

## **A relação entre o Teorema de Sturm e Teoria dos Invariantes na obra de Sylvester**

### **The relationship between Sturm's Theorem and Invariant Theory in Sylvester's work**

**Magno Luiz Ferreira<sup>1</sup>**  

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

#### **RESUMO**

Este trabalho tem o objetivo de apresentar conexões entre as contribuições de James Joseph Sylvester (1814–1897) para a Teoria dos Invariantes e desdobramentos que ocorreram com o que ficou conhecido como Teorema de Sturm. Este teorema foi apresentado em 1829 na Academia de Ciências de Paris pelo matemático Jacques Charles François Sturm (1803–1855). Apesar ser um método para determinar a existência de raízes reais de um polinômio em um dado intervalo, o resultado recebeu o nome de teorema por conta da rápida notoriedade que ganhou no continente europeu. Através da metodologia das redes de textos, selecionamos oito artigos publicados pelo britânico entre 1839 e 1866, período dividido em dois momentos: 1839 a 1850, quando encontramos um tratamento algébrico do teorema, e 1850 a 1866, quando encontramos desdobramentos em outras áreas como uma possível solução para o problema da equação que auxilia nas investigações sobre as desigualdades seculares do movimento dos planetas, mais conhecida como Equação Secular. As análises dos artigos mostraram que as contribuições de Sylvester ocorreram no contexto do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes, mais especificamente em investigações sobre eliminação ou no desenvolvimento da lei de inércia para formas quadráticas. Os elementos apresentados revelam que o Teorema de Sturm influenciou a descoberta de um invariante, assim como o desenvolvimento da Teoria dos Invariantes tem influência na popularização do Teorema. Entendemos que este fator evidencia um trabalho coletivo que contribui para uma perspectiva contextual da História da matemática.

**Palavras-chave:** Teorema de Sturm; Teoria dos Invariantes; Eliminação; Equação Secular; Sylvester.

#### **ABSTRACT**

This work aims to present connections between the contributions of James Joseph Sylvester (1814–1897) to the Theory of Invariants and developments related to what became known as Sturm's Theorem. This theorem was presented in 1829 at the Academy of Sciences in Paris by the mathematician Jacques Charles François Sturm (1803–1855). Although it is a method for determining the existence of real roots of a polynomial within a given interval, the result was named a theorem due to the rapid prominence it gained across Europe. Using the methodology of text networks, we selected eight articles published by the British mathematician between 1839 and 1866, a period divided into two phases: 1839 to 1850, when we find an algebraic treatment of the theorem, and 1850 to 1866, when we find developments in other areas, such as a potential solution to the problem of the equation that aids in investigations of the secular inequalities of planetary motion, more commonly known as the Secular Equation. The analysis of the articles revealed that Sylvester's contributions occurred within the context of the development of the Theory of Invariants, more specifically in investigations on elimination or in the development of the law of inertia for quadratic forms. The elements presented show that Sturm's Theorem influenced the discovery of an invariant, just as the development of the Theory of Invariants influenced the popularization of the Theorem. We understand that this factor highlights a collective effort that contributes to a contextual perspective on the History of Mathematics.

**Keywords:** Sturm's Theorem; Invariant Theory; Elimination; Secular Equation; Sylvester.

#### **INTRODUÇÃO**

Quando se trata do histórico da Teoria dos Invariantes é comum encontrar menções aos trabalhos dos matemáticos britânicos Arthur Cayley (1821 – 1895), James Joseph Sylvester (1814 – 1897) e George Salmon (1819 – 1904), que ficaram conhecidos como o trio de ferro (Parshall,

<sup>1</sup> Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: [magno.ferreira@ifrj.edu.br](mailto:magno.ferreira@ifrj.edu.br).

2006). Do ponto de vista da produção matemática, estes autores são apresentados como personagens relevantes na evolução de processos e técnicas associados a elementos de Álgebra Linear como transformações lineares e determinantes.

Apesar disso, trabalhos recentes têm demonstrado contextos diferentes, como é caso de Dias (2023) que destaca as contribuições de Cayley para geometria através na elaboração de uma métrica através de análises das famosas memórias sobre os quantics e de Ferreira (2023) que apresenta alguns desdobramentos significativos da obra de Sylvester.

