

Lewis Carroll enquanto matemático e educador matemático: olhares sobre “Pillow Problems”

Lewis Carroll as a mathematician and mathematics educator: perspectives on Pillow Problems

Roger Minks¹  

Instituto Federal Sul-Rio-Grandense – IFSUL

Rafael Montoito²  

Instituto Federal Sul-Rio-Grandense – IFSUL

RESUMO

O artigo explora a atuação de Lewis Carroll como matemático e educador, com ênfase em suas contribuições no campo da Matemática, muitas vezes obscurecidas por sua notoriedade como escritor literário. Por meio de uma breve biografia, são discutidos aspectos de sua formação acadêmica e prática docente, destacando o papel dessas experiências na gênese de sua criatividade matemática e pedagógica. O foco central recai sobre o livro *Pillow Problems*, uma coletânea de 72 problemas matemáticos concebidos pelo autor, os quais refletem tanto seu rigor analítico quanto sua abordagem pedagógica. A obra é contextualizada no panorama das produções matemáticas de Carroll, considerando influências contemporâneas ao autor e conexões com outros escritos carrollianos. Além disso, o artigo aponta algumas investigações, oriundas de uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico, realizadas a partir de *Pillow Problems* em estudos que se inserem nos campos da Educação Matemática, da História da Matemática e da Matemática Pura. Ao integrar biografia, análise de obra e perspectivas de pesquisa, este estudo busca contribuir para uma compreensão mais ampla da produção matemática de Carroll. Ainda, intentamos contribuir para a divulgação do livro *Pillow Problems* na comunidade acadêmica, pois se trata de uma obra pouco conhecida e sobre a qual poucas pesquisas têm se dedicado, especialmente no Brasil.

Palavras-chave: Lewis Carroll; *Pillow Problems*; Obras carrollianas de matemática.

ABSTRACT

This article explores Lewis Carroll's role as a mathematician and educator, with an emphasis on his contributions to the field of mathematics, which are often overshadowed by his literary fame. Through a brief biography, we discuss aspects of his academic background and teaching practice, highlighting the role these experiences played in shaping his mathematical and pedagogical creativity. The central focus is on the book *Pillow Problems*, a collection of 72 mathematical problems conceived by Carroll, which reflect both his analytical rigor and his pedagogical approach. The work is contextualized within the broader scope of Carroll's mathematical writings, considering contemporary influences on the author and connections with his other works. Additionally, the article presents several investigations, based on a qualitative bibliographic study, conducted from *Pillow Problems* within the fields of Mathematics Education, the History of Mathematics, and Pure Mathematics. By integrating biography, work analysis, and research perspectives, this study aims to contribute to a broader understanding of Carroll's mathematical production. Furthermore, we seek to promote *Pillow Problems* within the academic community, as it is a little-known work that has received limited scholarly attention, particularly in Brazil.

Keywords: Lewis Carroll; *Pillow Problems*; Carrollian mathematical works.

¹ Licenciado em Matemática pelo Centro Universitário Claretiano (CEUCLAR). Aluno de mestrado em Educação e Tecnologia no Instituto Federal Sul-Rio-Grandense (IFSUL), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: roger.minks@gmail.com.

² Doutor em Educação para a Ciência pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação e Tecnologia do Instituto Federal Sul-Rio-Grandense (IFSUL), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: rmontoito@gmail.com.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste artigo³ tecemos apontamentos sobre Lewis Carroll enquanto matemático e educador matemático, trazendo considerações de sua obra para além da literatura ficcional pela qual é amplamente conhecido. Embora as contribuições de Carroll à literatura tenham um reconhecimento consolidado, algumas de suas produções no campo da Matemática permanecem pouco estudadas em nosso país, sobretudo no contexto da Educação Matemática e da História da Matemática.

Assim, organizamos os nossos apontamentos a fim de apresentar ao leitor deste artigo: uma breve biografia do autor, com foco em sua formação e atuação como educador; considerações sobre o livro carrolliano *Pillow Problems*, uma coletânea de 72 problemas matemáticos, pontuando alguns estudos já realizados a partir desse livro e apontando outras possíveis abordagens que vislumbramos.

Portanto, ao elencar *Pillow Problems* dentre as obras matemáticas de Carroll, o artigo busca refletir sobre novas possibilidades de pesquisa, a partir desse livro, que dialoguem com os campos da Educação Matemática e da História da Matemática. Para tanto, aspectos da obra são contextualizados, considerando influências contemporâneas e conexões com outros escritos do autor. Esse enfoque pretende expandir a compreensão sobre a contribuição de Carroll à Matemática e à Educação, bem como ressaltar a relevância de suas produções para além do universo literário. Ao destacar especialmente *Pillow Problems* também queremos, em um desdobramento possível, contribuir para a divulgação desse interessante livro na comunidade acadêmica, pois se trata de obra pouco conhecida e sobre a qual poucas pesquisas têm se dedicado, especialmente no Brasil. As seções que se seguem são oriundas de uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico que mobilizou escritos de e sobre Carroll cotejando-os com referenciais que se inserem no campo da Educação Matemática e da História da Matemática.

LEWIS CARROLL: ALGUNS ENCONTROS COM A MATEMÁTICA

Falar ou escrever sobre quem foi Lewis Carroll não é uma tarefa das mais simples. Este inglês que viveu durante o reinado da Rainha Vitória foi várias coisas: clérigo, fotógrafo (numa época em que esta arte recém florescia), professor de matemática e, dentre ainda outras ocupações, literato. Porém, o Carroll literato, devido à enorme celebridade alcançada a partir de *Alice no País das Maravilhas*, acabou por involuntariamente eclipsar as obras dos “outros Carrolls” – como, por exemplo, o livro de problemas matemáticos que apresentamos na próxima seção deste artigo, intitulado *Pillow Problems*.

