

Determinantes a partir de livros-textos do século XIX

Determinants from 19th-century textbooks

Maria Luisa Mendonça Pitassi¹  

Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

Caio Emanuel Curty Lima²  

Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

Leandro Silva Dias³  

Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

RESUMO

O trabalho a seguir apresenta resultados de um projeto de iniciação científica que teve como objetivo investigar o desenvolvimento de aspectos da álgebra linear vistos no século XIX. Através do que conhecemos sobre determinante atualmente, pudemos encontrar e analisar algumas abordagens que são utilizadas ao trabalhar o conceito de determinantes no século XIX. Com o foco nas abordagens e definições trabalhadas pelos matemáticos do período, partimos da definição apresentada por George Salmon em seu livro-texto de 1859 *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*. A partir disso, pudemos encontrar outros livros da mesma época, dentro do período escolhido de 1856 a 1866. Como critério de seleção livros que lidaram com os determinantes. A fim de verificar como o conceito estava consolidado na matemática britânica no século XIX, analisamos alguns trabalhos, com interesse no desenvolvimento e nas utilizações de determinantes e as intenções interligadas ao seu uso. Foram identificadas características nos livros-textos que, percebeu-se o destaque de aspectos geométricos e algébricos. Além disso, apresentamos o desenvolvimento de exemplos e abordagens históricas, com objetivo de entender como o objeto matemático era utilizado no passado. A partir disso, entendemos como as utilizações dos determinantes partindo de ideias geométricas podem ampliar a percepção dos conceitos de álgebra linear ligados a este objeto.

Palavras-chave: Determinante; História da Matemática; Álgebra Linear.

ABSTRACT

The following paper presents the results of a scientific initiation project that aimed to investigate the development of aspects of linear algebra seen in the 19th century. Through what we know about determinants today, we were able to find and analyze some of the approaches used when working with the concept of determinants in the 19th century. Focusing on the approaches and definitions worked on by mathematicians of the period, we started with the definition presented by George Salmon in his 1859 textbook *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*. From there, we were able to find other books from the same century, within the chosen period of 1856 to 1866. The selection criteria were books that dealt with determinants. In order to verify how the concept was consolidated in British mathematics in the 19th century, we analyzed some works, with an interest in the development and uses of determinants and the intentions linked to their use. We identified characteristics in the textbooks that emphasized geometric and algebraic aspects. In addition, we presented the development of examples and historical approaches, with the aim of understanding how the mathematical object was used in the past. From this, we understand how the use of determinants based on geometric ideas can broaden the perception of linear algebra concepts linked to this object.

Keywords: Determinant; History of Mathematics; Linear Algebra.

¹ Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: malumendoncapitassi@gmail.com.

² Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: caioecl13@gmail.com.

³ Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: leandro.dias@ifrj.edu.br.

INTRODUÇÃO

Este trabalho é parte de um projeto de pesquisa cujo objetivo foi investigar o desenvolvimento da álgebra linear no século XIX. Partindo da definição de determinantes presente na 1ª edição da obra *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra* (Salmon, 1859), buscamos outros livros, que lidam com o mesmo tema, entre 1856 e 1866, os quais foram divulgados na seção *Notices Respecting New Books* do Periódico *Philosophical Magazine*. Neste período identificamos quatro obras que lidam com o conceito de determinante, conforme o Quadro 1 adiante.

Quadro 1 – Obras selecionadas

TÍTULO	AUTOR	ANO
Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra	George Salmon (1819 – 1904)	1859
An Elementary Treatise on the Theory of Equations, with a Collection of Examples	Isaac Todhunter (1820 – 1884)	1861
Elementary Treatise on Trilinear Coordinates, the Method of Reciprocal Polars, and the Theory of Projections	Norman Macleod Ferrers (1829 – 1903)	1861
Trilinear Coordinates and other Methods of Modern Analytical Geometry of Two Dimensions	William Allen Whitworth (1840 – 1905)	1866

Fonte: Elaborada pelos autores

O objetivo deste trabalho foi identificar as principais características em livros-textos que lidaram com determinantes na segunda metade do século XIX. Trata-se de um objeto central para evolução da matemática, tanto atualmente quanto no período escolhido. Como Eberhard Knobloch (2002) aponta, este tema fez parte de investigações em teoria dos números, equações lineares, eliminação e permutação, além de geometria. Atualmente é muito utilizado em cálculos de autovalores e autovetores.

