

O “Tesouro da Análise” de Pappus de Alexandria

The “Treasury of Analysis” of Pappus of Alexandria

Marcela Melo Amorim¹  

Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

RESUMO

Este trabalho é uma adaptação de uma parte do quarto capítulo da tese em andamento que propõe apresentar um dos últimos matemáticos da Grécia antiga, Pappus de Alexandria, sua obra *Coleção Matemática* com seus sete livros chegando até nós que, tudo indica, eram notas de aula para o ensino das matemáticas da antiguidade, englobando astronomia, ótica, aritmética, geometria, filosofia, mecânica, entre outras. Além disso, mostrar algumas das obras que ele teve acesso e utilizou para escrever, reorganizar e completar toda a matemática antiga composta de mais de cinquenta estudiosos citados por ele e de nove séculos de conhecimento ‘grego’. Em um segundo momento trazer alguns comentários feitos por ele, em seus prefácios, que mostram alguns vestígios de sua personalidade crítica e de seu suposto grupo de estudo e de trabalho. E, num último instante, reconhecer Apolônio e Euclides como os principais integrantes do, denominado por Pappus, *Tesouro da Análise*, composto por 33 livros de 12 obras, assunto predominante do Livro VII, o mais importante da *Coleção*.

Palavras-chave: Pappus; Didática; Matemáticas; Coleção; Análise.

ABSTRACT

This work is an adaptation of part of the fourth chapter of the ongoing thesis that proposes to present one of the last mathematicians of ancient Greece, Pappus of Alexandria, his work Mathematical Collection with its seven books that have survived to us, which, everything indicates, were lecture notes for teaching ancient mathematics, encompassing astronomy, optics, arithmetic, geometry, philosophy, mechanics, among others. In addition, to show some of the works that he had access to and used to write, reorganize and complete all ancient mathematics composed of more than fifty scholars cited by him and nine centuries of ‘Greek’ knowledge. In a second moment, to bring some comments made by him, in his prefaces, that show some traces of his critical personality and of his supposed study and work group. And, in a last moment, to recognize Apollonius and Euclid as the main members of what Pappus called the Treasury of Analysis, composed of 33 books of 12 works, the predominant subject of Book VII, the most important of the Collection.

Keywords: Pappus; Teaching; Mathematical; Collection; Analysis.

INTRODUÇÃO

Pappus de Alexandria vive aproximadamente entre 290 e 350 da Era Comum. É considerado o último geômetra grego, faz comentários a respeito da maioria das obras anteriores, além de propor algumas alterações em resultados já conhecidos. Em todas as fontes secundárias da obra de Pappus seu nome com essa forma que é mencionado². Para Pappus o passado desempenha um papel importante e complexo, sendo que a autoridade dos antigos deve servir para sustentar a validade dos procedimentos usados na resolução de problemas. Para alguns historiadores, Pappus é simplesmente um matemático posterior, não original e medíocre, cujo único mérito é registrar e transmitir as obras de seus antecessores. No entanto, ele é um dos poucos que nos deixaram um relato de uma tradição baseada em resolução de problemas. Para Knorr (1989) a obra de Pappus ocupa uma posição intermediária entre um comentário e um estudo original, porém considera Pappus como o mais competente entre os comentaristas matemáticos antigos. Ele não pode ser considerado exatamente

¹ Doutoranda em História da Matemática, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professora EBTB do Colégio Pedro II (CP2), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: marcela.amorim28@gmail.com.

² Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεὺς em grego, em latim: Pappus Alexandrinus, para o autor italiano Commandino: Pappi Alexandrini, na versão francesa de Eecke: Pappus D’Alexandrini, em sua tradução para o inglês do Livro VII Jones utiliza Pappus of Alexandria, e em português: Pappo de Alexandria.

um inovador, mas registra e organiza o patrimônio da informação matemática, num momento que já havia sinais de um declínio dessa prática, pelo menos em Alexandria.

Até a época que antecedeu o Renascimento, a obra original de Pappus permaneceu desconhecida para a maioria dos matemáticos, com exceção de algumas proposições e teoremas atribuídos a ele nos cursos de Geometria. Então, nessa época, se fez necessário o resgate desse, que pode ser considerado o documento mais preciso da História da Matemática da Antiguidade. Numa época em que não havia uma ‘escola’ e sim uma cultura literária em Alexandria, Pappus parece ter sido mais influente como, o que se conhece atualmente como ‘professor’, seja de matemática quanto astronomia. Theon de Alexandria foi seu sucessor como professor dessas duas disciplinas e seu próprio comentário sobre a obra de Ptolomeu parece ter sofrido influência de Pappus. Mas um cita o outro nas obras sobreviventes, logo, foram praticamente contemporâneos. Por outro lado, Eutócio, matemático do século V, parece não ter tido acesso à obra *Coleção* de Pappus, pois não cita Aristeu (tão mencionado por Pappus) e não conhece uma solução de cônicas trabalhada por Apolônio e estudada por Pappus. Porém, nessa época, de alguma forma o conhecimento matemático se cristalizou na atividade de perpetuar e comentar os resultados anteriores, preservando e repassando a futuros comentaristas.

O problema principal desse trabalho é revisitar as principais versões do manuscrito da *Coleção* – Eecke, 1933 e Hultsch, 1878 – para identificar as tais obras de Apolônio e Euclides que Pappus utilizou para escrever o Livro VII. O objetivo a ser alcançado é apresentar Pappus e seu principal trabalho e reconhecer as 12 obras, dentre as apolônicas e as euclidianas, que Pappus teve acesso para compor o Tesouro da Análise, suas características e os assuntos abordados por cada uma. E, ainda, dar uma breve ideia como Pappus as organizou em forma de 238 proposições. O trabalho é relevante pois se apresenta como uma fonte de informação diferente dos livros didáticos, para que o leitor entenda que Euclides foi muito mais do que o autor dos *Elementos*, que Apolônio produziu muito mais do que se fala atualmente e Pappus é muito mais que o autor de um teorema e de um problema que levam o seu nome.

