Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores). Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Os novos conceitos na geometria: a percepção de Poncelet sobre o princípio da projetividade

New concepts in geometry: Poncelet's perception of the principle of projectivity

Jansley Alves Chaves[1]
Instituto Federal do Sul de Minas – IFSULDEMINAS

Leandro Silva Dias[2]
Instituto Federal do Rio de Janeiro – IFRJ

Gérard Émile Grimberg[3]
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

RESUMO

No transcurso dos séculos XVII e XVIII, o uso de métodos geométricos sem o suporte da álgebra perdeu importância devido ao trabalho de René Descartes. O desenvolvimento de métodos analíticos havia eclipsado as abordagens geométricas tradicionais, levando a uma geometria cada vez mais algebrizada. Porém, após a Revolução Francesa, no final do século XVIII, surgiram trabalhos de geômetras que valorizavam as figuras e as construções visuais como instrumentos fundamentais para o raciocínio matemático. Foi justamente nesse ambiente de "insatisfação" que novas teorias vieram à luz, trazendo um novo ímpeto à geometria e resgatando sua essência visual. Esses novos conceitos como transversais, polos, polares, eixo radical, ponto ideal, similitude, entre outros, ampliaram as possibilidades de exploração da geometria sintética, que se contrapõe à geometria analítica. Essa renovação foi fortemente influenciada pelos trabalhos de Lazare Carnot, com sua *Géométrie de Position* e Gaspard Monge, com a *Géométrie Descriptive*. Inspirados por suas ideias sobre projeções, diversos geômetras desenvolveram novos resultados utilizando métodos geométricos que, em alguns casos, superaram a abordagem algébrica. Esses avanços publicados em obras de Monge, Servois, Carnot, Poncelet, Brianchon, Gergonne e outros, bem como em importantes periódicos da época, como o *Journal de l'École Polytechnique,* a *Correspondance sur l'École Polytechnique* e os *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, além de outros periódicos ao longo do século XIX, deram um impulso ao ramo da Geometria Sintética. Nosso objetivo, neste trabalho, é apresentar alguns desses novos conceitos, suas vantagens, em algumas abordagens, diante da aplicação da álgebra e a importância ao Ensino.

Palavras-chave: Geometria Sintética; Geometria Projetiva; Poncelet.

ABSTRACT

During the 17th and 18th centuries, the use of geometric methods without the support of algebra lost significance due to the work of René Descartes. The development of analytical methods had eclipsed traditional geometric approaches, leading to an increasingly algebraized geometry. However, after the French Revolution in the late 18th century, works emerged from geometers who valued figures and visual constructions as fundamental tools for mathematical reasoning. It was precisely in this atmosphere of «dissatisfaction» that new theories came to light, bringing renewed momentum to geometry and restoring its visual essence. These new concepts—such as transversals, poles, polars, radical axis, ideal points, and similarity, among others—expanded the possibilities of synthetic geometry, which stands in contrast to analytic geometry. This renewal was strongly influenced by the works of Lazare Carnot, with his *Géométrie de Position*, and Gaspard Monge, with *Géométrie Descriptive*. Inspired by their ideas on projections, several geometers developed new results using geometric methods that, in some cases, surpassed the algebraic approach. These advances, published in the works of Monge, Servois, Carnot, Poncelet, Brianchon, Gergonne, and others, as well as in key journals of the time such as the *Journal de l'École Polytechnique*, *Correspondance sur l'École Polytechnique*, and *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* gave significant impetus to the field of Synthetic Geometry throughout the 19th century. The objec-

[1] Doutor pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBTT no Instituto Federal do Sul de Minas (IFSULDEMINAS), Muzambinho, MG, Brasil. E-mail: Jansley.chaves@muz.ifsuldeminas.edu.br.

[2] Doutor pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBTT no Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, RJ, Brasil. E-mail: Leandro.dias@ifrj.edu.br.

