

Aspectos de História da Matemática na Análise Real para docentes

Aspects of the History of Mathematics in Real Analysis for Teachers

Diogo Sampaio da Silva¹  

Universidade Federal do Amazonas – UFAM

RESUMO

Um problema comum na formação de professores das chamadas ciências exatas, especialmente a Matemática, é a chamada dupla descontinuidade: é comum que durante sua formação universitária, os conhecimentos e práticas da Matemática escolar não são empregados, e posteriormente o processo é reproduzido com a Matemática universitária em suas práticas em sala de aula. Este trabalho é um relato de experiência de produção de material didático, monitorias e outras atividades como parte do Estágio a Docência do curso de Mestrado acadêmico em Matemática, focadas na disciplina Análise Real. Estas atividades objetivavam não apenas o ensino da Análise, como também integrar aspectos históricos e filosóficos de seu desenvolvimento, buscando tornar a formação dos professores, futuros docentes, mais ampla e mais profunda simultaneamente. Assim, além de discutir a importância da Análise Real na formação docente, também se apresentam episódios históricos que motivam discussões interdisciplinares a respeito da matemática, bem como de seu ensino. Para isto, encontram-se neste texto não apenas relatos das ações tomadas, mas propostas de ações semelhantes para integração de conhecimentos na formação de professores de Matemática.

Palavras-chave: Análise Real; História da Matemática; Filosofia da Matemática; Formação docente; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

A common problem in the training of teachers of the so-called exact sciences, especially Mathematics, is the so-called double discontinuity: it is common that during their university training, the knowledge and practices of school Mathematics are not used, and later the process is reproduced with university Mathematics in their classroom practices. This paper is an experience report on the production of teaching material, tutoring and other activities as part of the Teaching Internship for the academic Master's course in Mathematics, focused on the subject of Real Analysis. These activities aimed not only to teach Analysis, but also to integrate historical and philosophical aspects of its development, seeking to make the training of teachers, future teachers, broader and deeper at the same time. Thus, in addition to discussing the importance of Real Analysis in teacher training, historical episodes that motivate interdisciplinary discussions about mathematics and its teaching are also presented. To this end, this text contains not only reports on the actions taken, but also proposals for similar actions to integrate knowledge in the training of mathematics teachers.

Keywords: Real Analysis; History of Mathematics; Philosophy of Mathematics; Teacher training; Mathematics teaching.

INTRODUÇÃO

No início do Século XX, o famoso matemático Felix Klein (1849–1925) apontou o problema dos conteúdos ensinados na formação dos professores não conversarem com o ensino básico. Klein (2009) se refere tanto aos conteúdos ministrados na escola não prepararem adequadamente os futuros pesquisadores em ciências da natureza e matemática para a forma que esses campos do conhecimento tomaram após grandes descobertas e revoluções, quanto ao fato de que é ensinado nas universidades não parece influenciar na prática docente de muitos professores.

Em particular, nos interessa refletir e debater o papel da Análise Real na formação dos futuros professores de matemática, norteados pelas seguintes perguntas: Essa é uma disciplina essencial para a prática docente? Como ela pode ser útil ao professor? Veremos como não apenas conhecimentos

¹ Mestrando pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). E-mail: sampaiodiogo.dasilva@gmail.com.

da Análise Real, como conhecimentos sobre a Análise Real, e consequentemente a própria matemática podem influenciar a prática dos professores que trabalham nos tópicos mais iniciais do ensino da matemática. Assim, propomos uma resposta ao chamado problema da dupla descontinuidade: é comum que durante a formação universitária de professores de Matemática, os conhecimentos e práticas da Matemática escolar não são empregados, e posteriormente o processo é reproduzido com a Matemática universitária em suas práticas em sala de aula.

Outro matemático muito influente do século XIX, Henri Poincaré indagou algo muito importante para nossa discussão: como a própria forma de fazer matemática muda com o tempo. Em sua obra intitulada *O valor da Ciência*, Poincaré (2011) apresenta sob a ótica da relação entre intuição e rigor, debates a respeito da própria natureza da matemática e como esta muda com o tempo.

Ao comentar sobre o estado da matemática de seu tempo, ele comenta também sobre figuras importantes do nosso estudo, como Weierstrass. Algo especialmente emblemático na matemática daquele momento é a chamada aritmetização da matemática. O estudo de diferentes áreas e conceitos passou a depender cada vez mais de uma definição rigorosa da noção de número, como veremos mais adiante. Assim, a cada época que analisamos da História da Matemática, Poincaré afirma que se pensava haver atingido o rigor absoluto, fruto da necessidade de rigor que cada época exigia em seus problemas.