PAPPUS DE ALEXANDRIA

Pappus, integrante da dita *Era de Prata* da matemática grega que se deu em torno de 250 a 350 EC, é classificado por Gillispie (1981) como matemático, astrônomo e geógrafo. Sabe-se que viveu grande parte de sua vida em Alexandria, pelos títulos de seus livros que sobreviveram. O único vestígio de sua vida particular é a existência de um rapaz, chamado Hermódore, possível filho ou alguém que tenha um vínculo fraternal, para o qual ele dedica os Livros VII e VIII. Além disso, Pappus menciona uma convivência parecendo próxima com dois matemáticos, Pandrosíon e Megethíon, que nunca mais ouviríamos falar, caso ele não dedicasse os Livros III e V, respectivamente. Para Cuomo (2000) a personalidade de isolamento e de agressividade de Pappus se justifica do inevitável de só se aproximar de excêntricos que tinham os mesmos interesses literários. Por outro lado, Cuomo (2001) o cita como um homem que está constantemente tentando aumentar o valor da matemática como um campo de conhecimento e seu próprio valor como representante de tal campo.

Há três provas que permitem razoavelmente admitir que Pappus viveu entre o final do século III e a primeira metade do século IV. Na biblioteca de Leiden³ é mantido um manuscrito do sé-

³ A Biblioteca da Universidade de Leiden é uma biblioteca fundada em 1575 em Leiden, Holanda. É considerado um lugar significativo no desenvolvimento da cultura europeia.

culo X, contendo uma passagem assinada por Pappus relativa ao imperador romano Diocleciano, que reinou entre 284 e 305. A segunda prova da época da vida de Pappus é um comentário feito a obra *Almagesto* de Ptolomeu (título original em grego: Ἡ Μεγάλη Σύνταξις), nascido entre os dois primeiros séculos da nossa era. O que compõe a terceira prova da época vivida por Pappus foi um outro comentário ao mesmo documento de Ptolomeu feito por Theon de Alexandria, muito parecido com o primeiro, porém mais trabalhado. Logo, acredita-se que Theon, que viveu no século IV, parece ter vindo após Pappus. Theon de Alexandria cita Pappus de uma maneira que aparenta ser contemporâneos, ambos durante o reinado de Teodósio. Pappus faz acreditar que escreveu em torno de 320 sobre um comentário da obra de Ptolomeu, citando um eclipse do ano 320 como se ele tivesse presenciado. Thomas (1941) menciona Pappus dessa forma: “*Pappus, alexandrino, filósofo, nascido no tempo do imperador Teodósio I, quando Theon o filósofo também floresceu*” (Thomas, 1941, p. 564, tradução nossa).

A OBRA PRINCIPAL: COLEÇÃO MATEMÁTICA

A obra principal de Pappus chama-se *Coleção Matemática* ou simplesmente *Coleção*. Em grego, denomina-se Συναγωγή (transliteração: Synagogé), composta de ‘συν’ (= com, junto) e ‘αγω’ (= conduta, educação). Mas qual é o significado da palavra Sinagoga em grego? Assim como a tradução em hebraico, significa simplesmente “assembleia” ou “reunião”. Em alemão, algo como “escola” e, entre os judeus, “templo”.

Essa é a ideia da obra de Pappus que reúne vários livros abrangendo grande parte dos assuntos tratados na época desde antes de Euclides (sete séculos antes) a Theon de Alexandria (seu contemporâneo), muitas vezes sendo a única fonte para todas as conquistas e descobertas dos seus antecessores. Esse belíssimo e extenso trabalho de Pappus tem como um dos principais objetivos alcançados a revitalização de antigos pesquisadores de uma forma prolixa.

A variedade de assuntos abordados pela *Coleção* passa a impressão de que a obra possa ter sido escrita durante anos. Entre as abordagens há astronomia, isoperimetria, mecânica e inúmeras proposições geométricas. Seu papel mais importante diz respeito à informação matemática que foi eternizada para as futuras gerações, preservando o método de demonstração dos trabalhos de vários matemáticos conhecidos e desconhecidos. Apesar de conter todos os assuntos abordados na matemática antiga, está longe de ser uma enciclopédia completa, já que falta, por exemplo, os problemas da obra de Diofanto, que viveu em Alexandria pouco menos de um século antes de Pappus.

A biblioteca do Vaticano possui um acervo de obras digitalizadas na página DVL⁵, dentre os quais a obra de Pappus se apresenta como ‘Manuscrito Vat.gr.218’. Treweek (1957) traz em seu artigo algumas versões da *Coleção*. Para ele há mais de trinta manuscritos existentes dessa obra, distribuídos em bibliotecas, museus e livrarias do mundo inteiro, além da versão anteriormente citada da Biblioteca do Vaticano. Para citar apenas alguns exemplos, há manuscritos nas bibliotecas Ambrosiana (Milão), Angélica (Roma), Nazionale Centrale (Florença), Vittore Emmanuele III (Nápoles), Nationalbibliothek (Viena), Herzog August Bibliothek (Wolfenbüttel), Nationale (Paris); em livrarias Bodleian Library (Oxford), National Library of Scotland (Edimburgo), Newberry Library (Chicago) e em museus, como por exemplo, British Museum (Londres).

