Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores). Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Os números inteiros relativos durante a Matemática Moderna no ensino liceal em Portugal

The integers during Modern Mathematics in *liceus* in Portugal

Mária Cristina Almeida[1]
Universidade Nova de Lisboa – UNL

RESUMO

O movimento curricular internacional conhecido como Matemática Moderna iniciado na segunda metade do século XX visava a transformação de representações e práticas da matemática escolar. Em Portugal, a disseminação das ideias de matemática moderna dá-se a partir de 1968 para os estudantes pós-primários, chegando aos liceus em 1970. A alteração curricular é acompanhada da publicação de livros de texto. Neste texto visamos compreender como foram abordados os números inteiros relativos e as suas operações, no início do período de disseminação da Matemática Moderna, nos liceus. A nossa fonte foi o livro de texto em vigor à época. O estudo é baseado numa análise documental, de natureza descritiva e interpretativa, com uma perspetiva histórica. Observámos que a abordagem usada para introduzir números inteiros e suas operações está em sintonia com o preconizado pelas ideias da matemática moderna, no que respeita a universos numéricos e propriedades das operações. O livro de texto promove a atenção e participação dos alunos na aprendizagem, utilizando discurso simples e relacionando a matemática com a realidade dos alunos.

Palavras-chave: Ensino da Matemática; Números inteiros relativos; História da Educação Matemática; Matemática Moderna; Ensino liceal.

ABSTRACT

The international curricular movement known as Modern Mathematics that began in the second half of the 20th century aimed to transform representations and practices of school mathematics. In Portugal, the dissemination of modern mathematics ideas to post-primary students began in 1968, reaching secondary schools in 1970. The curricular change is accompanied by the publication of textbooks. In this text we aim to understand how relative integers and their operations were approached, at the beginning of the period of dissemination of Modern Mathematics, in *liceus*. Our source was the textbook published at that time. The study is based on a documental analysis, of a descriptive and interpretative nature, with a historical perspective. We observed that the approach used to introduce the integers and their operations is aligned with what is recommended by the ideas of modern mathematics, with regard to numerical universes and properties of operations. The textbook promotes the students' attention and participation in learning, using simple speech and relating mathematics to the students' reality.

Key Words: Mathematics teaching; Integers; History of Mathematics Education; Modern Mathematics; Education in *liceus*.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para compreender a história do ensino da Matemática partindo da perspetiva da história das disciplinas escolares e da cultura escolar (Chervel, 1990; Julia, 2001) devemos entender a escola não como um simples agente de transmissão de saberes elaborados fora dela, mas como uma instituição que os adapta, os transforma, criando um saber e uma cultura próprios. Chervel (1990) aponta os momentos de reforma como momentos privilegiados para estudar a história das disciplinas escolares. Neste contexto, a reforma da Matemática Moderna é um momento rico para o estudo da história do ensino da disciplina.

[1] Investigadora do Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), da Universidade Nova de Lisboa. E-mail: malmeida@fcsh.unl.pt.

No panorama da educação matemática, a ideia de que se tornava necessária uma renovação no ensino da disciplina, desenvolve-se no período pós 2.ª Guerra Mundial, particularmente em diversos países europeus, nos Estados Unidos da América, na União Soviética e na América Latina. Este movimento internacional conduziu a uma reforma curricular que ocorre entre a segunda metade da década de 50 e a primeira metade dos anos 70 do séc. XX, usualmente designada reforma da Matemática Moderna. Uma descrição global do movimento pode ser encontrada em Moon (1986) e as consequências do movimento para a génese do campo de educação matemática foi feita por Furinghetti, Matos e Menghini (2013). Uma discussão sobre as formas como a cultura da matemática escolar foi afetada em sistemas escolares distintos, encontra-se em De Bock (2023).

No que se refere a Portugal, a reforma ocorreu em todos os níveis de ensino, desde o primário até ao superior, envolvendo matemáticos, professores de matemática, instituições educativas e até a imprensa e sociedade em geral. Matos e Almeida (2023) discutem as múltiplas formas que a Matemática Moderna assumiu ao ser aplicada nos diferentes subsistemas educativos portugueses do ensino não superior. Almeida, Matos e Almeida (2022) compilaram as publicações sobre a Matemática Moderna nos jornais diários de Lisboa, entre 1955 e 1972. A aplicação das ideias da Matemática Moderna nas escolas portuguesas decorreu entre os anos 1960 e o final dos anos 1980. Para Matos (2009), três períodos marcaram a introdução da Matemática Moderna em Portugal: circulação de novas ideias em relação à matemática, a partir de 1957; experimentação, a partir de 1963; e a disseminação, a partir de 1968.

Entre 1948-1968, o sistema escolar português, no que respeita ao ensino não superior, compreendia o ensino primário (6-9 anos), que era obrigatório, e o ensino secundário (10-16 anos), que englobava dois ramos: o ensino liceal e o ensino técnico. O ensino liceal dividia-se em três ciclos: 1.º ciclo (10-11 anos), 2.º ciclo (12-14 anos), 3.º ciclo (15-16 anos). No 3.º ciclo, os alunos preparavam-se para estudos universitários, visando as profissões liberais e quadros técnicos superiores. As escolas técnicas não davam acesso direto às universidades e eram destinadas à formação profissional Esta estrutura altera-se em 1968 com a criação do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (CPES), que unificando ciclos iniciais do liceu e das técnicas, permitiu evitar que alunos de 10 anos fizessem uma escolha demasiado precoce entre uma das inalteradas vias (Almeida e Candeias, 2014).