O que veremos é que esta aritmetização da matemática traz profundas transformações no conceito de número como concebido pela comunidade matemática, tornando o estudo dos números reais uma figura central na transformação da matemática para a forma que possui atualmente. Defendemos que tais reflexões são altamente úteis para que o professor de matemática possa não apenas ter um amplo conhecimento matemático, mas ainda sobre a matemática, podendo refletir sobre a natureza desta e possivelmente assim também produzir reflexões em sala de aula.

PARTICULARIDADES DA EXPERIÊNCIA

Este trabalho se inicia com o curso de Análise Real ofertado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas (PPGM-UFAM), que tem sido ofertado para alunos com interesse em realizar o exame de seleção de mestrado para o mesmo programa. A professora que ministrou a disciplina possui experiência com este curso e com a disciplina Análise Real oferecida para os cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática da mesma universidade, tendo ministrado pelo menos 4 vezes desde 2008.

Por ser o primeiro programa de pós-graduação em Matemática do estado do Amazonas, o PPGM-UFAM tem atuado também na capacitação qualificada de professores para as instituições de ensino locais, como a própria UFAM, a Universidade do Estado do Amazonas (UEA) e o Instituto Federal do Amazonas (IFAM), dentre outras. Assim, ainda que o foco principal do programa seja a formação de pesquisadores em Matemática e Estatística, os egressos em sua maioria atuam como professores de Matemática, e especificamente no estado do Amazonas, grande parte em cursos de licenciaturas.

Consideramos no desenvolver das atividades o fato que os alunos do nivelamento são majoritariamente professores de Matemática em formação inicial ou continuada, ou futuros professores universitários que atuarão na formação de professores de Matemática nos vários níveis de ensino. Além disso, tendo em conta que nos cursos de nivelamento do programa começa a formação do egresso,

pensamos em outras abordagens dos conteúdos de Análise Real que se relacionem com a prática e os conhecimentos de professores e alunos de Matemática nos vários níveis de ensino. Ao observarmos que não só abordagens, mas que outras organizações do curso diferentes das que são apresentadas na bibliografia clássica eram possíveis, passamos a registrar os roteiros das aulas utilizadas na prática em sala de aula do curso, criando inicialmente notas de estudos.

No entanto, ao discutirmos sobre como melhorar o trabalho, contemplamos a possibilidade de torná-lo um material de apoio para alunos de Matemática, em especial os de licenciatura, e não apenas os interessados nos cursos de nivelamento, apresentando os conteúdos de Análise Real em uma disposição original, inclusive de forma integrada com a história da Análise e consequentes implicações sobre a natureza da Matemática, além de reflexões sobre como o conteúdo abordado pode se relacionar com a prática do professor de Matemática, destacando a importância desta combinação.

Com isso, o nosso trabalho surge de observações relacionadas tanto à realidade da atuação profissional dos egressos do PPGM-UFAM, quanto à necessidade de complementar a formação de alunos interessados em ingressar no programa. Sob as diretrizes mencionadas anteriormente, surgem as notas que originaram o minicurso, resultando no presente texto, que esperamos ser útil não somente a alunos interessados em ingressar em cursos de pós-graduação em Matemática, mas também a professores de Matemática em geral.

Já o autor, além de promover o uso do material produzido em monitorias do curso de nivelamento em Análise Real e do curso de Análise para graduação, participa de seminários, tanto para cursos de graduação como para os cursos de nivelamento, com o intuito de promover discussões históricas sobre o desenvolvimento dos conceitos de números reais e funções, abordando as principais ideias surgidas dentro da nossa atual bibliografia, buscando trazer reflexões sobre o surgimento e evolução do Cálculo e da Análise, bem como seus papéis nas formações dos discentes.

Tais integrações permitem que o Curso de Cálculo já introduza alguma familiaridade com as noções que geralmente só são apresentadas com enfoque no Curso de Análise. Por outro lado, um Curso de Análise integrado com a formação docente permite que os professores do ensino básico compreendam melhor as noções do Cálculo e preparem seus alunos que possam encontrar tais noções em sua formação, e os professores do ensino universitário rompam com o ciclo da dupla descontinuidade na formação docente.

O que se encontra nas seções seguintes são ideias obtidas a partir de grande parte da literatura selecionada como referência às notas, e aqui apontamos uma ideia central contida no texto: o estudo da evolução da Matemática através do tempo complementa a formação matemática, especialmente de professores. Além disso, estão presentes algumas considerações resultantes da aplicação do material produzido em sala de aula, como possível modelo para futuras atividades semelhantes.

