

Gaston Darboux e as métricas de Cayley

Gaston Darboux and Cayley metrics

Leandro Silva Dias¹  

Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

Gérard Émile Grimberg²  

Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

RESUMO

O artigo investiga como as métricas de Cayley, um conceito fundamental da matemática do século XIX, foram abordadas tanto em periódicos acadêmicos quanto nas obras de Gaston Darboux. Ele analisa o *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* durante seus dois primeiros anos (1870–1873), destacando o papel de seus editores—particularmente Darboux—na seleção de artigos que refletiam os interesses matemáticos da época. O estudo examina a terminologia relacionada às métricas de Cayley e a conceitos associados, avaliando sua conexão com a Sexta Memória sobre os *Quantics*, de Cayley. Além disso, explora os trabalhos de Darboux que discutem explicitamente métricas ou a chamada “geometria de Cayley”, analisando trechos selecionados à luz das contribuições de Cayley. Os resultados revelam que as métricas de Cayley foram amplamente difundidas e desenvolvidas na França, sendo Darboux um dos principais responsáveis por esse processo.

Palavras-chave: Arthur Cayley; Polinômios Homogêneos; Teoria dos Invariantes; Geometria Projetiva.

ABSTRACT

The article investigates how Cayley metrics, a fundamental concept in 19th-century mathematics, were addressed in both academic journals and the works of Gaston Darboux. It analyzes the *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* during its first two years (1870–1873), emphasizing the role of its editors—particularly Darboux—in selecting articles that reflected the mathematical interests of the time. The study examines terminology related to Cayley metrics and associated concepts, assessing their connection to Cayley’s *Sixth Memoir on Quantics*. Additionally, it explores Darboux’s works that explicitly discuss metrics or the so-called “Cayley geometry”, analyzing selected excerpts considering Cayley’s contributions. The findings reveal that Cayley metrics were widely disseminated and further developed in France, with Darboux playing a key role in this process.

Keywords: Arthur Cayley; Homogeneous Polynomials; Invariant Theory; Projective Geometry.

INTRODUÇÃO

As métricas de Cayley dialogaram com diversos ramos da matemática do século XIX, como a teoria dos invariantes, a geometria projetiva, as geometrias não euclidianas, e os estudos sobre superfícies, entre outros. A teoria dos invariantes começou a se desenvolver entre os matemáticos britânicos em 1841, com a publicação do artigo de George Boole sobre transformações lineares. Cayley demonstrou interesse pelo tema e publicou artigos sobre o assunto em 1845 e 1846, contribuindo significativamente para o avanço da teoria, em parceria com Sylvester e Salmon (Dias, 2013).

Os trabalhos britânicos relacionados à teoria dos invariantes apresentaram uma conexão estreita com aspectos geométricos, especialmente com a geometria projetiva (Dias, 2023). Além disso, as geometrias não euclidianas passaram a se relacionar com a teoria dos invariantes a partir da pu-

¹ Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: leandro.dias@ifrj.edu.br.

² Doutor pela Université Paris Diderot, PARIS 7, França. Professor grau 7 Associado 2 da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, BRASIL. E-mail: gerard.emile@terra.com.br.

blicação da Sexta Memória sobre os *quantics* de Cayley (Dias, 2019). No campo dos estudos sobre superfícies, que inclui o conceito de métricas, o trabalho de Cayley na Sexta Memória também desempenhou um papel importante, tendo sua relevância explorada posteriormente por Darboux, como será analisado nas próximas seções.

O objetivo deste trabalho é analisar como as métricas de Cayley foram apresentadas no periódico *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* e nos livros de Darboux. A escolha desses documentos se justifica por fornecerem uma perspectiva sobre como Darboux lidou com o tema a partir de 1870.

Inicialmente, analisamos o *Bulletin*, revisando todos os artigos publicados entre 1870 e 1873 que mencionam, direta ou indiretamente, as métricas de Cayley. Em seguida, aprofundamos o exame das obras de Darboux.

METODOLOGIA

Os periódicos refletem a atividade matemática da época em que foram publicados e podem ser analisados sob diferentes perspectivas, oferecendo subsídios valiosos para os historiadores em suas pesquisas. Neste estudo, o periódico foi examinado em seus dois primeiros anos de publicação, com o objetivo de identificar os interesses tanto dos autores quanto dos editores, especialmente de Darboux, já que a seleção dos artigos era responsabilidade desses últimos.

