

A Matemática na 2ª Guerra Mundial: o desembarque aliado na Normandia, 06/06/1944

Mathematics in the Second World War: the allied landing in Normandy, 06/06/1944

Luis Saraiva¹ 

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa – FCUL

RESUMO

O desembarque aliado na Normandia a 06 de Junho de 1944 foi uma etapa crucial para a derrota da Alemanha nazi e o fim da 2ª Guerra Mundial. Mostraremos como foi fundamental a utilização do conhecimento matemático para o êxito desta operação. Daremos uma perspectiva das dificuldades que os aliados tinham pela frente, nomeadamente a chamada Muralha do Atlântico. Referiremos a importância da previsão das marés e daremos um historial dos desenvolvimentos matemáticos nesta área, referindo alguns dos nomes que deram contributos significativos como Newton, Laplace e William Thompson. Mostraremos como o conhecimento sobre marés foi decisivo na escolha da data e hora para o início do desembarque, contribuindo para o seu consequente êxito. Referiremos igualmente outras ações essenciais feitas no sentido de ocultar aos alemães o local e a data desta ação militar, e que igualmente contribuíram para o seu sucesso, e daremos uma perspetiva global do desembarque realizado a 6 de Junho de 1944.

Palavras-chave: 2ª Guerra Mundial; Muralha do Atlântico; Desembarque na Normandia; Estudo das Marés; Operações de desinformação.

ABSTRACT

The Allied landings in Normandy on June 6, 1944, were a crucial step in the defeat of Nazi Germany and the end of World War II. We will show that the use of mathematical knowledge was crucial for the success of this operation. We will give a perspective on the difficulties that the allies faced, namely the so-called Atlantic Wall. We will underline the importance of tide prediction and give a history of mathematical developments in this area, mentioning some of the names that made significant contributions such as Newton, Laplace and William Thompson. We will show how tide prediction was decisive in choosing the date and time to begin the landings, contributing to their success. We will also mention other essential deception actions taken to hide the place and date of this military operation from the Germans, which also contributed to its positive outcome. We will give a global perspective of the landings carried out on June 6, 1944.

Key Words: World War II; Atlantic Wall; Normandy landings; Tide prediction; Deception operations.

INTRODUÇÃO

Desde que passou a haver alguma sofisticação na feitura de armas, os conhecimentos dados pela matemática constituíram um importante fator no seu melhoramento. As contribuições dos vários ramos da matemática aplicada, como a balística, a dinâmica e a mecânica, foram importantes no aperfeiçoamento e criação de novas e mais eficientes armas.

No século XX, principalmente a partir da Segunda Guerra Mundial², a importância dos conhecimentos matemáticos tornou-se vital para os conflitos armados. Numa primeira fase, nas suas aplicações diretas, como na criação de armas mais letais, no desenho e feitura de carros blindados, navios e aviões de guerra cada vez mais poderosos e eficazes, na aviação noturna, nos melhoramentos na exatidão dos bombardeamentos. Mas também em toda uma gama de conhecimentos não

¹ Doutorado em Matemática pela University of Sussex, Inglaterra. Investigador do Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia (CIUHCT) e Professor Associado Aposentado do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL), Lisboa, Portugal. E-mail: lmsaraiva@fc.ul.pt.

² Há inúmeros livros escritos sobre a 2ª Guerra Mundial. Uma das possíveis referências é (Keegan, 1989).

diretamente aplicados nos conflitos armados, mas com importante, senão decisiva, influência neles. Incluem-se neste grupo a elaboração de códigos de transmissão de informação, e paralelamente de processos de descodificação dos códigos utilizados pelas forças adversárias, e os processos de barramento de transmissões de rádio. Na 2ª Guerra Mundial os americanos e os ingleses tinham uma grande vantagem sobre os seus adversários, pois durante grande parte do conflito conseguiam decifrar as mensagens codificadas do inimigo. Em Inglaterra, perto de Londres, uma equipa de matemáticos e decifradores de códigos, apoiados por um grupo de mais de 9.000 funcionários, analisaram e traduziram as mensagens codificadas enviadas pelos alemães. Para conseguirem quebrar os seus códigos construíram alguns dos mais complexos aparelhos de computação da sua época, os antepassados dos computadores modernos. Igual sucesso tiveram as equipas de decifradores americanos, conseguindo traduzir as mensagens enviadas em código pelas forças armadas do Japão.

É importante ainda relembrar os conhecimentos que levaram à descoberta da energia atómica. O seu domínio conferiria ao país que primeiro a conseguisse utilizar militarmente um imenso poder. Havia o receio que os nazis pudessem construir a bomba atómica, e a utilizassem com a total falta de escrúpulos que tinham evidenciado ao longo do conflito. Esta ameaça deu origem a que um grupo distinto de cientistas do lado dos aliados pusessem de lado a sua oposição à utilização militar da energia atómica e se reunissem no chamado projeto *Manhattan*, com vista a conseguirem fabricar uma bomba atómica antes dos nazis. Desconheciam que estes, cerca de 1942, tinham desistido de a fabricar. Como resultado do seu trabalho, prepararam-se as primeiras bombas atómicas em 1945, e duas delas foram polemicamente utilizadas militarmente contra o Japão, sobre as cidades de Hiroshima e Nagasaki, causando centenas de milhares de mortos.

Até quase ao fim da guerra os nazis, apesar de uma situação militar catastrófica, estavam esperançados que os seus cientistas criassem novas armas que lhes permitissem inverter o sentido da guerra. Fabricaram as chamadas bombas voadoras V1 e V2³, com as quais, em desespero, bombardearam a Inglaterra, e mais tarde a Holanda, entre Junho de 1944 e Abril de 1945, causando milhares de mortes, e construíram os primeiros aviões a jato, os ME262. Tudo isso felizmente já veio muito tarde e a guerra na Europa terminou em Maio de 1945 com a rendição incondicional da Alemanha.

Começaremos por dar uma perspetiva da situação na frente ocidental da guerra, em especial sobre a construção da denominada *Muralha do Atlântico*. Faremos uma panorâmica histórica sobre os principais desenvolvimentos no estudo das marés desde Newton até à elaboração da máquina de Doodson. Referiremos as várias componentes que tiveram de ser consideradas antes de se verificar o desembarque na Normandia, e salientaremos como o estudo das marés foi crucial na escolha do dia e da hora desta ação. Mencionaremos igualmente as operações complementares, que tiveram de ser realizadas em apoio ao desembarque naval, do qual daremos uma perspetiva geral.

A MURALHA DO ATLÂNTICO

Nos inícios de 1941 a Alemanha tinha ocupado a França⁴, mas não tinha conseguido criar condições para a invasão que tinha planeado da Inglaterra⁵. A sua atenção virou-se para Leste, com

³ Os antepassados dos mísseis balísticos intercontinentais que os Estados Unidos e a União Soviética fabricaram nos anos 50 para serem armados com ogivas nucleares.

⁴ Sobre a Batalha de França, ver (Warner, 1990).