[3] Doutor pela Université Paris Diderot, PARIS 7, França. Professor grau 7 associado 2 da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: gerard.emile@terra.com.br.

tive of this study is to present some of these new concepts, their advantages in certain approaches compared to algebraic methods, and their importance in mathematics education.

Keywords : Synthetic Geometry ; Projective Geometry ; Poncelet.

INTRODUÇÃO

No início do século XIX novos conceitos surgiram no campo da Geometria marcando uma fase de renovação e avanço. Entre esses conceitos, destacam-se as Transversais, os Polos e as Polares, o Eixo Radical, o Ponto Ideal, a Similitude e outros que ampliaram significativamente as possibilidades de exploração geométrica. Essas inovações foram amplamente divulgadas em periódicos como o *Journal de l'École Polytechnique*, a *Correspondance sur l'École Polytechnique* e os *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*. Este último o primeiro periódico exclusivamente dedicado à comunidade matemática, já que os outros dois citados são vinculados à *École Polytechnique* e possuía, além das divulgações citadas, características administrativas. Dentre os principais geômetras que impulsionaram essas contribuições, destacam-se Carnot (1753-1823), Monge (1746-1818), Servois (1767-1847), Brianchon (1783-1864), Poncelet (1788-1867) e Gergonne (1771-1859).

Poncelet denominou de *Géométrie rationnelle* as iniciativas que renovaram e atualizaram a geometria antiga, destacando as propriedades projetivas nos trabalhos dos geômetras da época. Essas propriedades tornaram-se o alicerce de sua principal obra, *Traité des propriétés projectives des figures*, publicada em 1822. É nesse tratado que o autor identifica que o princípio da projeção é um elemento comum nos estudos dos geômetras contemporâneos.

Consideramos relevante destacar as contribuições das propriedades projetivas por meio de obras fundamentais, como *Géométrie Descriptive* de Gaspard Monge, *Géométrie de position* de Lazare Carnot e *Solutions peu connues* de Joseph Servois. Essas obras introduzem conceitos inovadores e processos geométricos marcados por abordagens focadas nas relações em vez de equações. A partir desse ponto, a Geometria pode ser dividida em duas abordagens principais: a Sintética, que foca nas relações entre figuras e conceitos, e a Analítica, que utiliza equações para resolver problemas geométricos. Poncelet enfatiza o uso sistemático da projeção como elemento central na resolução de problemas, consolidando a Geometria Projetiva Sintética.

Neste contexto efervescente da Geometria no início do século XIX surge um importante marco em 1810, os *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées,* conhecido como os *Annales de Gergonne*. Sob a liderança de Joseph-Diaz Gergonne, esse periódico tornou-se um ponto de referência para a comunidade matemática ao reunir artigos e promover o intercâmbio de ideias. Os *Annales* desempenharam um papel fundamental na disseminação das novas teorias e ferramentas, atraindo matemáticos de diversos ramos. O periódico também foi essencial para consolidar o caráter rigoroso e inovador da Geometria Sintética, mostrando que ela podia competir de igual para igual com a Análise em termos de sofisticação e aplicação.

Entre os matemáticos que mais contribuíram para esse renascimento geométrico e que abordaremos neste nosso trabalho, podemos destacar:

1) Gaspard Monge pioneiro no desenvolvimento da Geometria Descritiva, área essencial à formação de engenheiros. Poncelet, por exemplo, foi um engenheiro militar formado na *École Polytechnique* e ex-aluno de Monge.

2) Lazare Carnot introduziu ideias que exploravam a simetria e a relação entre os elementos geométricos.

3) François-Joseph Servois, em *Solutions peu connues*, apresentou soluções sintéticas utilizando apenas a régua, resultando em construções simples e elegantes.

4) Poncelet, em *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, consolidou as ideias sobre propriedades projetivas.

