

Revisitando as matrizes a partir de Cayley 1858

Revisiting matrices from Cayley's 1858 Work

Yasmin Cristina Motta Fernandes¹  

Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

Maria Luisa Mendonça Pitassi²  

Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

Magno Luiz Ferreira³  

Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

RESUMO

Nos cursos de licenciaturas atuais observa-se um déficit ao trabalhar o conteúdo de matriz, apesar de haver uma imensa gama de aplicações, os conteúdos da teoria se tornaram algo postergado dentro da disciplina de álgebra linear. O presente artigo apresenta as definições de matriz a partir das abordagens de seu conceito inicial, adição de matrizes, multiplicação de matriz por escalar e multiplicação de matriz por matriz, desenvolvidas pelo matemático britânico Arthur Cayley em seu artigo *A Memoir on the Theory of Matrices* publicado em 1858, que se consagra como umas das primeiras publicações que investigam a teoria das matrizes como a conhecemos atualmente. Foi realizada a contextualização de suas definições utilizando a comparação com o conteúdo presente em um dos livros didáticos atuais de álgebra linear pertencente a grade curricular do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro do campus de Volta Redonda. O estudo mostrou que as matrizes no trabalho de Cayley estavam associadas ao sistema de equações lineares. Além disso, pode-se destacar muitos aspectos interessantes que podem ser úteis no ensino de álgebra linear, propiciando um ensino mais profundo e interligado da matemática. O trabalho conclui que a história da matemática pode ajudar na deficiência do ensino de matrizes.

Palavras-chave: Matriz; Cayley; História da Matemática.

ABSTRACT

In current undergraduate courses, there is a noticeable gap in the teaching of matrix-related content. Despite its wide range of applications, the theoretical foundations of matrices are often overlooked within linear algebra curricula. This article revisits the foundational definitions of matrices, including matrix addition, scalar multiplication, and matrix multiplication, as originally formulated by the British mathematician Arthur Cayley in his 1858 paper *A Memoir on the Theory of Matrices*. This work is regarded as one of the earliest to explore matrix theory in a form recognizable today. These definitions were contextualized by comparing them to the content found in a contemporary linear algebra textbook used in the mathematics undergraduate program at the Instituto Federal do Rio de Janeiro, Volta Redonda campus. The study revealed that matrices in Cayley's work were closely associated with systems of linear equations. Furthermore, several noteworthy aspects emerge that could be useful for teaching linear algebra, fostering a deeper and more interconnected understanding of mathematics. The study concludes that incorporating the history of mathematics can help address shortcomings in the teaching of matrices.

Keywords: Matrix; Cayley; History of Mathematics.

¹ Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: mottafernandesyc@gmail.com.

² Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: malumendoncapitassi@gmail.com.

³ Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: magno.ferreira@ifrj.edu.br.

INTRODUÇÃO

Matriz é uma parte da álgebra linear que, apesar de sua importância, tem sido deixada de lado no ensino básico e superior. Quanto a sua importância pode-se destacar as suas aplicações em áreas como engenharia, computação e física. Destacam-se as seguintes aplicações concretas: o processamento de imagens ou na análise de dados e otimização. E agora com a inserção das “inteligências artificiais” a importância das matrizes em métodos de mineração de dados e reconhecimento de padrões, destacando a relevância dessa ferramenta no aprendizado de máquina e na análise de grandes volumes de dados. Apesar destas aplicações, o relatório da Sociedade Brasileira de Matemática aponta que, no ensino médio brasileiro, o conteúdo de matrizes é frequentemente superficial ou omitido. Muitos professores não dispõem de formação adequada para ensinar o tema de maneira significativa e prática, resultando em uma abordagem que não explora todo o potencial das matrizes (SBEM, 2013, p. 29). Já no ensino superior, a apresentação das matrizes muitas vezes se limita a aspectos técnicos e operacionais, sem aprofundar as implicações práticas ou interdisciplinares.