⁴ “Πάππος, Ἀλεξανδρεὺς, φιλόσοφος, γεγονώς κατὰ τὸν πρεσβύτερον θεοδόσιον τὸν βασιλέα, ὅτε καὶ θεῶν ὁ φιλόσοφος ἤκμινεν”. Transliteração: Páppos, Alecsandreús, philósophos, gegonòs katà tòn presbýteron Theodósion tòn basiléa, hôte kai Théon ho filósofos ekmazen

⁵ DIGIVATLIB: <https://digi.vatlib.it/>

A *Coleção* de Pappus atraiu atenção dos estudiosos a partir do século XVI, mas foi apenas em 1875, apareceu uma edição completa da sua obra. O primeiro trabalho que merece destaque é de Federico Commandino, escrita em latim, em 1588. Durante os próximos dois séculos houve várias traduções de trechos, mas nenhuma completa. Em 1875, Fridericus Hultsch publicou um texto completo, em grego, com tradução e comentários em latim. Essa versão de Hultsch serviria de base para a primeira tradução em língua moderna, em francês, de Paul Ver Eecke, de 1933. Atualmente, desses seis livros supostamente inteiros e parte de outro que compõem a *Coleção*, temos o quarto e o sétimo com edições em inglês.

PREFÁCIOS DA COLEÇÃO MATEMÁTICA

Dos sete livros da obra *Coleção* que sobrevivem, apenas o Livro IV não apresenta prefácio, e, logicamente, nada se pode afirmar a respeito do prefácio do Livro II, já que o que chega até nós é um fragmento a partir da proposição 14. Os prefácios trazem algum tipo de filosofia, além de críticas ao aprendizado da Matemática, mas, em quase sua totalidade, Pappus informa os assuntos abordados e os matemáticos citados em cada livro.

Pappus parece ser o primeiro autor matemático que, em seus livros VI, VII e VIII mostra em seus prefácios assuntos específicos, astronomia, geometria e mecânica, respectivamente. De acordo com Netz (2022), no quarto século já se via um aumento de leitores o que se explica a preocupação didática do próprio Pappus, além de Heron e Theon.

A presença de uma dedicatória nos prefácios além de identificar uma relação entre duas pessoas, o autor e a quem ele dedica, serve como um pedido de ajuda à divulgação do trabalho, segundo Vitrac (2007). Pappus dedica o Livro III a uma professora chamada Pandrosíon: “*Aqueles que querem discernir com mais habilidade o que se busca na geometria, excelente Pandrosíon, consideram apropriado chamar de problema...*”⁶ (Eecke, 1933, p. 21, tradução nossa). Já o Livro V é dedicado ao igualmente desconhecido Megethíon: “*A divindade providenciou ... da matemática, caro Megethíon, mas compartilhou apenas ...*”⁷ (Eecke, 1933, p. 237, tradução nossa).

No maior livro e mais importante da *Coleção*, o Livro VII, Pappus identifica a diferença e enaltece a importância da análise e da síntese, predominando o que denomina de Tesouro da Análise. Dedicar o principal e mais famoso livro a seu “filho” Hermódore: “*O campo da Análise, como eu vejo, meu filho Hermódore, é o material especial disponível para aqueles que, depois de adquirir os Elementos iniciais, ...*”⁸ (Eecke, 1933, p. 477, tradução nossa). O último livro da *Coleção* que se tem acesso traz a mecânica como parte prática da matemática e é dedicado a quem ele chama de filho: “*A teoria mecânica, meu filho Hermódore, sendo útil para múltiplas e importantes coisas que surgem na vida, merece, com mérito, o maior favor entre os filósofos...*”⁹ (Eecke, 1933, p. 809, tradução nossa).

A maior crítica de Pappus ao trabalho de Pandrosíon parece ser em relação a diferença entre teorema (demonstrar como correto) e problema (definir se é possível ou impossível): “*É nessas con-*

⁶ “Ceux qui, excellent Pandrosius, veulent discerner plus habilement ce que l’on cherche en géométrie, jugent qu’il convient d’appeler problème...”

⁷ “La divinité, cher Mégéthius, a donné aux hommes la conception la plus haute et la plus parfaite de la sagesse et des mathématiques, mais n’a octroyé ce privilège que partiellement aux animaux”

⁸ “Le champ de l’analyse, tel que je le conçois, mon fils Hermodore, est la matière particulière dont disposent ceux qui, après avoir acquis les éléments vulgaires”

⁹ “La théorie mécanique, mon fils Hermodore, étant utile aux choses multiples et importantes qui se présentent dans la vie, elle mérite à juste titre la plus grande faveur chez les philosophes”

dições que algumas pessoas que afirmavam ter aprendido matemática com você recentemente me deram uma explicação ignorante dos problemas”.¹⁰ (Hultsch, 1878, p. 30, tradução nossa). E, mais adiante: “É sobre essas questões e o que está relacionado com elas que devo dar algumas demonstrações neste terceiro livro da Coleção, para que você e aqueles que gostam de aprender possam se beneficiar disso”¹¹ (Eecke, 1933, p. 22, tradução nossa)

Ao final do prefácio do quinto livro, Pappus, após falar sobre a sagacidade das abelhas, justifica o conteúdo do livro sobre isoperimetria: “Mas, no que nos diz respeito, como afirmamos possuir uma parcela maior de sabedoria do que as abelhas, procuraremos algo mais notável”¹² (Eecke, 1933, p. 239, tradução nossa). E termina afirmando que figuras equilaterais e equiângulas de mesmo perímetro, a área maior será coberta pela figura que tiver maior número de ângulos, só não sendo maior que o círculo com o mesmo perímetro.