Para a análise, foram selecionados artigos ou trechos que abordassem, direta ou indiretamente, as métricas de Cayley. A pesquisa incluiu termos como “métrica”, “Cayley”, “absoluto”, “cônica absoluta”, “distância”, “razão dupla” e “involução”, considerando seus equivalentes em francês, a língua do periódico. A simples presença de um desses termos, no entanto, não garantia a inclusão do artigo; era necessário realizar uma leitura criteriosa para confirmar sua relação com o tema. Dessa forma, a citação ao tema poderia ser indireta, sem a menção explícita de palavras como “métrica” ou “Cayley”, desde que os conceitos estivessem relacionados ao objeto de estudo. Após a seleção, os artigos escolhidos foram comparados ao trabalho de Cayley em sua Sexta Memória.

Quanto aos livros de Darboux, foram selecionados aqueles que tratavam diretamente das métricas de Cayley ou, como Darboux as denominava, da “geometria de Cayley”. Os trechos selecionados abordam essa temática e foram comparados e relacionados à Sexta Memória.

MÉTRICA DE CAYLEY

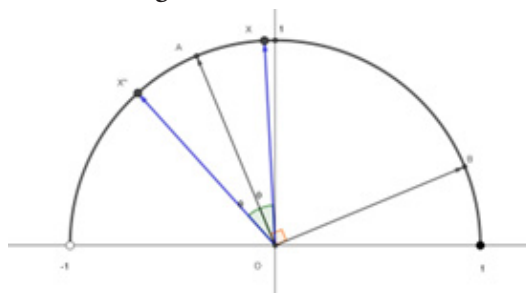
Para definir a métrica sobre a reta projetiva, Cayley chama a forma quadrática Q de “absoluto”³. Ela desempenha um papel importante, pois a depender da escolha dessa forma quadrática trabalharemos num dado modelo geométrico. A interseção desta cônica com a reta determina dois pontos I e J , e dado dois pontos A e B conjugados com I e J , Cayley define assim a distância entre o ponto A e X , em notação moderna, como sendo:

³ Nós consideramos o termo “absoluto” como um substantivo nesta discussão e, seguindo o que foi escrito por Cayley e Klein em seus artigos sobre o assunto, usamos o substantivo masculino para se referir à forma quadrática de referência ao estabelecer a métrica.

$$\theta = \arccos \frac{P(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX})}{\sqrt{Q(\overrightarrow{OA}) \cdot Q(\overrightarrow{OX})}}$$

A figura abaixo representa geometricamente o caso da reta projetiva. Cayley se inspira diretamente da geometria da esfera, para maiores detalhes pode-se acompanhar o desenvolvimento completo no artigo de Dias e Grimberg (2019).

Figura 1 – Métrica na reta



Fonte: Próprio autor

No caso do absoluto ser uma forma quadrática degenerada que, portanto, é representada por um ponto duplo P, recai-se na métrica euclidiana. Cayley trabalhou essa ideia, mostrando que a partir dessa abordagem o caso euclidiano é encontrado como um caso limite. Daí ele faz sua famosa afirmação de que a geometria projetiva é mais elementar que a euclidiana, o que ia numa outra direção da concepção de sua época.

Darboux vai utilizar a mesma abordagem em seus trabalhos onde ele diz que faz “geometria de Cayley”, ou onde cita explicitamente a sexta memória. Ou seja, a partir de uma cônica de referência, definir uma métrica a partir de uma dada relação entre quatro pontos. Desenvolveremos mais sobre estes aspectos nas próximas seções.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

O *Bulletin* foi fundado em 1870 por Gaston Darboux e Jules Hoüel. Ainda no primeiro volume, em 1872, Clebsch (1872a) escreveu uma notícia bibliográfica sobre o seu livro, *Theorie der binären algebraischen Formen* (1872). Este livro cita Cayley, Sylvester e Salmon, como importantes matemáticos que contribuíram com o que ele chamava de “teoria das formas”. Clebsch destaca o carácter geométrico da teoria, citando as memórias sobre os *quantics*. Na segunda seção do seu livro ele afirma:

Apresento agora uma interpretação geométrica da qual as formas binárias, assim como os invariantes e covariantes que são capazes e importantes por causa de sua relação com a geometria analítica [...] uma ordem binária de ordem n , igual a zero, apresenta, como vimos no início, uma equação do enésimo grau, na qual x_1/x_2 é o desconhecido e, portanto, fornece n valores dessa razão. Se pensarmos agora em uma linha reta, em que cada ponto representa um valor dessa relação, uma forma binária é, em certa medida, considerada a expressão analítica do complexo dos n pontos dados pela equação correspondente. (Clebsch, 1872b, p.44, Tradução nossa⁴)