Este trabalho se dedica a apresentar uma conexão entre as primeiras contribuições de Sylvester para a Teoria dos Invariantes e um destes desdobramentos, que atende pelo nome de Teorema de Sturm. Apesar do nome, trata-se de um método para determinar o número de raízes de um polinômio em um determinado intervalo real elaborado pelo matemático Jacques Charles François Sturm (1803 – 1855) e publicado pela primeira vez em 1829 na Academia de Ciências de Paris. Inicialmente, este foi um resultado importante para álgebra dos polinômios, que rapidamente se mostrou um resultado importante para outros matemáticos, tanto da França como de outros países da Europa.

De modo mais específico, Sinaceur (1991) destaca o teorema como uma conexão importante entre as investigações da Teoria dos Invariantes e os estudos sobre a equação que auxilia no problema das desigualdades seculares dos movimentos dos planetas, conhecida como Equação Secular.

Desta forma, esta comunicação oral pretende elucidar a relação entre as primeiras contribuições de Sylvester para o desenvolvimento da Teoria dos Invariantes e o resultado apresentado pelo matemático franco-alemão no final da década de 1820. Como forma de identificar o *corpus* de textos analisado, utiliza-se a metodologia das redes de textos. De acordo com Brechenmacher (2006), esta abordagem possibilita uma descrição das culturas matemáticas, suas interações e comunicações, que se manifestam no entorno de um texto, ou autor, específico.

Em nosso caso, a análise se concentra em artigos que compõem uma rede de textos constituída a partir de trabalhos de Sylvester que se relacionaram com o texto *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, publicado por Sturm no periódico *Mémoires divers présentés par des savants étrangers* em 1835, uma versão atualizada do resultado apresentado na Academia de Ciências de Paris em 1829.

## REFERÊNCIAL TEÓRICO

Sinaceur (1991) destaca uma relação próxima entre o Teorema de Sturm e a Lei de Inércia para formas quadráticas, enunciada por Sylvester em 1852, a qual se faz presente através do estudo da Equação Secular. Essa conexão começa a ser estabelecida a partir das publicações da década de 1830 do matemático britânico, período no qual ele se dedica ao estudo de teoria de eliminação e raízes de polinômios.

De acordo com Ferreira (2023), o período de 1839 a 1866 representa uma mudança significativa nas pesquisas de Sylvester, que passam a se concentrar em questões de geometria e mecânica, para além da abordagem algébrica. Essa mudança de perspectiva aproxima o Teorema e a Lei, citados no parágrafo anterior, através do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes, que apresenta contribuição importante para os estudos da Equação Secular.

O problema das desigualdades seculares é bem abordado em Brechenmacher (2006), que apresenta um levantamento dos trabalhos e personagens que fizeram parte da discussão de 1766 até 1874. O autor ressalta as alterações das teorias e ideias que ocorreram neste período. Essas variações vão de questionamentos relacionados à mecânica até investigações aritméticas, passando por problemas de geometria. Essa variedade nos mostra que o problema das pequenas oscilações se expande através de diferentes ramos em outras áreas.

No entanto, é importante notar que estes ramos, ou diferentes identidades como Brechenmacher (2008) se refere, permanecem conectados pela ideia dos movimentos de rotação ou das desigualdades seculares. Outra conexão importante, ocorre através da Teoria dos Invariantes que tem início com investigações sobre transformações associadas a Equação Secular (Ferreira, 2023). A partir deste contexto, iniciamos o levantamento do *corpus* de textos para análises.

## METODOLOGIA

Uma leitura prévia da obra de Sylvester foi possível perceber duas temáticas específicas que lidaram com o Teorema de Sturm: Teoria de Eliminação e Rotações de Corpos Rígidos. A partir disso, selecionamos artigos relacionados através das conexões reveladas pela metodologia das redes de textos.