Destarte, consideramos pertinente nesta oportunidade apontar alguns dados biográficos deste autor, a fim de melhor apresentá-lo àqueles que pouco conhecem Carroll para além do “pai de Alice⁴”, evidenciando especialmente o Lewis Carroll matemático/educador matemático. Destacamos, para tanto, alguns fatos de sua infância e juventude, entendendo esse período como fundamental para uma compreensão da multiforme vida e obra do autor, bem como aspectos de sua formação acadêmica e sua atuação como professor de Matemática na Universidade de Oxford. Nossa principal fonte para esse recorte de vida e obra foi *Lewis Carroll – Uma biografia* (Cohen, 1998), de

³ Este trabalho apresenta considerações que comporão a dissertação de mestrado do primeiro autor.

⁴ Nos referimos, é claro, a Lewis Carroll enquanto autor da Alice ficcional das obras *Alice no País das Maravilhas* e *Alice Através do Espelho*. Entretanto, a personagem foi inspirada em uma Alice real, Alice Liddell (1852-1934), filha de Henry George Liddell (1811-1898), reitor entre 1855 e 1891 de Christ Church, *college* da Universidade de Oxford, onde Carroll foi professor de matemática de 1855 até o fim da vida. Carroll frequentemente fotografava, com anuência, os filhos do reitor, e acabou por tornar-se amigo do casal Liddell e de seus filhos, em especial de Alice.

Morton N. Cohen, estudioso que dedicou trinta anos de sua vida a produzir essa sua monumental biografia de Carroll.

Em realidade, *Lewis Carroll* é um pseudônimo de Charles Lutwidge Dodgson; mas, como acabou por se convencionar na maior parte dos escritos sobre este autor, privilegiaremos o consagrado pseudônimo ao longo do artigo. Ele nasceu em 27 de janeiro de 1832 no presbitério de Daresbury, em Cheshire, Inglaterra, filho de Charles Lutwidge Dodgson, o pároco, e sua prima Frances Jane Lutwidge. Carroll foi o terceiro filho, mas o primeiro menino, dos onze filhos do casal Dodgson. O biógrafo de Carroll, Morton Cohen, especula que a “consanguinidade [dos pais] merece algum crédito pelo gênio criativo de Lewis Carroll, [mas] talvez também seja a culpada pela gagueira endêmica de Charles [Carroll] e da maioria de seus irmãos” (Cohen, 1998, p. 24). Os Dodgson, extremamente religiosos, não eram miseráveis, mas tampouco usufruíam de luxos:

[eles] exemplificavam a fatia da sociedade vitoriana conhecida como classe média alta, que se insere entre aqueles que trabalhavam com as próprias mãos e aqueles que simplesmente não trabalhavam. Na falta de títulos aristocráticos, heranças, terras ou outras propriedades, somente podiam aspirar a algum tipo de ascensão desenvolvendo o espírito – exatamente o que faziam. O dinheiro, de modo geral, representava uma preocupação constante, mas nunca chegava a sobrepujar o fervor religioso dessa gente, sua dedicação às causas sociais, sua busca do saber e seu zelo pela melhora da condição humana. O pai [do pequeno Carroll] levava uma vida inteiramente obscura em Daresbury, uma pequena comunidade filiada a uma paróquia maior. O reverendo Charles Dodgson recebeu o posto de Christ Church, Oxford, em 1827, seis anos após ganhar a nota máxima com distinção em duas disciplinas: letras clássicas e matemática. Daresbury, um pequeno povoado a dez quilômetros de Warrington e 21 de Liverpool, com 143 habitantes e trezentos hectares bem localizados, em meio à agradável paisagem da província, ficava praticamente perdido no panorama campestre. O presbitério [...] gozava de um bucólico isolamento, onde “até mesmo a paisagem de uma carroça era motivo de grande interesse” (Cohen, 1998, p. 25).

As sementes que anos depois germinariam o mundialmente famoso escritor⁵ Lewis Carroll foram plantadas já nos primeiros anos de sua infância interiorana. “Daresbury lançou sementes profundas na mente fértil de Charles⁶ durante os onze anos em que ele morou lá, e seus apontamentos, esboços e primeiras incursões na poesia inspiraram-se naquele período. As lembranças de Daresbury também colore[m] sua obra madura” (Cohen, 1998, p. 25). As paisagens idílicas e a ausência de acontecimentos dignos de nota naquela pacata vida rural sustentaram os voos da fértil imaginação do pequeno Carroll.

Apesar de uma rotina de disciplina e horários rígidos, a vida familiar certamente foi muito estimulante para o despertar artístico e intelectual de Carroll. A casa dos Dodgson era repleta de livros e muitas horas do dia eram reservadas a estudos e leituras. Como muitas famílias vitorianas, os Dodgson editavam uma revista familiar com recortes de jornais e revistas, trechos de literatura inglesa em poesia e prosa, conselhos práticos para a vida cotidiana, gravuras, e até mesmo escritos e desenhos autorais. A mais antiga dessas revistas é um pequeno livreto de título *Useful and Instructive Poetry*⁷, composto por 16 poemas acrescidos de ilustrações, realizado integralmente por Carroll por

⁵ Utilizaremos o substantivo “escritor” sempre como sinônimo de literato, escritor de literatura ficcional.

⁶ Trata-se de uma escolha do biógrafo de Carroll, Morton N. Cohen: “Alguns leitores criticarão meu uso do nome de batismo de Lewis Carroll, Charles, ao longo do livro. Prefiro assim simplesmente porque me pareceu mais apropriado em uma obra que aborda sua vida na intimidade” (Cohen, 1998, p. 11-12). Como pontuamos anteriormente, quando as palavras forem nossas, usaremos, sem qualquer distinção, o pseudônimo Carroll.

⁷ Em tradução livre do inglês, “Poesia Útil e Instrutiva”.

volta de 1845, quando ele tinha apenas 13 anos. A última dessas revistas seria *Mischmasch*⁸, concluída no verão de 1855. Sobreviveram aos nossos dias quatro de um total de oito revistas produzidas. Em todas, o precoce escritor Lewis Carroll foi o maior colaborador e o organizador principal.