⁴ Ich werde jetzt eine geometrische Interpretation darlegen, deren die binären Formen, sowie die dabei auftretenden Invarianten und Covarianten fähig sind, und welche sowohl wegen ihres Zusammenhanges mit der analytischen Geometrie [...] Eine binäre

Clebsch (1872b) inicia a seção, como fica claro na citação acima, estabelecendo a relação existente entre os polinômios homogêneos de grau n com a sua respectiva interpretação geométrica. Essa abordagem é idêntica à empregada por Cayley, Sylvester e Salmon. Inclusive Clebsch faz uma nota no início da seção onde cita as memórias sobre os *quantics*, especificamente a Quinta Memória, e o livro de Fiedler (1862) para a relação entre as substituições lineares com a razão dupla. Destacamos que Fiedler (1862) foi citado também por Felix Klein em seus artigos sobre as geometrias não euclidianas, pois ele traduziu para o alemão as Seções Cônicas de Salmon, além de traduzir a Sexta Memória sobre os *quantics*. Ou seja, o livro de Clebsch é de suma importância para a compreensão de como os métodos analíticos/geométricos de Cayley foram recebidos pela comunidade matemática internacional.

Retornando à notícia apresentada ao *Bulletin* sobre este livro, podem-se fazer algumas perguntas: primeiro, por que a notícia foi escrita pelo próprio autor e não pelos editores? Segundo, qual o interesse em se publicar uma notícia tão longa, total de onze páginas, neste periódico? Para responder à primeira pergunta, podemos pensar que o tema não era do conhecimento de Darboux, nem de Hoüel. O problema desta resposta é que Darboux escreveu sobre a “geometria de Cayley” em seu livro de 1873 sobre as curvas e superfícies algébricas. Hoüel, por ser um grande divulgador das principais obras de matemática, fazendo diversas traduções, provavelmente já conhecia os trabalhos dos britânicos. Provavelmente, a resposta seria de que os editores privilegiaram o tema, colocando a notícia do próprio autor do livro, no intuito de enriquecer o debate sobre os novos aspectos algébricos/geométricos presentes no livro de Clebsch, bem como sobre os métodos dos demais matemáticos citados por ele. Isso já responde, pelo menos parcialmente, à segunda pergunta, ou seja, o tema era do interesse de Darboux e Hoüel.

No mesmo volume do *Bulletin*, os editores divulgaram o livro de Heger, sobre geometria analítica em coordenadas homogêneas, também de 1872. Eles afirmam que as coordenadas homogêneas foram “introduzidas na geometria analítica por Möbius, Plücker, Hesse, Cayley, Salmon, etc.”⁵ (Darboux; Hoüel, 1872, p.257). Afirmam também que já havia muitos tratados contendo exposições satisfatórias em coordenadas homogêneas, citando os trabalhos de Salmon, Fiedler, Briot, Price e Painvin. Para os editores elas contêm o desenvolvimento das fórmulas mais essenciais dessa importante teoria, destacando, porém, que ainda assim o nascimento de novas coordenadas não era tão difundido quanto se desejava. Eles elogiam dizendo que o livro reúne e exhibe de maneira simples, as propriedades mais essenciais das coordenadas trilineares, feixe tangencial, harmônico, quadrilateral completo, colinearidade no plano e no espaço. Além de afirmarem que o estudo dos sistemas de coordenadas pontual e tangencial é realizado simultaneamente.

Os editores citam as seguintes obras para ilustrar os primeiros trabalhos didáticos nos quais esse desenvolvimento paralelo dos sistemas de coordenadas pontual e tangencial foi utilizado pela primeira vez: a Geometria Superior e as Seções Cônicas de M. Chasles; além de M. Hesse, em seu *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie des Raumes*; e M. Painvin, em seus *Principes de la Géométrie analytique*. Ou seja, Darboux e Höüel tinham um domínio bem extenso sobre o tema, citando obras de diversos matemáticos, franceses ou de outras nacionalidades.

Form nter Ordnung, gleich Null gesetzt, stellt, wie schon im Eingange bemerkt ist, eine Gleichungen Grades vor, in welcher x_1/x_2 die Unbekannte ist und welche also n Werther dieses Verhältnisses liefert. Denken wir uns nun eine Gerade, deren jeder Punkt einen Wert dieses Verhältnisses repräsentiert, so ist eine binäre Form gewissermassen als der analytische Ausdruck des Complexes der n Punkte zu betrachten, welche durch die entsprechende Gleichung gegeben sind.

⁵ Introduites en Géométrie analytique par Möbius, Plücker, Hesse, Cayley, Salmon, etc.

