o estabelecimento de regras operacionais para estes novos entes numéricos. Ainda, “[...] quando do surgimento dos números complexos eles eram tidos apenas como formas algébricas, incapazes de representar alguma forma real e efetiva, e que serviam apenas para representar algoritmos de cálculo” (Rosa, 1998, p. 34), ou seja, até podia-se operar com eles, mas não admitiam os negativos e imaginários como números.

A resolução de equações trouxe à tona o problema dos números negativos e de suas raízes que, apesar de surgirem no cálculo das soluções das equações, não possuíam um estatuto definitivo. Nas civilizações mais antigas (babilônicos, egípcios, chineses, gregos, hindus etc.), não se usavam números negativos no sentido próprio. [...] No século XV, Nicolas Chuquet representava o número negativo—*a* como 0—*a*, o que mostra que o sinal “-” ainda não era um atributo do número, mas sim a indicação de uma operação (Roque, Carvalho, 2012, p. 213).

Essa característica perdurou até que um entendimento mais profundo do significado de número estivesse compreendido/definido para a comunidade matemática, visto que no século XVIII os valores negativos ainda não eram aceitos por todos. Em relação a admitir quantidades negativas como solução de equações, Jean le Rond d’Alembert (1717-1783) “[...] criticou radicalmente a aceitação dos números negativos, atitude que, conforme seu pensamento, partia de uma falsa metafísica” (Roque, 2012, p. 439).

² Apesar de ser conhecida por seu nome, devido a publicação deste resultado em sua obra *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, conhecida como *Ars Magna*, Cardano não estabeleceu esta fórmula, cabendo a matemáticos como Nicolo Fontana (Tartaglia) (1499-1557) e Scipione Del Ferro (1465-1526) realizarem tal descoberta.

O que está por trás do trato algébrico destes entes é o chamado “princípio da permanência”, ou seja, garantir a validade das regras e propriedades aritméticas usuais para esta extensão numérica. De fato,

a questão do estatuto e da forma das quantidades irracionais e imaginárias não era uma preocupação central dos matemáticos no século XVIII. O que marcava a época era a ideologia de que as regras gerais que serviam para operar com os reais deviam ser aplicadas também aos imaginários (Roque, 2012, p. 441).

Do princípio da permanência segue as regras operacionais definidas para os números complexos, bem como a tentativa de se manter a definição do caso real para as extensões de algumas funções, como no caso de potências, raízes n -ésimas, exponencial, logaritmo etc. A busca pelas melhores definições conduziu a diversas discussões e, a insistência em se respeitar o princípio de permanência levou a equívocos, mesmo para Leonhard Euler (1707-1783) um dos matemáticos que contribuiu de forma assertiva para várias questões sobre os complexos, mas que erroneamente afirmou que: $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{4} = 2$ (Roque e Carvalho, 2012). Esta questão mostra a sutileza que esta teoria pode impor aos conteúdos (no caso a validade de propriedades, que nos reais já estavam consolidadas) e que podem se reverter em empecilhos epistemológicos para a aprendizagem deste conhecimento.

Explorar estas questões históricas ajuda os acadêmicos a compreenderem seus próprios erros e a valorizarem seu processo de aprendizagem, pois reconhecem que, assim como outros personagens ilustres, todos cometem equívocos. Além disso, Beatriz S. D'Ambrosio (2007) indica outros motivos para envolvermos os futuros professores no estudo da história da matemática, sendo que:

o estudo de história ajuda os futuros professores a entenderem o seguinte: a evolução da matemática como processo sócio cultural de construção humana; o processo construtivista como a ação humana que leva à aprendizagem; a semelhança entre o processo histórico e a aprendizagem das crianças; a álgebra como processo geométrico e a importância da geometria na fundamentação matemática; os problemas motivadores para a construção da matemática e como tais problemas levaram ao desenvolvimento de diferentes áreas da matemática; a compreensão de soluções alternativas para problemas que são triviais quando se utiliza a matemática moderna; e a evolução do rigor lógico e de provas matemáticas (D'Ambrosio, 2007, p. 400).