Em 1968, o programa da disciplina de Matemática do CPES incorporava a inovação curricular da Matemática Moderna. Este programa introduz mudanças significativas ao nível de conteúdos e metodologias em aula. A linguagem de conjuntos assume agora um papel preponderante na abordagem da maioria dos conceitos de aritmética e álgebra. A geometria é simplificada, sendo a sua abordagem mais superficial. O tema central do CPES é o estudo dos números racionais. Consideram-se apenas números racionais absolutos, uma vez que a noção de número negativo só será introduzida posteriormente. Preconizava-se que o ensino devia adequar-se aos interesses e experiências dos alunos, à sua faixa etária e ao meio envolvente (Almeida e Candeias, 2014; Sousa, 2012).

Em 1970 chegam aos liceus os primeiros alunos que concluíram o CPES, e que tinham já sido expostos a dois anos de matemática moderna, iniciando-se assim o processo de ajuste curricular dos restantes anos do ensino liceal. No que respeita a livros de texto, no Curso Geral dos liceus, foram postas em prática alterações curriculares de carácter experimental a partir de 1970, e encontram-se publicados livros, associados a estas experiências, desde 1971, que, de início, se configuravam como livros únicos.

As dificuldades epistemológicas geradas pelo número negativo estão presentes hoje na prática do ensino de Matemática quando os professores encontram certa dificuldade dos alunos para alcançarem sua correta compreensão, interpretação e utilização (Machado e Romero, 2009), o que justifica o nosso propósito de compreender qual foi a abordagem proposta para a aprendizagem dos números inteiros relativos no início do período de disseminação da Matemática Moderna, nos liceus. A nossa fonte será o livro de texto oficial à época, ou seja, o *Compêndio de Matemática*, do 1.º ano do Curso Geral dos liceus.

ABORDAGEM TEÓRICO-METODOLÓGICA

Valente (2007) destaca o papel dos livros de texto e a sua ligação com o desenvolvimento da matemática escolar, salientando que a disciplina de matemática é uma das em que é mais evidente a relação entre os livros e o ensino. Esta relação tão próxima entre a disciplina e os livros dá-lhes um estatuto especial como fonte para a história dos saberes escolares. Valente (2019) ressalta que os manuais pedagógicos, os livros de texto e os programas de ensino são documentos de referência, de um dado tempo, para o trabalho docente, onde são fixados os saberes instituídos, ou seja, os saberes objetivados.

A análise documental é "uma operação ou um conjunto de operações visando representar o conteúdo de um documento sob a forma diferente do original, a fim de facilitar num estado ulterior, a sua consulta e referenciação" (Bardin 1977, p. 45).

A fonte documental do nosso estudo é um livro de texto, o *Compêndio de Matemática*, do 1.º ano do Curso Geral. A estrutura da análise foi adaptada de uma proposta de Machado (2005), e compreende o contexto histórico, os autores, caraterísticas da obra e abordagem aos números inteiros relativos.

Pela relevância que os livros de texto assumem no contexto de ensino e aprendizagem, o seu conteúdo e estrutura são muito importantes para a promoção de uma visão específica de currículo (Okeeffe, 2013). Para Okeeffe (2013) existem várias características dos livros de texto que podem ter impactos positivos ou negativos na aprendizagem, como a linguagem, a ciência, as técnicas de impressão ou o significado das imagens. Para a autora a análise dos livros é um meio pelo qual essas características podem ser identificadas. Okeeffe (2013) estabeleceu uma estrutura para análise que compreende quatro elementos principais: conteúdo, estrutura, expectativa e linguagem, que podemos usar para observar a abordagem dos números relativos usada no livro de texto associado à alteração curricular da Matemática Moderna. A estrutura do conteúdo inclui aspetos como formação de valor, elementos motivacionais, acessibilidade, ilustrações, guias de estudo, entre outros. A dimensão estrutura compreende como o livro de texto está organizado, a distribuição do conteúdo, as conexões entre diferentes assuntos, conhecimentos e informações e o processo de constituição. A dimensão da expectativa pode impactar a forma como os alunos lidam com os temas apresentados, se, por exemplo, o foco de um livro de matemática está na repetição e na prática, então um aluno irá inconscientemente tentar replicar um método anterior quando encontrar uma questão, sem tentar usar competências de resolução de problemas. A dimensão linguagem inclui características como tipo de discurso (narração, descrição, etc.), conectores entre frases e estruturas semânticas; para análises mais refinadas, o autor fornece três subtítulos: significantes de palavras, sinais notacionais e sinais gráficos (Okeeffe, 2013).