⁵ Os alemães a 30 de Junho de 1940 ocuparam igualmente as ilhas inglesas do Canal da Mancha, das quais as maiores são Jersey e Guernsey. Não houve combates, as forças inglesas tinham abandonado as ilhas antes da chegada dos alemães. As ilhas chegaram a

a invasão da União Soviética a 22 de Junho de 1941. Para sua defesa a oeste, o comando alemão encarregou a *Organização Todt* (OT)⁶ de realizar obras de engenharia militar que permitissem uma defesa efetiva do território em caso de tentativa de invasão (Kaufmann e Jurga, 2002). A OT foi uma instituição criada para efetuar projetos de engenharia quase exclusivamente de tipo militar na Alemanha e nos territórios conquistados. Existiu entre 1933 e 1945. Estavam contratados pela OT técnicos e trabalhadores especializados, tais como engenheiros, carpinteiros, canalizadores e electricistas, os quais eram bem pagos. Mas a maioria do seu pessoal era constituída por pessoas sem qualificações, ou ainda por mão de obra compulsivamente obrigada a aí trabalhar incluindo cerca de 600.000 franceses a isso forçados pelo regime de Vichy (Paxton, 1972). Incluíam-se ainda neste número excluídos da sociedade alemã, presos políticos e prisioneiros de guerra. A OT começou por fortificar as ilhas do Canal da Mancha⁷. Também prioritário foi a construção de defesas na Noruega, para dar segurança ao norte da ocupação alemã antes da invasão da União Soviética. Mais tarde, a 23 de Março de 1942 foi dada a ordem formal de construção da denominada *Muralha do Atlântico*, com a indicação que as bases navais e de submarinos deveriam ser grandemente fortificadas. Só em fins de 1943 é que se começaram a estender essas defesas a grandes porções da costa atlântica, do norte da Noruega ao sul de França.

A *Muralha do Atlântico* não era uma linha de defesa contínua. Por exemplo, na Noruega só as entradas dos fiordes, ou as cidades nos fiordes que também tinham portos é que poderiam ser potenciais locais para uma invasão. Consequentemente, devido a esta topografia peculiar, construíram-se defesas em todos os fiordes importantes, mas o resto da linha costeira norueguesa foi deixado praticamente sem proteção.

Uma série de ataques de commandos aliados entre 1940 e 1942 expuseram as fraquezas da *Muralha do Atlântico*. Dois episódios foram marcantes, ambos em 1942: o ataque à base de Saint Nazaire e o desembarque em Dieppe (Botting, 1981, p. 20-43).

A incursão dos aliados ao porto de Saint Nazaire foi feita a 29 de Março de 1942. O objetivo foi destruir a doca seca aí existente. A Alemanha tinha construído o mais moderno e poderoso couraçado então existente, o Tirpitz, e havia o receio que ele viesse para o Oceano Atlântico atacar os comboios de barcos que vinham dos Estados Unidos para Inglaterra com todo o tipo de fornecimentos necessários para continuar a guerra⁸. Com a destruição da única doca seca na costa atlântica suficientemente grande para acolher o Tirpitz, pensou-se, correctamente, que os alemães não se arriscariam a trazer o navio para uma zona onde não havia qualquer local onde o barco pudesse eventualmente ser reparado. As forças alemãs foram surpreendidas, o ataque foi um êxito completo, se bem que com muitas baixas⁹. A doca foi destruída de forma tão completa que só três anos depois do fim da guerra, em 1948, é que voltou a estar operacional.

ter uma guarnição de 40.000 soldados.

⁶ O nome vem do seu fundador, Fritz Todt (1891-1942), engenheiro civil com lugar importante na hierarquia nazi.

⁷ Uma ação desnecessária, pois os aliados nunca tiveram intenção de regressar pela força a essas ilhas, que não tinham qualquer valor militar. A guarnição alemã que aí ficou estacionada rendeu-se pacificamente no dia seguinte à rendição alemã, a 9 de Maio de 1945.

⁸ Um couraçado da mesma classe que o Tirpitz, o Bismark, tinha saído para o Atlântico quase um ano antes, em Maio de 1941, tendo afundado o couraçado inglês Hood e causado danos grandes noutros barcos de guerra aliados, até que a perseguição que lhe fez grande parte da armada inglesa conseguiu evitar que ele entrasse no porto de Saint Nazaire para reparação e o afundou. Os meios utilizados pelos aliados deixaram desprotegidos alguns dos comboios de barcos mercantes que se dirigiam a Inglaterra, os quais ficaram sem defesas, expostos aos ataques dos submarinos alemães.

⁹ Dos 611 soldados e tripulantes que tomaram parte no ataque, 401 foram mortos ou feitos prisioneiros.

Figura 1 - A Muralha do Atlântico



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Atlantic_Wall.

Um segundo ataque importante na costa atlântica francesa foi feito em Dieppe, a 19 de Agosto de 1942. A União Soviética pedia repetidamente aos aliados que abrissem uma frente de combate no ocidente, para aliviar a pressão alemã no leste, e obrigar a retirar várias dezenas de divisões para a ameaça que surgiria a oeste. Igualmente era importante para a opinião pública dos países aliados mostrar finalmente, após meses de derrotas e recuos, uma ação ofensiva dos aliados com êxito. Não havia ainda condições para um ataque em grande escala no ocidente, mas foi decidido que se faria uma incursão a Dieppe para testar as defesas alemãs e se tirarem conclusões que viessem a beneficiar um futuro ataque em grande escala¹⁰. O ataque foi muito mal planeado, não se tiveram em consideração variáveis vitais, e o resultado foi um enorme desastre militar¹¹. Os tanques que foram desembarcados para apoiar o ataque não se conseguiram mover bem nas praias de seixos e não tiveram o papel que lhes estava destinado, houve imensas baixas entre as tropas terrestres, entre mortos e prisioneiros. Igualmente se perderam muitos navios e aviões que tinham ido apoiar o desembarque.

Ambos os adversários tiraram ensinamentos importantes: os alemães produziram um guia de procedimentos para a defesa da costa atlântica, e viram a necessidade de fortalecer e aumentar mais as defesas costeiras, enquanto que os aliados perceberam quais as razões do seu insucesso. Em futuras ações era fundamental: conseguir a ocultação do local de intervenção, para se poder surpreender completamente as forças inimigas; evitar um ataque frontal aos portos fortificados; ter melhor informação sobre as características da área onde iriam actuar, principalmente no que diz respeito a fortificações e armamento; e haver reconhecimento prévio das características geológicas das futuras praias de desembarque, para que não se voltassem a repetir situações como as que ocorreram em Dieppe, onde os tanques não puderam dar o apoio esperado às tropas de ataque.

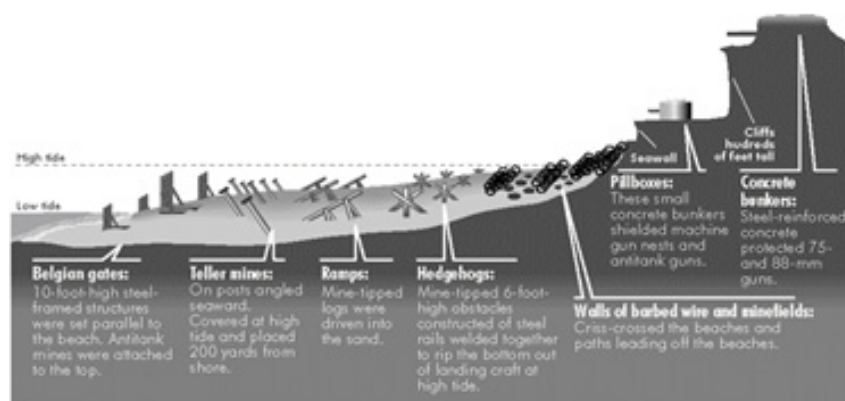
Houve um aumento imenso nas obras da *Muralha do Atlântico*, podendo-se dizer que a maioria das fortificações costeiras no litoral atlântico foi construída entre a primavera de 1943 e o início de

¹⁰ Há ainda hoje um debate sobre a possibilidade desta ação militar ter tido igualmente com objetivo central oculto capturar máquinas codificadoras Enigma, que eram utilizadas pelos militares alemães para enviar as suas mensagens.