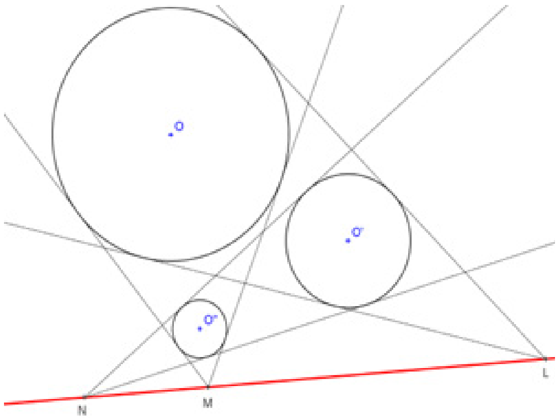
Neste trabalho, exploraremos os conceitos presentes nas obras dos matemáticos mencionados, com ênfase no papel das abordagens sintéticas. Além de abordar o contexto histórico, buscamos contribuir para o ensino da matemática, demonstrando como essas abordagens podem enriquecer o aprendizado ao promover uma compreensão mais ampla e diversificada. Analisaremos as contribuições de cada um dos quatro matemáticos, concluindo com reflexões sobre suas perspectivas e legados.

A GEOMETRIA DESCRITIVA DE MONGE

A Geometria Descritiva representa projeções de figuras com aplicações práticas na Mecânica e na descoberta de novas propriedades sem álgebra ou métricas. Monge disseminou amplamente seus conceitos por meio do ensino na *École du génie de Mézières*, *École Normale* e *École Polytechnique*, onde a geometria descritiva permaneceu relevante no século XIX (Laurentin, 2000).

Podemos apresentar um claro exemplo de propriedades projetivas: a figura abaixo ilustra a projeção de três esferas. O objetivo é traçar um plano tangente às esferas. A aplicação do teorema de Monge, que estabelece que os três pontos de similitude de três pares de esferas são colineares, permite encontrar esse plano tangente de forma precisa.

Figura 1 – Teorema de Monge



Fonte: Chaves (2023, p. 22)

De forma intuitiva, podemos deduzir o teorema de Monge que afirma que os centros de similitude de três circunferências coplanares são colineares. Para isso, podemos seccionar as três esferas pelo plano definido pelos seus três centros e encontrar um plano tangente às três esferas que também é tangente aos três cones tangentes duas a duas às esferas. Dessa forma, podemos concluir que os três vértices desses cones, que estão na interseção dos dois planos tangentes, são colineares, ou seja, a reta de intersecção dos dois planos tangentes contém os três vértices.

A solução requer um processo de raciocínio geométrico que destaca a importância da propriedade projetiva, que é fundamental para a resolução de problemas que envolvam figuras tridimensionais e sua representação em duas dimensões. Segundo o autor, a solução de problemas geométricos requer um processo de raciocínio que exige uma grande habilidade de visualização da figura, o que nem sempre é possível devido à natureza tridimensional do objeto em questão. Poncelet reconhece que a solução encontrada por Monge envolve o uso da projeção como um meio de representar as figuras tridimensionais em duas dimensões, o que permite a realização de cálculos e análises geométricas com maior facilidade e precisão. Em suma, o conceito de projeção é fundamental na Geometria Descritiva.

A GEOMETRIA DE POSIÇÃO DE CARNOT

Lazare Carnot publicou três obras matemáticas que tratam sobre as relações de posição entre as partes de uma figura geométrica, resolução de problemas geométricos baseados nessas relações e propostas sobre transversais.

Carnot sustenta que a Análise Algébrica é inadequada para a geometria quando conduz a manipulação de expressões desconectadas da figura, demonstrando sua limitação em certas situações (Nabonnand, 2006). Ele argumenta que a álgebra lida com equações sem conexão com o significado geométrico, como quantidades negativas e imaginárias.