O despertar da duradoura paixão de Carroll pela Matemática, talvez, também tenha se dado em sua primeira infância naqueles influentes anos na casa de Daresbury. Quando ainda era um menino muito pequeno, Carroll encontrou um livro de logaritmos e o trouxe ao pai, pedindo-lhe “‘Por favor, explique.’ O sr. Dodgson disse-lhe que ele era muito jovem para entender [...] um assunto tão complicado. A criança ouviu-o [...] mas pareceu não julgar a resposta relevante, pois insistiu: ‘Mas, por favor, explique!’” (Collingwood *apud* Cohen, 1998, p. 28). É claro que tal episódio, em si, dificilmente pode ser assentado como *o momento* em que Carroll começou a se interessar pela Matemática, pois lhe faltavam condições de apreender mesmo as mínimas noções dos conceitos envolvidos em um livro de logaritmos; mas podemos imaginar que, ao menos, estava presente naquele menino gago um certo fascínio por aqueles símbolos e números dispostos de modo esquisito, algo como uma *história* que ele não conseguia ler, mas queria conhecer. Como, ao falar desse episódio inusitado, comenta Cohen (1998, p. 28), “todas as crianças são curiosas, mas poucas são tão precoces quanto Charles”.

Aos 12 anos, em 1844, Carroll foi enviado para estudar no internato de Richmond, a 15 quilômetros de casa. A reitoria de Croft, para onde sua família e ele haviam se mudado em 1843, e a escola em Richmond “tinham muito em comum: a quantidade de crianças⁹, o clima de estudo, a ênfase no ritual e no comportamento cristãos” (Cohen, 1998, p. 37). Nesse novo ambiente, Carroll aprofundou o estudo de temas com os quais já havia se deparado nas lições tomadas com seu pai, tais como latim, grego, religião, matemática, literatura inglesa e francês. Carroll se mostrou um dos melhores alunos em todas as matérias e, permitindo olhar o anedótico caso do livro de logaritmos como profético, indubitavelmente provou seu interesse e aptidões para a Matemática.

O diretor da escola [James Tate] [...] comunicou aos Dodgson que seu filho possuía “um raro talento”, que “é capaz de adquirir conhecimentos bem avançados para sua idade, e seu raciocínio é tão claro e cioso do erro, que ele não fica apaziguado enquanto não encontra a solução mais exata do que quer que lhe pareça obscuro. Acaba de realizar uma prova excelente de matemática, exibindo aquela paixão pelo argumento preciso que lhe é peculiar.”

É possível que Tate tenha alimentado o apetite de Charles por resoluções matemáticas, ajudando-o a entrar no reino da matemática superior. E é mais possível ainda que Carroll tenha deixado Richmond “com um interesse rudimentar pelas lacunas conceituais da álgebra tradicional”, de acordo com a historiadora Helena M. Pycior. Ela acredita “que uma perspectiva crítica sobre a álgebra tradicional [...] prevaleceu na escola durante [...] o período que [Charles] passou lá”. Além disso, “se conceitos algébricos mal definidos foram algum dia criticados pelos alunos de Richmond [...] [Charles] certamente esteve entre os críticos” (Cohen, 1998, p.38).

Carroll ficou 16 meses em Richmond, retornando a Croft no final de 1845 para se preparar para a próxima etapa de estudos. Dessa vez iria para Rugby, que à época possuía a fama de ser o melhor internato da Inglaterra, partindo para essa jornada em 27 de janeiro de 1845, precisamente

⁸ Em tradução livre do inglês, “Mixórdia”.

⁹ “Em Richmond, Charles morava em um grande edifício chamado Swale House, junto com o diretor da escola, James Tate, sua esposa, seus seis filhos e outros alunos [...] [num total de aproximadamente] 120 meninos” (Cohen, 1998, p. 37-38).

em seu aniversário de 14 anos. Rugby, assim como Richmond anteriormente, fora escolhida pelo pai de Carroll a fim de fornecer os requisitos necessários para ingressar em Christ Church, o maior *college* da Universidade de Oxford, *alma mater* do sr. Charles Dodgson. Carroll acatou e trilhou o caminho definido (para não dizer imposto) por seu pai, que almejava que o filho percorresse seus mesmos passos. “Charles não questiona as decisões do pai; seguirá de bom grado os passos do patriarca. Além do mais, a estrada que está prestes a trilhar descortina-se apenas para uma pequena minoria de jovens ingleses” (Cohen, 1998, p. 53). Posteriormente, de acordo com Cohen (1998, p. 93), também caberia aos irmãos mais novos de Carroll, Wilfred e Skeffington, seguir o caminho de Christ Church.

Em Rugby, Carroll permaneceria quase 4 anos, finalizando seus estudos com distinção em 1849. Vencida essa etapa, voltou uma vez mais para a casa em Croft onde, por mais quase um ano, preparou-se para finalmente ingressar em Oxford. “O histórico de Charles em Rugby e seu precoce domínio de matemática e letras clássicas garantiram sua aceitação em Christ Church, e no dia 23 de maio de 1850 ele viajou para Oxford a fim de apresentar-se [para realizar sua matrícula]” (Cohen, 1998, p. 53), e em 24 de janeiro de 1851, três dias antes de seu décimo nono aniversário, retornou à universidade para efetivamente tomar assento como aluno.

Sua jornada como discente em Christ Church foi excepcional, atingindo nota máxima em todos os principais exames que prestou. A dedicação e as aptidões de Carroll foram notadas por seus professores, o que pavimentou o seu caminho para se tornar, posteriormente, um membro permanente da universidade e assumir uma cátedra de professor de Matemática.

Impressionado com o desempenho de Charles, o dr. Pusey [um dos regentes de Christ Church] escreveu a seu pai no dia 2 de dezembro de 1852. “É um grande prazer informá-lo que tive a oportunidade de recomendar o seu filho para receber uma bolsa de estudos [...]. Um dos supervisores apresentou-me hoje cinco nomes, mas ficou claro que eles consideraram seu filho o candidato mais bem qualificado [...]. Tem sido uma grande satisfação, para mim, tomar conhecimento da conduta firme e idônea de seu filho”.