Neste artigo, apresentamos os determinantes no século XIX. Inicialmente trabalhamos como o tema aparece no livro de Salmon de 1859, possuindo uma abordagem ligada as transformações. Em seguida o livro de Ferrers de 1861, que trabalha com determinantes associados a uma abordagem geométrica. Também possuindo uma abordagem geométrica o livro-texto trabalhado em seguida é de Whitworth de 1866. Focando seu trabalho em equações o último livro abordado é de Todhunter, de 1861.

REFERENCIAL TEÓRICO

Trabalhando o conceito de determinante, Knobloch (2002) faz um recorte histórico parando no século XIX. Inicia com uma parte mais histórica de seu desenvolvimento, traz um enfoque em Leibniz, aborda as definições do século XVIII, e no século XIX traz nomes como o de Cayley, que publica trabalhos por volta da metade do século e foi o primeiro a delimitar o conjunto de elementos por duas linhas verticais, e posteriormente ajuda na fundação de teorias, como as das matrizes e invariantes.

Victor Katz e Karen Parshall (2014) em seu livro que estuda a álgebra da antiguidade ao século XX tratam do desenvolvimento de vários campos ou áreas da matemática. O determinante aparece muitas vezes relacionado aos temas: resolução de sistemas lineares, transformações lineares,

relacionado as matrizes e teoria dos invariantes. Eles afirmam que determinantes foi a maior área de pesquisas no século XIX, citando vários matemáticos, dentre os quais figuram Sylvester e Cayley representando os britânicos.

Assim como no artigo de Aline Bernardes e Tatiana Roque, exploraremos exemplos partindo de um interesse principal, no caso deste trabalho os determinantes, e no artigo citado o trabalho de contato de cônicas de Sylvester. As autoras apresentam um exemplo, trazendo os cálculos utilizados e as representações geométricas. Somos apresentados a uma clara utilização geométrica dos determinantes, onde temos um determinante constituído de derivadas de segunda ordem que apresenta as equações das retas que ligam as intersecções da cônicas (Bernades; Aline, 2016).

METODOLOGIA

Partindo do livro-texto de George Salmon (1859), buscamos outros livros, que lidam com o mesmo tema, entre 1856 e 1866, os quais foram divulgados na seção *Notices Respecting New Books* do Periódico *Philosophical Magazine*.

Ao estudar os determinantes nos livros-textos selecionados tomamos em consideração o contexto que eles se inserem, conforme indica o professor Gert Schubring (2022). Nesse trabalho o contexto se refere a um conjunto de gestos, procedimentos e práticas codificadas concretas que são atestadas pelas fontes escritas. Então, analisamos os livros-textos a partir dos seus próprios procedimentos e conceitos.

Fazemos uma breve análise dos livros-textos seguindo a segunda dimensão apontado por Schubring (2022), que consiste em encontrar mudanças correspondentes em outros livros didáticos pertencentes à mesma obra, estudando as partes que lidam com campos conceituais relacionados. Neste trabalho, o determinante foi o conceito relacionado nas obras selecionadas.

DETERMINANTE NO SÉCULO XIX

As principais definições encontradas durante a pesquisa tratam os determinantes a partir dos assuntos: sistemas de equações lineares, teoria de eliminação e geometria. Analisamos os quatro livros selecionados verificando como aparece o determinante, sua utilidade, exemplos e a abordagem adotada. Percebeu-se que os problemas geométricos estavam muito presentes nas discussões que utilizavam os determinantes. A seguir serão trabalhados exemplos de cada uma das obras, de forma direta ou indireta.