Vale destacar que estas discussões não são completamente inéditas na literatura, sendo o trabalho de Geromel Meneghetti e Bicudo (2020) sobre a mesma temática e com mesmo propósito, mas com referências, desenvolvimento e métodos distintos. De modo geral, esperamos que a inserção da história do conhecimento matemático na formação docente traga aos professores reflexões semelhantes às aquelas apresentadas por D'Ambrosio (2020).

REFERENCIAL TEÓRICO

De modo geral, Alfonso-Goldfarb (2011) defende que nas ciências, reflexões e discussões sobre como produzir conhecimento surgem naturalmente com as diferentes necessidades e questões de cada momento no decorrer da história, sendo apresentadas e discutidas pelos próprios estudiosos. E tal conhecimento é particularmente útil ao professor que ensinará ciências, ampliando sua compreensão não apenas do conhecimento adquirido, mas de suas origens e do porquê este se faz necessário.

Assim, a proposta deste trabalho é compartilhar nossa experiência de produção de material didático voltado para a disciplina Análise Real tendo as diretrizes de integração entre conhecimentos de matemática, sua história e relação com a atividade em sala de aula.

Baroni e Otero-García (2014) apontam que, apesar de o cálculo diferencial e integral estabelecido por Newton e Leibniz ter sido rapidamente aceito pela comunidade científica, ao buscar novos resultados, cada vez mais uma formalização dos conceitos anteriores era necessária.

- Por exemplo, o estudo das séries trigonométricas levou:
- Riemann ao estudo das integrais;
- Cantor ao estudo dos números reais e a criar a Teoria dos Conjuntos;
- Weierstrass ao estudo de continuidade e derivabilidade.

O trabalho de Baroni e Otero-García (2014), juntamente com a tradução do Curso de Análise de Cauchy feita por Roque e Schubring (2022) são nossas principais fontes históricas, além de comentários dos matemáticos Klein (2009), Poincaré (2011) e Russell (2007). Enquanto Klein produziu discussões sobre o ensino da Matemática e como esta pode ser apresentada de diversas formas, tanto Poincaré quanto Russell trazem questões que se caracterizam como discussões filosóficas sobre a Matemática. No entanto, as ideias que geralmente são classificadas como provenientes da Filosofia da Matemática são indissociáveis de sua história, e para compreender as principais dentre estas ideias, é necessário não apenas entender o desenvolvimento dos conceitos e teoremas matemáticos, bem como suas demonstrações, como também as ideias que os próprios matemáticos defendem e as origens destas, como uma leitura de um texto introdutório à Filosofia da Matemática como o de Linnebo (2017) ou o de Newton da Costa (1962) pode comprovar.

Alinhados com a proposta de Ripoll, Rangel e Giraldo (2016), pretendemos então atuar trazendo conexões entre as rupturas da formação de professores no ensino básico, mostrando como podemos refletir sobre a apresentação dos conteúdos e sua ordem escolhida, além disso, mostrar que os conhecimentos apresentados enriquecem as possibilidades de atuação do professor e ainda ilustrando como podemos concretizar tais debates ainda na formação de professores, produzindo materiais didáticos.

Em síntese, consideramos o problema da dupla descontinuidade da formação dos professores de matemática e ciências da natureza, apresentado por Klein (2009), isto é, nossas propostas visam conectar a Matemática universitária com a Matemática escolar, para que os professores em formação não apenas saibam conteúdos de Análise Real, mas reflitam sobre estes conteúdos e empreguem esta reflexão em suas práticas docentes. Somos também inspirados em sua posição em relação ao ensino de matemática, bem como suas reflexões sobre a natureza da matemática, além das de Poin-

caré (2011). Também apresentamos as discussões sobre os fundamentos da Matemática debatidas por Russel (2007). Consideramos também de modo geral a relevância da história da ciência como propulsora de melhorias na formação de cientistas e professores de ciências, como debatido por Alfonso-Goldfarb (2004). Assim, propomos seguir as diretrizes de integração entre conhecimentos de matemática, história da matemática e o seu ensino, como defendido por Ripoll, Rangel e Giraldo (2016). Aplicamos estas diretrizes na construção de um material didático, focado em análise real, e compartilhamos agora as experiências e ideias desta produção.