ANÁLISES E RESULTADOS

Contexto histórico

Como referimos na introdução, que também contextualiza historicamente, há uma experimentação iniciada em 1963. Esta experiência foi dirigida pela Comissão encarregada da actualização dos programas da disciplina de Matemática do 3.º ciclo do ensino liceal. Integravam a Comissão José Sebastião e Silva[2] (presidente), professor catedrático da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa; e, Jaime Furtado Leote,[3] Manuel Augusto da Silva,[4] António Augusto Lopes[5] (vogais), professores metodólogos[6] de Matemática. No âmbito da implementação experiência, os novos conteúdos matemáticos não eram conhecidos dos professores, pelo que nesta área, a estratégia utilizada pela Comissão foi a promoção a partir de 1964 de cursos de atualização de professores visando uma formação matemática adequada para poderem corresponder à tarefa de leccionar um novo currículo. Durante o período de férias estivais, os membros da Comissão e outros professores regiam cursos de aperfeiçoamento de professores no Liceu de Oeiras perto de Lisboa. Estes, eram referidos pelos participantes como os Cursos de Oeiras, e realizaram-se, pelo menos, até 1971 (Almeida, 2013). António Almeida Costa[7] e Alfredo Osório dos Anjos[8] foram formadores nestes cursos, para além de trabalharem em liceus onde os candidatos a professores liceais realizavam o seu estágio. (Almeida e Matos, 2021).

Essa experiência de 1963 visou a modernização do ensino da Matemática, relativamente a conteúdos e métodos e lançou as bases para as formas pelas quais a reforma foi desenvolvida posteriormente. Com efeito, as ideias reformadoras chegam, também, aos outros graus do sistema de ensino português. O ensino técnico desenvolve uma experiência a partir de 1967 e no ensino primário, embora novos programas só tenham sido adotados em 1975, as novas ideias são divulgadas através de iniciativas diversas desde o início dos anos 1960. A Telescola, iniciada em 1965, e o Ciclo Preparatório do Ensino Secundário em 1968, destinados a alunos dos atuais 5.º e 6.º anos de escolaridade, contam com programas de Matemática Moderna desde o seu início.

Apesar de existirem algumas vozes críticas da reforma (Almeida, Matos e Almeida, 2022), elas são minoritárias nesta época e não impediram a grande alteração curricular da matemática escolar que vai ocorrer a partir de 1968. O centro da reforma da Matemática Moderna já não está na preo-

[2] José Sebastião e Silva (1914-1972), era na época um matemático respeitado da Universidade de Lisboa e tinha realizado boa parte dos seus estudos doutorais em Roma. A sua estadia em Itália nos tempos conturbados da 2.ª Guerra Mundial permitiu-lhe um conhecimento pessoal muito próximo de um dos seus orientadores, Guido Castelnuovo e de sua filha Emma Castelnuovo, personagem importante na época da Matemática Moderna. Para além dos seus trabalhos em lógica e teoria das distribuições, Sebastião e Silva, que desde 1955 era delegado à International Commission on Mathematical Instruction, conhecia de perto as novas tendências curriculares e, desde 1958, sobre elas vinha realizando alguma reflexão e intervenção junto de professores das escolas secundárias.

[3] Licenciado em Matemática. Era professor da disciplina no ensino secundário e metodólogo no Liceu Normal Pedro Nunes. Foi Vice-reitor e Reitor deste liceu, em cuja qualidade integrou a Câmara Corporativa, representando o ensino secundário.

[4] Licenciado em Matemática. Era professor da disciplina no ensino secundário e autor de livros de Matemática. Era metodólogo no Liceu Normal de D. João III, em Coimbra.

[5] Licenciado em Matemática. Era professor da disciplina no ensino secundário e autor de livros de texto de Matemática para o ensino liceal. Era metodólogo no Liceu Normal de D. Manuel II, no Porto.

[6] Formadores de professores – os liceus normais, únicos responsáveis pela formação profissional dos professores liceais, localizavam-se em Lisboa, Porto e Coimbra e os metodólogos eram os responsáveis pelo acompanhamento dos futuros professores.

[7] Licenciado em Matemática. Era professor da disciplina no ensino secundário e um participante ativo na reforma da Matemática Moderna. Foi autor de livros de texto e professor metodólogo em Coimbra.

[8] Licenciado em Matemática. Era professor da disciplina no ensino secundário e um participante ativo na reforma da Matemática Moderna. Colaborou com Sebastião e Silva no âmbito dos Textos-piloto produzidos para a experiência. Foi autor de livros de texto e professor metodólogo em Lisboa.

cupação em desenvolver nos últimos anos dos liceus um curso de elite para a preparação de técnicos superiores, sendo agora tempo de levar as novas ideias à generalidade dos alunos e a outras áreas do sistema educativo. Embora a importância da Comissão tivesse diminuído, os seus membros restantes (Sebastião e Silva e Augusto Lopes) tiveram um papel central nesta nova fase, na elaboração do programa e na formação de professores do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (Bento, 2012). Nos liceus e nas escolas técnicas, as novas ideias são generalizadas depois de 1970 para alunos do Curso Geral do Ensino Liceal (correspondendo aos atuais 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade) (Almeida e Candeias, 2014; Matos, 2014).