No sexto livro, sobre astronomia, Pappus critica a pouca contribuição pelos antecessores excluindo Ptolomeu, além de questionar o suprimento de algumas proposições da obra *Sobre Dias e Noites*, afirmando que alguns distorceram o trabalho de Teodósio. No Livro VIII, sobre as proposições consideradas de raciocínio geométrico e aplicadas nas artes da mecânica aplicada, Pappus afirma: “julguei por bem expor de maneira mais concisa e clara, e estabelecer, por um raciocínio melhor do que o daqueles que escreveram anteriormente sobre esse assunto”¹³ (Eecke, 1933, p. 814, tradução nossa).

Considerada como uma das frases mais lindas dos prefácios de Pappus, o Livro V começa com: “A divindade providenciou aos homens a mais perfeita concepção da sapiência e da matemática, caro Megethion, mas compartilhou apenas parcialmente esse privilégio com os animais desprovidos da razão”.¹⁴ (Hultsch, 1878, p. 304, tradução nossa).

CONTEÚDO DE CADA LIVRO DA COLEÇÃO MATEMÁTICA

A organização dos livros da *Coleção* parece ter sido alterada de acordo com as versões. Além disso, resulta de um trabalho longo, de vários momentos diferentes de estudo, compilado em livros. Pappus não apenas compila obras antigas, ele amplia os trabalhos anteriores, aumentando o número de lemas para esclarecer demonstrações e estende casos particulares oferecendo novas provas. Originalmente, a *Coleção Matemática* consistia em oito a doze livros sendo que o primeiro e as treze primeiras proposições do segundo se perderam, além do fim do oitavo e a partir dele.

Pappus cita mais de cinquenta estudiosos ao longo da *Coleção*, cobrindo 900 anos de matemática grega. Dentre os mais citados estão Apolônio, Arquimedes e Euclides – três matemáticos da *Éra de Ouro* – sendo que o último tem mais citações que o dobro de qualquer outro.

¹⁰ “πρῶτην γοῦν τινος τῶν τὰ μαθήματα προσποιουμένων εἰδέναι διὰ σοῦ τὰς τῶν προβλημάτων προτάσεις ἀμαθῶς ἡμῖν ὥρισαν” Transliteração: prōtēn goūn tines tōn τὰ mathēmata prospoioumenōn eidēnai diā sou τὰς tōn problēmātōn protáseis amathōn.

¹¹ “C’est au sujet de ces questions et de ce qui s’y rattache qu’il faut que je donne certaines démonstrations dans ce troisième livre de la Collection, afin que toi et ceux qui aiment à s’instruire vous en retirez profit.”

¹² “Mais pour ce qui nous concerne, comme nous avons la prétention de posséder une plus grande part de sagesse que les abeilles, nous rechercherons quelque chose de plus remarquable.”

¹³ “j’ai trouvé convenable d’exposer d’une manière plus concise et plus claire, et d’établir par un raisonnement meilleur que celui de ceux qui ont écrit antérieurement sur ce sujet...”

¹⁴ Σοφίας καὶ μαθημάτων ἐννοίαν ἀπίστην μὲν καὶ τελειοτάτην ἀνθρώποις θεὸς ἔδωκεν, ὃ κράτιστε Μεγεθίον, ἐκ μέρους δὲ πού καὶ τῶν ἀλόγων ζῶων μοῖραν ἀπένευμέν τισιν. Transliteração: Sophías kai mathēmātōn énnoian arístēn mēn kai teleiotátēn anthrōpois theos édōken, ὃ krátiste Megethíon, ek mérους dé pou kai tōn alógōn zōiōn moíran apéneimén tisin.

Parece haver uma lógica didática na organização dos livros da *Coleção*, escritos em épocas diferentes e compilados entre 320 e 340 da nossa era, sendo até o Livro III apresentados alguns requisitos para o entendimento de toda a Geometria, Astronomia e Mecânica que virão dos Livros IV a VIII. Tem muito mais o formato de manual ou de notas de aulas do que uma simples enciclopédia, ou seja, vai muito mais além do que um emaranhado de citações de obras e comentários, isto é, uma organização didática de grande parte da herança deixada por nove séculos de matemática grega. Rideout (2008) afirma que Pappus pode ter ficado vulnerável a ser caracterizado como um matemático fraco por esse estilo pedagógico.

É bem provável que o livro I perdido fosse também aritmético, da mesma forma que o segundo. A parte do livro II que sobrevive, começando com a proposição 14, expõe um sistema de operações com grandes números elaborado por Apolônio. Pappus utiliza as proposições 14 a 25 para preparar para a proposição 26, sendo que dessas 12 primeiras, Pappus parece repetir na íntegra o trabalho de Apolônio.

O Livro III composto por 59 proposições e menos de duas páginas de prefácio, pode ser dividido em seis partes: o prefácio dirigido a uma suposta professora Pandrosion que recebe duras críticas de Pappus, um problema proposto há sete séculos antes por Hipócrates de Chio de construção de médias proporcionais, uma aritmética herdada de Pitágoras, conhecida por Platão e Aristóteles sobre as médias aritmética, geométrica e harmônica, um paradoxo do desconhecido Erycinus sobre construção de triângulo, os cinco poliedros regulares—tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro, e, fechando o terceiro livro de sua obra, Pappus invoca um problema sem solução. A partir de agora, Pappus trata de assuntos bem definidos em cada um dos cinco livros restantes, acabando aqui os requisitos necessários, em sua visão, para o entendimento dos demais conteúdos.