Naturalmente, os livros que fundamentam nossa teoria matemática são os clássicos “Curso de Análise vol. 1” de Lima (2013), bem como “Introdução à Análise Matemática” de Ávila (1999). Apesar da teoria e dos comentários apresentados ser a mesma do “Curso de Análise vol. 1”, a escolha dos conteúdos se assemelha mais ao livro “Análise Real vol. 1” de Lima (2020). Apesar de já existirem textos de Análise voltados para a Licenciatura, como o de Ávila (2006), que inclusive conta com notas históricas, nossa diferença é a abordagem, que busca evidenciar as conexões entre conhecimentos de Matemática e conhecimentos sobre Matemática, como sua história.

METODOLOGIA

Inicialmente, o foco das atividades era a produção de notas de aula para o curso de Análise Real. Em particular, em razão da heterogeneidade das turmas do curso de nivelamento, os primeiros tópicos foram os que receberam mais atenção. Ainda que não sejam exclusivos da Análise, assuntos como Teoria Ingênua dos Conjuntos, Aritmética dos Números Naturais e Reais são assuntos indispensáveis para a disciplina. Por isso, apesar da ementa do curso em questão, apresentada na Figura 1, pressupor conhecimento destes tópicos, bem como noções de limites, optamos por incluir em nosso material não apenas conteúdos próprios da Análise, mas fundamentos de Matemática em geral.

Figura 1 – Ementa do curso



Poder Executivo
Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Matemática UFAM



UFAM

EMENTA DE DISCIPLINA

Curso: Mestrado em Matemática Pura e Aplicada

Disciplina: ANÁLISE REAL

Sigla: PGMAT 527

Carga Horária: 60 horas

Créditos: 4

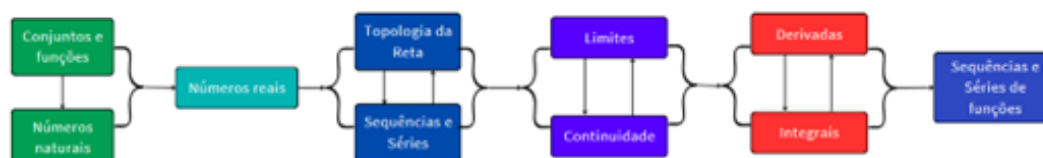
Ementa: Funções contínuas. Funções deriváveis. Funções Integráveis. Seqüências e séries numéricas. Seqüências e séries de funções: convergência simples e uniforme; teste de Weierstrass; continuidade, integrabilidade e derivabilidade do limite uniforme; teorema de Arzelá-Ascoli. Teorema de aproximação de Weierstrass.

Bibliografia: Lima E.L., Curso de Análise, Vol I, IMPA. Rio de Janeiro. Projeto Euclides. 1989. Bartle R. G., Elementos de análise real. Campus. Rio de Janeiro. 1983. Rudin W., Princípios de análise matemática. UnB. Livro Técnico. 1971.

Fonte: Rol de ementas do PPGM/UFAM

Em seguida, analisando como a mesma disciplina pode ser apresentada por meio de diferentes organizações dos mesmos tópicos, fizemos algumas observações. Ainda que os conceitos de Conjuntos, Funções e Números Naturais, juntamente com suas principais propriedades, sejam indispensáveis como ponto de partida, tendo em vista o método axiomático, os demais tópicos podem ser apresentados de ordem distinta da usual, ilustrada a seguir, na Figura 2. As setas indicam possíveis ordens de precedência na apresentação dos conteúdos.

Figura 2 – Estrutura de tópicos da Análise Real



Fonte: O autor

Nesta apresentação, comumente adotada em muitos cursos de Análise Real, entender conjuntos e funções serve de fundamentação para Análise Real, bem como para praticamente todos os campos da Matemática Contemporânea. Naturalmente, em um curso que busca estudar funções reais de uma variável real, é necessário entender o que são funções, bem como alguns resultados básicos sobre elas, além de números reais. Mas devido ao encadeamento da Matemática, isso exige ainda algum conhecimento de outros conjuntos numéricos, contidos na reta real.

Neste sentido, o conjunto dos números naturais destaca-se por três razões. A primeira é ser a estrutura numérica mais simples, o que nos permite introduzir o exercício do raciocínio e da escrita Matemática. Já a segunda é a importância das noções de enumerabilidade e Indução Matemática, a primeira surgindo naturalmente em questões relacionadas à Topologia da Reta e a própria Teoria dos Conjuntos, a segunda sendo um importante meio de demonstração na Análise Matemática. E a terceira é o fato de os números naturais serem os índices de sequências de números reais, o que impele a adoção da interpretação cardinal dos números naturais, e torna necessário o uso de propriedades deste conjunto numérico para deduzir propriedades de sequências numéricas.