Destacamos aqui a referência aos problemas motivadores para a construção da matemática e as implicações para outras áreas, pois aos imaginários, tem-se o registro das questões que promoveram o seu desenvolvimento. Esta teoria se mostrou promissora na elucidação de diversos problemas, como apontam Ripoll, Ripoll e Silveira (2011, p. 375):

[...] a importância dos números complexos, como consequência quase que automática do valor matemático intrínseco destes números, também se consolidou “fora” da Matemática. Hoje, os mais diversos campos da Ciência e da Tecnologia fazem deles um uso muito frutífero: na análise dos sistemas dinâmicos contínuos, no controle e estabilidade dos mais diversos sistemas de engenharia, no projeto de circuitos e motores de corrente alternada, na análise e síntese de sinais físicos e biológicos etc.

Algumas aplicações são discutidas de forma simplificada nos trabalhos Caon (2013) e Chagas (2013) e podem servir como uma primeira orientação para aqueles que queiram ampliar os conhecimentos com relação a utilidade deste sistema numérico.

Terêncio Neto (2021), ao analisar livros didáticos para o EM, aponta que a própria nomenclatura impute aos estudantes números especificamente complicados ou que por serem imaginários não necessitam ser estudados. Coloca, ainda, que a estruturação do conjunto $\mathbb{C}$ cria a falsa impressão que este conjunto serve para resolver o problema das raízes quadráticas negativas, o que não se verifica. Estes são empecilhos para a aprendizagem do conteúdo.

Ainda, com relação a exposição do conteúdo, Santos (2013, p. 80) afirma que:

[...] dentre os mais diversos conteúdos de matemática, os números complexos apresentam, nos livros didáticos, uma abordagem tradicional que enfatiza uma exposição do conteúdo seguida de exercícios que, muitas das vezes, tem por objetivo apenas “treinar” o que foi aprendido: aspecto esse que se apresenta como um fator desestimulante à maioria dos alunos, pois não vem associado a uma contextualização ou aplicação prática que o torne mais atrativo.

Essa constatação pode muito bem ser aplicada à realidade dos cursos de licenciatura em que, pela experiência do autor, muitos dos acadêmicos chegam sem nunca terem tido contato com este conjunto numérico no ensino básico e o modo como apresentamos e discutimos este conhecimento pode interferir positiva ou negativamente na sua formação. Ademais, corroborando com essa percepção, encontra-se o trabalho de Pühl, Lima e Müller (2021) que expõem diversas pesquisas que confirmam o fato de que os números complexos já costumavam ser abdicados em muitas escolas, principalmente do ensino público.

Além disso, a BNCC não apresenta nenhuma referência aos números complexos em seu texto, o que leva a um consequente desinteresse em se manter este conteúdo nos currículos escolares. Nem mesmo a matriz de referência para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) indica qualquer alusão aos imaginários. Este documento, para a área de matemática e suas tecnologias, coloca como um de seus objetivos: “Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações—naturais, inteiros, racionais ou reais” (INEP – Matriz de Referência, 2024, p. 5), caracterizando número no contexto real, sem adentrar no mérito dos complexos, o que acaba refletindo na opção de mantê-los ou não nas grades curriculares das escolas públicas e particulares, já que muitas delas focam seus estudos para realização das provas do ENEM e dos vestibulares.

Com relação aos vestibulares das cinco IES analisadas, averiguamos se os números complexos (ou imaginários) estavam inseridos em suas provas. Verificamos as provas vestibulares, obtidas junto as páginas das instituições, do período de 2015 a 2023, encontrando questões sobre o assunto nos seguintes vestibulares: UFPR (2017/18, 2021/22), UEM vestibular de inverno (2016, 2017, 2018, 2023), UEM vestibular de verão (2015, 2016, 2018, 2019, 2021, 2022, 2023), UEPG vestibular de inverno (2015, 2018, 2023), UEPG vestibular de verão (não consta), UEL (2015), Unioeste (2015, 2017, 2020), conforme descrição da Tabela 1.

Tabela 1 – Indicação da presença do conteúdo números complexos nos vestibulares das IES.

IES/Ano	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
UFPR				X				X	
UEM/ inverno		X	X	X					X
UEM/ verão	X	X		X	X		X	X	X
UEPG/ inverno	X			X					X
UEPG/ verão									
UEL	X								
Unioeste	X		X			X			

Fonte: Elaborada pela autora.