¹¹ Dos 10.500 militares aliados envolvidos na operação, na maioria canadianos, cerca de 5.500 foram mortos, feridos ou capturados. Os alemães tiveram apenas 311 mortos e 280 feridos.

Junho de 1944. Em Novembro de 1943 o Marechal Erwin Rommel (1891-1944)¹², o mais conceituado militar alemão da segunda guerra mundial, igualmente respeitado pelos compatriotas e adversários, foi encarregado de supervisionar os trabalhos de fortificação da Muralha do Atlântico. Efetuou uma mudança na política de defesa costeira que até então era seguida: o que estava vigente era ter de reserva forças motorizadas e blindadas prontas a intervir, as quais, após o desembarque das forças aliadas, imediatamente ocorreriam ao local e expulsariam as tropas invasoras. Rommel estava consciente que em fins de 1943 as forças aéreas aliadas dominavam os céus, pelo que qualquer tentativa de colunas militares se aproximarem dos locais de desembarque estava condenada ao malogro. Decidiu portanto que todo o esforço deveria ser feito para impedir qualquer progressão inimiga para fora das praias, aí é que se ganharia ou perderia a batalha. Consequentemente ordenou que se colocassem milhões de minas, mais do triplo do que se tinha colocado antes da sua chegada, e se enchessem as praias onde poderiam desembarcar os aliados com todo o tipo de obstáculos, alguns com minas no seu topo que explodiriam ao mínimo contato, barreiras tanto para a infantaria como anti-tanque, obstáculos debaixo da água e minas navais a pouca distância da costa. Construíram-se centenas de bunkers e casamatas de betão reforçado, onde se instalaram metralhadoras, armas anti-tanque, artilharia ligeira e pesada. Paralelamente todos os portos costeiros de alguma importância foram fortificados: em França os melhoramentos tiveram lugar em Dunquerque, Calais, Le Havre, Cherburgo, S. Malo, Brest, Lorient, Saint Nazaire, e La Rochelle-La Pallice. Ao mesmo tempo foram diminuídos os intervalos entre as defesas costeiras. Até Maio de 1944 a OT tinha construído mais de 5000 estruturas defensivas de betão.

Figura 2 - As defesas nas praias de França



Fonte: <https://www.tumblr.com/peashooter8Bo5/153842770917>.

Prevendo que os aliados escolheriam desembarcar numa maré cheia, pois assim as tropas de assalto teriam menor distância a percorrer até às defesas alemãs, foi decidido colocar vários tipos de obstáculos que ficariam submersos na maré cheia e que poderiam afundar as barças de desembarque. Temos alguns desses tipos na figura 2. Sucessivamente da esquerda para a direita, ou seja, do oceano para a praia: *portas belgas*, estruturas emolduradas de aço com cerca de 3 metros de altura, colocadas paralelamente à praia e com minas anti-tanque colocadas no topo; *minas Teller*, colocadas em postes inclinados para o oceano, a cerca de 180 metros da praia; *rampas* armadilhadas espetadas na areia; *ouriços*, obstáculos armadilhados feitos de barras de aço soldadas entre si, de cerca de 1,80 metros de altura, para rasgarem o fundo das barças de desembarque; *arame farpado* e *campos de minas*; um *muro*; *casamatas de betão* com ninhos de metralhadoras e armas anti-tanque; *falésia* com

¹² Existem muitos livros sobre Rommel, uma das primeiras biografias é (Young, 1950), com um capítulo sobre a Muralha do Atlântico, p. 187-214.

uma altura que podia chegar a várias dezenas de metros; no topo *bunkers de betão e aço reforçado* com canhões de 75mm e de 88mm.

Nos meses anteriores à invasão os aviões de reconhecimento aliados voaram milhares de horas sobre o norte de França, fotografando tudo o que poderia interessar numa ofensiva aliada. Essas fotos foram analisadas por uma enorme equipa de decifradores, pelo que no dia do desembarque na Normandia havia um conhecimento detalhado das zonas onde os soldados e paraquedistas entrariam em ação. Tendo em conta o que os alemães tinham instalado nas praias, era crucial para os aliados desembarcarem muito perto da maré baixa, para poderem evitar os obstáculos e terem equipas que se encarregassem da sua demolição, criando corredores por onde fosse seguro avançar para terra; e o momento do desembarque teria de se iniciar quando a maré já estava a começar a subir para os barcos não ficarem atolados e poderem voltar para os navios ao largo, e deste modo poderem trazer mais vagas de assalto. Atendendo à velocidade de subida da maré, as equipas de demolição teriam de agir rapidamente, para procederem à eliminação dos obstáculos antes destes ficarem submersos.

O ESTUDO DAS MARÉS¹³

A primeira explicação satisfatória das marés foi dada por Isaac Newton (1642-1727) na sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, em 1687, afirmando, em consequência da sua teoria da gravitação universal, que eram devidas (principalmente) à força de atração gravitacional entre a Terra e a Lua e à força centrífuga do movimento dos dois na órbita em torno do seu centro de massa comum. A força gravitacional atrai estes astros um para o outro, mas a força centrífuga devido ao seu movimento em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua tende a afastá-las. No centro da Terra a atração gravitacional e a ação da força centrífuga anulam-se mutuamente. Mas tal não acontece à superfície da Terra. No lado virado para a Lua a força gravitacional é maior, enquanto que no lado oposto é a força centrífuga que é dominante. Por consequência sendo a Terra maioritariamente coberta pelos oceanos, haverá duas mares cheias, uma no lado virado para a Lua e outra no lado oposto. Atendendo à rotação da Terra, haverá regra geral duas mares cheias por dia (é um pouco mais do que 24 horas, 24 horas e 50 minutos, atendendo a que a Lua também está em movimento). É claro que se trata de uma explicação simplificada, pois não foram tidos em conta fatores importantes como a influência dos continentes e a estrutura dos fundos do mar, que de modo algum é homogênea.

Figura 3 - As marés cheias devidas à atração lunar e à força centrífuga (ou inércia) do sistema Terra-Lua no seu movimento em torno do seu centro de massa



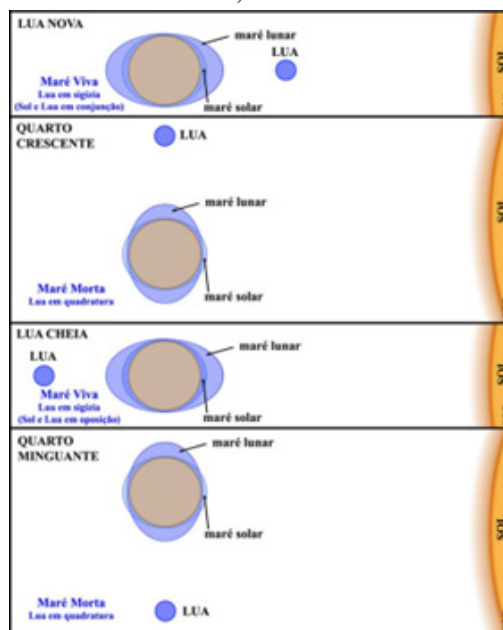
Fonte: [https:// oceanservice.noaa.gov/education/tutorial_tides/tides03_gravity.html](https://oceanservice.noaa.gov/education/tutorial_tides/tides03_gravity.html).