Determinantes no livro de Salmon

Lessons introductory to the modern high algebra (1859), livro-texto dividido em 17 lições aborda o conceito da álgebra moderna (nome atribuído às práticas com polinômios homogêneos investigados a partir de transformações lineares).

Em sua primeira lição, Salmon traz noções preliminares de um determinante, definindo-o através das equações homogêneas. Possuindo n equações é possível encontrar o determinante fazendo a eliminação das variáveis e o resultado é baseado nos coeficientes. Sendo os coeficientes letras do alfabeto seguidas de um índice, que representa a equação, como: $a_1, b_1, c_1, \dots$, para a primeira equação; $a_2, b_2, c_2, \dots$, para a segunda equação; assim por diante. O determinante segue essa ordem,

colocando em cada linha os coeficientes de uma equação (Salmon, 1859). Para expressar o determinante, Salmon também utiliza sua diagonal principal entre parênteses, sendo uma representação mais sintética. Por exemplo, dadas as equações $a_1x + b_1y = 0$ e $a_2x + b_2y = 0$, o determinante associado é $(a_1 b_2)$.

Os exemplos selecionados apresentam um cunho preparatório em relação ao principal tema do livro, as transformações lineares onde pode-se perceber mais diretamente a discussão geométrica.

Salmon (1859) apresenta uma generalização do cálculo de um determinante quando o número de colunas é maior que o número de linhas, o qual representa uma coleção de outros determinantes. O método apresenta um modo de equiparar equações como forma de eliminar variáveis. No texto, elimina-se x e y alternadamente, e em seguida escreve-se x e y em função de z , encontrando-se igualdades cujo valores substituídos nas duas equações originais, dão as identidades já escritas.

A seguir será trabalhado um exemplo com base nas explicações do artigo.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Separando em 3 determinantes, eliminando uma coluna de cada vez, teremos

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2 \times 2 - 1 \times 1) = 3$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = (a_3 b_1) = (a_3 b_1 - a_1 b_3) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2 - 1 \times 2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 b_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1 - 2 \times 2) = -3$$

Esses três determinantes estão conectados pelas relações:

$$a_1(a_2 b_3) + a_2(a_3 b_1) + a_3(a_1 b_2) = 0 \text{ e } b_1(a_2 b_3) + b_2(a_3 b_1) + b_3(a_1 b_2) = 0, \text{ e no exemplo numérico } 1(2 \times 2 - 1 \times 1) + 2(1 \times 1 - 1 \times 2) + 1(1 \times 1 - 2 \times 2) = 3 + 0 - 3 = 0 \text{ e } 2(2 \times 2 - 1 \times 1) + 1(1 \times 1 - 1 \times 2) + 0(1 \times 1 - 2 \times 2) = 6 + 0 - 6 = 0.$$

Agora trabalhando com as equações $a_1x + a_2y + a_3z = 0$ e $b_1x + b_2y + b_3z = 0$ ($x + 2y + z = 0$ e $2x + y + 2z = 0$), eliminando alternadamente x e y teremos duas equações correspondentes em função de z .

Multiplicando a primeira por (b_2) e a segunda por $(-a_2)$, eliminaremos y , e conseguiremos escrever x em função de z . Teremos então a relação $(a_1 b_2)x = (a_2 b_3)z$, analogamente o exemplo numérico traz a relação $-3x = 3z$.

Multiplicando a primeira por $(-b_1)$ a segunda por (a_1) eliminaremos x , e conseguiremos escrever y em função de z . Teremos então a relação $(a_1 b_2)y = (a_3 b_1)z$, analogamente o exemplo numérico traz a relação $-3y = 0z$.