Apesar destes indicativos, uma pesquisa realizada por Chagas (2013) com 151 (cento e cinquenta e um) professores de matemática atuantes no Ensino Médio aduziu que 48% deles achavam o conteúdo relevante, 20% indispensável, 3% acharam irrelevante e 29% pouco relevante, apontando que consideram

[...] o ensino de números complexos no Ensino Médio é relevante por sua importância histórica no desenvolvimento da Matemática, pelas várias conexões possíveis de serem estabelecidas com outros tópicos da Matemática estudados nesse nível de escolaridade e por suas diversas aplicações (Chagas, 2013, p. 72).

Outro fato mencionado no trabalho de Chagas (2013, p. 84) é que

[...] a pesquisa com professores mostrou que além do livro didático, outro fator que influencia a opinião dos mesmos sobre o ensino de números complexos no Ensino Médio é a forma como eles estudaram esse assunto na graduação. Em certo sentido, podemos dizer que o professor repete para os alunos o que ouviu e viu na graduação. Ou ainda, que por não ter visto e ouvido, não fala nem mostra aos seus alunos. Isto se revelou especialmente verdadeiro no que diz respeito a história e aplicações dos números complexos.

Isso reforça a importância das conexões e estudos desenvolvidos durante a primeira formação para a vida profissional do professor. Assim, esclarecer os motivos históricos da constituição dos complexos, sua importância teórica com as implicações do Teorema Fundamental da Álgebra e suas utilidades práticas, fazem com que o futuro professor reconheça seu valor instrucional e, na medida que lhe cabe, incorpore o assunto em suas aulas.

Assim, compete investigarmos como os números complexos estão sendo trabalhados nos cursos de Licenciatura em Matemática para discutirmos possibilidades de encaminhamentos alicerçadas neste caminhar histórico do conteúdo.

ANÁLISES E RESULTADOS

A análise dos PPC das IES serviu para, num aspecto mais amplo, indicar quais as disciplinas continham números complexos em suas ementas. Assim, identificamos que todos os cursos de Matemática possuem o tópico em seu currículo em ao menos uma disciplina. A posterior análise dos planos de ensino, encaminhados pelas secretarias dos cursos, nos possibilitou uma visão mais detalhada do tipo de oferta do conteúdo.

O Quadro 1 indica as disciplinas, bem como a descrição das ementas, do conteúdo programático referente especificamente ao assunto de números complexos e o objetivo geral. Os dados foram compilados dos planos de ensino, logo constam as indicações gerais dos dois documentos examinados.

Quadro 1 – Detalhamento das disciplinas ofertadas pelos cursos.

Disciplina	Ementa/Conteúdo Programático/Objetivo
Universidade Federal do Paraná – UFPR	
Funções (CMM012), 1º ano, 90 horas.	Ementa: Números reais e operações. Funções entre conjuntos. Gráficos de funções. Equações e inequações envolvendo funções. Funções: polinomiais, módulo, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Funções compostas e inversas. Transformações de gráficos. Números complexos.
	Conteúdo Programático: Propriedades de números complexos . Plano complexo . Fórmula de Euler. Teorema Fundamental da Álgebra.
	Objetivo: Familiarizar o aluno com o conceito de função em uma variável real e suas ferramentas. O aluno deverá ter a capacidade de entender e utilizar conceitos sobre números reais e funções fundamentais para o estudo da matemática do ensino superior.
Fundamentos da Matemática Elementar 2 (CMM021), 1º ano, 90 horas.	Ementa: Noções básicas de Geometria do triângulo; trigonometria; números complexos ; polinômios e equações polinomiais; análise Combinatória; Binômio de Newton.
	Conteúdo Programático: Forma algébrica dos números complexos e sua representação geométrica. Conjugado e módulo. Operações com números complexos e suas propriedades. Forma polar e operações com os complexos na forma polar. Potenciação e radiciação.
	Objetivo: Desenvolver um estudo aprofundado de números complexos e a capacidade de dedução, via raciocínio lógico e organizado, para solução de problemas contagem. Compreender fundamentos, aplicações e procedimentos relacionados a matrizes e à Análise Combinatória e Números Complexos .
Educação Algébrica 2 (CMM055), 5º ano, 105 horas (60 horas padrão e 45 estágio).	Ementa: Ensino de Números, Álgebra e Funções no Ensino Médio: pesquisas acadêmicas, livros didáticos, propostas curriculares e articulação com a matemática no ensino superior. Números reais e complexos , funções, polinômios e equações no Ensino Médio. Tecnologias Educacionais e tendências metodológicas da Educação Matemática no ensino de Números, Álgebra e Funções no Ensino Médio: análise, uso e elaboração de materiais e sequências didáticas.
	Conteúdo Programático: Números Reais e Complexos no Ensino Médio. Funções, polinômios e equações no Ensino Médio.
	Objetivo: Conhecer diferentes abordagens da educação algébrica para o Ensino Médio.
Universidade Estadual de Maringá – UEM	
Álgebra e Geometria no Plano, 1º ano, 102 horas.	Ementa: Trigonometria, matrizes e sistemas lineares até ordem 3, vetores e Geometria Analítica no plano e números complexos .
	Conteúdo Programático: Coordenadas Polares. Definição, operações e propriedades dos números complexos . Representação dos números complexos no plano e forma polar de um número complexo . Propriedades geométricas das operações de números complexos . Raízes n -ésimas da unidade.
	Objetivo: Possibilitar ao aluno a compreensão de entes geométricos no plano através do estudo de equações associadas aos mesmos. Dar ao acadêmico a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento de outras disciplinas. Possibilitar ao aluno desenvolver habilidades para o formalismo matemático.