O Sol também intervém, mas apesar da sua massa ser imensamente superior à da Lua, o facto de se encontrar muito mais distante da Terra faz com que a sua influência no fenómeno das marés não seja tão importante. Atendendo que a força de atração entre dois corpos é diretamente propor-

¹³ Neste capítulo as nossas referências básicas são (Ekman, 1993), (Cartwright, 1999) e (Parker, 2011).

cional às massas desses corpos e inversamente proporcional ao quadrado da sua distância, vemos que a ação de atração dominante é devido à Lua. Contudo não é negligenciável a influência do Sol, e quando este e a Lua estão alinhados com a Terra (fases de Lua Cheia e Lua Nova) as suas ações adicionam-se e temos as mares vivas. Quando isso não acontece, quando a Lua está ou em Quarto Crescente ou em Quarto Minguante) as suas ações contrariam-se e temos as chamadas marés mortas. É o que se pode ver na Figura 4:

Figura 4 - A influência conjunta do Sol e da Lua nas marés



Fonte: [https:// www.astropt.org/2012/01/09/as-mares](https://www.astropt.org/2012/01/09/as-mares).

Sendo a teoria básica exposta por Newton correta nos seus princípios, algumas das suas deduções não o são, essencialmente devido a uma interpretação errada dos efeitos das forças verticais na superfície dos oceanos.

Essas imprecisões foram em parte corrigidas aquando de uma competição realizada em 1738 pela *Real Academia das Ciências de Paris* que propôs como tema “*O fluxo e o refluxo do mar*”. Dos quatro trabalhos premiados em 1740, três apresentaram ensaios que melhoravam a teoria exposta por Newton. Foram seus autores Colin MacLaurin (1698-1746), Leonhard Euler (1707-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782). Os dois primeiros apresentaram os seus ensaios escritos em latim.

O texto de MacLaurin, *De Causa Physica Fluxus et Refluxus Maris* (“Sobre as causas físicas do fluxo e refluxo do mar”), é um estudo completamente de tipo geométrico que utiliza a teoria das fluxões. Demonstrou uma afirmação feita por Newton, mas que este apenas assumiu: que a forma de um oceano, inicialmente esférica, quando está em equilíbrio estático, com a força de uma maré provocada por um outro corpo fica um esferóide alongado, cujo eixo maior aponta para esse corpo. Foi também o primeiro cientista a dar-se conta do efeito de deflexão causado pela rotação da Terra em objetos que não estão firmemente ligados ao solo, chamado hoje *efeito Coriolis*.

Euler apresentou *Inquisitio Physica in Causam Fluxus et Refluxus Maris* (“Pesquisa Física sobre a causa do fluxo e do refluxo do mar”). A mais importante contribuição neste seu trabalho foi mostrar

que é a componente horizontal do campo de forças, e não a vertical que determina o movimento da maré. A componente vertical é equilibrada pela pressão no fundo do mar.

O texto de Daniel Bernoulli é *Traité sur le flux et le reflux de la mer*. Este ensaio, apesar de algumas falhas, teve aplicação direta na análise e previsão das marés, e por isso ficou mais conhecido que os outros escritos premiados. Bernoulli assumiu que, para efeitos de cálculo das marés na Terra sem perturbações se podia considerar a sua superfície uma esfera perfeita, e que a forma de uma deformação das marés da sua superfície é um esferóide alongado. Fez esta afirmação desconhecendo o trabalho de MacLaurin sobre este tema. Analisou igualmente a estrutura geométrica das marés geradas pela combinação das acções do Sol e da Lua. Calculou tabelas de marés que foram as primeiras tabelas de previsões com alguma qualidade que se publicaram. Newton, analisando as diferenças entre marés cheias observadas na costa inglesa em situações de Lua Cheia ou Lua Nova e as marés vazias nos mesmos locais quando a Lua se encontrava em Quarto Crescente ou Quarto Minguante tinha concluído que a força das marés devidas à Lua era cerca de 4,5 mais forte que a devida ao Sol. Bernoulli, utilizando valores obtidos na costa francesa, corrigiu esse valor para 2,5. Hoje sabe-se que o valor correto é 2,2.

Um avanço decisivo foi conseguido por Pierre Simon Laplace (1749-1827). Ele foi o primeiro a analisar o problema das marés como sendo um problema da água em movimento e não da água em equilíbrio. Até então tinha-se suposto que o oceano se limitava a sofrer as acções das forças atrativas dos astros. Laplace estabeleceu as relações dinâmicas que exprimem a reacção dos oceanos a essas forças. A sua principal contribuição encontra-se em duas comunicações apresentadas à Academia das Ciências de Paris. A primeira, em duas partes, tem o título “*Recherches sur plusieurs points du Système du Monde*”. Essas partes foram apresentadas respetivamente em 1775 e 1776. A segunda, “*Mémoire sur le flux et reflux de la mer*”, foi apresentada em 1790. O essencial destes três textos foi incluído no volume IV do seu “*Traité de Mécanique Céleste*”, publicado em 1799. Utilizando o cálculo diferencial, deduziu três equações que descrevem como os oceanos respondem aos efeitos gravitacionais da Lua e do Sol.¹⁴ São equações muito complexas que só se puderam resolver completamente no século XX utilizando computadores digitais. Mas com elas Laplace demonstrou o carácter único das marés no conjunto dos fenómenos oceânicos: toda a sua energia está concentrada num pequeno número de frequências astronómicas, e portanto é possível prever com rigor as marés se se puder calcular a energia de cada uma dessas frequências astronómicas. Na maioria dos locais a maior parte da energia está concentrada em três frequências semi-diurnas¹⁵. Este conhecimento foi essencial para os desenvolvimentos posteriores.

Em 1831 Henry Robinson Palmer (1795-1844), engenheiro civil inglês da London Dock Company, desenhou um aparelho que permitia mecanicamente registar de forma contínua o nível de uma maré, o *mareógrafo*. Deste modo passou-se de um conhecimento discreto dos níveis da maré, obtido a partir da sua observação direta, a um conhecimento contínuo. Este aparelho (Figura 5) consistia numa haste vertical graduada, colocada na vertical, fixa a um dos muros de um porto. Ligada a essa haste, mas móvel, está uma boia, a flutuar na água, cujas subidas e descidas são comunicadas por um sistema de hastes e rodas a um marcador que vai registando os valores indicados num rolo de papel que vai rodando accionado por um relógio. Assim se consegue obter uma medição contínua da variação da altura da água.

¹⁴ Não vamos aqui analisar essas equações. Sobre este tema consulte-se (Cartwright, 1999, p. 69-81).