Já em sua terceira lição, Salmon (1859) trabalha menores e recíprocos de um determinante qualquer. Definido pela eliminação de uma linha e uma coluna em relação a um elemento, o determinante formado pelos elementos restantes é o chamado menor, e o elemento relacionado não aparece no menor. Nesta lição no art. 25, Salmon (1859) demonstra que o recíproco de um determinado determinante é o determinante cujos constituintes são os menores correspondentes a cada

constituente daquele. Com isso mostra a relação entre um determinante de ordem n e seu recíproco: recíproco é o determinante inicial elevado a potência $n-1$.

Adiante será trabalho um exemplo com base nas explicações do artigo, que utiliza um determinante de ordem 3 para mostrar os cálculos. Partindo de três equações homogêneas, $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ e $a_3x + b_3y + c_3z = 0$, criamos o exemplo $3x + 2y + z = 0$, $2x + y + 2z = 0$ e $-x + 2y - z = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3) = \Delta \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Através de um determinante calcularemos os menores em relação a todos os elementos, e em seguida montaremos o determinante com os menores.

$$a_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3) = A_1 \quad 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (1 \times (-1) - 2 \times 2) = -5$$

$$b_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} c_3 & a_3 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} = (c_3a_1) = B_2 \quad 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = ((-1) \times 3 - (-1) \times 1) = -2$$

$$c_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2) = C_3 \quad -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 \times 1 - 2 \times 2) = -1$$

Temos descrito anteriormente os menores em relação aos elementos da diagonal principal do determinante inicial, e de forma análoga foram calculados os menores em relação aos demais elementos. Assim, podemos montar o recíproco do determinante, que seria o determinante dos menores.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = (A_1B_2C_3) = \Delta' \Rightarrow \begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -8 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 100$$

Agora multiplicando os determinantes ($\Delta \times \Delta'$) teremos o seguinte determinante.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 \\ a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 \\ a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -8 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3(-5) + 2(0) + (5), & 2(-5) + (0) + 2(5), & -1(-5) + 2(0) + (-1)(-5) \\ 3(4) + 2(-2) + (-8), & 2(4) + (-2) + 2(-8), & -1(4) + 2(-2) + (-1)(-8) \\ 3(3) + 2(-4) + (-1), & 2(3) + (-4) + 2(-1), & -1(3) + 2(-4) + (-1)(-1) \end{vmatrix}$$

Destas relações, as relações da diagonal principal resultam no determinante original ($a_1b_2c_3$). Logo,

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3 \Rightarrow \Delta \times \Delta' = \Delta^3 \Rightarrow (a_1b_2c_3)(A_1B_2C_3) = (a_1b_2c_3)^3 \Rightarrow$$

$$(A_1 B_2 C_3) = (a_1 b_2 c_3)^2$$

$$\begin{vmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = (-10)^3 = (-10)(100) \Rightarrow 100 = (-10)^2$$

Ao longo do desenvolvimento das operações, foi respeitada a abordagem que o autor trabalhava. Percebe-se que se tratava de um cálculo detalhado e demorado, porém o determinante aparece com um significado matemático importante. Por vezes nos cursos de álgebra linear o estudante nunca é exposto a uma abordagem significativa dos determinantes, o que problemas como esse poderiam ajudar, dando significado ao conteúdo. Ou seja, apresentando-o de uma forma mais didática. O que para Salmon (1859) era importante.

Em seguida, será apresentada uma das abordagens para determinantes de Ferrers (1861).

Determinantes no livro de Ferrers

O livro de N. M. Ferrers, *An Elementary Treatise on Trilinear Coordinates*, se preocupa em trabalhar os conceitos considerados como *Geometria Moderna* em sua época, especificamente com coordenadas trilineares no plano cartesiano. A fim de contexto, coordenadas trilineares são, basicamente, um tipo de coordenada homogênea onde a posição de um ponto num plano é determinada pela razão de suas distâncias de três retas dadas neste plano, com elas não passando pelo mesmo ponto.