Exploreemos mais estas ideias. A aritmética dos números naturais é um dos blocos fundamentais que compõem a Matemática. Há vários indicadores disto, como o fato de que o programa logicista de Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) tentava reduzir aritmética à lógica, para provar que Matemática em última instância é lógica, ou do impacto proveniente dos chamados Teoremas da Incompletude ao englobarem qualquer sistema que consiga deduzir os teoremas da aritmética, como pode ser consultado nos textos de Linnebo (2017) ou de Newton da Costa (1962).

A origem de tal importância dessa classe de números é algo citado anteriormente. Como Linnebo (2017) e Baroni e Otero-Garcia pontuam e o texto de Cauchy comentado por Roque e Schubring (2022) documenta, o Cálculo Diferencial e integral se baseava na ideia de infinitesimais, isto é, quantidades “infinitamente pequenas”, que permitiam calcular limites de funções, como as derivadas, mas não possuíam justificativa teórica para sua manipulação, que ora tratava os infinitesimais como números não nulos, ora como iguais a zero, sendo apresentada a solução moderna por Weierstrass.

Ambos os autores pontuam ainda que um dos marcos para a busca de novos padrões de rigor na matemática, e especialmente na análise foi a demonstração analítica do Teorema do Valor Intermediário apresentada por Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848).

Em termos simples, se uma função contínua definida em um intervalo fechado e limitado da reta passa por um ponto menor que um valor c e depois por outro ponto maior que c , então em algum momento, seu valor é exatamente c . Tal fato pode ser considerado intuitivamente óbvio e assim o era, sendo por isso tomado como axioma ou demonstrado de forma menos rigorosa que nos padrões atuais. A demonstração de Bolzano fez posteriormente com que os matemáticos refletissem sobre quais proposições poderiam ser consideradas axiomas e quais poderiam de fato ser demonstradas, causando o surgimento de um processo que levou a famosos episódios da História da Matemática, como o surgimento do formalismo matemático, a noção de Geometrias não euclidianas, e o que mais nos interessa: a aritmetização da Análise Real.

Isto é, o estudo de diferentes áreas e conceitos passou a depender cada vez mais de uma definição rigorosa da noção de número. O que vemos é que esta aritmetização da Matemática traz profundas transformações no conceito de número como concebido pela comunidade Matemática, tornando o estudo dos números reais uma figura central na transformação da Matemática para a forma que possui atualmente. No entanto, a formalização da noção de número real se apoiava na noção de número racional, que por sua vez se apoiava na ideia de número natural.

Vale lembrar ainda, que curiosamente, a noção do conjunto dos números reais como conhecemos é uma das mais recentes em comparação com as demais concepções modernas estudadas em Análise, sendo ainda novidade quando comentado por Klein (2009). Particularmente, a maioria das apresentações se baseava em construções apoiadas na noção de número racional, que foi formalizada posteriormente. A apresentação geralmente escolhida na maioria dos cursos e bibliografias surge com Hilbert em 1900, trazendo a axiomatização do conjunto numérico como o que atualmente se entende por corpo ordenado completo, de acordo com Baroni e Otero-Garcia (2014).

Já a axiomatização moderna dos números naturais foi introduzida em 1889, Giuseppe Peano (1858-1932) os axiomas que apresentamos anteriormente. No entanto, o autor escreveu este trabalho de modo a apresentar todo o texto em linguagem simbólica, a fim de evitar que o uso de palavras de uma língua natural interfira na exatidão do conteúdo trabalhado, segundo Klein (2009).

Também no final do século XIX, Georg Cantor (1845-1918) juntamente com Heinrich Eduard Heine (1821-1881), desenvolveu uma teoria que fundamenta os números reais através das sequências de Cauchy. Mas sua contribuição mais famosa é a criação do que atualmente entendemos por Teoria Ingênua dos Conjuntos, que apesar de sofrer inicialmente grande rejeição da comunidade matemática, hoje é considerada ferramenta unificadora de diversos campos da Matemática.

Isto se dá em razão de conceitos essenciais como relações de ordem, relações de equivalência, inclusões, uniões, interseções e principalmente funções serem todos conceitos expressos na linguagem de conjuntos. Em particular, o conceito de função assume protagonismo em praticamente todos os ramos principais da Matemática. Estruturas Algébricas são conjuntos munidos de operações com determinadas propriedades, e operações são funções. Ações geométricas como rotações, translações e reflexões são o que chamamos de isometrias, que são ainda funções.