Não era um fato totalmente excepcional que os melhores alunos de Christ Church ganhassem a bolsa que os tornava membros da fundação universitária antes mesmo de completar o bacharelado, mas a honra era conferida a poucos. A escolha coroou de glória e segurança os sucessos de Charles. Se quisesse, poderia continuar membro de Christ Church pelo resto de sua vida, com direito à moradia, um lugar de honra na comunidade acadêmica do melhor *college* da mais antiga universidade do país e uma renda segura (Cohen, 1998, p. 68).

Seus estudos de letras clássicas e matemática conferiram a Carroll o título de Bacharel em Artes, título referente ao primeiro grau universitário (em 1868 obteria o grau de Mestre em Artes, o mais elevado). A titularidade como professor de Matemática de Christ Church foi alcançada em outubro de 1855, um grande feito para um aluno recém graduado. A comunidade do *college* à época compreendia cerca de 180 alunos e um corpo docente de sete professores: seis de letras clássicas e apenas um de Matemática, que ministrava aulas em todos os níveis de ensino. Carroll viveria nos apartamentos do *campus* até o final de sua vida, onde produziria sua vasta obra artística, pedagógica e científica.

Desde o início de sua atividade docente, as preocupações pedagógicas ocuparam Carroll:

Charles se entregava de corpo e alma a sua profissão, não somente através dos cursos e aulas particulares, mas também através das obras que escrevia. Pagou do próprio bolso para publicar guias de matemática e lógica para o estudante, aos quais acrescentou, mais tarde, obras que exploram novas dimensões dessas disciplinas. [...] O primeiro livro de Charles saiu em 1860: *A Syllabus of Plane Algebraical Geometry, Systematically Arranged, with Formal Definitions, Postulates, and Axioms* (Roteiro sistemático de geometria algébrica plana, com definições formais, postulados e axiomas), uma obra de 154 páginas tentando traduzir parte da geometria euclidiana em termos algébricos e reivindicando para a geometria analítica um papel maior do que se admitia à época no desenvolvimento da razão e do raciocínio lógico.

Ainda em 1860, publicou um panfleto de oito páginas, *Notes on the First Two Books of Euclid, Designed for Candidates for Responsions* (Observações sobre os dois primeiros livros de Euclides para candidatos ao Responsions¹⁰) e, em 1861, *The Formulae of Plane Trigonometry, Printed with Symbols (Instead of Words) to Express the “Goniometrical Ratios”* (Fórmulas da trigonometria plana apresentadas com símbolos (lugar de palavras) para expressar as “razões goniométricas”, 19 páginas) e *Notes on the First Part of Algebra* (Observações sobre a primeira parte da álgebra, 16 páginas). Essas obras refletem a própria atividade docente de Carroll e seu desejo de ajudar os alunos a entender a matéria melhor e preparar-se para os exames de forma mais fácil e mais eficaz. [...] Os tratados de matemática falam por si mesmos: são tentativas profissionais e sinceras, ainda que, talvez, não muito elegantes, de mudar o ensino de matemática e ajudar os estudantes (Cohen, 1998, p. 102-103).

Percebemos do excerto a dedicação de Carroll em organizar materiais que auxiliassem seus alunos. É interessante notar que o seu primeiro livro publicado não foi uma ficção literária, mas sim um tratado de geometria, o *Syllabus*, de 1860, 5 anos antes da publicação do meteórico *Alice no País das Maravilhas*. Ao longo de sua vida, alternará a publicação de obras literárias (romances, contos, poemas etc.) com outras de assuntos matemáticos, sendo as mais complexas sobre geometria euclidiana e lógica simbólica (Montoito, 2007; 2013).

Com estas breves notas biográficas, quisemos destacar alguns aspectos do profundo interesse de Lewis Carroll pela Matemática – algo levado pelo autor até mesmo para muitas de suas obras de literatura – e situá-lo como um educador matemático de renome nas últimas décadas do século XIX na Inglaterra, fato desconhecido por muitos daqueles que o conhecem apenas por *Alice*. Feita esta apresentação do autor, passamos agora à apresentação de uma de suas obras de matemática, o livro *Pillow Problems*, objeto principal da pesquisa de mestrado, em andamento, da qual o presente artigo emerge.

PILLOW PROBLEMS: PROPOSIÇÕES MATEMÁTICAS CARROLLIANAS

O livro *Pillow Problems*¹¹ consiste em uma coletânea de 72 problemas de variados conteúdos matemáticos, com soluções propostas pelo próprio Carroll. Foi publicado originalmente em 1893, apresentado como a parte 2 de *Curiosa Mathematica*; a parte 1, por sua vez, com o subtítulo *Uma nova teoria das paralelas*, havia sido publicada em 1890 e tratava de problemas geométricos a partir dos postulados e proposições do *Elementos* de Euclides (2009). É interessante observar que “quase todas as obras de matemática [...] [de Carroll] tratam de geometria, [...] [sendo que] *Euclid and His*

¹⁰ Um dos exames aplicados aos alunos em Christ Church.

¹¹ Em uma tradução literal, “Problemas de Travesseiro”, livro que até o momento não possui edições em português. Está nas nossas intenções de pesquisa o plano de traduzir a íntegra do livro para a língua portuguesa. Não obstante, até que a tradução esteja publicada, preferimos indicar o livro por seu título original em inglês.

Modern Rivals (Euclides e seus rivais modernos) e *Curiosa Mathematica, Part 1, A New Theory of Parallels* [...] foram muito além de suas necessidades como professor” (Cohen, 1998, p. 435). Para Carroll, os escritos de Euclides haviam capturado a beleza da Matemática em seu estado mais puro ao mobilizar alguns poucos axiomas e, a partir deles, obter resultados profundos.