Em seu livro, Ferrers (1861) e preocupa em seguir uma construção de conceitos até chegar no tópico principal de sua obra. Ele parte da definição inicial do tema, passa por conceitos importantes como, por exemplo, a conceituação de equações homogêneas de segundo grau, um capítulo específico para trabalhar o uso de determinantes para, apenas depois de construir uma base, chegar no seu objetivo.

Ferrers (1861) utiliza os determinantes para aplicações geométricas. No capítulo do livro sobre cônicas, podemos observar diversos exemplos da sua utilização.

A equação geral de segundo grau dada pela forma $u\alpha^2 + v\beta^2 + w\gamma^2 + 2u'\beta\gamma + 2v'\gamma\alpha + 2w'\alpha\beta = 0$. Ou de forma abreviada, $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Que ele afirma representar uma seção cônica (Ferrers, 1861). Para achar o ponto em que uma reta traçada interceptando um ponto da cônica toca novamente um outro ponto da cônica, ou seja, uma secante, Ferrers (1861) utiliza de diversos cálculos para mostrar que as razões das coordenadas serão proporcionais, além de definir o conceito de S (utilizado na maioria dos cálculos) e, com isto em mente, o autor segue explicando os conceitos de reta tangente em cônicas. Os dois conceitos são de suma importância para continuar a explicação sobre cônicas pois, tanto as operações, quanto a parte geométrica, dependem desse entendimento.

Isso posto, seguimos com as primeiras aparições dos determinantes nas aplicações em cônicas. Para encontrar a condição para que uma reta dada possa tocar a cônica,

Seja a equação da reta: $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ e (f, g, h) as coordenadas desse ponto de contato; então, comparando esse com a equação da tangente citada anteriormente no texto, dá-se:

$$\frac{uf + w'g + v'h}{l} = \frac{w'f + vg + u'h}{m} = \frac{v'f + u'g + wh}{n}$$

representando cada uma dessas grandezas equivalentes, o que nos leva a encontrar três relações a seguir $uf+w'g+v'h+lk=0$ (relação 1), $w'f+vg+u'h+mk=0$ (relação 2) e $v'f+u'g+wh+nk=0$ (relação 3).

Além disso, a partir do momento que (f, g, h) é um ponto na reta dada, temos uma quarta relação, $lf+mg+nk=0$ (relação 4).

Eliminando f, g, h, k entre (1), (2), (3), (4), temos:

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v', & l \\ w', & v, & u', & m \\ v', & u', & w, & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} \frac{d^2\phi}{d\alpha^2}, & \frac{d^2\phi}{d\alpha d\beta}, & \frac{d^2\phi}{d\alpha d\gamma}, & l \\ \frac{d^2\phi}{d\beta d\alpha}, & \frac{d^2\phi}{d\beta^2}, & \frac{d^2\phi}{d\beta d\gamma}, & m \\ \frac{d^2\phi}{d\gamma d\alpha}, & \frac{d^2\phi}{d\gamma d\beta}, & \frac{d^2\phi}{d\gamma^2}, & n \\ l, & m, & n, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Esta é a condição necessária para que a reta (l, m, n) toque na cônica $\phi(f, g, h) = 0$. Abrindo o determinante, isso pode ser reescrito como: $(vw-u'^2)l^2 + (wu-v'^2)m^2 + (uv-w'^2)n^2 + 2(v'w'-uu')mn + 2(w'u'-vv')nl + 2(u'v'-ww')lm = 0$

Que nos leva a condição inicial que queríamos encontrar.

Outro exemplo que vale ressaltar é que para encontrar a condição em que uma cônica se separe entre duas retas, reais ou imaginárias é necessário e suficiente que a expressão $\phi(\alpha, \beta, \gamma)$ se separe em dois fatores, onde a condição para que isso ocorra é dado por:

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } uvw + 2u'v'w' - uu'^2 - vv'^2 - ww'^2 = 0$$

Por último, o autor também utiliza dos determinantes para o cálculo de área de cônicas dado por:

$$2\pi\Delta abc \frac{\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u, & w', & v', & -a \\ w', & v, & u', & -b \\ v', & u', & w, & -c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}^{\frac{3}{2}}}$$

Onde, a depender da classificação da cônica (sendo hipérbole ou elipse) muda-se o sinal das variáveis.