Um exemplo de sucesso no emprego da noção de conjunto que merece destaque é o da Topologia. Para comentar isto, voltemos a falar da estrutura usual de um curso de Análise Real. Apesar de haver na Figura 2 um item denominado “Topologia da Reta”, este item significa tão somente o estudo de conceitos exclusivos da Topologia empregados como ferramentas do Cálculo, ou seja, as definições e propriedades de subconjuntos abertos, fechados e compactos. Também são objetos de estudo da Topologia as noções de sequência, limite e continuidade, que podem, surpreendentemente, ser expressas uma a partir da outra.

Isto significa que, por exemplo, uma função f é contínua em um ponto a se, e somente se, o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a $f(a)$, que por sua vez equivale a dizer que a imagem por f de toda sequência que tende a a é uma sequência no conjunto imagem de f , que converge para $f(a)$, e ainda, uma função é contínua, se e somente se, a pré-imagem de conjuntos abertos é aberta.

Historicamente, as noções de ponto de acumulação, conjunto derivado, conjunto denso, além de outras foram introduzidas através de Cantor, segundo Baroni e Otero-Garcia (2014). Estas noções hoje fazem parte do estudo da Topologia, inicialmente denominada *Analysis situs* por este ser o nome do artigo em que Poincaré introduziu tal estudo, também de acordo com Baroni e Otero-Garcia (2014). Poincaré (2011) chama a este estudo de “verdadeira geometria descritiva”, isto porque nele se traduzem conceitos geométricos à noções que dispensam quantidades, ou seja, apresentam-se ideias da geometria da reta que não precisam de números específicos.

Atualmente as ideias da Topologia de fato dispensam noções numéricas por serem expressas meramente através de conjuntos, e assim, as noções de conjunto aberto, conjunto fechado, conjunto compacto, e outras derivadas, são todas expressas através de conjuntos, famílias de conjuntos e operações entre estes. E assim, consequentemente, também são expressas as ideias de continuidade e limite em ambientes mais gerais. No entanto, entender casos particulares onde podemos evocar noções quantitativas, como distâncias entre pontos, é uma introdução adequada ao estudo da Topologia por desenvolver estas ideias em ambientes de fácil visualização, permitindo o exercício da intuição juntamente ao desenvolvimento do estudo.

Desenvolvidas as ideias da topologia da reta, já se tem em mãos todas as ferramentas para a compreensão do Cálculo. Apesar das ideias de derivadas e integrais serem tópicos próprios de estudo, ainda assim são casos especiais de limites, que por sua vez são equivalentes a ideias topológicas na reta.

Geralmente, por questões didáticas, o Cálculo Diferencial é introduzido antes do Cálculo Integral, pois os algoritmos para derivar funções são mais simples, e, portanto, os primeiros algoritmos para integrar funções são evocados via Teorema Fundamental do Cálculo como o processo inverso de derivar.

No entanto, justamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo, não há uma ordem de precedência entre derivadas e integrais para o método axiomático. Os conceitos de integrais podem perfeitamente serem introduzidos sem o conhecimento de derivadas e assim realizar o processo inverso.

Todas essas organizações foram comentadas ou mesmo aplicadas em sala de aula em diferentes apresentações do curso de Análise, presenciadas pelo autor deste texto e juntamente com os apontamentos apresentados até aqui, resultam nas considerações da seção seguinte.

ANÁLISES E RESULTADOS

A partir das questões apresentadas nas seções anteriores temos suporte teórico para as questões que, de fato, são o cerne deste trabalho. Começamos analisando a importância dos conhecimentos de Análise Real na formação docente, principalmente na formação inicial.

Primeiro, os fundamentos da Análise, bem como de praticamente todos os campos da Matemática contemporânea, residem na Teoria Ingênua de Conjuntos e na Aritmética dos conjuntos numéricos, especialmente os naturais e reais. Nisto, a Análise surge não só como exercício destes estudos, mas como forma de mostrar a potência que estes campos possuem como fundamentação teórica para outras teorias da Matemática contemporânea, permitindo não apenas um entendimento mais amplo sobre o que a Matemática trata, mas um entendimento do porquê a Matemática universitária diverge da Matemática escolar.