Propõe uma abordagem diferenciada para a Geometria, dividindo as relações entre partes das figuras em duas categorias: grandezas, que tratam valores absolutos, e posição, que expressam a relação relativa entre elementos. Argumenta que é possível estudar Geometria sem considerar a posição relativa, sugerindo implicitamente a projeção como ferramenta para representar figuras projetadas em planos, preservando sua forma e estrutura. Poncelet também defendia a ideia de Carnot de que a Geometria deveria ser tratada sem se preocupar com a posição relativa dos elementos e figuras geométricas. Assim como Carnot, ele fazia uma distinção entre as relações métricas, que envolvem as grandezas, e as relações descritivas, que envolvem a posição relativa dos elementos da figura. Em seu *Tratado*, Poncelet estudou as propriedades das figuras que permanecem inalteradas por projeções. Isso se refere a encontrar propriedades mais abstrata e geral, que se concentra nas propriedades invariantes sob projeções.

A imagem geométrica de Carnot é muito influente para os trabalhos em Mecânica e há uma analogia muito forte entre as transformações de uma figura e de um sistema mecânico. A analogia com os sistemas mecânicos sugere que ele via a Geometria como uma ciência aplicável. Observaremos isto em Monge e, também, em Poncelet.

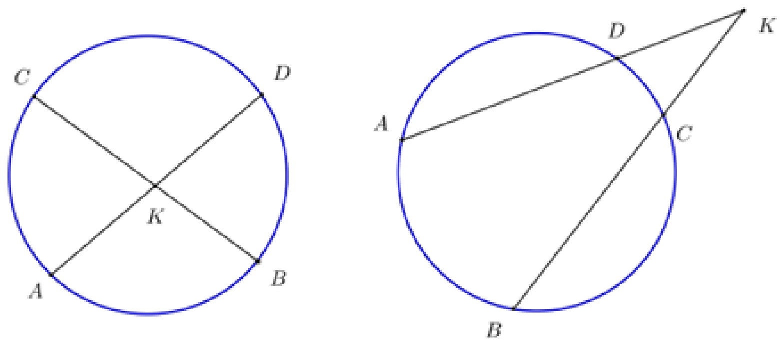
Carnot reconhece que sua geometria se baseia na Geometria elementar e que essa geometria pode ser usada como um meio pedagógico para ensinar rigor e reflexão. Ele também acredita que a Geometria elementar é fundamental para o avanço da Geometria como um todo (Carnot, 1803).

Carnot questiona se a "ciência das projeções" deve ser considerada uma parte integral da Geometria elementar. Ele rejeita a ideia de que essa teoria deve ser estudada apenas em aplicações geométricas, pois considera difícil comparar os princípios com as aplicações. Para Carnot, a noção de problema geral em Geometria surge a partir da consideração da organização e da plenitude dos resultados da Geometria elementar. Ele argumenta que, mesmo sendo uma coleção completa de proposições, a Geometria elementar possui áreas negligenciadas que precisam ser preenchidas para que se alcance a solução desse problema geral. Nesse sentido, nos parece que a "ciência das projeções" é uma dessas áreas negligenciadas que precisam ser estudadas para se compreender a Geometria de forma completa.

Para Carnot, a Síntese era mais iluminada porque permitia trabalhar com objetos matemáticos sem perdê-los de vista, ao contrário da Análise.

Vejamos um exemplo ilustrativo da ideia fundamental que sustenta o conceito de projeção. É importante notar que essa ideia está implícita. Suponha um ponto de projeção no espaço, raios que partem desse ponto e um plano de projeção. Ao deslocar o ponto de projeção, a imagem projetada assume uma nova configuração.

Figura 2 – Invariância



Fonte: Chaves (2023, p. 24)

Na figura 2, é verdadeira a relação *KA.KD=KC.KB*. Na Geometria euclidiana, necessita-se de duas provas separadas, uma para cada posição de *K*, interior ou exterior à circunferência de círculo.

A ideia agora consiste em considerar as duas figuras como correlatas, ou seja, visualizar a segunda figura como uma transformação contínua da primeira figura, através de um movimento contínuo do ponto *K*. É exatamente isso que Poncelet está investigando em sua obra, examinando a mudança do ponto de projeção central e, consequentemente, a permanência de propriedades geométricas.