Com isso, falar sobre o ensino de matrizes para futuros professores de matemática se torna cada vez mais relevante. E para isso, a história da matemática pode nos dar muitos problemas interessantes a investigar e que pode trazer um ensino mais significativo das matrizes. Aline Bernardes e Tatiana Roque, por exemplo, investigam a noção matemática de matriz a partir das práticas matemáticas de James Joseph Sylvester e Arthur Cayley, dois matemáticos britânicos do século XIX, da década de 1850 (Bernardes; Roque, 2016, p. 2). Destaca-se que a noção de matriz aparece após as de determinantes, sistemas lineares e formas quadráticas.

Frédéric Brechenmacher ao estudar as matrizes num período amplo (1850–1930) identificou as principais formas de representação e de práticas (Brechenmacher, 2006, p. 2). E aponta para a década de 1850 como fundamental para as práticas britânicas iniciadas por Sylvester e Cayley, em concordância com o que diz Aline Bernardes e Tatiana Roque. O primeiro trabalho a usar uma noção de matriz naquele período foi o artigo de Sylvester de 1850 “Additions to the articles,” On a New Class of Theorems,” and” On Pascal’s Theorem”. Ele afirma:

Para esse propósito, devemos começar, não com um quadrado, mas com uma disposição retangular de termos que consistam, suponhamos, de m linhas e n colunas. Isso, por si só, não representará um determinante, mas é, por assim dizer, uma Matriz a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes ao fixar um número p , e selecionar à vontade p linhas e p colunas, cujos quadrados correspondentes podem ser chamados de determinantes da ordem p ⁴ (Sylvester, 1850, p. 367).

Ou seja, Sylvester trata a matriz como um arranjo de termos a partir do qual podem-se criar diferentes sistemas de determinantes, ao selecionar uma dada quantidade de linhas e colunas. Cayley fala de matriz inicialmente no artigo de título “Remarques sur la notation des fonctions algébriques”, de 1855. Ele apresenta da seguinte maneira:

⁴ For this purpose, we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of m lines and n columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p , and selecting at will p lines and p columns, the squares corresponding to which may be termed determinants of the p th order.

Eu uso a notação

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \alpha'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

para representar o que chamo de matriz; ou seja, um sistema de quantidades dispostas em forma de quadrado, mas completamente independentes entre si (não estou falando aqui de matrizes retangulares). Esta notação me parece muito conveniente para a teoria das equações lineares; por exemplo, eu escrevo

$$(\xi, \eta, \zeta) = \left(\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \alpha'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \right) (x, y, z, \dots)$$

para representar o sistema de equações

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \dots, \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \dots \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

(Cayley, 1855, p. 282)

Pode-se perceber que apesar das diferenças entre as noções de Sylvester e Cayley, ambos partem de um arranjo de termos com a finalidade de facilitar o trabalho matemático, seja com determinantes no modo de Sylvester, seja com sistemas lineares no modo de Cayley. As matrizes podem ser estudadas a partir de uma grande variedade de práticas, conforme apresentou Brechenmacher (2006, p. 3): “veremos todas as diferenças entre a noção original de James Joseph Sylvester (1851), que definia uma matriz como a “mãe” dos menores de um determinante, as leis do cálculo matricial de Arthur Cayley (1858), e também os métodos de decomposição matricial de Eduard Weyr (1885)”. Neste trabalho seguiremos na perspectiva de Cayley, dando conta da prática de trabalhar matrizes como sistema de equações lineares. O objetivo do artigo é apresentar algumas propriedades das matrizes presentes no texto “A Memoir on the Theory of Matrices de Cayley” que é considerado um dos textos fundadores da noção de matriz.

⁵ Je me sers de la notation

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \alpha'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

pour représenter ce que j'appelle une matrice; savoir un système de quantités rangées en forme de carré, mais d'ailleurs tout à fait indépendantes (je ne parle pas ici des matrices rectangulaires). Cette notation me paraît très commode pour la théorie des équations linéaires ; j'écris par exemple

$$(\xi, \eta, \zeta) = \left(\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \alpha'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \right) (x, y, z, \dots)$$

pour représenter le système des équations

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \dots, \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \dots \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Destaca-se a importância de rever um dos textos fundadores do conceito de matriz no contexto do ensino de álgebra linear, uma vez que pode suscitar um ensino mais rico de álgebra linear (De Matos; Nunes, 2019, p. 10). Para facilitar a utilização no ensino, optamos por fazer um comparativo com um dos livros adotado no curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ Volta Redonda. O livro escolhido foi o de Alfredo Steinbruch, *Álgebra Linear* (Steinbruch *et al*, 1987), pois é um dos livros mais utilizados na disciplina de álgebra linear. Assim, a releitura de Cayley apresentada neste artigo pode trazer muitos frutos para o ensino desta disciplina, destacando vários aspectos interessantes sobre o conceito de matriz.

REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico abordado explorou o artigo de Aline Bernardes, “História da noção de matriz: Uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas”, que apresenta uma narrativa sobre o desenvolvimento do que hoje se conhece como matriz, a partir de dois interesses distintos para seu uso. Este artigo buscou estabelecer um paralelo cronológico entre os acontecimentos históricos, destacando inicialmente o surgimento do conceito de determinantes nos estudos do matemático inglês Joseph Sylvester. A partir disso, Sylvester introduz as primeiras noções de matriz para problemas de natureza geométrica, especificamente para a classificação dos tipos de contato entre duas cônicas. Tais classificações são determinadas por propriedades de determinantes menores, representados em forma de uma tabela retangular, nomeada por Sylvester como matriz. Arthur Cayley foi quem adotou o conceito de matrizes como representação de sistemas e formas quadráticas. Ele definiu suas propriedades operacionais na relação entre matrizes e sistemas de equações lineares, suas propriedades multiplicativas a partir da composição de sistemas lineares ou transformações lineares, bem como a multiplicação de uma matriz por um escalar. Cayley interpreta a matriz de duas formas diferentes: ora como quantidades simples, ora como um sistema de números, com o objetivo de resolver problemas relacionados ao cálculo de potências e raízes de matrizes.

METODOLOGIA

Buscou-se seguir a abordagem de matrizes apresentada por Cayley em seu artigo de 1858, até chegar à definição de produto de matrizes. Para tornar essa apresentação mais clara, foi feita uma comparação com o livro de álgebra linear de Alfredo Steinbruch, publicado em 1987. O objetivo foi analisar a perspectiva inicial de Cayley sobre matrizes e compreender como certos aspectos foram modificados e adaptados para fins didáticos ao longo do tempo.

Os artigos “*Les matrices: formes de representation et pratiques operatoires*” de Frederic Brechenmacher e “História da noção de matriz: Uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas” de Aline Bernardes e Tatiana Roque foram utilizados para embasar essa análise, destacando o desenvolvimento das matrizes desde suas propriedades iniciais até suas aplicações didáticas.

Foram seguidas as seguintes etapas principais: levantamento e leitura dos textos originais de Cayley, Steinbruch e dos artigos complementares, com ênfase nas definições e métodos apresentados em cada obra; análise comparativa, na qual os textos foram confrontados para observar as diferenças e similaridades nas abordagens, visando compreender como o conceito de matrizes foi modificado e adaptado para o ensino; e discussão dos achados, refletindo sobre a evolução do conceito desde seu contexto original até suas adaptações didáticas, destacando as transformações necessárias para tornar o conteúdo acessível ao estudante contemporâneo.

ARTIGO DE 1858

Em seu artigo de 1858 sobre matrizes, já mencionado anteriormente, Arthur Cayley introduz o conceito de matriz, considerando tanto matrizes quadradas quanto retangulares. Ele destaca, no entanto, que seus estudos demonstram que trabalhar com matrizes quadradas oferece resultados mais significativos. O texto não se limita apenas a construção do cálculo simbólico que será desenvolvido nesse trabalho, Cayley também anuncia a criação do “Teorema notável” (atualmente conhecido como Teorema de Cayley-Hamilton) que enuncia que qualquer matriz quadrada A satisfaz sua equação característica. Ao substituímos o polinômio característico $A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ pela matriz o resultado será a matriz nula. Tal teorema não definiu diretamente as operações com matrizes, porém resultou em implicações de conceitos como os de funções polinomiais e exponencial de matriz que fazem parte do conteúdo de produto de matrizes, por exemplo. Apesar da relevância do teorema ele não é citado ou não há destaque nos livros didáticos dos cursos de licenciatura em álgebra linear.