Variáveis Complexas, 4º ano, 102 horas	Ementa: Números complexos . Funções complexas . Topologia no plano complexo . Funções analíticas. Integração complexa e o Teorema de Cauchy. Séries de Taylor e séries de Laurent. Singularidades isoladas de funções analíticas. Transformações conformes.
	Conteúdo Programático: Números complexos , funções, topologia, funções analítica, integração complexa, séries, singularidades isoladas de funções analíticas, transformações conformes.
	Objetivo: Desenvolver a compreensão algébrica com os números complexos . Aprofundar o conhecimento adquirido no cálculo diferencial e integral no contexto das funções complexas. Aplicar os conceitos de integração complexa no cálculo de integrais reais impróprias. Trabalhar com as transformações de subconjuntos do plano por meio de funções analíticas.
Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG	
Matemática Elementar, 1º ano, 68 horas	Ementa: Conjuntos numéricos. Operações e intervalos. Expressões algébricas. Produtos Notáveis. Fatoração. Potenciação e Radiciação. Resolução de equações e inequações polinomiais, exponenciais e com radicais. Módulo: definição, propriedades, equações e inequações modulares. Logaritmos: definição, propriedades, equações e inequações logarítmicas. Números complexos : operações, propriedades, representação geométrica, conjugados complexos, forma polar e raízes complexas. Polinômios: igualdade, operações, divisibilidade. Equações algébricas: teorema fundamental da álgebra, raízes e relações entre coeficientes e raízes.
	Conteúdo Programático: Números complexos : operações, propriedades, representação geométrica, conjugados complexos, forma polar e raízes complexas. Polinômios: igualdade, operações, divisibilidade. Equações algébricas: teorema fundamental da álgebra, raízes e relações entre coeficientes e raízes.
	Objetivo: Revisar os conteúdos de matemática elementar; Compreender os conceitos fundamentais da matemática; Aplicar os conceitos na resolução de problemas conceitualizados, quando possível. Ampliar e construir novos significados para os conteúdos matemáticos, e a partir deles interpretar sua utilização no cotidiano.
Universidade Estadual de Londrina – UEL	
Matemática Elementar (2MAT173), 1º ano, 90 horas.	Ementa: Números e operações. Regras de potenciação e radiciação. Logaritmo e exponencial. Trigonometria. Números complexos . Progressões e recorrências.
	Contribuição ao perfil do egresso: Revisar tópicos de aritmética, álgebra e análise, ministrados no Ensino Fundamental e Médio, tratados sob um ponto de vista preciso, crítico e abrangente; estabelecer conexões entre os conteúdos de Matemática Elementar e os da Educação Básica ³ .
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste	
Matemática Elementar II, 1º ano, 68 horas.	Ementa: Análise combinatória. Forma trigonométrica e algébrica de um número complexo . Representação geométrica. Potenciação e radiciação de número complexo . Polinômios e operações entre polinômios. Equações polinomiais: número de raízes e multiplicidade, relação entre coeficientes e raízes, raízes complexas e reais. Teorema Fundamental da Álgebra.
	Conteúdo Programático: Números complexos : forma algébrica, igualdade, conjugados, operações elementares, potências e raízes com expoentes inteiros. Representação geométrica do conjunto. Módulo. Forma Trigonométrica. Polinômios. Teorema Fundamental da Álgebra.
	Objetivo: Retomar e introduzir conteúdos da matemática elementar no nível da Educação Básica e estabelecer relações entre eles e certos conteúdos estudados no decorrer do Curso de Licenciatura. Desenvolver tais conteúdos de modo a fundamentá-los apropriadamente do ponto de vista da matemática acadêmica e escolar.