O livro IV contém cinco seções, não possui prefácio e é composto por 44 proposições, todas envolvendo a resolução dos três problemas clássicos: uma série de proposições não relacionadas, os círculos inscritos, a quadratura do círculo, a trisseção de um ângulo e a última parte trata da duplicação do cubo.

O livro V da *Coleção* traz os problemas que envolvem isoperimetria—*ἰσοπερίμετρος* (transliteração: Isoperímetros), dentre eles, o problema das abelhas:

As abelhas só reconhecem o que é útil para elas, particularmente, que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo, e que, se a mesma quantidade de matéria for gasta para a construção de cada uma dessas figuras, é o hexágono que poderá conter mais mel¹⁵ (Eecke, 1933, p. 239, tradução nossa).

Todo o livro traz esse tipo de problema tanto para figuras planas e espaciais, ou seja, figuras planas que possuem o mesmo perímetro e áreas diferentes e, de forma análoga, figuras espaciais que possuem mesma área da superfície e diferentes volumes.

O Livro VI é sobre astronomia e lida com os livros na chamada Pequena Astronomia—os tratados menores considerado como uma introdução ao *Almagesto* de Ptolomeu. Theon de Alexandria é o único que conhecemos após a *Coleção* de Pappus que cita a Pequena Astronomia. As obras citadas

¹⁵ “les abeilles ne reconnaissent que ce qui leur est utile, notamment que l’hexagone est plus grand que le carré et le triangle, et que, si la même quantité de matière est dépensée pour la construction de chacune de ces figures, c’est l’hexagone qui pourra contenir plus de miel”

que compõem a Pequena Astronomia são: Dados, Óptica, Catóptrica e Fenômenos de Euclides; Esférica, Em Habitações e Em dias e Noites, de Teodósio; Esfera em Movimento e Dos Nascentes e dos Poentes, de Autólico, Sobre Ascensões de Hípsicles, Dos tamanhos e das Distâncias de Aristarco e Esférica de Menelau.

No livro VIII, Pappus afirma que mecânica é uma prática da matemática e começa definindo centro de gravidade. Cita a descrição de Theon referente a descrição dos cinco poderes mecânicos: a roda e eixo, a alavanca, a polia, a cunha e os parafusos. Nesse último livro que Pappus enfim reconhece a genialidade de Arquimedes, mesmo já o tendo citado anteriormente. Esse oitavo livro é composto por 32 proposições.

LIVRO VII – O TESOUREIRO DA ANÁLISE

Logo no início do prefácio, Pappus cita os três estudiosos que entende como principais nessa área e que englobam 31 dos 33 livros:

O campo da Análise, como eu vejo, meu filho Hermódore, é o material especial disponível para aqueles que, depois de adquirir os elementos iniciais, quero tocar no poder de resolver os problemas que lhes são propostos. É seguindo o caminho da análise e da síntese que este material foi tratado por três homens: Euclides, autor dos Elementos, Apolônio de Perga e Aristeu, o Velho¹⁶ (Eecke, 1933, p. 477, tradução nossa).

Ainda nesse mesmo prefácio, Pappus afirma que Apolônio teria incluído à obra *Cônicas* de Euclides mais quatro livros, totalizando oito. Foi o próprio Apolônio, de acordo com Pappus, que modificou os nomes das cônicas. Pitágoras já utilizava os termos elipse, hipérbole e parábola para determinar a falta, o excesso e nem falta nem excesso, respectivamente, porém o fazia para áreas. Logo adiante, Pappus cita o problema das três ou quatro retas publicado pelo próprio Apolônio e por Euclides, o qual, mais tarde, levaria o nome de *Problema de Pappus*, ele teria resolvido de forma análoga tal problema para cinco e seis retas.

É nesse Livro VII que se faz a diferença entre Análise e Síntese: a análise para encontrar a solução de um problema ou a demonstração de um teorema e, em seguida, a síntese para expor o que se encontrou para solucionar o problema ou a demonstração de um teorema; esses aspectos, analítico e sintético, permaneceram na Matemática de Euclides de Alexandria e nos trabalhos desenvolvidos por outros geômetras gregos contemporâneos e posteriores.

Do pensamento dedutivo, Pappus, apesar de não utilizar a palavra ‘hipótese’, já organiza o método considerando o resultado final (aquilo que quer ser provado) como impossível, verdadeiro ou falso, resultante de princípios classificados da mesma forma, e dividindo a análise em dois tipos, o que ele chama de teórico e o problemático. O primeiro tipo se considera uma coisa conhecida como verdadeira ou falsa, o que se busca também o será. O segundo tipo tem a possibilidade de ser impossível. O objetivo principal desse livro vem do desejo de capacitar o leitor a resolver problemas de geometria avançada. Para Cuomo (2001) está implícito que isso deriva não apenas do que se sabe, mas de como se sabe, do conteúdo e de uma certa abordagem dele.

¹⁶ “Le champ de Tanalyse, tel que je le conçois, mon fils Hermodore, est la matière particulière dont disposent ceux qui, après avoir acquis les éléments vulgaires, veulent puiser dans les lignes la puissance de trouver les problèmes qui leur sont proposés. C’est en suivant la voie de l’analyse et de la Synthèse que cette matière a été traitée par trois hommes : Euclide, auteur des Eléments, Apollonius de Perge et Aristée l’Ancien.”

Para Pappus, a diferença entre análise e síntese é apenas o sentido da demonstração: enquanto a análise supõe o procurado como verdadeiro e vai provando cada antecedente até chegar no que foi dado, a síntese sai do que foi dado e vai provando até chegar no procurado. Ele quase não cita filósofos em sua coleção, porém, principalmente em análise, Pappus parece ter tido acesso às obras platônicas e arquimedianas.