¹⁵ Uma devida à Lua (1,93 ciclos por dia), outra devida ao Sol (2,00 ciclos por dia) e a terceira devida à excentricidade da órbita lunar (1,90 ciclos por dia).

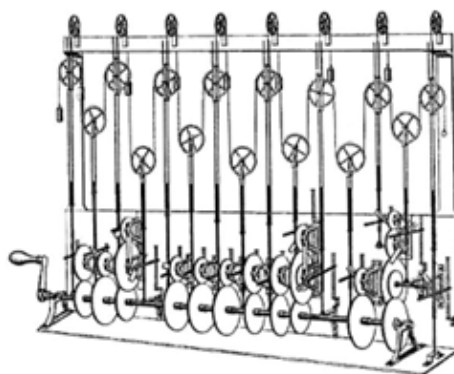
Figura 5 - O mareógrafo de Brest, França



Fonte: <https://fr.wikipedia.org/wiki/Marégraphie>.

Em 1822 Joseph Fourier (1768-1830) indicou que uma função podia ser escrita com soma de uma série trigonométrica, e em 1829 o matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) demonstrou rigorosamente a convergência desta série em casos que englobavam a função que descrevia a altura das marés.

William Thompson (1824-1907), Lorde Kelvin a partir de 1892, utilizou a técnica da análise de Fourier no estudo das marés, estudando séries temporais de medições do nível da água para determinar quanta energia há em cada frequência da maré. Os movimentos do Sol e da Lua determinam um conjunto de frequências, e cada uma corresponde a uma componente de uma força tendente a provocar o movimento das marés. A porção da altura da maré devida à energia de uma dada frequência pode ser representada por um gráfico de uma função sinusoidal. Cada termo é da forma $A \cos(\omega t + p)$. Quando todas as curvas são adicionadas, temos uma boa estimativa da representação da maré. Em 1872 inventou a primeira máquina de previsão de marés. Permitia transformar o movimento giratório em movimento sinusoidal, adicionando as várias componentes, e deste modo permitia obter as alturas das marés a partir dos dados do que se entendia serem as dez mais importantes componentes.

Figura 6 - Esquema da máquina de previsão de marés de Lorde Kelvin

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Tide-predicting_machine.

Arthur Thomas Doodson (1890-1968) foi um matemático e oceanógrafo inglês que desde 1921 se dedicou ao estudo das marés, tendo participado no desenho de máquinas de previsão de marés, sendo uma delas a Doodson-Légé TPM¹⁶.

Em 1942 a máquina que Doodson tinha aperfeiçoado utilizava os dados de 26 componentes importantes da maré, o que permitia uma previsão mais exata. Foram os cálculos de Doodson que permitiram determinar quais os dias mais favoráveis para os desembarques na Normandia.

Temos vários tipos de constituintes das ondas que representam as marés:

- a) Principais componentes astronômicas (relativas à interação entre astros)
 - 1) As influências devidas ao Sistema Terra-Lua (designada por M2)
 - 2) As influências devidas ao Sistema Terra-Sol (S2)
 - 3) As influências devidas à Lua descrever uma elipse em torno da Terra (N2 e L2)
 - 4) Influências devidas à órbita da Lua em torno da Terra fazer um ângulo de cerca de 5° com o plano da órbita da Terra (K1 e O1)
 - 5) Influências devido à eclíptica fazer um ângulo de 23°30' com o plano do equador (K1 e P1)
- b) Componentes radiacionais (exprimem as alterações devidas aos raios do Sol, à brisa existente entre a terra e o mar, e às variações de pressão atmosférica)
- c) Componentes relativas aos tipos de fundos marinhos em águas pouco profundas. As mais importantes são M4, M6, M8 e MS4.

A SITUAÇÃO MILITAR NO INÍCIO DE JUNHO DE 1944

Depois de um início claramente favorável à aliança Alemanha-Itália-Japão (este a partir de 1941), o chamado Eixo, a guerra mudou de sentido. A partir da segunda metade de 1942 no Pacífico, e do fim de 1942, na Europa, a relação de forças inverteu-se.

¹⁶ Um exemplar desta máquina foi vendido em Portugal em 1923 e outro no Brasil em 1927. Só em 1929 a instituição onde trabalhava, o *Liverpool Observatory and Tidal Institute*, comprou uma dessas máquinas.

No Pacífico deu-se a batalha naval de Midway (Lunsdtrom, 1990), (Prange, 1982) de 4 a 7 de Junho, com uma estrondosa vitória americana. Foram afundados os quatro porta-aviões que integravam a força japonesa, e os americanos apenas perderam um dos três porta-aviões da sua frota. Nesse combate foi essencial a contribuição devida aos operadores de rádio, que tinha decifrado os códigos japoneses, e assim foi possível saber com antecedência da vinda da força naval japonesa para Midway e portanto preparar atempadamente a estratégia da esquadra americana. A partir dessa data, o Império do Japão passou a estar na defensiva, até à sua rendição final a 2 de Setembro de 1945.

Na Europa, o avanço nazi tinha sido detido perto de Moscovo, tendo sido frustrada a tentativa de entrar na cidade, no que foi conhecida pela batalha de Moscovo, que se desenrolou de Outubro de 1941 a Janeiro de 1942. Mais tarde sofreu uma enorme derrota em Estalinegrado (Erikson, 1975), numa batalha que durou mais de cinco meses, de fins de Agosto de 1942 ao início de Fevereiro de 1943, em que as forças nazis, depois de um longo cerco, se renderam. Nesta batalha o exército alemão perdeu mais de 800.000 soldados, entre soldados capturados, mortos, feridos e desaparecidos. Do lado soviético, apesar de vencedor, houve ainda um maior número de baixas, superior a um milhão. Considera-se esta batalha a mais sangrenta da história, ainda mais do que a batalha de Verdun, na 1ª Guerra Mundial. Foi uma derrota que marcou o destino da guerra na frente oriental. Depois de mais uma tentativa de ataque frustrado em Kursk, de 5 de Julho a 23 de Agosto de 1943, a Alemanha, passou a estar na defensiva¹⁷. Em Abril de 1944 a União Soviética tinha recuperado a Ucrânia e parte da Bielorrússia, aproximando-se da Roménia e da Polónia, numa marcha imparável que só terminou em Berlim em Maio de 1945.

A 10 de Julho de 1943 os aliados (8º Exército inglês de Montgomery e o 7º Exército americano de Patton) desembarcaram no sul da Sicília, e começaram a libertação da Itália. A 25 de Julho o rei Vitor Emanuel III de Itália mandou prender o ditador Benito Mussolini (1883-1945), e a 8 de Setembro foi assinado um armistício com os aliados. A Alemanha então invadiu o Norte e Centro de Itália, o que levou esta, a 13 de Outubro, a declarar guerra à Alemanha. O avanço aliado foi lento, devido à oposição do exército alemão, mas seguro. A 5 de Junho de 1944 os seus exércitos entraram em Roma.