Ainda no mesmo volume do *Bulletin*, Darboux publicou duas, das três partes, do seu artigo *Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes traces sur les surfaces algébriques*. O interessante é que este artigo mostra que Darboux conhecia bem o que fazia Cayley, pois cita diversas vezes os trabalhos de Cayley que utilizavam coordenadas homogêneas para tratar aspectos geométricos.

DARBOUX (1873)

Nosso propósito não é fazer a história das superfícies ortogonais, projeto já realizado por Croizat (2016), e sim destacar o uso de métricas não euclidianas por Darboux. Com isso, examinamos como Darboux aplica e desenvolve ideias em torno de superfícies não euclidianas e revelamos como ele estava consciente dos trabalhos de Klein e Cayley sobre as métricas não euclidianas.

O que é interessante é que até 1870, segundo Croizat, Darboux duvida ainda do interesse das métricas não euclidianas, destacando-se a comunicação de Darboux com Hoüel e Beltrami (Croizat, 2016). Hoüel traduz os trabalhos de Beltrami e Riemann, estando Darboux ciente dessas obras que tratam de superfícies não euclidianas.

Darboux propõe, em sua obra, estudar as superfícies de quarta ordem às quais ele chama de *cyclides*, sendo aquelas que possuem uma cônica dupla especial – o círculo do infinito. Ele também estuda as curvas que denominou *cycliques*, caracterizadas por terem os pontos ao infinito sobre o círculo, ou as curvas esféricas que resultam da intersecção da esfera com uma superfície do segundo grau. Neste caso, o *cyclique* é esférico de quarta ordem e o círculo diretor de segunda ordem.

Na primeira parte, Darboux estuda a transformação por *rayons vecteurs reciproques*, dos focos e das focais. Na segunda parte, ele estuda os *cycliques* planos e esféricos. A terceira parte é dedicada ao estudo dos imaginários. Ele apresenta uma nova forma de demonstrar as propriedades métricas focais das cônicas a partir de uma proposição de Chasles – *Traité des sections coniques*. Nas duas últimas partes, ele se dedica ao estudo analítico e geométrico das superfícies *cyclides* e do sistema triplo ortogonal que se pode formar com estas superfícies com a métrica de Cayley. Darboux desenvolve os princípios de Cayley em duas notas – a nota IV e V – relacionando-os com princípios e propriedades que ele aplica às superfícies de quarta ordem por ele trabalhadas.

No início do primeiro capítulo, Darboux apresenta a transformação por *rayons vecteurs reciproques*, sendo dadas as expressões:

$$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, Y = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2},$$

sendo x, y, X, Y as coordenadas dos pontos correspondentes. Darboux apresenta a forma complexa da transformação:

$$X + Yi = \frac{k^2}{x - yi}, X - Y = \frac{k^4}{x + yi}.$$

Como se pode constatar, esta transformação ocorre na geometria de inversão que num espaço n -dimensional, sendo dada uma esfera de raio r , a inversão na esfera é dada por:

$$X \mapsto \frac{r^2 x_i}{\sum_j x_j^2}.$$

A geometria de inversão preserva a dupla razão, pois sendo dados quatro pontos x, y, z, w , a dupla razão é um invariante sobre uma inversão. Logo, utilizando uma métrica baseada na dupla razão, uma inversão preserva as distâncias e os ângulos. Esta propriedade é fundamental no trabalho de Darboux com transformações por *rayons vecteurs reciproques*.

Darboux apresenta diversas características dos *cyclides* e *cycliques*, mostrando casos onde a transformação opera com *cyclides* de mesmo foco, dentre outros casos particulares, onde ocorre ortogonalidade.

A partir da terceira parte, onde são tratadas propriedades imaginárias em geometria, Darboux desenvolve a seguinte relação métrica: $e^{2i(\widehat{PMQ})} = \frac{(u-a)(v-\beta')}{(u-a')(v-\beta)}$, que, após extrair a raiz quadrada, fica $e^{i(\widehat{PMQ})} = \left(\frac{MP'}{MQ'}\right)$ (Darboux, 1873).

A relação apresentada acima permite determinar o ângulo $\widehat{PMQ}$ e pode ser expressa como o logaritmo da razão anarmônica das quatro retas MA, MB, MI e MJ . Essa abordagem, que utiliza o logaritmo da razão dupla, é conhecida como a métrica de Klein e foi desenvolvida em sua obra sobre geometrias não euclidianas.