Uma vez que a perspectiva do pesquisador sobre as matrizes divide-se entre analisá-las como quantidade simples e como um sistema de números ele afirma que as operações com matrizes de mesma ordem são realizadas de forma semelhante ao cálculo algébrico, comportando-se como quantidades singulares com operações como adição e multiplicação. Em relação à operação de multiplicação Cayley ressalta que as matrizes operadas diferem por não serem comutativas.

A notação, no artigo de 1858, utiliza-se de letras minúsculas para representar os elementos das matrizes, e de linhas sobre essas letras para representar a posição por sua quantidade.

Figura 1 – Matriz e Equações lineares em Cayley

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad ((a, b, c)x, y, z), (a', b', c')x, y, z, (a'', b'', c'')x, y, z)$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 475, 476)

Sua definição trabalha com arranjo de quantidades na forma de um quadrado. No lado esquerdo da figura 1, ele representa uma matriz extraída de um conjunto de equações de um sistema linear. É possível observar que os coeficientes das equações lineares são os elementos componentes da matriz. No lado direito, encontra-se a representação das equações lineares na notação utilizada por Cayley, que em nossa notação seria: $ax + by + cz = 0$, $a'x + b'y + c'z = 0$ e $a''x + b''y + c''z = 0$, ou seja, não utilizamos essa antiga notação com uso de parênteses.

Figura 2 - Sistemas de Equações na forma matricial e Sistema Linear

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned} \quad (X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} x, y, z$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 475, 476)

Nota-se, no lado esquerdo da figura 2, que os componentes da matriz são os coeficientes que multiplicam as coordenadas operadas nas equações lineares descritas no lado direito, tal organização objetiva facilitar as operações com os sistemas.

Ao cotejarmos a abordagem utilizada no artigo de Cayley com a presente no livro didático atual de Alfredo Steinbruch, notamos inicialmente uma divergência na definição de matrizes. Para Cayley a explicação é mais concreta “A noção de tal matriz surge naturalmente de uma notação abreviada para um conjunto de equações lineares” (Cayley, 1858, p. 475). Já em Steinbruch, a descrição de matrizes se limita a destacar como se define matrizes de determinada ordem, citando “Chama-se matriz de ordem por um quadro de $m \times n$ elementos (números, polinômios, funções etc.) dispostos em linhas e colunas” (Steinbruch *et al.*, 1987, p. 369).

Observamos, na figura 3 abaixo, a representação de matrizes em Steinbruch que é apresentada em uma forma padronizada diferente. Por meio da notação, podemos constatar que letras maiúsculas são utilizadas para denotar a matriz, enquanto seus elementos são representados por letras minúsculas com subscritos que indicam sua posição. As diferenças, no entanto, não se limitam apenas à forma de notação. Em Steinbruch, observamos diretamente como os termos ficam organizados na matriz e sua representação em forma de equação linear. Já em Cayley, o detalhamento se concentra nos pontos de expansão do sistema, o que nos oferece uma percepção completa do arranjo dos termos. Nesse caso, a representação das equações utiliza X, Y, Z, que são igualadas à matriz que multiplica as coordenadas x, y, z. Isso permite um entendimento mais preciso de como as partes foram estruturadas.

Figura 3 - Matriz e equação linear em notação atual

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$$

Fonte: (Steinbruch *et al.*, 1987, p. 369)

Diante dessa percepção trazida pelo artigo de 1858, em que se destaca a disposição de cada termo, Cayley explica a caracterização da matriz nula como implicação de que, se todos os termos forem zero, as quantidades X, Y, Z também serão zero. Isso nos mostra, ainda que de forma singela, que os componentes de uma matriz são os mesmos da equação linear utilizada: se os elementos da matriz são zerados, a equação também será zerada. Em Steinbruch, o mesmo conteúdo é descrito com uma única frase “Uma matriz zero é a matriz cujos elementos a_{ij} são todos nulos.” (Steinbruch *et al.*, 1987, p. 374). No entanto, essa descrição não evidencia explicitamente a implicação gerada pelo fato de os elementos serem nulos. A forma de notação difere apenas pela ausência de parênteses na primeira linha. Além disso, a nomenclatura também sofreu alteração, sendo nomeada por Steinbruch como “matriz zero” e não “matriz nula”, como era chamada por Cayley.