Fonte: Elaborada pela autora.

Os cursos de Matemática da UFPR e da UEM possuem mais de uma disciplina que trabalham com o tema investigado. Os demais apresentam somente uma matéria sobre o tópico. Todas as disciplinas, com exceção da UEM com Variáveis Complexas, abordam o assunto de forma mais básica, apresentando a definição, suas operações, conjugado, módulo, forma trigonométrica (ou polar), associando um número a sua representação no plano complexo (plano de Argand-Gauss) e

³ Os planos de ensino da disciplina são disponibilizados via portal do estudante direto para os alunos, não ficando mais arquivado nos computadores da secretaria de departamento, logo não tivemos acesso a eles.

raízes n -ésimas. A UEM, com Variáveis Complexas, extrapola as questões básicas, adentrando num aprofundamento da teoria.

Os cursos da UFPR, com Fundamentos da Matemática Elementar 2 e Educação Algébrica 2, da UEPG e da Unioeste ainda abrangem as questões relacionadas aos polinômios e equações polinomiais, destacando o Teorema Fundamental da Aritmética, importante resultado que é discutido inclusive no EM. Assim, todas as instituições demonstram interesse na manutenção deste tópico, ofertando disciplinas obrigatórias em que tal conteúdo deve ser discutido.

Os planos de ensino da UEPG e Unioeste, na parte metodológica, indicam várias ações, como aulas expositivas e dialogadas, indicação de livros, vídeos e materiais variados para estudos, listas de questões, elaboração de material didático e uso de sala virtual de apoio. Já os da UEM e UFPR não fazem alusões a metodologia utilizada para o desenvolvimento das ações. Como não obtivemos acesso aos planos da UEL, não conseguimos avaliar esta questão.

A UFPR indica em seu PPC quatro eixos (1- conhecimentos de matemática; 2- conhecimentos das ciências a fim; 3- conhecimentos da educação matemática; 4- conhecimentos das ciências da educação) que orientam a distribuição dos conteúdos, informando no eixo 1 que

[...] as disciplinas oferecidas neste eixo devem ser tratadas levando em conta o desenvolvimento, origem e evolução das ideias matemáticas. [...] Deve-se abordar a evolução histórica e a construção dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, reais e complexos (UFPR, 2018, p. 50).

À exceção deste curso, os documentos mostram que, no geral, as matérias não fazem referência ao uso de fatos históricos para o desenvolvimento do conteúdo de números complexos ou incentivam o estudo de aplicações que utilizam este conteúdo, mesmo que de forma expositiva e/ou informativa, já que a compreensão total das aplicações requer teorias mais avançadas.

Deste modo, algumas das dificuldades epistemológicas que os acadêmicos possuem a respeito do assunto podem não ser superadas, já que a exposição e simples reconhecimento das regras não trazem à tona os problemas e dificuldades que impulsionaram o desenvolvimento desta teoria e que se fazem presentes na aquisição do conceito. Para isso, o uso da história da matemática enquanto estratégia metodológica pode ser muito útil e proveitosa.

Ainda, uma questão muito relevante é mostrar que a estrutura dos números reais não é suficiente para resolver certas questões e que, para isso, recaímos na necessidade de ampliação numérica, que já foi abordada em outro período histórico, quando da incorporação dos segmentos incomensuráveis ao sistema de medidas, ainda no tempo de Pitágoras (c. 570 a.E.C.–c. 495 a.E.C.). Também, conforme Ripoll, Ripoll e Silveira (2011), com a introdução dos números irracionais ao conjunto numérico dos racionais, as questões topológicas de limites foram superadas, mas outras relacionadas a aritmética e a álgebra permaneceram vagas nos números reais. A primeira, relacionada a aritmética, se refere a impossibilidade de operar com raízes quadráticas negativas, ou logaritmos negativos, já a segunda, relacionada a insuficiência algébrica, só é resolvida nos complexos, na medida que possuímos respostas para os problemas de equações algébricas.