Segundo, a Análise introduz e expande a compreensão de números reais como elementos de um corpo ordenado completo, bem como suas diferentes interpretações. Do ponto de vista prático, duas abordagens se sobressaem ao apresentar números reais em sala de aula. A primeira consiste em tratá-los como expressões decimais, isto é, um número inteiro seguido de uma sequência de dígitos, enquanto a segunda é sua representação geométrica enquanto pontos de uma reta orientada. A Análise então permite compreender mais profundamente as motivações para estas construções e porque ambas são consideradas meramente representações distintas para o mesmo conceito. E ainda, podemos comparar a estrutura da reta com as pertencentes a outros conjuntos numéricos, como os racionais e os complexos, permitindo analisar melhor as semelhanças, como serem corpos, serem ordenados ou completos, não só das propriedades básicas, mas de suas consequências. Um professor que compreende bem as propriedades algébricas dos reais terá ainda domínio sobre as propriedades de racionais e complexos por estes serem também corpos, por exemplo.

Terceiro, as noções de infinito, como enumerabilidade, que estão no cerne do que caracteriza a Matemática moderna, são tratadas rigorosamente sob a ótica da Análise. Isto permite que os professores estejam cientes da existência de diferentes tipos de infinitude, como classificar tais tipos e quais suas propriedades. Em sala de aula isto pode se concretizar como uma forma de conectar os saberes da Matemática escolar e da Matemática universitária. Ainda que possam ser contraintuitivas, as ideias modernas sobre infinito são caracterizadas por raciocínios surpreendentemente simples, como o caso do argumento diagonal de Cantor para provar a não enumerabilidade dos reais. Assim, surge uma oportunidade para profundas discussões acessíveis a alunos do ensino escolar sobre o que é infinito e quais suas propriedades.

Quarto, o exercício do método dedutivo como fundamento das ideias mais intuitivas sobre números, finitude, além de ser uma espécie de interseção dos itens já abordados, traz ainda consequências próprias interessantes. Entender por exemplo, que se um conjunto está incluído em outro, o número de elementos do primeiro não excede o do segundo, é um fato considerado intuitivamente óbvio, mas a demonstração não é trivial. Conhecer as demonstrações de propriedades básicas como a lei do corte nos naturais também permite explicitar que, por muitas vezes, fatos matemáticos simples possuem demonstrações que não compartilham a mesma simplicidade. Isto permite também filtrar o que não é acessível aos estudantes ainda na formação escolar.

Quinto, alguns fatos a respeito de números reais só podem ser satisfatoriamente elucidados através do método científico. Por que o método da bisseção sempre funciona? Por que sempre po-

demos aproximar qualquer número real por um número racional? Por que podemos nos aproximar indefinidamente de um número real através de números racionais, e ainda assim, o número resultante ser irracional? São perguntas naturais que devem ser exploradas ainda que apenas do ponto de vista computacional em sala de aula.

Sexto, a Análise na Reta é também preparação para tópicos ainda mais avançados de matemática. Naturalmente, professores de Matemática podem aproveitar conhecimentos de áreas como Álgebra Linear, Espaços Métricos, Funções de Variáveis Complexas e Estruturas Algébricas. Além de o estudo da estrutura da reta ser não apenas um exercício de método axiomático, como também um estudo que compartilha os mesmos fundamentos de outras áreas da Matemática, a estrutura da reta pode ser generalizada por meio de espaços vetoriais, espaços métricos, espaços topológicos, corpos e anéis.

O último tópico é o entendimento do processo histórico que resultou na Análise. No entanto, este merece um debate próprio, que também se divide em diversos pontos de interesse para a formação de professores de Matemática.

O primeiro deles é o entendimento do problema da dupla descontinuidade proposto por Klein (2009), suas origens, e conseqüentemente ações para resolvê-lo. O Cálculo é ferramenta indispensável na Matemática universitária, e suas mudanças implicam em mudanças necessárias na formação escolar dos alunos que futuramente podem precisar desta ferramenta. Então o entendimento do rompimento entre a Matemática tradicional e a Matemática contemporânea tem raízes históricas, e ao saber dessas histórias é que podemos conciliar estas rupturas.

O segundo é uma consequência do primeiro, mas merece destaque, e consiste em entender a Matemática como um campo dinâmico. Como Poincaré (2011) aponta, ainda que as verdades matemáticas permaneçam verdadeiras através do tempo, a relação entre intuição e rigor se altera conforme a necessidade de cada momento histórico, resultando em diferentes formas de fazer Matemática no decorrer do tempo. O processo de aritmetização da Matemática, em particular da Análise, é um exemplo histórico protagonista para ilustrar esta ideia.

O terceiro tópico é justamente compreender a aritmetização da Análise como um dos processos centrais na história da Matemática, isto é, entender como, quando e por quais motivos o conceito de número se tornou uma das principais preocupações dos matemáticos, enquanto a Matemática adquiriu as características que possui atualmente. Para professores, isto elucidaria o quanto o conhecimento bem fundamentado dos números e suas propriedades é imprescindível na formação matemática.