Os autores

O *Compêndio de Matemática*, para o 1.º ano do Curso Geral do ensino liceal, é uma obra que tem dois volumes. Este livro é da autoria de António Almeida Costa e Alfredo Osório dos Anjos. Os autores eram professores de Matemática, tinham experiência acumulada em anos anteriores de aulas experimentais e como formadores nos cursos de atualização de professores no período da experimentação. Foram participantes ativos na reforma da Matemática Moderna nos liceus.

A obra e a abordagem aos números inteiros relativos

Ambos os volumes do *Compêndio* têm capa dura e com fundo preto, a capa do primeiro volume tem impressos os símbolos , , e (Figura 1), e a do segundo volume tem impressa a soma de dois vetores. Na página que antecede o prefácio dos livros está escrito: "Compêndio impresso ao abrigo do Decreto-lei n.º 47587 de 10-3-1967" (Costa; Anjos, 1971). Além disso, estes livros estão numerados e autenticados pelo Ministério da Educação e Cultura. O livro que analisámos tem o número 13602. Observando o índice podemos verificar que tem 6 capítulos (I-Revisões, II-Números racionais relativos, III-Equações em Q, IV-Relações binárias, V-Aplicações).

Figura 1 – Capas do Compêndio de Matemática, para o 1.º ano do Curso Geral do ensino liceal, volumes 1 e 2

Fonte: Costa e Anjos (1971)

A leitura do prefácio do livro analisado do *Compêndio* revela-nos que os livros procuraram dar resposta aos processos de modernização do ensino da Matemática. Os autores acentuam o caráter transitório de qualquer experiência de sentido pedagógico e revelam que os livros refletem do momento de indecisão em que se vivia, em termos programáticos, e a urgência do seu aparecimento. Para os autores, o desejo de uma maior clareza teria prejudicado, em alguns casos, um sentido mais definido de rigor, como é o caso "da escolha das grandezas suscetíveis de variar em dois sentidos opostos, em que se deixou na sombra o seu caráter aditivo, e da névoa inevitável da criação dos números reais." (Costa; Anjos, 1971, p. 5). Esta introdução revela as intenções dos autores e as tensões a que estiveram sujeitos.

A análise da estrutura da obra (Okeeffe, 2013) revelou que são livros impressos a duas cores, preto e vermelho, e não apresentam referências bibliográficas ou indicação de outras fontes relacionadas com assuntos matemáticos. Observámos a existência de vários exercícios de aplicação que entremeiam os textos e que, usualmente, existe uma seleção de exercícios de aplicação e respetiva solução no final de cada seção dos capítulos. Não existe um livro de exercícios associado a esta obra.

Figura 2 – Aspeto motivacional

Nos quadrados de fundo vermelho aparecem as somas de parcelas com sinais diferentes.

$(+3) + (-4) = (-1)$ $\qquad$ $(-2) + (+3) = (+1)$

$(+4) + (-2) = (+2)$ $\qquad$ $(-3) + (+1) = (-2)$

$(+1) + (-3) = (-2)$ $\qquad$ $(-3) + (+4) = (+1)$

Que relação há entre o valor absoluto da soma e os das parcelas?
Qual é o sinal da soma em cada caso?

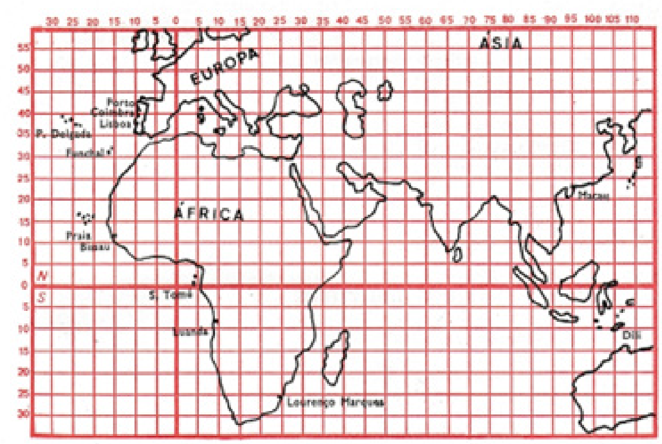
Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 52)

A análise evidenciou que na apresentação dos conteúdos existem elementos motivacionais. Há momentos em que é pedida a intervenção do aluno, por exemplo, colocando questões que tentam motivar a reflexão e orientar na obtenção de conclusões (Figura 2), ou deixando espaços em branco para o aluno completar. Isto representa que ao aluno é criada uma expectativa (Okeeffe, 2013) de aprendizagem participante.

No que respeita ao conteúdo (Okeeffe, 2013), os números inteiros relativos são abordados no segundo capítulo do primeiro volume, intitulado 'Números racionais relativos', que está organizado em cinco pontos: 1. Exemplos de grandezas que podem variar em dois sentidos opostos; 2. Números inteiros relativos; 3. Adição de números relativos; 4. Subtração de números inteiros relativos; 5. Multiplicação de números inteiros relativos; 6. Valores numéricos de expressões literais.

O capítulo começa com considerações sobre grandezas que podem variar em direções opostas. Os autores incluem vários exemplos iniciais, tais como a longitude e latitude, e uma ilustração (*Figura 3*) que respondem à necessidade de despertar um conceito.