Diferente de Salmon (1859), que se preocupava com a transferência do conteúdo de uma forma mais didática e acessível, Ferres (1861), possuía uma abordagem voltada para aqueles que já conheciam previamente os conteúdos, e a sua utilização de determinante acompanha as outras

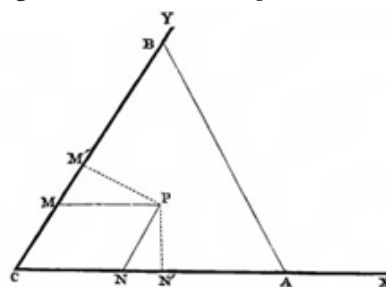
abordagens. Esta abordagem mais complexa requer uma maior dedicação para entender a utilização do determinante.

Em seguida será apresentado uma utilização dos determinantes no trabalho de Whitworth (1866).

Determinantes no livro de Whitworth

Trilinear Coordinates and other Methods of Modern Analytical Geometry (1866), antes de se aprofundar nas coordenadas trilineares, William (1866) introduz seu livro com um sistema que conecta o eixo cartesiano usual com o sistema trilinear (método de coordenadas perpendiculares referentes a dois eixos oblíquos). Dada pela distância do ponto aos eixos, essa conexão trabalha a relação das coordenadas oblíquas e as coordenadas perpendiculares utilizando o ângulo formado pelos eixos, como pode ser notado na Figura 1 da sequência.

Figura 1 – Distâncias do ponto ao eixo

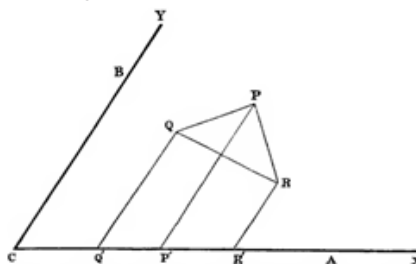


Fonte: Whitworth (1866, p. 6)

Onde temos as distâncias oblíquas, $x=PM$ e $y=PN$, e as distâncias perpendiculares, $\alpha=PM'$ e $\beta=PN'$. E elas estão conectadas pelas seguintes relações, $\alpha = x \sen C$ e $\beta = y \sen C$ ou $x = \alpha \operatorname{cosec} C$ e $y = \beta \operatorname{cosec} C$.

Adiante desenvolvemos um exemplo com base no artigo 5 do primeiro capítulo do livro, onde Whitworth trabalha o cálculo da área de um triângulo com coordenadas perpendiculares dos vértices em relação a eixos oblíquos se dá, inicialmente, na identificação das coordenadas (Whitworth, 1866): no caso (α_1, β_1) , (α_2, β_2) e (α_3, β_3) são as coordenadas dos pontos P , Q e R referenciados ao eixo oblíquo CX e CY , conforme a Figura 2 que segue.

Figura 2 – Área dos trapézios



Fonte: Whitworth (1866, p. 6)

Ao traçar linhas paralelas ao eixo oblíquo CY passando pelos vértices do triângulo PQR se encontra no eixo CX nos pontos Q' , P' e R' .

Observa-se que P' , Q' e R' são projeções dos vértices P , Q e R no eixo CX , formando assim três trapézios: $PQQ'P'$, $PRR'P'$ e $QRR'Q'$.