Uma rede de textos consiste em um estudo sistemático de um coletivo de textos em torno de algum(s) tema(s) específico(s). Nesse estudo, buscam-se as relações intertextuais entre os elementos que compõem esse coletivo. É necessário salientar que a construção de uma rede de textos não se dá exclusivamente (e nem necessariamente) por citações explícitas. (Santos, 2015, p. 43)

Nesta citação, encontramos uma boa descrição da abordagem das redes. No caso deste trabalho, analisamos as práticas que foram mobilizadas ao longo das publicações entrelaçadas nas redes que conectam o texto de Sturm (1835) com a Teoria de Eliminação e Rotações Corpos Rígidos. Como recorte temporal, optamos pelo intervalo de 1839 a 1866, dividido em dois momentos: 1839 a 1850, período em que ocorre uma interpretação algébrica de Sylvester, sobre o Teorema de Sturm, e 1850 a 1866, onde o matemático inglês participa do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes e apresenta desdobramentos do mesmo Teorema, em particular a Lei de Inércia para formas quadráticas, como foi enunciada em Sylvester (1852a). É importante ressaltar que a rede de textos pode apresentar trabalhos fora do recorte temporal.

As análises foram conduzidas levando em conta as práticas que ganharam notoriedade por terem sido utilizadas durante o desenvolvimento da Teoria dos Invariantes, como o caso dos determinantes e transformações lineares, além de técnicas mais específicas da Teoria.

## O TEOREMA DE STURM E A OBRA DE SYLVESTER

O método para encontrar raízes de um polinômio em dado intervalo real toma como base o algoritmo da divisão de Euclides e uma variação da regra de sinais de Descartes, que buscava determinar o limite máximo de raízes possíveis em um dado intervalo. Desta forma, Sturm (1835) propõe o seguinte processo para determinar a existência ou não de raízes em um intervalo real  $[a, b]$ :

Considerando o polinômio  $P(x)$  e sua derivada  $P_1(x)$ , aplicamos o algoritmo da divisão de Euclides:  $\frac{P(x) + P_2(x)}{P_1(x)} = Q$  ou  $P(x) = Q \cdot P_1(x) - P_2(x)$ , onde  $Q$  é o quociente da divisão e  $P_2(x)$  é o seu resto. Em seguida, repete-se o processo para  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$ , tendo  $P_1(x) = Q \cdot P_2(x) - P_3(x)$ . Assim, constrói-se a seguinte sequência de polinômios  $P(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ , sendo o último um polinômio constante. A partir disso, o autor verifica quantas mudanças de sinal ocorrem na sequência se  $x = a$  e quantas ocorrem se  $x = b$ . Caso o número de variações de sinais do primeiro caso for maior que o número de variações do segundo, existe uma raiz no intervalo  $[a, b]$ , caso contrário o intervalo não apresenta raízes reais.

É importante notar que este método está baseado numa perspectiva analítica do polinômio. Essa informação destaca o papel da obra Sylvester no processo de popularização do Teorema de Sturm, uma vez que a abordagem do matemático britânico trata de aspectos algébricos dos polinômios, numa perspectiva mais algébrica do que analítica.

A Teoria dos Invariantes trata de uma investigação sobre transformações lineares. De acordo com Parshall (1989), estas pesquisas se iniciam na década de 1840 quando Cayley se propõe a identificar todas as formas algébricas, associadas a polinômios, que permanecem inalteradas após uma substituição das variáveis. É interessante notar que ele e Sylvester se conhecem nesta mesma época. Nesta seção, nos concentramos em duas temáticas que detalham o modo como a Teoria dos Invariantes representa uma ponte entre as investigações sobre raízes de polinômios e desigualdades seculares.

## Problemas de Eliminação

Para além de representar os primeiros resultados de Sylvester na Teoria dos Invariantes, esta temática destaca a mudança de perspectiva do autor em relação a natureza de suas pesquisas, inicialmente algébrica e seguida de abordagens geométrica. O primeiro artigo publicado sobre o tema, intitulado *On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory of elimination* (Sylvester, 1839), tem como objetivo estabelecer um método original de eliminação. Considerando um sistema de dois polinômios de graus  $m$  e  $n$  em uma variável, o primeiro passo foi apresentar teoremas sobre os resultantes do processo de eliminação. Esses resultados apresentam uma forte conexão com o Teorema de Sturm.

Como dito anteriormente, este resultado foi apresentado à Academia de Ciências de Paris em 1829 e se trata de um método para determinar o número de raízes reais de um polinômio de grau  $m$  em um intervalo específico. Apesar disso, Sylvester percebeu uma conexão importante entre tal método e seus interesses em 1839.