A PREPARAÇÃO E A REALIZAÇÃO DO DESEMBARQUE¹⁸

Desde 1942 que se pensava realizar uma operação de grande envergadura na costa atlântica francesa, respondendo ao pedido da União Soviética de se criar uma segunda frente de batalha na Europa. Contudo essa realização foi sendo adiada, por causa de outras frentes de batalha, entre as quais a do Norte de África. Esta última campanha terminou nos inícios de Maio de 1943 com a rendição das forças italo-alemãs. Na conferência de Teerão de Novembro de 1943 o presidente dos Estados Unidos e o Primeiro Ministro inglês prometeram à União Soviética que a segunda frente havia tanto prometida tomaria forma em Maio de 1944. Devido à dimensão da operação militar, que implicava a movimentação de imensas forças terrestres, navais e aéreas, e em particular a necessidade de ter um número suficiente de lanchas de desembarque para colocar em terra dezenas de milhares de soldados, esta teve de ser adiada para Junho desse ano. No total 39 divisões aliadas participaram nessa operação: 22 americanas, 12 inglesas, três canadianas, uma polaca e uma francesa. Para o local do desembarque na costa atlântica francesa, escolheu-se a Normandia, numa zona de

¹⁷ Em Kursk desenrolou-se a maior batalha de tanques da guerra, que se saldou por enormes perdas de soldados e blindados para as forças nazis.

¹⁸ Sobre o desembarque na Normandia há imensas publicações. Sugiro (Ryan, 1959).

cerca de 100 kms entre os portos do Havre, a oriente, e Cherburgo, a ocidente. O Pas-de-Calais era a zona de França mais perto de Inglaterra, mas os alemães, esperando um ataque aí, tinham fortificado imenso o local, o que desaconselhava por completo uma operação nessa zona. Por outro lado, o desastre de Dieppe tinha mostrado que não se podia fazer o desembarque perto de portos, que estariam naturalmente fortificados.

Era necessário manter os alemães na ignorância total do local do desembarque, pelo que foram levadas a cabo várias operações de desinformação. Os agentes duplos passaram várias pistas falsas ao alto comando alemão, mencionando uns que se daria um ataque na Noruega, outros que o desembarque se faria no Pas-de-Calais¹⁹. Para este último ser mais credível, em Inglaterra, no condado de Kent, uma zona que inclui Dover, a cidade de Inglaterra mais perto de França, criou-se um falso *Primeiro Exército* americano, tendo-se construído simulacros de tanques, veículos motorizados e aviões, e que se anunciou estar sob as ordens do general George Smith Patton (1885-1945), um dos mais prestigiados generais americanos. Houve relaxamento da vigilância aérea, deixando os aviões de reconhecimento alemão fotografarem o pretenso exército. Igualmente foi mantido um tráfego intenso nas comunicações de rádio nessa zona, pretendendo serem transmissões relativas a essa falsa força militar. Para manter a ilusão que o desembarque seria na zona do Pas-de-Calais, perto da data da invasão os aliados bombardearam-na com mais do dobro das bombas que largaram sobre as zonas escolhidas da Normandia. No próprio dia da invasão, nas zonas do Havre, Boulogne sur Mer e Pas de Calais, foram lançadas por esquadrões da *Royal Air Force* folhas metalizadas que os radares alemães interpretaram como sendo de comboios de barcos aliados.

O segredo foi de tal modo bem escondido que mesmo durante algum tempo após o desembarque na Normandia os alemães acreditaram que se tratava de uma manobra de diversão, e que o desembarque principal viria na zona do Pas-de-Calais. Deste modo mantiveram nessa zona várias divisões de blindados que só tardiamente foram enviadas para a frente de combate.

Para além da força naval, entraram igualmente em ação, horas antes do desembarque, tropas aerotransportadas em planadores, e forças de paraquedistas. A sua missão era apoderarem-se de pontos vitais na retaguarda nazi e controlarem ou destruir pontes de modo a impossibilitar o envio de reforços alemães para a costa²⁰.

Houve fatores essenciais a ter em consideração para se decidir qual o dia da invasão, principalmente as marés e o nascer da Lua.

O desembarque tinha de ser feito muito perto da maré baixa mas quando esta já estava a subir, como atrás se disse. Para a frota de ataque não ser detetada, era necessário haver alguma escuridão, mas teria de haver já alguma luz da Lua para as tropas aerotransportadas encontrarem bem os seus alvos. Igualmente teria de haver alguma iluminação uma hora antes do desembarque, para os navios da frota poderem alvejar as defesas costeiras. Portanto a maré baixa teria de coincidir com as primeiras luzes, e o desembarque seria feito cerca de uma hora depois.

¹⁹ O mais famoso desses agentes duplos tinha o nome de código de Garbo. Foi o único agente duplo a ser condecorado simultaneamente com as medalhas mais prestigiadas do exército aliado e do exército alemão! Ver a sua história em, (Harris, 2004).

²⁰ Houve uma colaboração estreita com a *Resistência Francesa*, que dinamitou linhas férreas, destruiu instalações elétricas, cortou linhas de telefone e de tele-impressoras, provocando a confusão entre os serviços de informação nazis. Contribuiu dessa forma para o isolamento da Normandia. Para se ter uma ideia da amplitude destas ações, indicamos que por ação destes combatentes foram destruídas 52 locomotivas.

Era pois necessário uma previsão precisa das marés, e consequentemente era necessário determinar com exatidão as constantes harmônicas obtidas dos dados das marés muito perto das praias do desembarque. Mas os aliados não tinham esses elementos. Os dados que tinham eram relativos aos dois portos que ladeavam essas praias, Le Havre a este e Cherburgo a oeste. Não era fiável fazer uma interpolação desses valores pois as condições do fundo do mar junto da costa era muito variável. Por isso, durante meses, submarinos miniatura e barcos de pequeno porte realizaram missões noturnas para recolher os dados necessários perto dessas praias. Inclusivamente, lembrando-se do que se tinha passado em Dieppe, trouxeram amostras da areia para se certificarem que não haveria problemas com o movimento dos veículos a utilizar. Em Outubro de 1943 foi enviado a Artur Doodson um relatório que incluía 11 pares de constantes harmônicas²¹ relativas a um lugar de nome de código Z (que era a Normandia), e foi-lhe pedido para fazer as previsões das marés hora a hora para o período de Abril a Junho de 1944. As predições de Doodson foram adaptadas para cada uma das praias de desembarque.

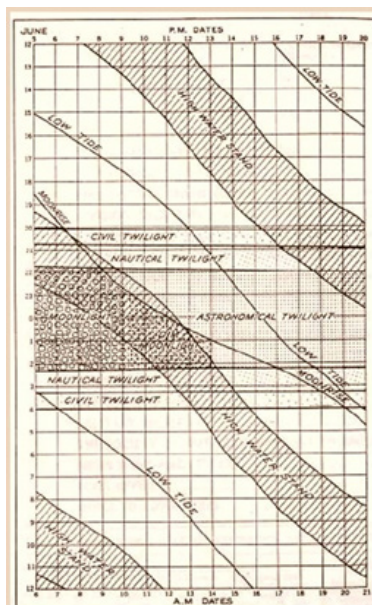
Elaboraram-se diagramas em que se cruzavam as informações relativas às marés, ao nascer da Lua, e aos vários graus de crepúsculo. Vamos definir estes últimos para melhor se poder entender a Figura 7. Podemos distinguir três tipos de crepúsculo:

O **crepúsculo civil**, em que o Sol está até 6° abaixo da linha do horizonte. Há luz suficiente para os objetos serem vistos e não há necessidade de iluminação artificial.