Das 238 proposições do Livro VII, apenas 14 delas apresentam análise e síntese na mesma demonstração. Um dos exemplos é a proposição 21:

Duas retas AB e $B\Gamma$ dadas, tomam, no prolongamento $A\Delta$, um dado ponto Δ , tal que a relação entre a reta $B\Delta$ e a reta ΔA seja a mesma que a da reta $\Gamma\Delta$ em relação ao excedente cuja soma das retas AB , $B\Gamma$ ultrapassa a reta que tem na potência quatro vezes o retângulo incluído sob as retângulos AB , $B\Gamma$ (Eecke, 1933, p. 477, tradução nossa).

Durante a demonstração encontra-se a expressão “*Que isso seja feito...*”, típica de análise, porém, mais adiante, segue a frase: “*A síntese ocorrerá da seguinte maneira:...*”.

Obras contidas apenas no prefácio

Pappus anuncia, no prefácio do Livro VII, a ordem das 12 obras, totalizando 33 livros, que menciona no próprio prefácio e que difere da ordem que as utilizará ao longo das proposições. Apenas três obras são mencionadas somente no prefácio: *Dados*, de Euclides, *Lugares Sólidos*, de Aristeu (o Velho) e *Médias*, de Eratóstenes.

Dados, uma obra euclidiana sobrevivente, de acordo com Pappus¹⁷, contém 90 teoremas que tratam de grandezas em geral (teoremas 1 a 23), triângulos (teoremas 39 a 48 e 74 a 79), áreas (49 a 55, 62 a 66 e 80 a 82), paralelogramos (56 a 61 e 67 a 63), retas (24 a 38) e círculos (83 a 90). Pappus ainda ressalta a relação feita entre as áreas de triângulos e quadrados no 62º teorema. Essa obra euclidiana parece ser um complemento dos *Elementos*.

Já a obra de Aristeu – *Lugares Sólidos* – antecede a obra apolônica *Cônicas* e era composta por cinco livros. Para Pappus, Aristeu utilizava as nomenclaturas de cones acutângulo, retângulo e obtusângulo para tratar de elipse, parábola e hipérbole. Mais adiante, Pappus afirma que tal obra de Aristeu já havia sido lealmente utilizada por Euclides: “... *benevolente como se deve ser para com todos aqueles que estão em posição de enriquecer a ciência matemática até certo ponto... que escreveu tudo o que pôde provar sobre este lugar com a ajuda das cônicas de Aristeu...*” (Eecke, 1933, Introdução, tradução nossa).

Proposições do Livro VII

O sétimo livro da *Coleção* de Pappus englobam 9 das 12 obras que compõem o *Tesouro da Análise*, organizadas nas 238 proposições já citadas. Tais obras contêm 25 livros dos 33 mencionados anteriormente. Pappus intercala seis obras apolônicas com uma euclidiana, voltando para a grande obra apolônica *Cônicas* (sendo que a primeira parte desta é considerada euclidiana por Pappus) e termina o livro com mais uma obra euclidiana.

¹⁷ As observações de Pappus diferem um pouco da versão atual em inglês de Taisbak (2003) em número de teoremas e, por consequência, o assunto abordado em cada um.

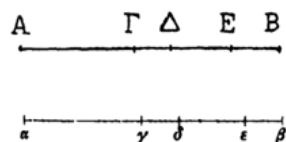
Os dois livros que compõem a obra *Dividir por uma Razão*, apolônica e sobrevivente, possuem versões em árabe e latim. O primeiro livro é composto por 7 lugares planos, 24 casos e 5 determinações das possibilidades, das quais 3 são de máximo e 2 de mínimo; já o segundo livro, 7 lugares planos, 24 casos e as mesmas discussões de possibilidades. O problema é dividir um segmento em partes proporcionais. Junto com a obra *Corte de uma área*, compõem as vinte primeiras proposições do Livro VII da *Coleção* de Pappus.

Na obra apolônica *Corte de uma área* o problema é semelhante ao anterior, substituindo a divisão de um segmento pela divisão de uma área. Pappus afirma que esse tratado perdido era composto por 48 teoremas no primeiro livro e 76 teoremas no segundo, o que lhe gerou, junto com a obra anterior vinte lemas, além das 181 proposições que compõem tais lemas.

Então, Pappus começa com, o que hoje se conhece como Teorema de Tales, dividindo uma semirreta e duas semirretas em uma determinada razão. A seguir, Pappus utiliza dez proposições – as de números 3 a 12 – para enumerar várias propriedades de desigualdades de proporções. Logo, as primeiras doze proposições do Livro VII referem-se a corte de segmento por uma razão. A partir da décima terceira proposição, Pappus trata de razão de áreas e não de segmentos. As duas próximas proposições citam construções de retângulo e quadrado equivalentes. As três seguintes citam desigualdades de áreas. E, as três últimas (de números 18 a 20) chegam a mencionar a razão entre áreas relacionadas com a razão entre os lados.

Seguindo o Livro VII da *Coleção* de Pappus, as proposições 22 a 40 referem-se ao primeiro livro de uma obra apolônica perdida denominada *Secção Determinada*, enquanto as proposições 41 a 64 referem-se ao segundo livro da mesma obra, que, segundo Pappus, era formada por 83 teoremas. Tal tratado apolônico refere-se ao problema de cortar uma linha de modo que o quadrado construído com um pedaço tenha uma área pré-determinada. Pappus demonstra os 43 lemas gerados por nove problemas (6 do 1º livro e 3 do 2º livro) que, ao serem subdivididos em casos particulares, geraram as 83 proposições.