Quando uma das equações de coexistência é o coeficiente diferencial em relação ao termo repetido da outra, os derivativos primários dados no teorema 2 que coincidem neste caso com as funções auxiliares de Sturm reduzidas a seus termos mais baixos, podem ser exibidas sob um aspecto integral.<sup>2</sup> (Sylvester, 1839, p. 433, Tradução Nossa)

<sup>2</sup> When one of the equations of coexistence is the differential coefficient with respect to the repeated term of the other, the prime derivatives given in Theorem 2 which coincide in this case with Sturm's auxiliary functions reduced to their lowest terms, may be exhibited under an integral aspect.

O teorema 2, citado nesse trecho, se refere ao fato de que os derivativos<sup>3</sup> são sempre do mesmo grau, independentemente da utilização das raízes da primeira ou da segunda equação de coexistência (nome dado pelo autor para um sistema de equações). As funções auxiliares de Sturm, são os quocientes gerados a partir do processo de divisões sucessivas que determina o número de raízes em um intervalo dado. De acordo com Sinaceur (1991), a abordagem de Sylvester não só se conecta ao Teorema de Sturm, mas também lhe acrescenta uma nova perspectiva.

Enquanto o Teorema de Sturm se propõe a determinar o número de raízes reais de um polinômio em um intervalo dado, Sylvester apresenta uma relação entre as raízes através dos produtos dos quadrados de suas diferenças. O matemático inglês retoma a discussão que foi iniciada no *Mécanique Analytique* de Lagrange a respeito das soluções de equações polinomiais de graus maiores do que 4.

Essa distinção representa uma mudança na natureza do pensamento sobre o Teorema de Sturm, uma vez que a perspectiva analítica da ideia original do teorema é substituída por uma ideia algébrica. Esta afirmação pode ser confirmada ao observarmos que Sturm se concentra nas mudanças de sinal dentro do intervalo estudado, o que caracteriza um entendimento de continuidade do polinômio, enquanto Sylvester se baseia apenas em combinações dos coeficientes e raízes dos polinômios.

A natureza algébrica do trabalho que Sylvester desenvolveu nesse estudo sobre as raízes dos polinômios pode ser mais bem percebida no artigo *A New and More General Theory of Multiple Roots* (Sylvester, 1841). Além de estabelecer uma notação capaz de representar as combinações das raízes em quadrados de diferenças, o autor apresentou uma abordagem que permite formar equações lineares que serão importantes no processo de eliminação das variáveis, dado um conjunto de pares de raízes iguais. A partir disso, era possível determinar as outras raízes. Podemos observar que esse método é, exclusivamente, baseado na estrutura formal do polinômio. Além disso, esse trabalho traz indícios de que a ideia de eliminação de Sylvester tem alicerce nas ideias de Lagrange.

Difícilmente se pode duvidar que o ilustre Lagrange, se tivesse escolhido aperfeiçoar a teoria incompleta de raízes iguais dada na Resolução Numérique, aplicando a ela sua própria máquina favorita de funções simétricas, dificilmente teria deixado de tropeçar por uma passagem para trás sobre teorema memorável de Sturm.<sup>4</sup> (Sylvester, 1841, p. 251, Tradução Nossa)

Nessa citação podemos verificar que Sylvester percebia a conexão entre a obra do autor do *Mécanique Analytique*, sua Teoria de Eliminação e o Teorema de Sturm. É interessante perceber que o matemático inglês acreditava que a ideia de Lagrange passaria pelo famoso teorema de seu amigo francês, caso prosseguisse em suas investigações sobre raízes de polinômios.

Como Molk (1916) destaca, o método de Sylvester ganhou alguma repercussão no continente. Em 1840, o matemático alemão Friedrich Julius Richelot (1808-1875) publicou uma nota no *Journal de Crelle* onde reproduz o Método Dialítico, nome pelo qual ficou conhecido a partir dos anos

<sup>3</sup> Dadas  $P$  e  $Q$ , duas equações polinomiais em uma variável ( $x$ ) de graus  $m$  e  $n$ , os derivativos do sistema formado por elas é um polinômio  $C$  de grau  $r$  (especificamente para o artigo de 1839, Sylvester exigiu que  $r$  fosse menor que  $m$  e  $n$ ) cujos coeficientes são combinações dos coeficientes de  $P$  e  $Q$ . o Derivativo primário é o polinômio irredutível formado por essas características.