De fato, compreender os números reais é essencial para um professor de matemática, logo levantar questionamentos a respeito da validade de expressões como $(-2)^\pi$, $\log(-2)$, $\log 2^\pi = \pi \log 2$,

investigar se estão bem definidos neste conjunto e quais possuem extensão complexa, conduzem a um melhor aprendizado. Recordamos que, no conjunto dos reais, a base deve ser positiva para uma definição correta da potência de um expoente irracional, que não existe logaritmo de valores negativos e que a propriedade ‘do tombamento’ não é nada trivial para potências irracionais⁴.

A interpretação das extensões logarítmicas para valores negativos e imaginários “[...] muito se deveu a controvérsias a este respeito: entre Leibniz e Johann Bernoulli, em primeiro lugar; em seguida, entre Bernoulli e Euler; e, posteriormente, entre Euler e d’Alembert” (Roque; Carvalho, 2012, p. 312). Foram dúvidas que surgiram face ao desconhecido e acadêmicos que tomam contato com a teoria também possuem suas incertezas que podem ser dirimidas por meio do estudo de questões semelhantes vivenciadas por estes matemáticos ilustres.

Todas as ementas das disciplinas, com exceção de Variáveis Complexas da UEM, que se destina unicamente ao estudo deste tema, contêm vários assuntos e os números complexos figuram como um dos conteúdos a serem desenvolvidos, não possuindo uma disciplina exclusiva para si. Geralmente, eles estão associados aos demais conjuntos numéricos juntamente com as propriedades básicas operacionais, trigonometria, estudo de polinômios e equações polinomiais.

O conteúdo programático, para os complexos, evidencia: sua definição, seguida das operações e propriedades básicas, módulo, conjugado, representação geométrica (forma trigonométrica), potências e raízes n -ésimas, polinômios, equações e o Teorema Fundamental da Álgebra, que nesta discussão introdutória não pode ser demonstrado.

Ainda, cabe ressaltarmos que a variedade de metodologias apontadas nos planos busca oportunizar mais experiências de ensino, o que pode facilitar ao futuro professor o desenvolvimento desta temática quando em sala, conforme aponta Chagas (2013).

Assim, os licenciandos devem vivenciar durante sua formação inicial experiências enriquecedoras que venham a lhes esclarecer a importância dos números complexos, para que sejam capazes de articular a defesa deste assunto junto à Educação Básica, como: 1. um conteúdo que contribuiu na ampliação do conceito de número, desvincilhando-o da noção de quantidade e expandindo seu estatuto para relações mais abstratas entre seus elementos, operações e propriedades, contribuindo para a evolução das ciências como um todo; 2. pelas diversas aplicações, associadas às transformações geométricas no plano, as artes, a física, a teoria de fractais, a engenharia elétrica etc.; ou 3. pelo ganho estrutural ao se considerar coeficientes e raízes complexas no estudo de equações algébricas, já que elas permitem estabelecer uma teoria muito mais elegante do que é possível considerando apenas os casos reais, culminando com o Teorema Fundamental da Álgebra.

CONCLUSÕES

A investigação dos PPC mostrou que todos os cursos contêm os números complexos em seus currículos, como parte integrante de alguma disciplina mais geral, com exceção da UEM, com Variáveis Complexas, indicando que o assunto, apesar de relevante, não está no centro de discussões mais amplas.

⁴ Esclarecimentos com relação a definição de potências com expoentes irracionais, bem como detalhes da demonstração da propriedade do tombamento, podem ser obtidos em Lübeck e Pasquini (2021).

Os planos de ensino sugerem abordagens mais tradicionais voltadas para o estudo técnico do conteúdo, visto que não são especificadas interlocuções com a história desta construção matemática, nem de seus pioneiros, ou com aplicações que poderiam ser exploradas com o uso dos imaginários.