Figura 3 – Exemplo de grandezas que podem variar em dois sentidos opostos

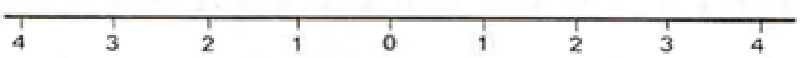


Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 41)

Os exemplos iniciais mostram que certas grandezas se avaliam em relação a referências escolhidas. Partindo da referência, os valores podem variar para um ou outro lado. Assim, ao número que dá o valor da grandeza teremos de juntar uma especificação relativa ao sentido.

A introdução aos números relativos, inicia com a noção de número negativo. Apoiando-se nos exemplos de grandezas referidos anteriormente, os autores realçam que tudo se passa como se tivéssemos uma dupla graduação a partir do zero (Figura 4).

Figura 4 – Ilustração de dupla graduação a partir do zero

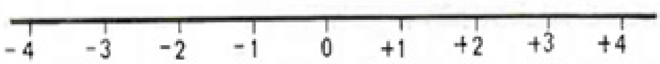


Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 42)

Como cada número aparece duas vezes, temos de distinguir se estamos falando do número da direita ou do número da esquerda. É então apresentada uma forma conveniente de diferenciá-los, que é preceder pelo sinal – os números à esquerda do zero. Indicando como designar esses números "– 3 …… menos três; – 2 …… menos dois; etc." (Costa & Anjos, 1971, p. 43). Esses novos números, caracterizados pelo sinal – para ilustrar sua posição à esquerda do zero, são chamados de números negativos.

Os autores salientam que o zero separa duas espécies de números, de um lado, os números negativos: … – 5, – 4, – 3, – 2, – 1; do outro lado os números: 1, 2, 3, 4, 5…, que, tal como o zero, não têm sinal associado, e por isso se chamam números absolutos. Para marcar bem a posição dos números é habitual preceder do sinal + os números à direita do zero (Figura 5).

Figura 5 – Ilustração da posição dos números negativos e positivos em relação ao zero



Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 43)

Os números absolutos, diferentes de zero, escritos sob esta nova forma tomam o nome de números positivos. Ou seja, "4 é idêntico a +4 (mais quatro)" (Costa; Anjos, 1971, p. 43). Em seguida, apresentam a definição de número negativo, número positivo e número relativo. Definem o conjunto dos números inteiros relativos, designando-o pela letra Z, sendo Z={...-4, -3, -2, -1,0, +1, +2, +3, +4,...} e subconjuntos de Z: os números inteiros negativos, Z^- os números inteiros positivos Z^+, e os números inteiros não negativos, Z_0^+, sendo Z^-={..., -5, -4, -3, -2, -1}, Z^+={+1, +2, +3, +4, +5,...} e Z_0^+={0, +1, +2, +3, +4, +5...}. Os autores escrevem as igualdades $\mathbb{N} = Z^+$ e $\mathbb{N}_0 = Z_0^+$, justificando-as com conhecimentos prévios de conjuntos, é introduzida uma ilustração de Z como reunião de dois conjuntos (Figura 6).

Figura 6 – Ilustração de Z como reunião de dois conjuntos.

Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 44)

As últimas definições apresentadas, neste momento, são: valor absoluto de um número relativo e números simétricos. A representação simbólica do valor absoluto também é abordada.

Em seguida introduzem-se o 'sinal operacional' e o 'sinal posicional'. Começando por esclarecer que os sinais + e – que definem os números relativos já são os conhecidos da adição e da subtração, mas nesses números eles não representam qualquer uma dessas operações; eles servem, apenas, para conferir aos números a qualidade de positivos ou negativos. Prosseguem dizendo que para evidenciar bem que o sinal faz parte do número é costume escrever os números relativos dentro de parêntesis curvos dando exemplos, como (+3) e (–16). Diferenciando que os sinais + e – são 'operacionais' quando, por ele, se representam as operações adição e subtração, e são 'posicionais' quando, por ele, se estabelece que um número relativo é positivo ou negativo. Os autores sublinham a importância do conhecimento dos números inteiros relativos referindo que estes vão permitir simplificar a linguagem, ilustrando com exemplos do mundo que nos rodeia,

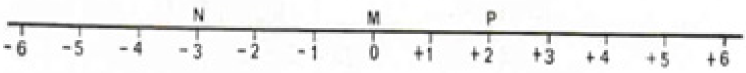
> *Falando de temperaturas:*
> *Em vez de*
> *A temperatura das penhas Douradas é de 3 graus abaixo de zero,*
> *podemos dizer*
> *A temperatura das penhas Douradas é –3 graus.*
> *b) Falando de altitudes:*
> *Em vez de*
> *A altitude do pico de Ramelau é 2963 m acima de zero,*
> *podemos dizer*
> *A altitude do pico de Ramelau é +2963 m (Costa; Anjos, 1971, p. 46).*

Depois dos exemplos, pede-se ao aluno, como exercício, que dê outros exemplos de utilização da linguagem dos números relativos.

Os autores iniciam a introdução à reta orientada, lembrando a convenção previamente acordada, se sobre uma reta fixarmos um ponto M para assinalar o zero, os números positivos sempre ficam no lado direito do zero, os números negativos sempre ficam no lado esquerdo do zero. Assim, o sentido positivo será o "da esquerda para a direita" e o sentido negativo o outro. E, a reta, como qualquer outra em que se fixou um sentido, tomará o nome de eixo ou reta orientada (Figura 7).