Utiliza-se a fórmula da área do trapézio $PQQ'P'$ usando como referência sua base $P'Q'$ igual a $(\alpha_1 - \alpha_2)\operatorname{cossec} C$, pois por ser uma projeção de PQ no eixo CX essa expressão é a distância entre essas projeções, a cossecante em evidência se dá devido ao ajuste necessário por estarmos trabalhando em sistema de eixos oblíquos. Como as coordenadas no eixo CY dos pontos Q e P coincidem com as bases do trapézio $PQQ'P'$, então a expressão $\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$ é a média da base menor e base maior deste trapézio. Logo, a área deste trapézio é: $\frac{1}{2}\operatorname{cossec} C(\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)$. Analogamente teremos $\frac{1}{2}\operatorname{cossec} C(\beta_3 + \beta_1)(\alpha_3 - \alpha_1)$ para o trapézio $PRR'P'$ e $\frac{1}{2}\operatorname{cossec} C(\beta_2 + \beta_3)(\alpha_3 - \alpha_2)$ para $QRR'Q'$.

A área do triângulo se dá pela relação, $PQQ'P' + PRR'P' - QRR'Q'$.

$$\begin{aligned}\Delta PQR &= \frac{1}{2}\operatorname{cossec} C \{(\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_3 + \beta_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \\ &\quad - (\beta_2 + \beta_3)(\alpha_3 - \alpha_2)\} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{cossec} C \{(\alpha_1(\beta_2 - \beta_3) + \alpha_2(\beta_3 - \beta_1) + \alpha_3(\beta_1 - \beta_2))\}\end{aligned}$$

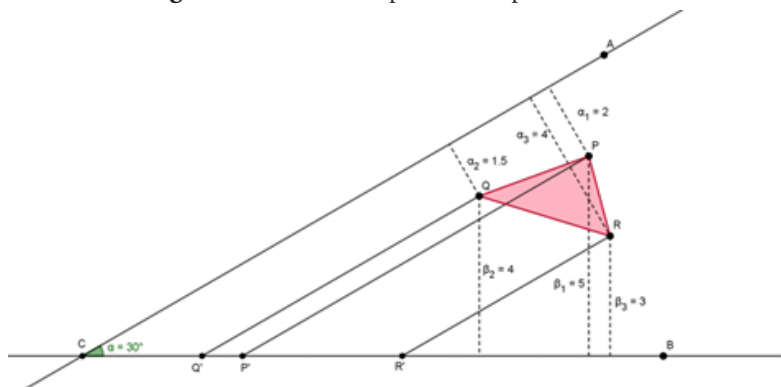
Em notação de determinantes temos:

$$A = \frac{1}{2}\operatorname{cossec} C \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

que equivale a forma como ensina-se atualmente, uma vez que no caso de eixos ortogonais $C=90^\circ$, logo como $\operatorname{cossec} 90^\circ=1$ a área se reduz a metade do determinante composto pelas coordenadas dos vértices adicionando uma linha ou uma coluna de elementos iguais a 1.

Adiante segue um exemplo numérico trabalhando com os eixos oblíquos, utilizando a abordagem de Whitworth (1866). Onde escolhemos o ângulo de 30° , pois a sua cossecante é igual a 2. As distâncias representadas por α_1 , α_2 e α_3 fazem as ligações dos pontos P , Q e R com o eixo Y e as distâncias β_1 , β_2 e β_3 fazendo a ligação dos mesmos pontos com o eixo X . Com as informações da Figura 3 fazemos o cálculo da área do triângulo.

Figura 3 – Área dos trapézios exemplo numérico



Fonte: Criado pelo grupo de pesquisa

$$A = \frac{1}{2} \operatorname{cossec} 30^\circ \begin{vmatrix} 2 & 1,5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Percebe-se que Whitworth (1866) trabalha diretamente com a noção de área e o determinante. Ele se preocupa em justificar a forma como se calcula a área de um triângulo. A partir dessa abordagem, pode-se criar atividades interessantes ao ensino de determinante, lidando com seus aspectos geométricos. Essa abordagem não era padrão no século XIX, percebe-se isso no próximo livro analisado.