Logo, faz-se necessário repensar maneiras de se ensinar esta teoria frente aos entraves epistemológicos que a afirmação ‘raiz quadrada de um número negativo não existe’ produz durante todo o percurso escolar. Quebrar este paradigma junto aos acadêmicos é um fato crucial para a manutenção e defesa deste conteúdo no EM. Para isto, há um grande aliado: o uso adequado da história da matemática.

Portanto, sugerimos trabalhar com tópicos sobre os números complexos que se mostraram conflituosos junto à comunidade matemática, dos séculos XVI ao XVIII, como forma de estimular os acadêmicos, e demais interessados, em discussões que ainda são pertinentes hoje. Verificar a validade ou falsidade dos argumentos utilizados por estes matemáticos certamente conduzirá a um aprendizado mais significativo, além de proporcionar a compreensão da escolha das definições utilizadas para as extensões complexas. Essas colocações, hoje elucidadas, ajudam a compreender as várias dificuldades e incertezas que muitos matemáticos de prestígio enfrentaram e que alunos/acadêmicos que tomam contato com essa teoria sentem, na medida que esse conhecimento também lhes é novo, desconhecido.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 06 dez. 2024.

CHAGAS, Juliana S. B. **A relevância do ensino de números complexos no ensino médio na opinião dos professores de matemática**. 2013. 103f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), campus dos Goytacazes, RJ, 2013. Disponível em: <https://acesse.dev/s3tx> . Acesso em: 06 dez. 2024.

CAON, Fernanda. **Números Complexos: inter-relação entre conteúdos e aplicações**. 2013. 72f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), Ponta Grossa, 2013. Disponível em: <https://acesse.dev/bSDC5>. Acesso em: 06 dez. 2024.

D’AMBROSIO, Beatriz S. Reflexões sobre a História da Matemática na Formação de Professores. **Revista Brasileira de História da Matemática**. [s. l.], Especial n. 1 – Festschrift Ubiratan D’Ambrosio, p. 399–406, dez. 2007. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/312> . Acesso em: 06 dez. 2024.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed., Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GIL, Antônio C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. São Paulo: Atlas, 2008.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos Números e Numerais**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

IFRAH, Georges. **Os números: a história de uma grande invenção**. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

INEP – Matriz de Referência. **Matriz de Referência ENEM**, 2024. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 01 out. 2024.

KATZ, Victor J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

LÜBECK, Kelly R. M.; PASQUINI, Regina C. G. Potências Irracionais: perspectivas para o Ensino Superior. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 43, e95, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.5902/2179460X65837>. Acesso em: 06 dez. 2024.

MARCONI, Marina A.; LAKATOS, Eva M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2003.

MENDES, Iran A. **Números: o simbólico e o racional na história**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

PÜHL, Cassiano S.; LIMA, Isolda G.; MÜLLER, Thaísa J. Ensino de Números Complexos no Ensino Médio, Técnico e Superior: um Mapeamento de Produções Brasileiras. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 9, p. 40-58, mar. 2021. Disponível em: <https://periodicos.pucminas.br/index.php/abakos/article/view/22342>. Acesso em: 06 dez. 2024.

RIPOLL, Jaime B.; RIPOLL, Cydara C.; SILVEIRA, José F. P. **Números racionais, reais e complexos**. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

ROSA, Mário S. **Números Complexos: Uma abordagem histórica para aquisição do conceito**. 1998. 173f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica (PUC), São Paulo, 1998. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11186>. Acesso em: 06 dez. 2024.

ROQUE, Tatiane. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiane; CARVALHO, João B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, Marcos A. **Dos Números Complexos aos Quatérnions: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações**. 2013. 101f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, 2013. Disponível em: <https://encr.pw/aBuds>. Acesso em: 06 dez. 2024.

TERÊNCIO NETO, José. **Análise Praxeológica do Conteúdo de Números Complexos em Coleções de Livros Didáticos do Ensino Médio**. 2021. 140f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – e Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/4702>. Acesso em: 06 dez. 2024.

UFPR, Universidade Estadual do Oeste do Paraná. CEPE. Resolução nº 22/2018 – CEPE. **Fixa o Currículo Pleno do Curso de Licenciatura em Matemática do Setor de Ciências Exatas**. Curitiba. 2018. Disponível em: <https://cmat.ufpr.br/curriculo-2018-2019/>. Acesso em: 06 dez. 2024.