Numa reta orientada, cada número relativo corresponde a um ponto, que chamado de 'abcissa' desse ponto. O ponto cuja abcissa é zero é a 'origem das abcissas'**.**

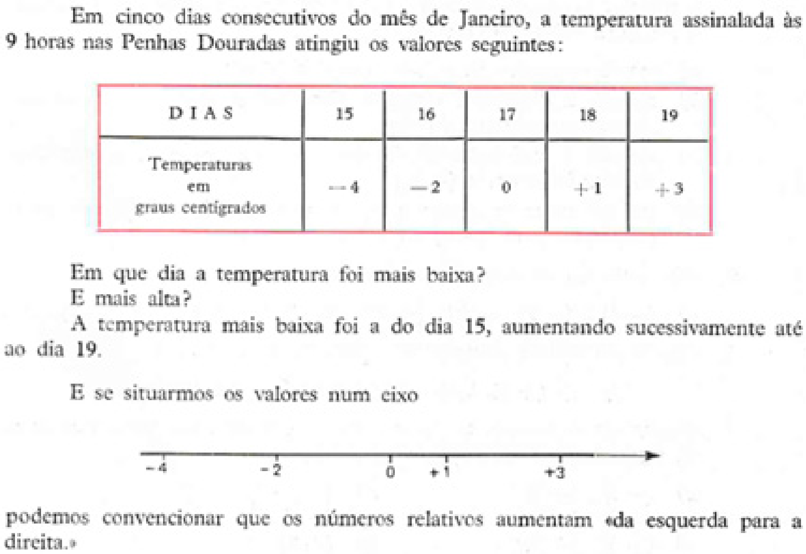
Figura 7 – Reta orientada



Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 46)

Em seguida introduz-se a de relação de ordem (Figura 8).

Figura 8 – Introdução à relação de ordem



Em cinco dias consecutivos do mês de Janeiro, a temperatura assinalada às 9 horas nas Penhas Douradas atingiu os valores seguintes:

DIAS	15	16	17	18	19
Temperaturas em graus centígrados	−4	−2	0	+1	+3

Em que dia a temperatura foi mais baixa?
E mais alta?
A temperatura mais baixa foi a do dia 15, aumentando sucessivamente até ao dia 19.

E se situarmos os valores num eixo

−4 −2 0 +1 +3

podemos convencionar que os números relativos aumentam «da esquerda para a direita.»

Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 47)

Concluindo que: entre dois números negativos, é maior aquele que tem valor absoluto menor (– 2 > – 4); zero é maior que todo número inteiro negativo (0 > – 2); todo número inteiro positivo é maior que zero (+1 > 0); entre dois números positivos, é maior aquele que tem valor absoluto maior (–+3 > +1); todo número inteiro positivo é maior que todo número inteiro negativo (+1 > – 2). São propostos exercícios de consolidação, apresentamos um exemplo "2) Diz quais das afirmações são verdadeiras e quais são falsas: a) (– 4) > (+3); b) (+4) > (+3); c) (– 2) > (+2)" (Costa; Anjos, 1971, p. 48).

A adição de números relativos é introduzida com recurso a depósitos e levantamentos, onde os números positivos são usados para mostrar o depósito de uma quantia e os números negativos são usados para mostrar o levantamento. A adição de números inteiros é contextualizada numa situação concreta para os alunos (Figura 9).

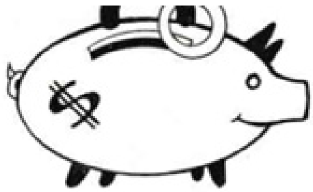
Figura 9 – Contextualização da adição de números relativos

Os pais do Paulo ofereceram-lhe um mealheiro onde ele deposita o dinheiro que vai recebendo.

Por vezes, também o abre para levantar a importância necessária a qualquer despesa que queira fazer.

Depósitos e levantamentos são as «operações bancárias» do Paulo.

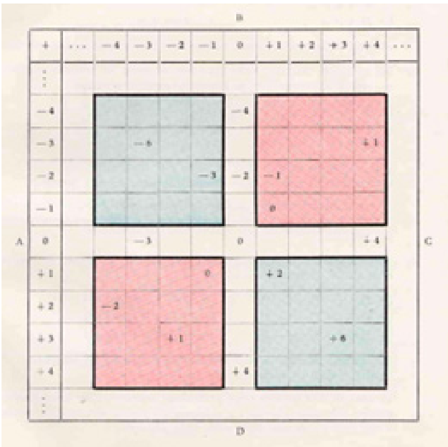
Cuidadoso, ele vai fazendo o balanço das suas economias, servindo-se do conhecimento que possui dos números relativos.



Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 48)

A introdução à adição de números relativos faz-se recorrendo à noção de ganhos e perdas. São apresentados exemplos de apuramento do saldo de alguns dias, colocando perguntas aos alunos. No final sistematizam, escrevendo as igualdades que exemplificam o apuramento de cada saldo: (+20) + (+5) = (+25); (+10) + (- 5) = (+5); (+5) + (-12) = (-7); (-5) + (-10) = (-15); (+10) + (-10) = 0; (-15) + 0 = (-15). Em seguida, fazem notar aos alunos que estes já conheciam a adição em $\mathbb{N}_0$, e agora surgia a adição em $\mathbb{Z}$, realçando que "Não se trata da mesma operação! (...) na adição números relativos há regras novas para aprender" (Costa; Anjos, 1971, p. 50, sublinhado no original). Sempre que só aparecem números positivos ou o zero a adição em $\mathbb{Z}$, mantém a tabuada de $\mathbb{N}_0$, o aparecimento de parcelas negativas e que cria a necessidade de regras novas.

Figura 10 – Quadro de tabuada da adição de números relativos



Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 51)

A tabela da figura 10 é usada para obter as regras para somar dois números relativos. Para preencher a tabela, os autores recomendam a utilização da ideia de depósitos e levantamentos, se necessário. A adição em $\mathbb{Z}$ é definida como um prolongamento da adição em $\mathbb{N}_0$.

Após introduzir a adição de números relativos, abordam-se as suas propriedades, cujo estudo é concluído apresentando uma comparação entre propriedades de adição em $\mathbb{N}_0$ e em $\mathbb{Z}$(Figura 11). Segue-se o estudo da adição sucessiva e exercícios.

Figura 11 – Estudo comparativo

Adição em $\mathbb{N}_0$	*Adição em* $\mathbb{Z}$
— É comutativa	— É comutativa
— É associativa	— É associativa
— Tem elemento neutro	— Tem elemento neutro
— Só *zero* tem oposto para adição	— Todos os elementos têm oposto para a adição

Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 54)

No que respeita à subtração em $\mathbb{Z}$, ela decorre do conhecimento da adição, recorrendo à igualdade $b+x=a$, e é definida como um prolongamento da subtração em $\mathbb{N}_0$. A subtração em $\mathbb{Z}$ é a operação inversa da adição em $\mathbb{Z}$. Por meio de exemplos e tabelas para completar o preenchimento, chega-se a uma regra. Ressalta-se que a subtração é sempre possível em $\mathbb{Z}$. A seguir, apresenta-se a soma algébrica e a simplificação da escrita. Ao longo do texto são apresentados pequenos grupos de exercícios, seguidos de soluções.

Antes de prosseguir, surge um conjunto diversificado de tarefas, incluindo questões relacionadas com o reconhecimento de conceitos e alguns problemas contextualizados em situações do quotidiano.

A multiplicação em $\mathbb{Z}$ é introduzida como uma extensão da multiplicação em $\mathbb{N}_0$, mantendo-se distributiva em relação à adição e subtração. Os autores chegam às regras da multiplicação de números relativos sistematicamente e usando exemplos, começam pela multiplicação de dois números positivos (mantém-se a tabuada de $\mathbb{N}_0$). No caso da multiplicação de dois números com sinais contrários, começam por escrever a multiplicação (+4) x (-3), referindo que os alunos já sabem calcular (+4) x (+3). Vão adicionar os dois produtos (+4) x (-3) + (+4) x (+3) = (+4) x [(-3) + (+3)] = (+4) x 0 = 0. Assim, os números são simétricos. E, como (+4) x (+3) = (+12), vem (+4) x (-3) = (-12).

Escritas as regras da multiplicação de números relativos, apresenta-se a regra dos sinais da multiplicação em tabela (Figura 12). As propriedades são discutidas em seguida. Divisão e potenciação também são abordadas. Ao longo do texto são apresentados pequenos grupos de exercícios, seguidos de soluções.

Figura 12 – Regra dos sinais

×	+	−
+	+	−
−	−	+

Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 71)

Este livro constitui um recurso estruturante do currículo apresentado a professores e alunos. A análise evidenciou que a apresentação dos conteúdos é expositiva, com vários momentos em que é pedida a intervenção do aluno, incluindo pequenas tarefas que o motivam a refletir e o orientam na obtenção de conclusões. Isto representa que ao aluno é criada uma expectativa (Okeeffe, 2013) de aprendizagem participante. O livro é apresentado em linguagem (Okeeffe, 2013) simples e direta, dirigida ao aluno.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A reforma da matemática moderna trouxe profundas transformações no currículo de matemática ensinado em Portugal, em todos os subsistemas de ensino não superior. Analisámos o *Compêndio de Matemática*, do 1.º ano do Curso Geral dos liceus propósito de compreender como foram abordados os números inteiros relativos e as suas operações, no início do período de disseminação da Matemática Moderna.

A análise deste livro de texto reveste-se de um interesse particular dado que exibe metodologias de ensino que envolvem o aluno na aprendizagem, introduzem uma matemática mais formal, mas não deixam de parte a importância das aplicações. No que respeita à estrutura, o livro é redigido em duas cores, com ilustrações várias que contribuem para a compreensão dos conteúdos por parte dos alunos. Há, também, espaços em branco para completar e a palavra "Porquê?" aparece muitas vezes, motivando o aluno a refletir. Ao longo do livro encontram-se exercícios de aplicação a diferentes contextos, relacionando a matemática com a realidade dos alunos.