Determinantes no livro de Todhunter

No capítulo XXV, o autor introduz o conceito de determinante após apresentar a teoria das equações. Ele observa que os determinantes constituem um ramo da matemática de origem *relativamente recente*, mas que evoluiu rapidamente em importância (Todhunter, 1861). Seu objetivo é fornecer exemplos e ilustrações para que o estudante possa compreender a natureza e as propriedades dos determinantes. No capítulo XXVI, ele demonstra os principais teoremas relacionados ao tema, e no capítulo XXVII explora algumas aplicações dos determinantes na teoria das equações.

O autor apresenta o determinante como a soma ou subtração de produtos de coeficientes de duas ou mais equações que aparecem no denominador ou numerador das soluções de um sistema de equações. Ele ilustra esse processo para determinantes quadrados de ordem 2 e 3, destacando as principais propriedades. Para o caso geral de um determinante $n \times n$, ele utiliza as permutações dos coeficientes nos produtos e alterna somas e subtrações (Todhunter, 1861). A partir da página 248, o autor apresenta aplicações dos determinantes na teoria das equações, sendo a principal delas a solução de sistemas de equações. No entanto, ele não propõe exercícios para os capítulos que tratam dos determinantes, sugerindo que essa parte do conteúdo foi acrescentada como um *apêndice* à obra, embora faça aplicações à teoria das equações (Todhunter, 1861).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo da pesquisa verificamos que os livros-textos selecionados se desenvolveram de acordo com um foco particular diferentes uns dos outros, e dentro de seus livros os temas eram trabalhados a fim de suprir as demandas referentes a cada um dos temas trabalhados. Com os determinantes não seria diferente, verificamos que o cálculo funciona de uma forma bem versátil.

Analisamos também diferenças em relação ao desenvolver dos textos, e como alguns possuem um caráter mais explicativo e outros mais demonstrativos. Onde os explicativos possuíam uma leitura de entendimento rápido, como os livros de Salmon (1859) e de Todhunter (1861), e os mais demonstrativos, os livros de Ferrers (1861) e Whitworth (1866), verificamos a necessidade de um entendimento prévio do assunto.

A pesquisa nos expôs a muitas aplicações geométricas de um determinante, os exemplos de Salmon trazem utilização preparatória para a discussão futura de transformação linear, o de Ferrez é trabalho que relaciona retas e cônicas e o exemplo de Whitworth (1866) foi sobre cálculo de áreas. Se diferenciando de todos os livros, Todhunter (1861) trabalha com um foco muito mais algébrico quando entra nas discussões sobre determinante.

Por fim, o trabalho realizado possui a ideia de despertar curiosidade em relação a diferentes utilidades do que chamamos de determinante, e os diferentes tipos de desenvolvimentos algébricos e geométricos.

REFERÊNCIAS

BERNARDES, A.; ROQUE, T. História da noção de matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 16, n. 31, p. 01-19, 2016.

BREWSTER, D.; *et al.* Notices Respecting New Books. In **Philosophical Magazine**, Taylor and Francis, Londres, v. 11-32, 1856-1866.

FERRERS, N. M. **An elementary treatise on trilinear co-ordinates: the method of reciprocal polars, and the theory of projections**. Macmillan and Company: Londres, 1861.

KATZ, Victor J.; PARSHALL, Karen Hunger. **Taming the unknown: A history of algebra from antiquity to the early twentieth century**. Princeton University Press, 2014.

KNOBLOCH, E. Determinants. In: GRATTAN-GUINNESS, Ivor (Ed.). **Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences**. Londres; Nova Iorque: Routledge, 2002.

SALMON, George. **Lessons introductory to the modern higher algebra**. 1. ed. [S.l.]: Hodges, Smith, and Company, 1859.

SCHUBRING, Gert. **Analysing historical mathematics textbooks**. Springer, 2022.

TODHUNTER, Isaac. **An elementary treatise on the theory of equations: with a collection of examples**. Macmillan and Company: Londres, 1861.

WHITWORTH, William Allen. **Trilinear Coordinates and other Methods of Modern Analytical Geometry of Two Dimensions: An Elementary Treatise**. Deighton, Bell and Company: Londres, 1866.