O **crepúsculo náutico**, em que o Sol está entre 6° e 12° abaixo da linha do horizonte. Só se conseguem reconhecer os contornos gerais dos objetos. À noite começa quando se torna impossível reconhecer a linha do horizonte e de manhã acaba quando ela passa a ser avistada

O **crepúsculo astronómico**, em que o Sol está entre 12° e 18° abaixo da linha do horizonte. O céu fica completamente escuro.

Figura 7 - Diagrama das marés e da iluminação para Omaha Beach, de 5 a 21 de Junho de 1944.



Fonte: Diagrama em Parker (2011, p. 39)

²¹ Essas constantes foram: M2, S2, N2, K2, K1, O1, P1, M4, MS4, M6, e 2SM6.

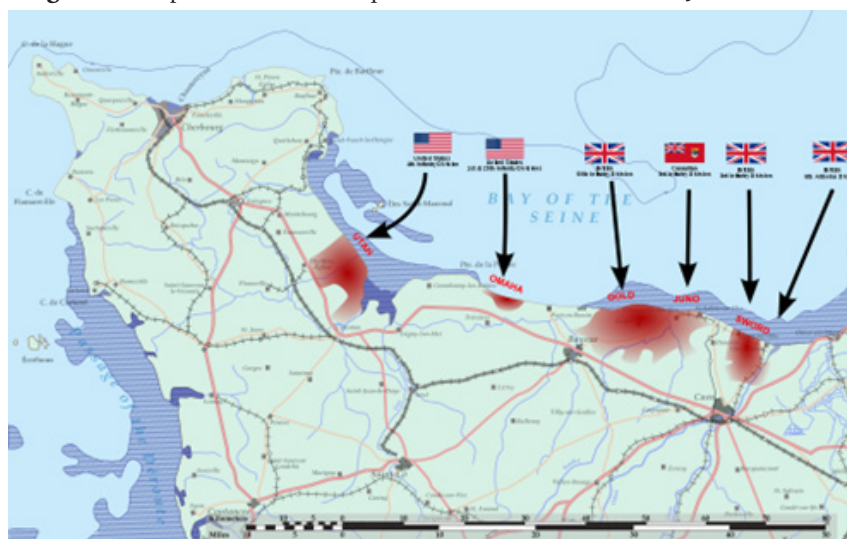
Em Junho só três dias satisfaziam as condições consideradas essenciais: 5, 6 e 7.

O General Dwight D Eisenhower (1890-1969), comandante supremo das forças aliadas na Normandia, resumiu deste modo os elementos fundamentais a considerar para se tomar uma decisão sobre a data do desembarque (Eisenhower, 1949, p. 262-263):

We wanted to cross the Channel with our convoys at night, so darkness would conceal the strength and direction of our attacks. We wanted a moon for our airborne assaults. We needed approximately forty minutes of daylight preceding the ground assault to complete our bombing and preparatory bombardment. We had to attack on a relatively low tide because of beach obstacles which had to be removed while uncovered. These principal factors dictated the general period; but the selection of the actual day would depend upon weather forecasts.

Pensou-se inicialmente fazer o desembarque no dia 5, mas os meteorologistas previram tempestade na Mancha nesse dia, o que impossibilitou essa ação. Mas afirmaram igualmente que tudo indicava que seguidamente haveria uma aberta de 36 horas. A decisão final, depois de muita hesitação e de se pesarem todos os fatores, foi realizar o desembarque no dia 6 de Junho.

Figura 8 - As praias de desembarque na Normandia no dia 6 de Junho de 1944



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Normandy_landings#/media/File:Map_of_the_D-Day_landings.svg.

Definiram-se cinco praias, com os nomes de código Utah e Omaha, a serem tomadas pelo exército americano, Gold e Sword, destinadas aos ingleses, e Juno, para os canadianos. O exército aliado era imenso. Não existe consenso quanto aos seus números exatos. Mas podemos tomar os valores seguintes como pelo menos bem aproximados. Em meios aéreos participaram 2.950 caças, 4.450 bombardeiros, 1.370 aviões para transportes, 670 planadores. A força naval incluía 120 navios de guerra, entre os quais 6 couraçados e 20 cruzadores; 100 contratorpedeiros; 250 caça-minas; e 3.500 transportes de tropas. Quanto ao exército, totalizava quase 130.000 soldados e 23.400 tropas aerotransportadas, que foram apoiadas por 1.500 tanques e 12.500 veículos variados.

A distância entre as duas praias extremas, Utah e Sword, era de cerca de 100 kms, o que fez que os desembarques nas diferentes praias não começassem todos à mesma hora, pois o momento da maré baixa não era o mesmo em todas. A amplitude das marés nessa costa era de cerca de 6 metros,

pelo que, após a maré baixa, em cada hora a maré subia cerca de um metro. Em consequência as equipas de demolição tinham de trabalhar rapidamente para conseguirem criar corredores livres de perigo, destruindo os obstáculos antes que estes ficassem submersos. Em Utah, Gold, Juno e Sword os aliados não encontraram grande resistência, tendo as equipas de demolição alcançado os seus objetivos. Só em Omaha é que isso não foi possível, abrindo apenas cinco dos projetados dezasseis caminhos de passagem para as tropas. Isto foi devido ao intenso fogo alemão, que dizimou aquelas equipas. Este insucesso foi um dos fatores para as imensas baixas sofridas nessa praia pelo exército americano. Só no fim do dia 6 foi possível romper as defesas alemãs em Omaha e avançar para o interior.

NOTAS FINAIS

Contrariamente ao que tinha sido previsto, devido à resistência oferecida pelo exército alemão, só no dia 12 de Junho é que as cinco cabeças de ponte conseguiram unir-se, dominando os aliados um espaço de 97 kms de largura e 24 kms de profundidade, e começando a sua marcha para o interior. Contudo a geografia da Normandia, com as suas densas sebes e estradas estreitas, muito bem aproveitadas pelo exército alemão, dificultaram a progressão dos aliados. Cherburgo foi tomada a 26 de Junho e Caen a 9 de Julho. Apenas a 25 de Julho, com a quebra das linhas defensivas nazis perto de Saint-Lô, se pode considerar concluída a campanha da Normandia.

Aprendeu-se muito com o desastre de Dieppe, e o que se corrigiu foi essencial para o sucesso do desembarque. O trabalho de desinformação levado a cabo pelos aliados resultou em pleno, e o mau tempo contribuiu para um maior relaxamento da vigilância alemã, tendo o seu comandante se ausentado para Berlim, pensando que com tal mau tempo os aliados não fariam qualquer movimento. O domínio aéreo dos aliados impediu os alemães de perceberem os movimentos de tropas em Inglaterra, e os bombardeamentos realizados sistematicamente, bem como a ação da Resistência Francesa danificaram grandemente a infra-estrutura dos transportes em França, tornando difícil aos nazis trazerem reforços para a costa. A boa preparação feita pelos aliados nas suas múltiplas componentes, o estudo rigoroso feito das marés, foram essenciais para a vitória conseguida. A partir daí os aliados progrediram em direção a Paris (libertada a 25 de Agosto) e ao Norte da França. Aproximava-se o fim do pesadelo nazi.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao CIUHCT que subsidiou a minha participação no XVIº Encontro da SBHMat. Estou grato ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, que me proporcionou as condições necessárias para poder realizar a investigação para escrever este artigo. Financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P./MCTES através de fundos nacionais (PIDDAC). UIDB/00286/2025; <https://doi.org/10.54499/UIDB/00286/2025>