A introdução aos números inteiros relativos é realizada de um modo intuitivo. A linguagem de conjuntos característica da Matemática moderna, pode ser observada na criação do conjunto dos números inteiros relativos, $\mathbb{Z}$. A adição, subtração e multiplicação de números inteiros relativos são definidas como prolongamento das definidas em $\mathbb{N}_0$. Há uma enfase nas propriedades das operações, para que os alunos se familiarizassem com uma linguagem abstrata própria.

Os autores deste livro eram professores com experiência acumulada em anos anteriores na modernização do ensino da matemática. Neste sentido, não surpreende que o livro seja dirigido ao aluno e peça o seu envolvimento na aprendizagem, a par com uma formalização da matemática consistente com a reforma da matemática moderna.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projecto «UID/04647/2023» do CICS.NOVA – Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais da Universidade Nova de Lisboa.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Mária Cristina e CANDEIAS, Rui. Os programas de matemática do ensino primário, da Telescola e do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário. In ALMEIDA, Antonio; MATOS, José Manuel (Ed.). **A matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974)** Caparica: Editora UIED e APM, 2014. p. 39-68.

ALMEIDA, Mária Cristina. **Um olhar sobre o ensino da Matemática, guiado por António Augusto Lopes**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Nova de Lisboa. 2013

ALMEIDA, Mária Cristina; MATOS, José Manuel. A avaliação da experiência de Matemática Moderna nos liceus portugueses. R**evista de Matemática, Ensino e Cultura -REMATEC,** Belém/

PA, v. 16, Fluxo Contínuo, p. 43-58, Jan-Dez., 2021. DOI: https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p43-58.id321

ALMEIDA, Mária Cristina; MATOS, José Manuel; ALMEIDA, Antonio José. **Transcrição das notícias sobre Matemática Moderna publicadas nos jornais diários de Lisboa**. Lisboa: Editora APM., 2022. https://www.apm.pt/files/files/Ebooks/Noticias_MM/ Noticias MM. pdf

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BENTO, Marta Alexandra. **A introdução da Matemática Moderna no Ciclo Preparatório do Ensino Secundário em Portugal**. Tese (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Nova de Lisboa, 2012.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, 2, Porto Alegre, Pannonica, p. 177-229, 1990.

COSTA, António Almeida e ANJOS, Alfredo Ósório. **Compêndio de Matemática**. Porto: Porto Editora, 1971.

DE BOCK, Dirk. Modern Mathematics: An International Movement Diversely Shaped in National Contexts. In DE BOCK, Dirk (Ed.) **Modern Mathematics. An International Movement?** Editora: Springer. 2023, p. 1 -12.

FURINGHETTI, Fulvia; MATOS, José Manuel; MENGHINI, Marta. From mathematics and education, to mathematics education. In CLEMENTS'S, McKenzie; KEITEL-KREIDT Christine; KILPATRICK, Jeremy; BISHOP, Alan; JEUNG, Frederick. (Ed.), **Third International Handbook of Mathematics Education** Springer, 2013, p. 273-302.

JULIA, Dominque. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**. Campinas, n.º 1, jan./jun, p. 9-43, 2001.

MACHADO, Alexander Maz; ROMERO, Luis Rico. Números negativos en los siglos XVIII y XIX: fenomenología y representaciones. **Electronic Journal of Research in Educational Psychology**, *7*(1). p. 537-554.2009. https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1343

MACHADO, Alexander Maz. **Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX,** Tese de Doutoramento, Universidade de Granada. 2005.

MATOS, José Manuel. Changing representations and practices in school mathematics: the case of Modern Math in Portugal. In BJARNADÓTTIR, Kristín; FURINGHETTI, Fluvia; SCHUBRING, Gert (Eds.), "**Dig where you stand" Proceedings of a Conference on On-going Research in the History of Mathematics Education,** Garđabær, Iceland, June 20-24. Reikyavik: University of Iceland, 2009 p. 123-137.

MATOS, José Manuel. Mathematics education in Spain and Portugal. Portugal. In KARP, Alexander; SCHUBRING, Gert (Eds.), **Handbook on the History of Mathematics Education**. Springer, 2014, p. 291-302.

MATOS, José Manuel; ALMEIDA, Mária Cristina. The Distinct Facets of Modern Mathematics in Portugal. In DE BOCK, Dirk (Ed.) **Modern Mathematics. An International Movement?** Springer, 2023, p. 169-198.

MOON, Bob. **The "New Maths" curriculum controversy**. **An international story.** Falmer Press, 1986.

OKEEFFE, Lisa. A Framework to Textbook Analysis. **International Review of Contemporary Learning Research**, v. 2. n. 1, 2013, p. 1-13 http://dx.doi.org/10.12785/IRCLR/020101

SOUSA, Cláudia Sofia. **O Ensino de Matemática no CPES. Análise de Manuais**. Tese (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Nova de Lisboa, 2012.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**. UFSC v. 2. n. 1, 2007, p. 28-49. https://doi.org/10.5007/%25x

VALENTE, Wagner Rodrigues. (2019). Saber objetivado e formação de professores: reflexões pedagógico-epistemológicas. **Revista História Da Educação**, v. 23, 2019, p 1-22. https://doi.org/10.1590/2236-3459/77747