A versão de *Pillow Problems* que utilizamos durante a pesquisa é a edição de 1958 publicada pela editora norte-americana Dover (Carroll, 1958), que é uma reedição integral e inalterada dos seguintes dois livros de Lewis Carroll, compilados em um único tomo: *Pillow-Problems* (Parte 2 de *Curiosa Mathematica*), publicado pela Macmillan and Company Ltd., em 1895, e *A Tangled Tale* (*Uma História Embrulhada*), originalmente publicado também pela Macmillan and Company Ltd., em 1885. Considerações sobre *Uma História Embrulhada*, texto literário carrolliano, destoam de nossos interesses no presente artigo.

A introdução original do livro, em sua primeira edição, também da lavra de Carroll, data de maio de 1893. No mesmo ano, uma seguinte edição foi feita, com seu prefácio indicando o mês de setembro. A última edição revisada pelo próprio Carroll, a quarta, é de 1895 – como vimos, a edição que editora Dover republicou integralmente em 1958. Os 72 problemas de matemática reunidos no livro foram concebidos e resolvidos por Carroll durante, em sua maioria, noites e madrugadas. Apenas um ou outro problema, conta o autor, germinou durante a luz do dia. Entretanto, é pertinente notar a ressalva feita por Carroll, quando afirma, a despeito do nome do livro e de sua origem notívaga: “nunca sofri de ‘insônia’: e as horas excessivamente acordadas que tive de passar à noite foram muitas vezes simplesmente o resultado das horas excessivamente sonolentas que passei durante a noite anterior!” (Carroll, 1958, p. x, tradução nossa). Carroll conta-nos suas motivações no prefácio da segunda edição do livro:

[...] Tampouco é como remédio para a *vigília* que sugeri o cálculo matemático; mas como um remédio para os *pensamentos angustiantes* que tendem a invadir uma mente totalmente desocupada. [...] O verdadeiro dilema, que tive de enfrentar, é este: dado que o cérebro está em uma condição tão desperta que, faça o que eu fizer, tenho *certeza* de que vou continuar acordado na próxima hora ou mais, devo escolher entre dois caminhos, a saber: ou me submeter à tortura inútil de passar por algum tópico preocupante, repetidamente, ou ditar a mim mesmo algum tópico suficientemente absorvente para manter a preocupação afastada. Um problema matemático é, para mim, um desses tópicos; e é um benefício, mesmo que prolongue um pouco o período acordado. Acredito que uma hora de cálculo é muito melhor para mim do que meia hora de preocupação (Carroll, 1958, p. x, tradução nossa, grifos do autor).

Na Tabela 1, os problemas constantes em *Pillow Problems* estão organizados de acordo com os assuntos matemáticos que abordam.

Tabela 1 – Classificação dos problemas em *Pillow Problems*

Classificação	Subclassificação	Nº do problema
Aritmética		31
Álgebra	Problemas de equacionamento	8, 25, 39, 52, 68
	Séries	21, 32
	Equações indeterminadas	47
	Propriedade dos números	1, 14, 29, 44, 61
	Probabilidades	5, 10, 16, 19, 23, 27, 38, 41, 45, 50, 58, 66
Geometria Pura	Plana	2, 3, 9, 15, 17, 18, 20, 24, 26, 30, 34, 35, 36, 40, 46, 51, 57, 62, 64, 71
Trigonometria	Plana	4, 6, 7, 11, 12, 13, 18, 22, 28, 37, 42, 43, 48, 54, 55, 56, 57, 60, 65, 69
	Sólida	49, 59, 63, 70
Geometria Algébrica	Plana	53
	Sólida	67
Cálculo Diferencial	Máximos e mínimos	33
Probabilidades Transcendentes		72

Fonte: Adaptado e traduzido de Carroll (1958, p. xxii)

Sobre a cronologia dos enigmas reunidos em *Pillow Problems*, quanto à data em que foram “concebidos” e solucionados, Carroll (1958, p. xiii) aponta que registrou “as datas exatas de alguns” dos problemas. No livro, estas datas, quando disponíveis, constam ao final de cada enunciado. Sete dos problemas não possuem data (listados como “s/d” – sem data – na Tabela 2). Em 21 dos problemas, constam apenas mês e ano¹². Os demais problemas apresentam a data exata. Na Tabela 2, organizamos os problemas cronologicamente.

Tabela 2 - Distribuição dos problemas por ano

Ano	Nº do problema	Ano	Nº do problema
1872	67	1884	1, 45, 56, 58
1874	34, 55, 64, 71	1886	24, 49, 54
1876	4, 9, 25, 35, 38, 40, 62	1887	5, 16, 23, 41, 46, 72
1878	28, 39, 42	1888	20
1880	27	1889	7, 8, 13, 17, 21, 22, 26, 30, 31, 32, 36, 52, 53, 65, 66, 68, 69
1881	14, 29, 48, 51, 61	1890	10, 47, 59, 60, 63
1882	11, 43	1891	12, 15, 18, 37, 57
S/d	2, 3, 6, 19, 33, 50, e 70.		

Fonte: Os autores.

Aqui não discutiremos pormenores matemáticos dos problemas de *Pillow Problems*, embora essa (não) ação aponte para a possibilidade de trabalhos futuros que tomem alguns dos problemas individuais do livro para análise de conteúdo. Nosso interesse momentâneo é apresentar aspectos gerais do livro e comentar, brevemente, alguns estudos já realizados a partir dele, bem como indicar outras possibilidades de pesquisa que vislumbramos possíveis – algumas das quais a que temos nos

¹² A saber, os problemas 7, 8, 13, 17, 20, 24, 26, 30, 31, 36, 37, 40, 41, 43, 47, 51, 59, 62, 65, 66, e 69.

dedicado em pesquisas em desenvolvimento. Reproduzir aqui todos os 72 enunciados (afinal, há o livro em si com todos eles) seria copioso e despropositado; no entanto, entendemos que se faz pertinente indicar os enunciados de ao menos alguns dos problemas presentes em *Pillow Problems*, sem o que a apresentação do livro ao leitor não familiarizado, intenção cara aos intuitos desse artigo, ficaria algo incompleta. Assim, conforme um ou outro problema de *Pillow Problems* for citado no contexto das nossas considerações seguintes, o enunciado daquele problema em particular será apontado em nota de rodapé.