Como D'Ambrosio (2020) sintetiza: entender a história da Matemática permite ver a Matemática como resultado de uma construção social e cultural humana, bem como os problemas motivadores para a construção das ideias matemáticas e como tais problemas levaram ao desenvolvimento de diferentes áreas da Matemática, além da compreensão de soluções alternativas para problemas que são triviais quando se utiliza a matemática moderna, e por fim, a evolução do rigor lógico e de provas matemáticas, elucidando porque estes possuem suas características atuais.

Por fim, entender estes episódios da história da Matemática requer não apenas conhecimentos de Matemática e de História, mas também entendimento de ideias sobre a Matemática, que constituem a Filosofia da Matemática. Muitas vezes, a motivação para o desenvolvimento da Matemática

é externa, então entender a história deste desenvolvimento requer ainda noções de outras áreas, como as Ciências Naturais, e este é o último tópico a se discutir. Entender a história da Análise é entender a história da Matemática como um todo, o que é uma atividade que exige saberes de áreas diversas, expandindo o entendimento sobre o que é a Matemática, porque ela é da forma atual, e quais os principais tópicos de interesse desta disciplina atualmente. Isto permite planejamento para que os alunos de fato possam participar ativamente de debates sobre estas questões e se formarem de forma adequada para não apenas enfrentar os problemas matemáticos modernos, mas entender até mesmo porque estes surgem e são relevantes.

CONCLUSÕES

A partir de algumas informações históricas sobre a Matemática é possível compreender por que ela possui suas características atuais e o que a levou a divergir de suas características antigas. Isto abre portas para discussões profundas sobre o que é a Matemática e como se faz Matemática, o que complementa a formação de professores. O texto apresentado é uma síntese de como o surgimento e o desenvolvimento do que atualmente conhecemos como Análise Real é um exemplo de oportunidades para ampliar o entendimento de professores em formação sobre sua área.

Além disso, um dos aspectos de destaque é o surgimento de rupturas entre a Matemática escolar e a Matemática universitária, e entender este surgimento permite propor, mais adequadamente, formas de contornar este problema em sala de aula. Assim, o curso de desenvolvimento apontado pela História da Matemática é muito diferente daquele adotado atualmente, visando clareza e rigor, que por sua vez, difere da organização usual dos tópicos no ensino escolar. No entanto, dominar diferentes formas de organizar e entender a Matemática só contribui para aqueles que a ensinarão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Professora Flávia Morgana, e aos Professores André Pontes e Wanderley Vitorino. A primeira foi minha tutora no desenvolvimento das atividades que resultam neste texto. Todos os três me aconselharam, esclareceram dúvidas e recomendaram leituras que contribuíram fundamentalmente para este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior–Brasil (CAPES)–Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- ALFONSO-GOLDFARB, Ana Maria. **O que é História da Ciência**. São Paulo: Brasiliense. 2004.
- BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; OTERO-GARCIA, Sílvio César. **Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Coleção PROPG Digital (UNESP). 2014.
- DA COSTA, Newton Carneiro Alfonso. **Introdução aos fundamentos da matemática**. Rio de Janeiro: Of. gráficas da Livraria do Globo, 1962.
- D'AMBROSIO, Beatriz S. Reflexões sobre a história da matemática na formação de professores. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, p. 32, 2020. <https://doi.org/10.47976/RBHM2007vn32>.

GEROMEL MENEGHETTI, Renata C.; BICUDO, Irineu. O que a história do desenvolvimento do cálculo pode nos ensinar quando questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 2, n. 3, p. 103–118, 2020. <https://doi.org/10.47976/RBHM2002v2n3103-118>.

HAIRER, Ernt; WANNER, Gerhard. **Analysis by Its History**. Nova Iorque: Springer Science & Business Media. 2008.

KLEIN, Felix. **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior**. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática. 2009.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**—Volume 1. 14ª edição. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, p. 286, 2013.

LINNEBO, Øystein. **Philosophy of mathematics**. Princeton: Princeton University Press, 2017.

POINCARÉ, Henri. **O valor da ciência**. 1. ed. Rio de Janeiro: Contraponto. 2011.

RIPOLL, C.; GIRALDO, V.; RANGEL, L. **Livro do Professor de Matemática da Educação Básica**—Volume 1—Números Naturais. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM. 2016.

ROQUE, T. M.; SCHUBRING, G. F. **Curso de Análise de Cauchy**: uma edição comentada. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM—Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à filosofia matemática**. Tradução e notas de Augusto J. Franco de Oliveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.