<sup>4</sup> It can scarcely be doubted that the illustrious Lagrange, had he chosen to perfect the incomplete theory of equal roots given in the Resolution Numérique, by applying to it his own favourite engine of symmetric functions, could scarcely have failed of stumbling by a back passage upon Sturm's memorable theorem.

1840. Na nota, há indicação das funções multiplicadoras usadas pelo matemático inglês no processo de eliminação. Entretanto, o Teorema de Sturm só retornaria a pauta do britânico na década de 1850, quando o autor já se encontrava imerso nos desenvolvimentos da Teoria dos Invariantes e em suas interpretações geométricas do seu método de dialítico.

Como preparação para algumas observações a serem feitas sobre as fórmulas relacionadas com o teorema de M. Sturm, é necessário premissa de dois teoremas de grande importância sobre funções quadráticas, um dos quais, apesar de sua extrema simplicidade, é, até onde sei, muito pouco (se é que é) conhecido, e o outro foi dado em parte há muitos anos por M. Cauchy, mas também não é geralmente conhecido.<sup>5</sup> (Sylvester, 1853b, p. 489, Tradução Nossa)

Este trecho faz parte do artigo em que o autor apresenta um vocabulário da Teoria dos Invariantes, onde se encontra o termo resultante como um exemplo de invariante. Este fator revela como a relação entre as investigações sobre eliminação e o Teorema de Sturm se manifesta no desenvolvimento da nova Teoria britânica. Outro termo que aparece no vocabulário é a inércia, um desdobramento que é analisado na próxima seção.

## A LEI DE INÉRCIA

Este teorema foi enunciado pela primeira vez em 1852 no contexto das investigações sobre a Equação Secular e partiu da publicação do artigo *Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes* (Sylvester, 1852b). Esse trabalho, que se inicia com uma contribuição do editor do jornal sobre as propriedades conhecidas dos produtos de determinantes da época, trata do problema de diagonalização de uma matriz simétrica. Mais especificamente, o autor apresenta uma relação entre as raízes da equação característica de uma matriz e a equação característica de sua potência. Em notação moderna temos: Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  são raízes da equação  $|M - I| = 0$  então  $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_p^k$  serão raízes da equação  $|M^k - I| = 0$ , onde  $M$  é uma matriz quadrada simétrica e a  $I$  identidade de mesma ordem.

Essa prática foi retomada com o artigo *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares* (Sylvester, 1852a), onde encontramos uma demonstração da possibilidade da redução de polinômios homogêneos à soma de quadrados positivos e negativos. Junto a isso, Sylvester apresenta sua conhecida Lei de Inércia para formas quadráticas. Essa lei afirma que o número de coeficientes positivos e negativos da forma reduzida é invariável, independentemente da transformação linear aplicada.

Esse resultado se revela associada ao contexto da Equação Secular através da publicação do artigo *The algebraical theory of the secular inequality determinative equation generalised* (Sylvester, 1853a), onde se apresenta uma nova versão da Equação Secular, utilizando-se uma sequência de determinantes como abaixo:

$$X_1 = ax + \alpha; \quad X_2 = \begin{bmatrix} ax + \alpha & bx + \beta \\ bx + \beta & cx + \gamma \end{bmatrix}; \quad X_3 = \begin{bmatrix} ax + \alpha & bx + \beta & dx + \delta \\ bx + \beta & cx + \gamma & ex + \epsilon \\ dx + \delta & ex + \epsilon & fx + \phi \end{bmatrix}$$

<sup>5</sup> As preparatory to some remarks about to be made on the formulas connected with M. Sturm's theorem, it is necessary to premise two theorems of great importance concerning quadratic functions, one of which, notwithstanding its extreme simplicity, is as far as I know very little (if at all) known, and the other was given in part many years ago by M. Cauchy, but is also not generally known.