O problema mais antigo é o de nº 67¹³, classificado como um problema de Geometria Algébrica Sólida, datado de 27 de janeiro de 1872 (exatamente no aniversário de 40 anos¹⁴ de Carroll), e o mais recente é o problema nº 37¹⁵, de Trigonometria Plana, concebido em dezembro de 1891 (quando Carroll tinha 59 anos, um ano e meio antes da publicação de *Pillow Problems*, em maio de 1893, e pouco mais de 6 anos antes de sua morte, em 14 de janeiro de 1898). Não sabemos dizer se algum dos problemas “sem data” ocorreu ao autor antes do problema nº 67 ou depois do problema nº 37. Se considerarmos apenas os problemas com data conhecida, exata ou aproximada, temos *Pillow Problems* como a reunião de problemas matemáticos com os quais o autor se ocupou, eventualmente, ao longo de quase 20 anos, sem qualquer intencionalidade maior, no sentido de que os reunir em um livro a ser publicado foi uma decorrência não (muito) planejada inicialmente.

É possível perceber, a partir da Tabela 2, que não há problemas datados nos anos de 1873, 1875, 1877, 1879, 1883 e 1885. Entretanto, isso não quer, necessariamente, dizer que Carroll não “esteve às voltas” com nenhum “problema de travesseiro” nesses 6 anos em que temos hiatos na lista. Alguns dos problemas sem data podem ter sido pensados nesses anos. Também é possível, acreditamos, que o autor tenha agrupado em *Pillow Problems* seus 72 problemas favoritos e inéditos de uma lista originalmente maior. Esta conjectura se deve ao fato de que Carroll, por várias vezes, publicou enigmas matemáticos, à la os de *Pillow Problems*, em periódicos especializados (Minks; Montoito, 2024; Cohen, 1998).

Escassas pesquisas têm sido realizadas sobre *Pillow Problems*. Vale destaque os trabalhos do matemático ucraniano-australiano Eugene Seneta, membro da Sociedade Lewis Carroll¹⁶, professor emérito do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de Sydney. Este pesquisador se insere dentre aqueles que dedicaram escritos a evidenciar a “faceta de matemático” de Carroll (Seneta, 1984) – desviando do lugar comum de percebê-lo apenas como um literato – e um dos poucos a abordar a(s) matemática(s) subjacente(s) em *Pillow Problems* (Seneta, 1993).

Seneta (2017, p. 33, tradução nossa) comenta que seu “principal interesse em Lewis Carroll tem sido seu pensamento probabilístico [...] [e que] esse interesse começou com os treze problemas de probabilidade presentes no livro *Pillow Problems*”. Conforme a Tabela 1, doze dos problemas de

¹³ Problema nº 67: “Se um tetraedro regular for colocado, com um vértice para baixo, em uma base que o encaixa exatamente, e for girado ao redor de seu eixo vertical, em um ângulo de 120°, levantando-o apenas o necessário até que ele se encaixe novamente na base: encontre o lugar geométrico de um dos vértices giratórios” (Carroll, 1958, p. 16, tradução nossa).

¹⁴ O problema nº 57 data de 27 de janeiro de 1891, aniversário de 59 anos de Carroll. Não deixa de ser interessante notar que o autor, mais de uma vez, dedicou a noite de seu aniversário a trabalhar em um enigma matemático. Segue o problema nº 57: “Em um triângulo dado, descreva três quadrados, cujas bases estejam situadas ao longo dos lados do triângulo, e cujas arestas superiores formem um triângulo; (1) geometricamente; (2) trigonometricamente” (Carroll, 1958, p. 14, tradução nossa).

¹⁵ Problema nº 37: “Dois círculos dados se intersectam, de modo que sua corda comum subtenda ângulos de 30° e 60° em seus centros. Que fração do círculo menor está dentro do maior?” (Carroll, 1958, p. 8, tradução nossa).

¹⁶ A Sociedade Lewis Carroll foi fundada em 1969 com o intuito de promover o interesse na vida e na obra de Charles Lutwidge Dodgson. A sociedade reúne-se regularmente, patrocina conferências, organiza visitas a lugares relacionados a Dodgson e mantém um ativo programa de publicações. Seus membros incluem estudiosos e colecionadores ilustres (Cohen, 1998).

probabilidade do livro estão associados à categoria maior de “Álgebra” e há mais um, o problema nº 72¹⁷, datado de 8 de setembro de 1887, solitário na categoria de “Probabilidades Transcendentes”.

Dez desses problemas envolvem questões de “sacos e contadores”, exemplos simples de modelos de urna na teoria das probabilidades. Esses dez problemas abordam questões sobre “probabilidades inversas”, ou seja, dado um conjunto de probabilidades prévias para as causas, como essas são modificadas pela observação experimental de um entre vários efeitos possíveis? O tratamento dessas questões de inversão por meio de um dispositivo simples chamado Teorema de Bayes¹⁸ é a base da inferência estatística Bayesiana moderna (Seneta, 2017, p. 33, tradução nossa).

Dentre outras considerações, Seneta (2017) chama a atenção para a influência de um trabalho do matemático Morgan W. Crofton¹⁹, trabalho este publicado poucos anos antes de *Pillow Problems*, na abordagem dada por Carroll a alguns problemas de estatística do livro:

Crofton (1826-1915), na célebre 9ª edição da *Encyclopaedia Britannica* [de 1885], incluiu uma seção intitulada “II. Probabilidade de eventos futuros deduzida da experiência”, que expõe a teoria das “probabilidades inversas” conforme o entendimento de Crofton [...] sobre o Teorema de Bayes. Vários dos problemas de *Pillow Problems* de Carroll (especificamente o nº 66²⁰, de setembro de 1889, e o nº 10²¹, de agosto de 1890) foram fortemente influenciados pelo tratamento dado por Crofton ao tema (Seneta, 2017, p. 33, tradução nossa).