A ideia de correlação entre figuras geométricas sugere uma nova visão da geometria, na qual os objetos geométricos não são mais considerados isolados, como na concepção euclidiana clássica, mas sim como partes de uma cadeia de figuras continuamente móveis. Essa ideia teve uma influência profunda em Poncelet.

AS SOLUÇÕES POUCO CONHECIDAS DE SERVOIS

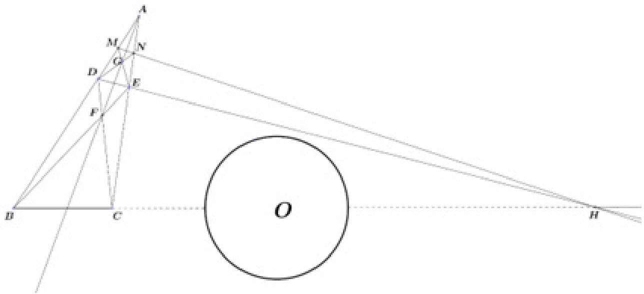
O trabalho de Servois é original por atender às necessidades militares, propondo construções com apenas dois instrumentos: estacas para alinhamentos e corda para medir comprimentos. No plano, usa-se apenas a régua.

Vejamos um exemplo. Determinar, em uma estrada interrompida por uma montanha, o ponto de reinício do outro lado para manter o alinhamento e permitir escavação simultânea em ambos os lados.

> *BC* são dois pontos na estrada cuja extensão procuramos: em um ponto A, fora da reta, e de onde podemos ver *B* e *C*, coloque uma "estaca". Coloque no segmento *AB* uma "estaca" *D*, depois uma terceira "estaca", *E*, em *AC*, de modo que o alinhamento *DE* passe sobre o obstáculo *O* que oculta a estrada definida pelos pontos *B* e *C*. Coloque uma quarta "estaca", *F*, interseção dos dois alinhamentos *BE*, *CD*. Coloque uma quinta "estaca" *G* sobre *AF*, depois uma sexta *M* em *EG* e *AB*, depois uma sétima *N* em *DG* e *AC*, finalmente, coloque uma oitava, *H*, em conjunto com os dois alinhamentos *DE* e *MN*. Esta última "estaca" estará na extensão de *BC* (Servois, 1805, p. 31).

A justificativa desta construção é deduzida da concorrência das retas *BC*, *DE* e *MN* no ponto *H*.

Figura 3 – Invariância

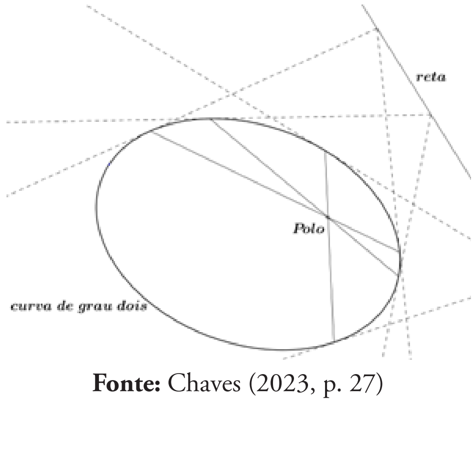


Fonte: Chaves (2023, p. 24)

No primeiro volume dos *Annales de mathématiques pures et appliquées*, Servois apresenta uma importante contribuição para a Geometria: a ideia de pólo de uma reta em relação a uma cônica. Essa ideia permite uma abordagem mais eficiente para a solução de problemas envolvendo cônicas, como a identificação de pontos de tangência, interseções e outros aspectos geométricos relacionados. Servois mostrou que, por meio do conceito de pólo, é possível converter problemas de cônicas em problemas de retas e vice-versa, simplificando a análise e resolução desses problemas:

> Atribuindo-se uma reta e uma curva de segunda ordem, chamo pólo da reta o ponto [...] em torno do qual giram todas as cordas dos pontos de contato dos pares de tangentes à curva dos diferentes pontos da reta. (Servois, 1810, p. 337)[4].