A expressão de uma métrica partindo do logaritmo da razão anarmônica foi enunciada de certa forma por Laguerre (1853), que em seu estudo sobre a teoria dos focos apresenta o seguinte problema:

Problema. Um sistema de ângulos A, B, C , etc., situado num plano, que estão relacionados por uma equação qualquer $F(A, B, C, \dots) = 0$, encontre a relação que liga os ângulos correspondentes A', B', C' , etc., quando se transforma a figura homograficamente. (Laguerre-Verly, 1853, p.64, Tradução nossa⁶)

Laguerre apresenta a seguinte relação, sem nenhuma demonstração:

$$F\left(\frac{\log a}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log b}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log c}{2\sqrt{-1}}\right) = 0$$

Ou seja, o ângulo A' , sendo “a” a razão anarmônica fica:

$$A' = \frac{\log a}{2\sqrt{-1}}.$$

Darboux faz menção a Laguerre-Verly (1853) e a Chasles quanto ao histórico da relação métrica acima. Chasles (1870) cita igualmente Laguerre, porém dá crédito a Faure quanto a demonstração da relação métrica. Chasles afirma:

⁶ Problème. Un système d'angles A, B, C , etc., situés dans un plan, étant liés par une équation quelconque $F(A, B, C, \dots) = 0$, trouver la relation qui lie les angles correspondants A', B', C' , etc., quand on transforme la figure homographiquement.

O Senhor Laguerre simplesmente enunciou esta expressão. O Senhor Faure, capitão de artilharia, a demonstrou em um de seus trabalhos sobre a *Transformation des propriétés métriques des figures*.⁷ (Chasles, 1870, p.313, Tradução nossa)

Faure trata de questões métricas relacionadas à transformação homográfica ao longo de um segmento de uma dada reta. Utilizando relações entre triângulos homólogos, Faure encontra as seguintes relações para o ângulo a' , homólogo a um ângulo a : $\sin a' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-r}{\sqrt{-r}}$; $\cos a' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+r}{\sqrt{-r}}$, subtraindo estas expressões uma da outra, encontrou: $\cos a' - \sin a' \sqrt{-1} = \sqrt{r}$.

Utilizando a relação de Euler, , ele reduz a expressão acima a forma: $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

$$a' = -\frac{\log r}{2\sqrt{-1}}$$

sendo r a razão anarmônica de quatro retas: as retas suportes do ângulo e as retas imaginárias $y = \pm\sqrt{-1}x$. (Faure, 1859)

DARBOUX (1873) E A “GEOMETRIA DE CAYLEY”

No trabalho *Sur une Classe Remarquable de Courbes et de Surfaces Algébriques et sur la Théorie des Imaginaires*, Darboux (1873) trata da geometria das relações métricas que ele chama de “geometria de Cayley”. Mais especificamente nos artigos 61 e 62, além das notas III e V, onde ele faz uso das noções de distância, apresentadas inicialmente por Cayley em sua sexta memória sobre os quantics de 1859, para tratar dos cicloides e problemas relacionados às superfícies ortogonais.

Esta teoria das relações métricas de Cayley é tratada especialmente na nota V, de título: *Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure dans la géométrie* de M. Cayley. Apesar de Darboux enfatizar a autoria de Cayley, ele faz referência à obra de 1862 de Fiedler sobre as formas binárias, *Die Elemente der Neueren Geometrie und der Algebra der Binären Formen*, que possui de forma resumida o conteúdo da sexta memória de Cayley. Além disso, cita a obra de Felix Klein que trata das geometrias não euclidianas de 1871. Não há citação direta à sexta memória, e o texto nem mesmo consta nas referências de Darboux (1873), o que nos indica que Darboux deve ter tido contato com esta obra de Cayley de forma indireta, muito provavelmente influenciado pela visita de Klein à França na década de 1870.

Nessa nota V, Darboux trata principalmente das linhas geodésicas. E, para isto, ele define para “absoluto” a esfera definida pela seguinte equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \text{ (Darboux, 1873)}$$

Então, define a distância entre dois pontos de coordenadas (x, y, z) e (x', y', z') sendo dada pelas fórmulas seguintes:

⁷ M. Laguerre énonce simplement celle expression. M. Faure, capitaine d'artillerie, l'a démontrée dans un travail sur la Transformation des propriétés métriques des figures.

$$\cos^2 \delta = \frac{(xx' + yy' + zz' - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)} e$$

$$\sin^2 \delta = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2) - (xx' + yy' + zz' - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)}.$$

Darboux apresenta a métrica seguindo a mesma notação que Cayley (1859c) propõe em sua sexta memória sobre os *quantics*. Dado o ponto (x', y', z') ser vizinho ao ponto (x, y, z) , então se tem:

$$d\delta = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2 - R^2) - (xdx + ydy + zdz - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)}.$$

A partir dessa métrica, Darboux passa a pesquisar as linhas geodésicas de uma superfície definida por uma equação: $f(x, y, z) = 0$ (Darboux, 1873).