Embora Eugene Seneta tenha favorecido uma análise em “matemática pura” dos problemas de *Pillow Problems* (ainda que seus textos não se furem de considerações sobre a biografia de Carroll e a historiografia de seus escritos), este não é o único modo de investigar o livro no escopo da Educação Matemática e da História da Matemática.

Pillow Problems foi recentemente estudado em Minks e Montoito (2024) sob uma perspectiva historiográfica, relevando outras publicações de Carroll a partir de um dos problemas do livro, o problema nº 61, que citaremos mais à frente. É dizer que o livro foi manipulado como uma fonte histórica, seguindo abordagens propostas por Montoito, Dalcin e Rios (2021), a fim que evidenciar camadas ocultas, ainda que interpretativas, acerca das intenções do autor ao publicar a obra, bem como o contexto de seu advento.

Cotejando as seções introdutórias das várias edições de *Pillow Problems* com outros trabalhos de e sobre Carroll, Minks e Montoito (2024) identificaram que o problema nº 61 também fora

¹⁷ Problema nº 72: “Um saco contém 2 peças, sobre as quais nada se sabe, exceto que cada uma é preta ou branca. Determine suas cores sem retirá-las do saco” (Carroll, 1958, p. 18, tradução nossa).

¹⁸ Atribuído ao pastor presbiteriano e matemático inglês Thomas Bayes (1701-1761).

¹⁹ Matemático irlandês que contribuiu para a teoria geométrica da probabilidade.

²⁰ Problema nº 66: “Dado que há 2 peças em um saco, sobre as quais tudo o que se sabia inicialmente era que cada uma era branca ou preta. Também dado que foi realizado o experimento de retirar uma peça, observá-la e devolvê-la ao saco um certo número de vezes; que ela foi branca em todas as vezes; e que, como resultado, a chance de retirar uma peça branca na próxima tentativa é $\alpha/(\alpha+\beta)$. Além disso, considerando que o mesmo experimento é repetido mais m vezes, e que ela continua sendo branca em todas as vezes, qual seria então a nova chance de retirar uma peça branca?” (Carroll, 1958, p. 15, tradução nossa).

²¹ Problema nº 10: “Uma mesa de bilhar triangular tem 3 buracos, um em cada canto. Um dos buracos comporta apenas uma bola, enquanto cada um dos outros dois comporta duas bolas. Há 3 bolas na mesa, cada uma contendo uma única moeda. A mesa é inclinada de forma que as bolas correm para um dos cantos, sem que se saiba qual. A ‘expectativa’ em relação ao conteúdo do buraco é 2/6. Quais são as moedas?” (Carroll, 1958, p. 3, tradução nossa).

publicado por Carroll em um jornal vitoriano, *The Educational Times*, que, dentre outros assuntos de interesse à educação, publicava problemas matemáticos. Os leitores do jornal podiam propor soluções às questões veiculadas e tais soluções eram posteriormente publicadas remetendo às questões originais. Era possível réplica do autor, e para o problema nº 61 – e também em outras questões sugeridas por Carroll ao jornal, mas não presentes em *Pillow Problems* – Carroll criticou acidamente uma solução enviado por um leitor. Além de evidenciar esse “debate” sobre a solução do problema nº 61, os autores do artigo também apontam propostas de soluções enviadas por outros leitores do *Educational Times* descobertas durante a pesquisa, e, por fim, apresentam a solução que o próprio Carroll indica na seção de resoluções de seu *Pillow Problems*.

Com o intuito de proporcionar ao leitor ao menos um vislumbre do modo como Carroll pensava em seus “problemas de travesseiro”, também aqui trazemos, nas linhas abaixo, o Problema nº 61 e a solução carrolliana correspondente.

Começemos pelo enunciado do Problema nº 61:

Prove que, se quaisquer 3 números forem tomados, que não podem ser arranjados em P. A., e cuja soma é um múltiplo de 3, a soma de seus quadrados também é a soma de outro conjunto de 3 quadrados, os 2 conjuntos não tendo nenhum termo em comum (Carroll, 1958, p. 14, tradução nossa).

A solução proposta por Carroll (1958, p. 90-91, tradução nossa) é a seguinte:

Nós sabemos que a equação $(a^2+4b^2+4c^2)+(4a^2+b^2+4c^2)+(4a^2+4b^2+c^2)=9(a^2+b^2+c^2)$ é identicamente verdadeira.

Portanto $a^2+b^2+c^2$

$$=1/9\{(a^2+4b^2+4c^2)+(4a^2+b^2+4c^2)+(4a^2+4b^2+c^2)\}$$

$$=1/9\{(a^2+4b^2+4c^2+8bc-4ca-4ab)+(4a^2+b^2+4c^2-4bc+8ca-4ab)+(4a^2+4b^2+c^2-4bc-4ca+8ab)\}$$

$$=1/9\{(-a+2b+2c)^2+(2a-b+2c)^2+(2a+2b-c)^2\}$$

$$((-a+2b+2c)/3)^2+((2a-b+2c)/3)^2+((2a+2b-c)/3)^2$$

$$\text{Agora } (-a+2b+2c)=3(b+c)-(a+b+c)$$

∴, se $(a+b+c)$ é um múltiplo de 3, então também o é $(-a+2b+2c)$;

∴ $(-a+2b+2c)/3$ é um inteiro;

e da mesma forma para as outras 2 frações.

Também pode ser provado que, se $(-a+2b+2c)/3$ é igual a , ou b , ou c , então a , b , c podem ser arranjados em P. A.

Primeiro, seja $(-a+2b+2c)/3=a$

então $-a+2b+2c=3a$; i.e. $b+c=2a$;

Segundo, seja $(-a+2b+2c)/3=b$;

então $-a+2b+2c=3b$; i.e. $2c=a+b$;

Terceiro, seja $(-a+2b+2c)/3=c$;

então $-a+2b+2c=3c$; i.e. $2b=c+a$.

E da mesma forma para as outras 2 frações.

Portanto, contranominalmente, se a , b , c não podem ser arranjados em P.A., os dois conjuntos de quadrados não têm termos comuns.