Para ilustrar essa obra, observa-se a Proposição 22 que diz: “Uma vez o retângulo obtido por $A\Delta$ e $\Delta\Gamma$ é igual ao retângulo contido por $B\Delta$ e ΔE , e, tomando todo para todo, portanto, como é AE para $B\Gamma$, assim é AD para AB ”. A seguir o diagrama referente a tal proposição contida na versão de Eecke (1933) que utiliza letras gregas maiúsculas e a versão de Hultsch (1878) que usa as minúsculas.



Sejam $A\Gamma = a$, $\Gamma\Delta = b$, $\Delta E = c$, $EB = d$, o que a proposição diz é, em linguagem atual:

$$(a + b) \cdot b = (c + d) \cdot c \Rightarrow \frac{a + b + c}{b + c + d} = \frac{a + b}{c + d}$$

$$(a + b) \cdot b = (c + d) \cdot c \Rightarrow (a + b) \cdot b + (a + b)(c + d) = (c + d) \cdot c + (a + b)(c + d) \Rightarrow$$

$$(a + b) \cdot (b + c + d) = (c + d) \cdot (a + b + c) \Rightarrow$$

$$\frac{a + b + c}{b + c + d} = \frac{a + b}{c + d}$$

As proposições 65 a 74 e 75 a 111 do sétimo livro da *Coleção* de Pappus, referem-se a obra apolônica *Inclinações*, que representa um estudo sobre secantes incluindo a determinação dos pontos de interseção, construtíveis com régua e compasso por Apolônio e acrescentado com a utilização de curvas, por Pappus. Essas 47 proposições de Pappus incluem 38 lemas, 125 teoremas e 54 problemas, bem provável que nem todos pertençam apenas a Apolônio.

As próximas sete proposições do Livro VII de Pappus referem-se à obra, também perdida, denominada *Sobre tangências* e composta por dois livros. É nessa obra que se encontra o mais famoso problema apolônico que é construir o círculo tangente a três círculos dados. A única obra atribuída a Aristeu no Livro VII – *Lugares Sólidos* – parece ter contribuído de forma significativa tanto a obra apolônica *Cônicas*, quanto a essa obra *Sobre tangências*, mesmo não sendo evidenciada em nenhuma fonte. Por outro lado, caso não fosse disponível essa obra não chegaria ao conhecimento de Pappus séculos depois.

As proposições 118 a 123 do Livro VII da *Coleção* referem-se à obra apolônica *Lugares Planos*, sendo que Pappus acrescenta as proposições 118 e 121 para aprimorar os três primeiros lemas apolônicos nas proposições 119, 120 e 122 e, apresenta uma conclusão na proposição 123. Essas seis proposições tentam aprofundar o problema euclidiano das três ou quatro retas. Ao contrário dos problemas geométricos que ocuparam as primeiras pesquisas de Descartes, o *Problema de Pappus* é um problema de determinação de lugar geométrico, ou seja, um problema cuja solução requer a construção de uma curva – a “curva de Pappus” – que inclui todos os pontos que satisfazem a relação declarada no problema.

Pappus indica que Apolônio, em sua obra, classificou os problemas geométricos em três tipos, atendendo aos meios pelos quais é possível construir sua solução. Os que podem ser resolvidos apenas por meio de linhas retas e circunferências são designados por planos, visto que as curvas referidas têm a sua origem num plano; os que envolvem na sua resolução superfícies cônicas são chamados problemas sólidos, porque fazem uso de superfícies de figuras sólidas; os que envolvem, na sua construção, curvas que se obtêm de superfícies menos regulares e de movimentos mais complexos são os lineares ou gramaticais. Parece que nem Aristeu, nem Arquimedes, nem Apolônio tinham interesse em articular a distinção entre problemas planos e sólidos, pois há indícios de terem sido aplicados cônicas para a duplicação do cubo e a trisseção do ângulo.

A diferença entre problema (Πρόβλημα – transl. problema) e teorema (Θεώρημα – transl. theōremma) é citada no prefácio do Livro III, porém tratada de forma mais detalhada no Livro VII. Para Pappus, problema designa um inquérito em que é proposto a construir ou fazer algo, enquanto teorema designa um inquérito no qual uma sequência de implicações necessárias de certas hipóteses é investigada. Uma proposição qualquer então pode ser classificada como problema ou teorema, dependendo se tratar de uma construção ou uma demonstração, respectivamente.

Uma possível ideia do que seja porisma é dada por Pappus como nome de certas proposições para encontrar fatos geométricos particulares. Já Proclus, entende como fatos geométricos procurados, cuja pesquisa requer um tipo de investigação que não é uma construção isolada ou um simples teorema. Pappus em seu sétimo livro, cita, demonstra e diagrama os trinta e oito lemas dos *Porismas*, compondo as proposições 127 a 164, que serviram, originalmente, para esclarecer os teoremas. Ele afirma que essa obra de Euclides continha 171 teoremas organizados em três livros, incluindo alguma relação com as *Cônicas* e com o próprio *Teorema de Pappus*.

Dentre esses, as proposições 131 a 138 preparam para a proposição 139, conhecida atualmente como *Teorema de Pappus*, que deu origem à geometria projetiva mais tarde. Então é importante ressaltar que Pappus considerava o teorema que leva seu nome como um porisma e utiliza nove proposições para demonstrar tal teorema. A proposição 139 do Livro VII da *Coleção* traz o *Teorema de Pappus*: “Que as linhas AB e $\Gamma\Delta$, por outro lado, não sejam paralelas, mas que se encontrem no ponto N ; Eu digo que a linha que passa pelos pontos H , M , K é novamente reta”. O caso particular das retas paralelas é demonstrado na proposição 138.