Ainda há vários aspectos a serem analisados, porém já podemos observar que Darboux desempenha um papel fundamental na recepção das métricas de Cayley-Klein.

Na parte 61 de seu livro, Darboux trata dos cicloides de um sistema ortogonal dada uma transformação definida. Ele trata de uma transformação que conserva os ângulos das tangentes ao plano e à superfície, utilizando neste caso as relações métricas desenvolvidas por Cayley. Darboux apresenta as seguintes relações métricas:

$$e^{iV} = R, V = \frac{1}{2i} \log R \text{ (Darboux, 1873)}$$

Sendo R a razão anarmônica dos quatro planos, tangentes e ortogonais. Este caso para o cálculo dos ângulos, sendo apresentada a relação que dá a distância, numa fórmula bem parecida, com o uso do logaritmo da razão anarmônica. Darboux utiliza a relação que dá a medida do ângulo para mostrar como a dada transformação conserva os ângulos. Faz uma breve demonstração para a conservação do ângulo entre duas curvas e afirma que ela permanece para o caso de duas superfícies, ou uma superfície e uma curva.

Já na parte 62, Darboux faz generalizações das noções de normal, focais e de linhas de curvatura. Darboux faz uso de uma definição que se utiliza da superfície de uma esfera, que seria o absoluto, para definir a normal de uma superfície. Daí ele define linha de curvatura (Darboux, 1873).

Métrica de Cayley nos *Leçons sur la théorie générale des surfaces*

Darboux reuniu um belo trabalho de quatro volumes (1887-1896) em que trata da teoria das superfícies, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces et Les Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal*. O primeiro volume traz o resumo das lições que Darboux ministrou em Sorbonne durante os invernos de 1882 a 1885. Darboux pretendeu apresentar a teoria das superfícies com as novas aplicações de seu período, principalmente com as ferramentas do cálculo diferencial. Os quatro volumes são divididos em livros que, normalmente, discutem assuntos distintos. Por exemplo, o primeiro volume é dividido em três livros: o primeiro trata das aplicações à geometria da teoria dos movimentos relativos; o segundo, dos diferentes sistemas de coordenadas curvilíneas; e o terceiro, da teoria das superfícies mínimas.

O terceiro volume tem relevância quanto à recepção das métricas de Cayley-Klein, por abordar a relação desta com a teoria das linhas geodésicas e da curvatura geodésica. Este tópico é estudado no livro VI, sendo que esse terceiro volume se divide em apenas dois livros, livro VI e livro VII (este último trata da deformação das superfícies). Apresentaremos os principais apontamentos de Darboux que relacionam a métrica de Cayley-Klein aos estudos das geodésicas, nos dedicaremos, portanto, ao conteúdo do capítulo XIV do livro VI.

Já no início do capítulo XIV do livro VI, Darboux nos apresenta, em sua lista de matérias a serem abordadas no capítulo, diversos tópicos relacionados às métricas de Cayley-Klein. Os tópicos mais importantes para nosso estudo são: “Significação geométrica dos resultados precedentes; generalização das noções de distância e ângulo devido ao Senhor Cayley”, “As curvas geodésicas na geometria de Cayley”, “As superfícies (M) estudadas no início deste capítulo onde, na geometria Cayleyniana, seus raios de curvaturas são iguais e de sinais contrários” e “Estudo de uma transformação que permite de transportar à geometria euclidiana todas as relações entre ângulos da geometria de Cayley” (Darboux, 1894, p.471). Durante nossa análise ficará claro o que Darboux considera como geometria de Cayley, sendo que, apesar de Darboux citar diversas vezes Cayley, ele considera importante também os trabalhos de Klein que trata das geometrias não euclidianas.

O primeiro tópico que selecionamos, ou seja, significação geométrica dos resultados precedentes; generalização das noções de distância e ângulo devido ao Senhor Cayley, se encontra num quadro do estudo das superfícies mínimas, que Darboux simboliza com “(M)”, relacionadas a uma dada quádrlica, que ele simboliza com “(Q)”. Darboux utiliza a seguinte definição de superfície mínima (M):