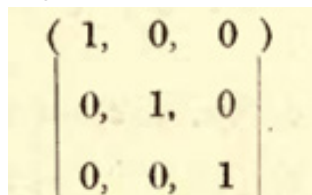
Figura 4 - Matriz nula em Cayley 1858 e em notação atual.

$$\left(\begin{array}{ccc} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{array} \right) \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 477) (Steinbruch *et al.*, 1987, p. 374)

Além disso, o texto de Cayley enfatiza a noção de matriz unitária para casos em que há a existência de matrizes conversíveis (ele chama assim as operações comutativas) com uma outra matriz. Ele salienta que, ao calcular uma função racional ou integral de uma matriz, o grau é reduzido pela expressão “ $n-1$ ”, sendo “ n ” o grau da matriz. Obtém-se a descrição de matriz unitária, como descrita por Cayley, quando os valores de (X, Y, Z) são identicamente iguais a (x, y, z) e suas as diagonais principais são iguais a um. O que Cayley chamou de matriz “unitária” é hoje conhecida como matriz identidade ou matriz unidade.

Figura 5 - Matriz “unitária”



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 477)

A atual matriz unidade é apresentada no livro didático aqui trabalhado como uma matriz de qualquer ordem que tem os elementos $a_{ij} = 1$ para $i = j$. Sendo essa uma informação que omite a lógica de Cayley aplicada para a formação da matriz unidade.

Figura 6 - Matriz unidade em notação atual

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 373)

Matrizes são descritas no artigo de 1858 como uma quantidade única podendo ser calculadas como adição ou subtração, em que operam de forma similar ao cálculo algébrico, ao operar matrizes estamos operando automaticamente sistemas, e não se verifica alteração na matriz. Cada elemento é operado com seu correspondente.

A regra de adição proposta por Cayley define que a soma de matrizes resulta da soma dos coeficientes correspondentes de dois sistemas lineares, onde esses coeficientes estão relacionados pela posição que ocupam em relação às variáveis x , y e z . Essa definição pode ser utilizada para a subtração de matrizes, Cayley menciona isso, mas não desenvolve. Quando o matemático trata da adição ele afirma que essa operação é “conversível”, termo que ele utiliza que equivale atualmente a propriedade comutativa. Além disso, ele mostra algumas propriedades como: não há alteração quando adicionada a matriz nula, outra consequência é que a soma de matrizes com elementos iguais em valores absolutos e sinais opostos resulta na matriz nula. Como apresentado na figura 7, a soma de matrizes pode ser calculada em forma de sistema ou na forma algébrica, dispondo os elementos a serem operados de forma adjacente.

Figura 7 - Soma de matrizes

$$\begin{aligned}
 (X, Y, Z) &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{matrix} x, y, z \\ \\ \end{matrix}, (X', Y', Z') = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{matrix} x, y, z \\ \\ \end{matrix} \\
 (X + X', Y + Y', Z + Z') &= \begin{pmatrix} a + \alpha & b + \beta & c + \gamma \\ a' + \alpha' & b' + \beta' & c' + \gamma' \\ a'' + \alpha'' & b'' + \beta'' & c'' + \gamma'' \end{pmatrix} \begin{matrix} x, y, z \\ \\ \end{matrix} \\
 \begin{pmatrix} a + \alpha & b + \beta & c + \gamma \\ a' + \alpha' & b' + \beta' & c' + \gamma' \\ a'' + \alpha'' & b'' + \beta'' & c'' + \gamma'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 477)

Em Steinbruch a esquematização da soma é diretamente representada pela notação como vemos na figura 8, não há uma explicação tal como a de Cayley sobre o que é o cálculo de soma para matrizes, quais combinações de elementos devem ser somadas ou explicação da forma de se esquematizar o cálculo.

Figura 8 - Soma de matrizes em notação atual

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 474)

As motivações por trás de cada notação são diferentes. Cayley dedica atenção minuciosa à construção do sistema de soma, destacando as equações lineares e o agrupamento de seus coeficientes. Atualmente, a notação parte de uma abordagem que prioriza a esquematização e o cálculo, sem se preocupar em explicar a origem da soma das matrizes, que poderia estar ligada às operações com sistemas lineares.