REFERÊNCIAS

- BOTTING, Douglas. **The Second Front**. New York: Time-Life Books, 1981
- CARTWRIGHT, David Edgar. **Tides. A Scientific History**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- EISENHOWER, Dwight David. **Crusade in Europe**. London: W. Heinemann, 1949

EKMAN, Martin. Concise History of the Theory of Tides. Precession-Nutation and Polar Motion (from Antiquity to 1950), **Surveys in Geophysics**, 14, p. 585-617, 1993

ERIKSON, John. **The Road to Stalingrad**. New York: Harper & Row, 1975

HARRIS, Thomas. **Garbo: the spy who saved D-Day**. Bath: Bath Press, 2004

KAUFMANN, J. E. e JURGA, Robert. M. **Fortress Europe. European fortification of World War II**. Cambridge: Da Capo Press, 2002

KEEGAN, John. **The Second World War**. London: Century Hutchinson Ltd, 1989

LUNDSTROM, John B. **The First Team. Pacific Naval Air Combat. From Pearl Harbor to Midway**. Annapolis, Maryland: Naval Institute Press, 1990

PARKER, Bruce. The Tide Predictions for D-Day, **Physics Today** 64, 9, p. 35-40, 2011

PAXTON, Robert O. **Vichy France. Old Guard and New Order 1940-1944**. New York: Columbia University Press, 2001 (1ª edição: New York: Knopf, 1972)

PRANGE, Gordon William. **Miracle at Midway**. New York: Penguin Books, 1982

RYAN, Cornelius. **The Longest Day**. Greenwich, Connecticut: Fawcett Publ., 1959.

WARNER, Philip. **The Battle of France**. London: Simon & Schuster, 1990

YOUNG, Desmond. **Rommel**. London: Collins, 1950

APÊNDICE—O INÍCIO DA 2ª GUERRA MUNDIAL (1939-1941)

A 30 de Janeiro de 1933 Adolf Hitler (1889-1945) tornou-se chanceler da Alemanha. Começou por eliminar os seus adversários internos, ilegalizou os partidos políticos, com exceção do Partido Nazi, criou forças para-militares que asseguraram o domínio sobre toda a sociedade alemã e desenvolveu uma política anti-judaica, anti-comunista e racista. Foi feita a militarização e o rearmamento da Alemanha, desrespeitando as convenções que tinham sido estabelecidas após o fim da 1ª Guerra Mundial. Na sequência de uma política expansionista, Hitler provocou o começo da Segunda Guerra Mundial. A 1 de Setembro de 1939 os exércitos nazis invadiram a Polónia. Dois dias depois, cumprindo os acordos que tinham com o país invadido, a Inglaterra e a França declararam guerra à Alemanha. O exército polaco tinha armamento antiquado e estratégias ultrapassadas, que não se adequaram de modo algum ao tipo de ações desenvolvidas pelos exércitos alemães. Em pouco mais de um mês a vitória nazi foi total. De notar que, devido a acordo estabelecido entre a União Soviética e a Alemanha, a primeira invadiu a Polónia a 17 de Setembro, tendo sido ocupados pelos seus exércitos uma faixa oriental da Polónia. Um período de aparente inação das tropas terrestres, tanto do lado alemão como do lado franco-britânico, durou mais de cinco meses. Foi interrompido a 9 de Abril de 1940 com a invasão da Noruega pelo exército alemão, e um pouco mais tarde, a 10 de Maio, com a invasão da Holanda, seguindo-se rapidamente a Bélgica e a França, onde entraram pela floresta das Ardenas, mal defendida pelos aliados, que a julgavam impenetrável às forças blindadas. O avanço alemão foi imparável, e a 24 de Maio estava perto de Dunquerque. Um pouco inexplicavelmente fez uma pausa e não avançou, o que permitiu a evacuação para Inglaterra de cerca de 340.000 soldados franceses, ingleses e belgas. Mais 220.000 soldados foram evacuados por outros

portos no noroeste de França, pelo que está estimado em cerca de 560.000 o número de soldados aliados que conseguiram abandonar a França.

A Itália fascista, sentindo a derrota da França eminente, e escudando-se ao abrigo do pacto de aliança com a Alemanha nazi que tinha estabelecido em Maio de 1939, declarou guerra à França a 10 de Junho. Pouco efeito teve essa declaração, nada de significativo foi conseguido pelo exército italiano. O exército alemão entrou em Paris a 14 de Junho, e pouco depois deu-se a rendição da França. O armistício foi assinado a 22 de Junho. O goveno republicano foi demitido, e foi substituído por um governo colaboracionista e anti-democrático, presidido pelo Marechal Philippe Pétain (1856-1951). Este regime ficou conhecido por *regime de Vichy*, o nome da localidade francesa onde estabeleceu a sua sede.

Para encarar a possibilidade de invadir a Inglaterra, o alto comando alemão decidiu que a aviação alemã levaria a cabo sistemáticos ataques a alvos selecionados em Inglaterra. Esta nova batalha foi conhecida por *Batalha de Inglaterra* e durou de 10 de Julho a sensivelmente 31 de Outubro. Ficou provada a incapacidade alemã de conseguir vencer a aviação inglesa, pelo que foi abandonado o plano de invasão. Um contributo importante para a vitória inglesa, muito inferior em número à aviação alemã, foi a utilização do radar, que dava então os primeiros passos, e que permitiu determinar com alguma antecendência os trajetos das esquadrilhas alemãs, e assim poder preparar a defesa dos potenciais alvos, estando esquadrilhas de aviões a postos para combater os invasores.

As atenções da Alemanha viraram-se então para leste, tendo sido ordenada a invasão da União Soviética a 22 de Junho de 1941.

O Império do Japão, sem declaração prévia de guerra, enviou uma frota de porta-aviões atacar os navios americanos que estavam estacionados em Pearl Harbour, nas ilhas Hawaii. O objetivo era afundar os porta-aviões americanos que supunham aí estar ancorados, e assim impedir que os Estados Unidos pudessem dar resposta às projetadas ações de conquista do Império do Japão na Ásia e no Pacífico. A 7 de Dezembro de 1941 (um domingo) foi realizado esse ataque. A aviação dos porta-aviões japoneses provocou imensos danos nos barcos que se encontravam ancorados em Pearl Harbour, afundando muitos deles. Simplesmente os porta-aviões americanos não estavam lá. Eles foram cruciais na campanha que os Estados Unidos empreenderam na batalha do Pacífico. Em consequência desta ação, os Estados Unidos e a Inglaterra a 8 de Dezembro declararam guerra ao Império do Japão. Como este era aliado da Alemanha²², esta declarou guerra aos Estados Unidos a 11 de Dezembro. A guerra, começada como europeia a 1 de Setembro de 1939, tornou-se mundial.

²² O Império do Japão tinha assinado com a Alemanha nazi um tratado a 25 de Novembro de 1936 contra a *Internacional Comunista*, chamado *Pacto Anti-Comintern*, ao qual a Itália se juntou em 1937. Este pacto foi renovado a 17 de Setembro de 1940, assinado pelos mesmos três países, com o nome de *Pacto Tripartido*. Era uma aliança militar defensiva, e que identificava os Estados Unidos como o principal perigo para estas potências.