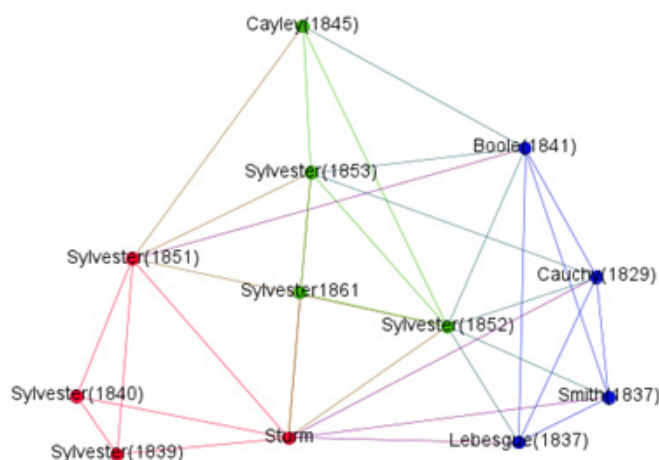
A partir desses objetos e com base em propriedades de determinantes de matrizes simétricas, é possível determinar se as raízes de  $X_i$  serão todas reais, de acordo com a alternância de sinal entre as raízes de  $X_{i-1}$ . É importante destacar que essa abordagem se vale da noção de continuidade que não se fez presente na utilização das funções auxiliares de Sturm, quando se utilizavam as propriedades algébricas do polinômio em questão. Além disso, essa abordagem revela que a Equação Secular era considerada como um tema de investigação em si, descolada do problema das desigualdades seculares que surgiu em meados do século XVIII, nos trabalhos de D'Alembert e Lagrange.

É interessante notar que os trabalhos apresentados nesta seção lidam com questões sobre as raízes polinômios, fator que os aproximam do Teorema de Sturm. No entanto, encontramos evidências mais robustas desta conexão, como foi o caso do texto *On the expression of the quotients which appear in the application of Sturm's method to the discovery of the real roots of an equation*, publicado em 1853 nos relatórios da Associação Britânica para o Avanço das Ciências (BAAS), onde se apresenta a representação do quociente do Teorema de Sturm como frações contínuas, além da distinção dos fatores que virão a receber o nome de allótrios; ainda no mesmo ano, há duas publicações no volume 12 da *Nouvelles Annales des Mathématiques*. No texto, *Théorème sur les limites des racines réelles des équations algébriques* (Sylvester, 1853d), o autor começa a analisar os intervalos das raízes, com a utilização de sequência de expressões lineares, como uma possibilidade de decomposição do polinômio. Em *Nouvelle méthode pour trouver une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles d'une équation algébrique quelconque* (Sylvester, 1853c), por sua vez, se constroem fórmulas que permitem tomar decisão sobre as raízes serem imaginárias ou reais, a partir das sequências apresentadas nesta seção. O texto sobre as relações syzygéticas de Sylvester, deixa explícita a relação da Lei de Inércia.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta seção se dedica a apresentar o modo os textos que destacados anteriormente se conectam em rede com outras obras. A partir disso, estabelecemos o papel de Sylvester em relação a popularização do Teorema de Sturm. Após as análises dos artigos, foi possível construir a seguinte rede:

**Figura 1** – Trabalhos ao redor do Teorema de Sturm



Fonte: Elaborado pelo Autor

Nas redes acima, os eixos à esquerda representam a linha do tempo das publicações de Sylvester. A partir destas linhas apresentamos outros textos que se relacionam com a obra do matemático

britânico no período de 1839 a 1866. Estas publicações revelam, além das investigações sobre eliminação e rotação de corpos rígidos, o modo como o Teorema de Sturm foi interpretado até a década de 1840 e após a década de 1850.

Ao investigar as regiões da rede têm maior interação, percebemos as relações da obra de Sylvester com o Teorema de Sturm. A região azul representa a conexão com a Equação Secular; a região verde com a Teoria dos Invariantes; e a região vermelha com a teoria de eliminação. É importante destacar que os trabalhos de Boole (1841), texto fundador da pesquisa sobre os invariantes, Cayley (1845), primeiro trabalho ativo sobre o tema e Sylvester (1851), artigo que define formalmente o termo *invariante*.