Além de descrever a representação da soma, Cayley explora propriedades que hoje são bem conhecidas, como o fato de que a adição de uma matriz com a matriz nula resulta na própria matriz original. Ele também aborda a comutatividade e a associatividade, propriedades fundamentais da soma de matrizes, que igualmente aparecem definidas em Steinbruch. No entanto, Cayley não utiliza uma notação simplificada, como a que encontramos na figura 9.

Figura 9 - Termo da matriz soma

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 375)

Adentrando no conteúdo de multiplicação de matrizes, Cayley salienta que ocorre de forma comutativa quando multiplicamos a matriz por uma única quantidade, denominado atualmente como multiplicação por escalar. Exemplificado por Cayley multiplica se o sistema por uma quantidade m . Independente de multiplicarmos por m antes ou depois do sistema o resultado é o mesmo,

temos então uma operação comutativa. Considera se também uma operação distributiva pela expressão $m(L+M)=mL+mM$ e $m(L+M)=mL+mM$. A seguir a figura que representa essa multiplicação.

Figura 10 - Multiplicação de matrizes por um escalar

$$(X, Y, Z) = m \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad \xi(x, y, z) = \begin{pmatrix} ma & mb & mc \\ ma' & mb' & mc' \\ ma'' & mb'' & mc'' \end{pmatrix}$$

$$m \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma & mb & mc \\ ma' & mb' & mc' \\ ma'' & mb'' & mc'' \end{pmatrix}$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 152)

Na obra de Steinbruch, o ensino de multiplicação de matrizes por escalar se distancia da manipulação de equações lineares junto a matriz. Ele não trabalha com a associação ao sistema, apresentando apenas como exemplo. Assim como Cayley, Steinbruch também exhibe as propriedades de multiplicação por escalar, porém através de definição.

Figura 11 - Definição de multiplicação por um escalar em notação atual

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 375)

Figura 12 - Exemplo de multiplicação por um escalar

$$5 \times \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 4 & 5 \times (-2) & 5 \times 1 \\ 5 \times 3 & 5 \times (-5) & 5 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 5 \\ 15 & -25 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 375)

Figura 13 - Propriedades em notação atual da multiplicação por escalar

- I) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- II) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- III) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- IV) $1A = A$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 376)

A multiplicação de matriz por matriz é denominada por Cayley como composição de matriz. Observa se a composição das transformações lineares aplicadas ao sistema. O resultado da multiplicação de matrizes é expresso pela transformação linear dos valores de x, y, z em função da composição dos coeficientes em função de ξ, η, ζ .

Figura 14 - Multiplicação de matrizes em Cayley 1858

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \begin{matrix} \xi, \eta, \zeta \end{matrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma' \\ \alpha'', \beta'', \gamma'' \end{matrix} \begin{matrix} \xi, \eta, \zeta \end{matrix}$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 479)

Temos como elementos resultante da composição:

Figura 15 - Processo de multiplicação

$$\begin{pmatrix} (a, b, c \xi \alpha, \alpha'), (a, b, c \xi \beta, \beta'), (a, b, c \xi \gamma, \gamma') \\ (a', b', c' \xi \alpha, \alpha'), (a', b', c' \xi \beta, \beta'), (a', b', c' \xi \gamma, \gamma') \\ (a'', b'', c'' \xi \alpha, \alpha'), (a'', b'', c'' \xi \beta, \beta'), (a'', b'', c'' \xi \gamma, \gamma') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b, c \xi \alpha, \beta, \gamma \\ a', b', c' \xi \alpha, \beta, \gamma \\ a'', b'', c'' \xi \alpha, \beta, \gamma \end{pmatrix}$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 479)

Onde podemos observar que os elementos na primeira matriz são integrados horizontalmente na linha, e os elementos da segunda matriz são integrados verticalmente na coluna.