Nós temos visto (no 186) que as superfícies mínimas podem ser caracterizadas pela seguinte propriedade: As duas tangentes de comprimento nulo conduzido por cada ponto da superfície devem ser duas tangentes conjugadas. É natural de se estender essa definição um pouco e buscar superfícies que, se, em cada um dos seus planos tangentes e pelo ponto de contato desse plano, as duas tangentes sejam conduzidas a uma superfície fixa do segundo grau, essas duas tangentes são conjugadas relativamente à superfície procurada. Quando a superfície do segundo grau ou quádrlica é reduzida ao círculo do infinito, a definição anterior coincidirá com a das superfícies mínimas. Se a quádrlica for reduzida a uma cônica, a superfície procurada se tornará a transformada homográfica de uma superfície mínima. Se a quádrlica (Q) se reduz a um cone, a superfície será o correlativo de uma superfície mínima. O único caso realmente novo a considerar é, portanto, o lugar onde a quádrlica pertence à classe mais geral; nós a designaremos, em forma abreviada, pela letra (Q) e as superfícies procuradas serão chamadas aqui as superfícies (M). (Darboux, 1894, p.472, Tradução nossa⁸)

Darboux faz uma extensa análise de como, dada uma superfície quádrlica, encontrar a superfície mínima. Até que ele afirma que, para conseguir de uma maneira completa tratar dos casos

⁸ Nous avons vu (no 186) que les surfaces minima peuvent être caractérisées par la propriété suivante : Les deux tangentes de longueur nulle menées par chaque point de la surface doivent être deux tangentes conjuguées. Il est naturel d'étendre un peu cette définition et de chercher les surfaces telles que, si, dans chacun de leurs plans tangents et par le point de contact de ce plan, on mène les deux tangentes à une surface fixe du second degré, ces deux tangentes soient conjuguées relativement à la surface cherchée. Quand la surface du second degré ou quadrique se réduira au cercle de l'infini, la définition précédente coïncidera avec celle des surfaces minima. Si la quadrique se réduit à une conique, la surface cherchée deviendra la transformée homographique d'une surface minimum. Si la quadrique (Q) se réduit à un cône, la surface sera la corrélatrice d'une surface minimum. Le seul cas réellement nouveau à envisager est donc celui où la quadrique appartient à la classe la plus générale ; nous la désignerons, pour abrégé, par la lettre (Q) et les surfaces cherchées seront appelées ici les surfaces (M).

envolvidos nessa questão, deve-se considerar as generalizações das noções de ângulo e distância que são devidas a Cayley (Darboux, 1894). Darboux, ao fazer essa afirmação, cita em nota de rodapé três referências: primeira, a sexta memória sobre os *quantics* de Cayley, desta vez fazendo referência ao volume dois da coletânea de artigos de A. Cayley; segunda, à memória de Felix Klein de 1871, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie dos Mathematische Annalen*; e por fim, ao seu próprio trabalho, *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, cujas principais relações com a abordagem de Cayley já indicamos. Cabe destacar que, de forma inicial, Darboux teria tido contato com as obras de Cayley de forma indireta, por via de Klein conforme analisamos em Darboux (1873), mas nessa nova publicação o autor cita diretamente a sexta memória e, além disso, faz questão de destacar a coletânea das obras de Cayley, propagando assim os métodos de Cayley para os jovens cientistas franceses. Darboux apresenta a métrica de Cayley da seguinte maneira:

Essa generalização começa com a substituição de qualquer quádrlica (Q) pelo círculo no infinito. Dados dois pontos no espaço M, M', chamamos de distância entre esses dois pontos a função δ definida pela equação (26) $e^{2i\delta} = R$, onde R denota a razão anarmônica de M, M' e os dois pontos em que a reta MM' intersecta a quádrlica (Q). Se x, y, z, t; x', y', z', t' denotam as coordenadas dos dois pontos e se a quádrlica (Q) é definida pela equação homogênea (27) $f(x,y,z,t) = 0$, então teremos (28) $\cos \delta = \frac{1}{2} \frac{(x'\frac{\delta f}{\delta x} + y'\frac{\delta f}{\delta y} + z'\frac{\delta f}{\delta z})}{\sqrt{f(x,y,z,t)f(x',y',z',t')}}.$ (Darboux, 1894, p.479, Tradução nossa⁹)

A equação (26) define a distância entre dois pontos M e M' como uma função da razão anarmônica R desses pontos e dos pontos onde a reta MM' intersecta a quádrlica (Q). A razão anarmônica é uma quantidade invariante sob projeção perspectiva, o que significa que se projetarmos os pontos M e M' e a quádrlica (Q) em um novo plano, a razão anarmônica não muda.