Q.E.D.²²

²² Sigla para a expressão latina “*Quod Erat Demonstrandum*”, que significa “o que era para ser demonstrado”.

Exemplos Numéricos (não elaborados)

a^2	b^2	c^2	$((-a+2b+2c)/3)^2$	$((2a-b+2c)/3)^2$	$((2a+2b-c)/3)^2$
1^2	4^2	4^2	5^2	2^2	2^2
3^2	4^2	8^2	7^2	6^2	2^2
4^2	5^2	9^2	8^2	7^2	3^2

Certamente será proveitoso para o leitor explorar as nuances dos resultados acima, percebendo teoremas e lemas subentendidos. Isso tudo, é claro, não afasta a possibilidade de o leitor interessado propor soluções alternativas.

Como comentado, poucos trabalhos se dedicaram a estudar *Pillow Problems* até o momento. Talvez a razão seja porque a obra carrolliana seja vasta, mesmo tratando-se de suas produções não literárias. Ademais, até a década de 1990, muitos dos escritos de Lewis Carroll careciam de organização e acesso adequados aos pesquisadores e entusiastas do autor (Cohen, 1998, vide introdução do livro). Este cenário é particularmente verdade no Brasil, com muitos dos trabalhos de Carroll ainda inacessíveis em nosso país e mesmo em língua portuguesa – como é caso de *Pillow Problems*. Num esforço para mudar esse cenário, recentemente participamos, junto com outros pesquisadores de diversas instituições do país, de um projeto de tradução de textos carrollianos inéditos em nosso idioma, compilados com comentários sob a organização de Montoito (2023). Somando-se a esse esforço, a tradução integral de *Pillow Problems* para a língua portuguesa será um dos resultados da pesquisa de mestrado na qual o presente artigo se insere.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos são os movimentos de investigação possíveis para aproximar *Pillow Problems* das pesquisas afins aos campos da Educação Matemática, da História da Matemática e mesmo da Matemática Pura. Os trabalhos mencionados anteriormente exemplificam alguns desses movimentos que, certamente, são passíveis de aprofundamentos e desdobramentos. Minks e Montoito (2024) mostraram modos de tomar *Pillow Problems* como uma fonte histórica e conectaram conteúdos do livro com publicações pouco conhecidas e/ou exploradas de Carroll e outros autores em um jornal educacional da Inglaterra do final do século XIX. Seneta (2017), em uma perspectiva totalmente diferente, busca explorar problemas de probabilidade propostos por Carroll para investigar aspectos particulares desse campo da Matemática. Dentre outros tantos movimentos investigativos imagináveis, gostaríamos de sugerir, à guisa de encerramento, ao menos mais um: a contextualização dos teoremas matemáticos mobilizados ao longo do livro com o intuito de perceber até que ponto Carroll mobilizava “matemática de vanguarda”. Como apontou Seneta (2017), alguns dos problemas de probabilidade de *Pillow Problems* advieram sob a influência de trabalhos que eram contemporâneos a Carroll nessa especialidade e, ademais, para além de *Pillow Problems*, Lindemann (2023), Lindemann e Sauter (2019) e Cohen (1998) indicaram que os trabalhos de Lewis Carroll no campo da Lógica seguiam, em grande medida, as inovações e avanços realizados nesse campo naquela época e, até mesmo, contêm contribuições originais e relevantes.

REFERÊNCIAS

CARROLL, Lewis. **The Mathematical recreations of Lewis Carroll: Pillow Problems and A Tangled Tale**. New York: Dover Publications, 1958.

COHEN, Morton. **Lewis Carroll, uma biografia**. Rio de Janeiro: Record, 1998.

EUCLIDES. **Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

LINDEMANN, John Lennon. A história e a atualidade de um paradoxo lógico carrolliano. In: MONTOITO, R. (org.) **Alimentar a mente – e outros textos de Lewis Carroll**. Pelotas: Editora IFSUL, 2023, p. 105-107.

LINDEMANN, John Lennon; SAUTTER, Frank Thomas. A abordagem carrolliana a paradoxos. **Pensando** – Revista de Filosofia. Vol. 10, n. 20. 2019. p. 91-106.

MINKS, Roger; MONTOITO, Rafael. A “genealogia” do problema 61 – Pillow Problems, de Lewis Carroll, enquanto fonte histórica. In: Anais do Encontro Gaúcho de Educação Matemática. **Anais...** Bagé (RS) UNIPAMPA, 2024. Disponível em: <http://www.even3.com.br/anais/xv-encontro-gaucha-de-educacao-matematica-449211>. Acesso em: 06 jan. 2025.

MONTOITO, Rafael. (org.) **Alimentar a mente – e outros textos de Lewis Carroll**. Pelotas: Editora IFSUL, 2023.

MONTOITO, Rafael. **Euclid and his Modern Rivals (1879), de Lewis Carroll**: Tradução e Crítica. Tese de doutorado. Bauru: Universidade Estadual Paulista, 2013.

MONTOITO, Rafael. **Uma Visita ao Universo Matemático de Lewis Carroll e o (Re)encontro com sua Lógica do Nonsense**. Dissertação de mestrado. Natal: Universidade Federal de Natal, 2007.

MONTOITO, Rafael; DALCIN, Andréia; RIOS, Diogo. **Aproximações entre matemática, literatura e história**: reflexões sobre o ensino e a pesquisa. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

SENETA, Eugene. Lewis Carroll as a probabilist and mathematician. In: **Mathematical Scientist**, v.9, p. 79-94, 1984.

SENETA, Eugene. Lewis Carroll, Boole’s Inequality and Statistical Inference. In: **The Carrollian: The Lewis Carroll Journal**, n. 30 (Lewis Carroll: Man of Science), p.33-44, The Lewis Carroll Society, Hatrow, Inglaterra, oct. 2017.

SENETA, Eugene. Lewis Carroll’s “Pillow Problems”: On the 1993 centenary. In: **Statistical Science**, v. 8, p. 180-186, 1993.