Figura 16 - Organização do produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{matrix} (\alpha, \alpha', \alpha'') & (\beta, \beta', \beta'') & (\gamma, \gamma', \gamma'') \\ \text{''} & \text{''} & \text{''} \\ \text{''} & \text{''} & \text{''} \\ \text{''} & \text{''} & \text{''} \end{matrix}$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 479)

Como exemplo do caso atual, segue a conta de uma multiplicação de matrizes encontrada no livro de Alfredo Steinbruch (figura 17). O conteúdo de multiplicação de matriz por matriz é o único abordado de forma aprofundada por Steinbruch, no qual ele destaca as lógicas por traz da esquematização do cálculo, da disposição dos elementos e como operar.

Figura 17 - Multiplicação de matrizes em notação atual

Sejam as matrizes $A_{(1,4)}$ e $B_{(4,1)}$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 476)

O produto de AB é uma matriz $C(1,1) = [c(1,1)]$, logo $C(1,1)$ é soma dos produtos na ordem em que estão da matriz linha A com os elementos da matriz coluna B.

Figura 18 - Cálculo do produto

$$C_{11} = 4 \times 6 + 3 \times 4 + 2 \times 5 + 5 \times 3$$

$$C_{11} = 24 + 12 + 10 + 15$$

$$C_{11} = 61.$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 476)

Steinbruch apresenta uma organização do produto que ajuda ao estudante a entender o processo de multiplicação de matrizes na figura 19.

Figura 19 - Organização do produto

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 377)

Lembrando que Cayley (1858, p. 479) também apresenta uma organização do produto.

CONCLUSÃO

Para alcançar o objetivo inicial, analisamos o conceito de matriz a partir do texto de 1858 de Cayley, explorando a conceitualização, o modelo de notação e suas definições de soma e produto de matrizes, sob a perspectiva do desenvolvimento inicial da teoria das matrizes. Ficou evidente que, no trabalho de Cayley, as matrizes têm a função de facilitar o trabalho com sistemas lineares. Esse aspecto pode ser amplamente explorado nos cursos de álgebra linear atuais.

Traçamos um paralelo com a notação atual, utilizando o livro didático de Álgebra Linear do matemático Alfredo Steinbruch. Nele, observamos que o ensino de matrizes é apresentado de forma mecânica: os conteúdos abordados conduzem o estudante a aprender a montar cálculos e a operar, mas não destacam os conceitos aplicados nem a lógica subjacente. Isso limita o aluno a atuar apenas em contextos que exigem a aplicação de fórmulas, já que a abordagem do conteúdo não promove um ensino crítico ou reflexivo.

Por outro lado, ao resgataremos as contribuições de Cayley, encontramos explicações metódicas que preenchem lacunas no processo de ensino-aprendizagem. Esses detalhes atribuem significado ao objeto matemático trabalhado, além de situar as matrizes em um contexto de aplicações práticas no campo da álgebra linear.

Espera-se com esse estudo contribuir para um melhor ensino de álgebra linear com uma abordagem que leve em conta os aspectos históricos desta disciplina. A história da matemática pode revelar várias feições interessantes e até mesmo revolucionárias de uma disciplina, ajudando a tornar o ensino mais significativo. Vários desses aspectos por vezes se perdem ao longo do tempo, quando nos distanciamos do período em que foram desenvolvidos. Cabe a nós resgatarmos-los, para que o

diálogo com os conhecimentos passados possa ocorrer de forma a enriquecer e auxiliar nas aplicações matemáticas atuais.

REFERÊNCIAS

BERNARDES, A.; ROQUE, T. História da noção de matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 16, n. 31, p. 01-19, 2016.

BRECHENMACHER, F. Les matrices: formes de représentations et pratiques opératoires (1850-1930). **Site expert des Ecoles Normales Supérieures.**, p. <http://www.dma.ens.fr/culturemath/>, 2006.

CAYLEY, A. Remarques sur la notation des fonctions algébriques. **Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)**, v. 50, p. 282-285, 1855.

CAYLEY, A. A memoir on the theory of matrices. **Philosophical transactions of the Royal society of London**, n. 148, p. 17-37, 1858.

DE MATOS, F. C.; NUNES, J. M. V. Práticas com matrizes a partir do estudo histórico epistemológico. **REMATEC**, v. 14, n. 32, p. 09-28, 2019.

SBEM. A formação do professor de Matemática no curso de Licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBM/SBEM. **Boletim SBEM**. Brasília: n.21,2013. 42 p. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim21.pdf>. Acessado em: set 2024.