Figura 4 – Polo de uma reta em relação à curva de grau dois



Fonte: Chaves (2023, p. 27)

[4] Annales de mathématiques pures et appliquées, tome 1, Paris : Courcier, 1810-1811, p. 337-341.

O trabalho de Servois destaca a presença da ideia de projeção, o que pode ter sido percebido por Poncelet ao imaginar o movimento do centro de projeção no espaço, causando a rotação das cordas de contato em torno do polo. Em outras palavras, Servois utilizou conceitos de projeção implicitamente para descrever movimentos de objetos geométricos.

PROPRIEDADES PROJETIVAS DAS FIGURAS DE PONCELET

Poncelet em uma carta ao editor dos *Annales de Mathématique Pures et Appliquées* diz que não considera que a geometria racional tenha sempre vantagem sobre a análise, nem que se deva constantemente preferi-la a esta última nas pesquisas puramente geométricas, mas, ao contrário, pensa como Dupin[5]: "cada uma dessas duas ciências tem meios específicos e não poderia, sem grande prejuízo para o avanço da ciência, cultivar uma sem a outra" (Poncelet, 1817, p. 143).

Ele descreve as vantagens da análise algébrica em relação à geometria racional:

> Enquanto a geometria analítica oferece, por seu próprio curso, meios gerais e uniformes para proceder à solução das questões que surgem, à busca das propriedades das figuras; enquanto ela chega a resultados cuja generalidade é sem limites, a outra [geometria racional] procede por acaso; seu progresso depende inteiramente da sagacidade de quem o emprega, e seus resultados são quase sempre limitados ao estado particular da figura em questão. Através dos esforços sucessivos dos geômetras, verdades particulares se multiplicaram sem cessar, mas raramente aconteceu que o método e a teoria geral tenham ganhado com isso (Poncelet, 1822, p. xix).

De acordo com Poncelet, a ampla generalidade dos resultados da Geometria Analítica decorre do uso de "características que não têm valor por si mesmas", que são essencialmente "seres de razão" e parecem ser uma prerrogativa exclusiva da Álgebra.

Diferentemente de Carnot, que rejeita a validade dessas características nas demonstrações geométricas, Poncelet procura estabelecer noções que possam desempenhar um papel equivalente em Geometria:

> Se fosse possível aplicar-lhe o raciocínio implícito, desconsiderando a figura [...], a Geometria ordinária, sem por isso empregar os cálculos e os sinais da Álgebra, provaria, em muitos aspectos, rival da Geometria Analítica (Poncelet, 1822, p. xxij).

Esse raciocínio implícito é aplicável as noções como pontos no infinito, bem como às novas noções de elementos ideais e imaginários na figura (Friedelmeyer, 2007).

Por exemplo, Poncelet ilustra a eficácia das noções de secante ideal e pontos imaginários utilizando uma curva de segunda ordem C, juntamente com a secante MN e o diâmetro conjugado AB (o lugar geométrico dos pontos médios das cordas de mesma direção). Neste caso, o diâmetro AB intersecta a corda MN em seu ponto médio O, as tangentes à curva em M e N se encontram em um ponto O' do prolongamento do diâmetro e O e O' são conjugados em relação a A e B . Isso implica em uma proporção específica:

$$O'A/O'B = AO/OB.$$

[5] Développements des géométrie, 1ª partie, p. 238

Percebe-se que os pontos *O* e *O'* poderiam ser determinados mesmo quando a reta *MN* não intersecta a curva *C*. Nesta situação a reta é chamada de secante ideal, em que os pontos de interseção da reta com a curva são considerados imaginários. Esses conceitos são possíveis graças ao princípio da continuidade, que preserva as propriedades do objeto geométrico, e ao princípio de projeção, que permite mover esse objeto por meio do deslocamento do centro de projeção. Evidenciando a importância destas propriedades.