Esta rede nos mostra a capacidade de aglutinação da obra de Sylvester, fator que se revela no artigo Sylvester (1853). Este trabalho destaca a natureza algébrica da Teoria dos Invariantes e a nova perspectiva que se criava sobre o Teorema de Sturm, como pode ser visto nas citações do artigo de 1853. Além disso, este é o trabalho que conecta os assuntos discutidos nesta comunicação, como é o caso da Lei de Inércia para formas quadráticas e o teorema apresentado por Cauchy em 1829, utilizado para uma abordagem de transformações ortogonais de formas cônicas com a finalidade classificar estas formas. Nesse sentido, o artigo discute fórmulas para determinar a natureza das raízes de um polinômio, através dos restos do processo de medida comum com suas diferenciais, o que o autor chamou de resíduos *sturmianos*.

Desta forma, entendemos que a abordagem algébrica dos artigos produzidos por Sylvester nas décadas de 1830 e 1840, já revelavam uma mudança de perspectiva ao representar uma alternativa à solução analítica de Sturm. No entanto, é na demonstração da invariância do número de sinais positivos e negativos de um polinômio homogêneo transformado em soma de quadrados, a Lei de Inércia, que a contribuição do britânico ganha maior relevância. A conexão com a Equação Secular faz com que o teorema francês e a Teoria dos Invariantes, ganhem importância na comunidade científica da época, fator que traz credibilidade para os assuntos que foram tratados nesta comunicação oral. Com isso, esperamos ter contribuído para investigações mais completas do processo histórico da matemática no século XIX.

## REFERÊNCIAS

BOOLE, George. Exposition of a general theory of linear transformations. **Cambridge Mathematical Journal**, E. Johnson, Trinity Street and Whittanker., v. 3, p. 106–119, 1841.

BRECHENMACHER, Frédéric. **Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930)** : Formes de représentation et méthodes de décomposition. 2006. 729f. (Doutorado em História das Ciências)

BRECHENMACHER, Frédéric. L'identité algébrique d'une pratique portée par la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (1766-1874). **Sciences et techniques en perspective**, v. 1, p. 1–51, 2008.

CAYLEY, Arthur. On linear transformations. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 1, p. 104–122, 1845.

- DIAS, Leandro Silva. **As métricas de Cayley e seus desdobramentos (1857-1895)**. 2023. 171f. (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física)
- FERREIRA, Magno Luiz. **JJ Sylvester e a comunidade formada através do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes**. 2023. 485f. (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física)
- MOLK, Jules. **Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pure et Appliquées**. v. 1. Jacques Gabay, 1916.
- PARSHALL, Karen Hunger. Toward a history of nineteenth-century invariant theory. In: MCCLEARY, John; ROWE, David (Org.). **Ideas and their Reception**. Elsevier, 1989. p. 155–206.
- PARSHALL, Karen Hunger. **James Joseph Sylvester: Jewish Mathematician in a Victorian World**. JHU Press, 2006
- SANTOS, Cleber Haubrichs dos. **Étienne Bobillier (1798-1840): percursos matemático, docente e profissional**. 2015. 709f. (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia)
- SINACEUR, Hourya. **Corps et modèles: essai sur l'histoire de l'algèbre réelle**. Vrin, 1991.
- STURM, Jacques Charles François. Mémoire sur la résolution des équations numériques. **Mémoires divers présentés par des savants étrangers**, Bachelier, v. 6, p. 273–318, 1835.
- SYLVESTER, James Joseph. On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory of elimination. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 15, n. 98, p. 428–435, 1839.
- SYLVESTER, James Joseph. A new and more general theory of multiple roots. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 18, n. 117, p. 249–254, 1841.
- SYLVESTER, James Joseph. On the general theory of associated algebraical forms. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 6, p. 289–293, 1851.
- SYLVESTER, James Joseph. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 4, n. 23, p. 138–142, 1852a.
- SYLVESTER, James. Joseph. Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 11, p. 434–440, 1852b.
- SYLVESTER, James. Joseph. The algebraical theory of the secular-inequality determinative equation generalized. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 6, n. 38, p. 214–216, 1853a.
- SYLVESTER, James. Joseph. On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 143, p. 407–548, 1853b.

SYLVESTER, James. Joseph. Nouvelle méthode pour trouver une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles d'une équation algébrique quelconque. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 12, p. 329–336, 1853c.

SYLVESTER, James. Joseph. Théorème sur les limites des racines réelles des équations algébriques. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 12, p. 286–287, 1853d.