A principal obra apolônica, datada em torno do segundo século antes da Era Comum, é composta de oito livros, sendo o último perdido e os quatro primeiros de autoria de Euclides e contém 387 teoremas ou diagramas. O texto grego das *Cônicas* está disponível na edição comentada de Eutócio, um estudioso neoplatônico do século VI EC. Os sete livros apresentam uma tradução para o latim, sendo que os quatro primeiros possuem uma versão em grego e os outros três, em árabe.

No Livro I (equivalente às proposições 165 a 175 do Livro VII da *Coleção* de Pappus) estuda-se a determinação das três secções cônicas variando o ângulo do corte, suas propriedades de diâmetros e das tangentes das cônicas. O Livro II (proposições 176 a 188 de Pappus) traz as investigações das hipérboles e suas assíntotas, diâmetros conjugados, eixos e tangentes. Nesse segundo livro, Apolônio mostra como traçar tangentes usando divisão harmônica. O Livro III dessa obra contém muitos teoremas originais apolônicos que, sem eles, seria impossível completar a síntese do problema de Euclides em relação a três e quatro retas, que deu origem mais tarde, ao Problema de Pappus. O Livro IV mostra a quantidade de pontos de intersecção possíveis que uma secção cônica pode ter com uma curva qualquer. As proposições do sétimo livro de Pappus correspondentes aos livros apolônicos III e IV são as de números 189 a 202.

A partir do Livro V, até o Livro VII, já que o Livro VIII se perdeu, mostra-se toda a originalidade de Apolônio sobre o tema e foram lançados a título de adicionar teoremas mais profundos. O Livro V (equivalente às proposições 203 a 212 de Pappus) é sobre máximos e mínimos, através do estudo de tangentes e normais de uma curva; o Livro VI (proposições de Pappus de números 213 a 220) sobre semelhanças entre secções cônicas. O Livro VII traz muitos teoremas sobre diâmetros conjugados, retomando o assunto do Livro II. E o Livro VIII parece que continha problemas cônicos, sendo considerado, pelo próprio Apolônio, um apêndice ao sétimo livro. Pappus indica a esses dois últimos livros as proposições 221 a 234.

Parece que os dois livros da obra *Lugares de Superfície* incluíam além de cones, cilindros e talvez esferas, ainda parabolóide e hiperbolóide, já antecipando o trabalho de Arquimedes: *Conóides e Esferóides*. Pappus afirma que os antigos tinham estudado muito outras curvas de graus mais altos como determinação de intersecções de cones, cilindros e esferas. No Livro VII da *Coleção*, as proposições 235 a 238 são utilizadas por Pappus para se referir as quatro primeiras proposições de um dos dois livros que compõem a obra euclidiana.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pappus de Alexandria, por ter sido um dos maiores matemáticos comentadores da Grécia Antiga, merece ser mais estudado e citado por historiadores dessas ciências; muito além de seu Problema ou de seu Teorema que colaboraram na origem às geometrias analítica e projetiva, respectivamente.

Sua principal obra – *Coleção Matemática* – fornece um grande acervo, longe de ser completo, do que foi os nove séculos das matemáticas de história antiga, com inúmeras obras dos principais autores da época. Por esse motivo, merecia um pouco mais de divulgação e de estudo.

Pode-se descobrir que, muitos dos problemas e teoremas utilizados atualmente, já eram estudados há mais de dezessete séculos, vistos e revistos por renomados matemáticos da antiguidade e, em sua maioria, citados por Pappus em sua *Coleção*.

Esse trabalho se propôs a trazer um pouco mais de conhecimento de Pappus de Alexandria, além de introduzir Euclides e Apolônio vistos por Pappus, muito mais abrangentes que as obras Cônicas e Elementos, respectivamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- COMMANDINO, Federico. **Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones**. Roma, 1589
- CUOMO, Serafina. **Pappus of Alexandria and Mathematics of Late Antiquity**. Cambridge University Press. New York, 2000.
- CUOMO, Serafina. **Ancient Mathematics**. Cambridge University Press. Londres, 2001.
- EECKE, Paul V. **Pappus d'Alexandrie la Collection Mathématique**. Paris, 1933
- GILLISPIE, Charles Coulston. **Dictionary of Scientific Biography**. Princeton University, Editor Scriber. New York, 1981.
- HULTSCH, Fridericus Otto. **Collections**. Berolini, 1878.
- KNORR, Wilbur Richard. **Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry**. Editor Birkhauser. Boston, 1989.
- NETZ, Reviel. **A New History of Greek Mathematics**. Cambridge University Press. New York, 2022.
- RIDEOUT, B. **Pappus of Alexandria and the changing face of analysis and synthesis in late antiquity**. University of Canterbury. Nova Zelândia, 2008.
- TAISBAK, Christian M. **Dedomena–Euclid's Data**. Museum Tusculanum Press. Copenhagen, 2003.
- TREWEEK, A.P. **Pappus of Alexandria, The manuscript tradition of the Collectio Mathematica**. In: Scriptorium, Tome 11 n°2, 1957. pp. 195-233.
- THOMAS, Ivor. **Selections Illustrating the History of Greek Mathematics**. Harvard University Press. Massachusetts, 1941.
- VITRAC, Bernard. **Promenade dans les préfaces des textes mathématiques grecs anciens**. Centre Louis Gernet. Paris, 2007.