A equação (28) define o cosseno da distância entre dois pontos M e M' em termos das coordenadas dos pontos e da equação da quádrlica (Q). Essa equação é útil para calcular a distância entre dois pontos em uma variedade projetiva a partir da equação da quádrlica que define essa variedade. A distância entre dois pontos é uma quantidade importante em geometria projetiva, e essa equação fornece uma maneira conveniente de calculá-la.

Percebe-se, então, que Darboux (1894) aplica em seu livro a teoria de Cayley sobre as métricas e faz isso de forma a relacioná-la a geometria diferencial. Para ele o que fez Cayley se traduziu numa abordagem que ele chamou de “geometria de Cayley”. Destaca-se que essa abordagem se tornou uma importante ferramenta para a geometria diferencial e para a teoria das superfícies, a partir das considerações de Darboux.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise apresentada evidencia o papel central de Gaston Darboux na recepção e desenvolvimento das métricas de Cayley, destacando sua atuação como editor, pesquisador e divulgador. Darboux não apenas assimilou as ideias de Cayley, mas também as expandiu, integrando-as a novos

⁹ Cette généralisation a pour point de départ la substitution d'une quadrique quelconque (Q) au cercle de l'infini. Étant donnés deux points dans l'espace M, M', appelons distance de ces deux points la fonction δ définie par l'équation (26) $e^{2i\delta} = R$, R désignant le rapport anharmonique de M, M' et des deux points où la droite MM' rencontre la quadrique (Q). Si x, y, z, t; x', y', z', t' désignent les coordonnées des deux points et si la quadrique (Q) est définie par l'équation homogène (27) $f(x,y,z,t) = 0$, on aura

(28) $\cos \delta = \frac{1}{2} \frac{(x'\frac{\delta f}{\delta x} + y'\frac{\delta f}{\delta y} + z'\frac{\delta f}{\delta z})}{\sqrt{f(x,y,z,t)f(x',y',z',t')}}.$

contextos matemáticos, como a geometria diferencial e o estudo de superfícies algébricas e não euclidianas.

Por meio do *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* e de suas obras, como *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Darboux contribuiu para a disseminação e consolidação das métricas de Cayley na França. Ele utilizou conceitos como a razão anarmônica e as propriedades de invariância para formular novos métodos e resultados em geometria.

Destaca-se também a importância da interação entre matemáticos de diferentes nações e períodos históricos no avanço do conhecimento. A influência das métricas de Cayley, ampliadas por Darboux, demonstra como ideias matemáticas podem ser reinterpretadas e aplicadas em diferentes contextos, consolidando sua relevância na história da matemática.

REFERÊNCIAS

- CHASLES, Michel. **Rapport sur les progrès de la géométrie**. Imprimerie nationale, 1870.
- CLEBSCH, R. F. A. Revue bibliographique—Clebsch (a.) Theorie der binären algebraischen formen. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques**, v. 3, n. 1, p. 225–234, 1872a.
- CLEBSCH, R. F. A. **Theorie der binären algebraischen Formen**. [S.l.]: Teubner, 1872b.
- CROIZAT, Barnabé. **Gaston Darboux: naissance d'un mathématicien, genèse d'un professeur, chronique d'un rédacteur**. 2016. Tese de Doutorado. Université des Sciences et Technologie de Lille-Lille I.
- DARBOUX, Gaston. **Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires**. Gauthier-Villars, 1873.
- DARBOUX, Gaston. **Leçons sur la théorie générale des surfaces et Les Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal**. Gauthier-Villars, 1894.
- DARBOUX G.; HOÜEL, J. Revue Bibliographique—Heger (D R.) elemente der analytischen geometrie in homogenen koordinaten. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques**, v. 3, n. 1, p. 257–258, 1872.
- DIAS, Leandro Silva. **Geometria e Álgebra nas seis primeiras memórias de Cayley sobre Quantics**. 86 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.
- DIAS, L. S.; GRIMBERG, G. E. Classificação das geometrias: um diálogo entre os textos de Arthur Cayley e de Felix Klein. **Revista Brasileira de História da Ciência**, v. 12, n. 2, p. 207–224, 2019.
- DIAS, Leandro Silva. **As métricas de Cayley e seus desdobramentos (1857-1895)**. 168 f. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Rio de Janeiro, 2023.
- FAURE, C.-R. Transformation des propriétés métriques des figures. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Carilian-Goeury et Vor Dalmont, v. 18, p. 381–388, 1859.

FIEDLER, Wilhelm. **Die Elemente der neueren Geometrie: und der Algebra der binären Formen: ein Beitrag zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen.** Teubner, 1862.

LAGUERRE-VERLY, E. Note sur la théorie des foyers. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Carilian-Goeury et Vor Dalmont, v. 12, p. 57–66, 1853.