O método das projeções é uma técnica poderosa e uniforme na geometria, permitindo relacionar figuras em perspectiva a figuras planas. Ele oferece uma abordagem direta para resolver problemas geométricos, preservando as propriedades invariantes dos objetos em diferentes posições espaciais.

Poncelet percebe nos trabalhos de outros geômetras que a ideia do princípio de projeção é utilizada mesmo que implicitamente. Assim, acreditava que existiam duas abordagens igualmente poderosas para melhorar a geometria racional: uma consistia em expandir o escopo das concepções dessa geometria por meio do princípio da continuidade, enquanto a outra utilizava os princípios da doutrina das projeções para avançar de forma rápida e confiante na busca da verdade geométrica.

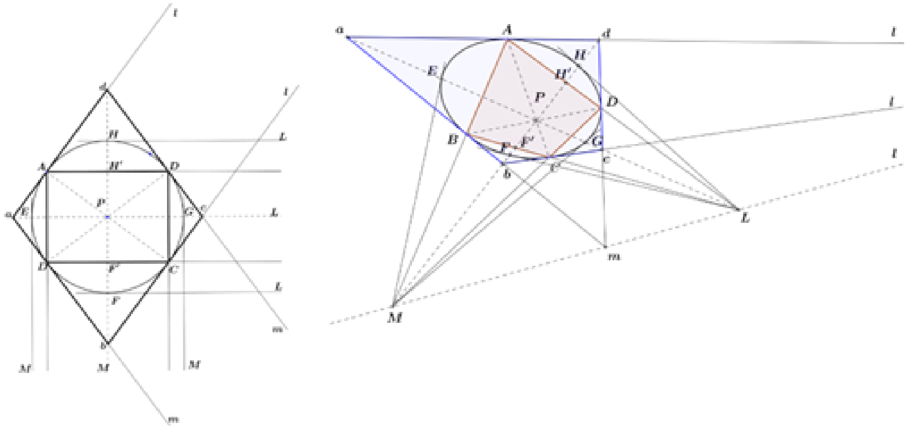
A doutrina das projeções geométricas distingue as propriedades das figuras que permanecem inalteradas pela projeção. Esse método permite identificar propriedades gerais ao demonstrar sua validade em todas as projeções. Projeções mais simples podem facilitar a análise, tornando as propriedades projetivas uma ferramenta eficiente para estudar figuras em perspectiva.

Uma das projeções mais comuns é a cônica ou central, que não afeta a correlação, grau ou ordem da figura original. Geralmente, a projeção também não altera as relações gráficas entre as partes da figura, que dependem apenas da direção indefinida das retas, suas intersecções, contatos e assim por diante.

Poncelet demonstra como determinar as propriedades de quadriláteros inscritos e circunscritos em uma cônica. Ele mostra que qualquer figura formada por uma cônica e uma reta é a projeção de um círculo e uma reta no infinito. Aplicando esse princípio, conclui que o quadrilátero inscrito na cônica, com lados opostos paralelos, é um retângulo, enquanto o circunscrito é um losango.

Uma vez estabelecida a figura mais simples, é fácil perceber que as quatro diagonais dos dois quadriláteros se encontram em um único ponto, ou que os lados opostos dos dois quadriláteros são paralelos e se encontram em um ponto da reta no infinito. Como essas propriedades são projetivas, elas também se mantêm verdadeiras para a figura inicial.

Figura 5 – Quadriláteros inscrito e circunscrito



Fonte: Chaves (2023, p. 30)

Ao fazer uso de pontos no infinito e de uma projeção apropriada, Poncelet é capaz de estender as concepções geométricas e, assim, demonstrar propriedades da figura.

Poncelet destacou a projeção como elemento central na renovação dos métodos geométricos, utilizando-a para avançar rapidamente na descoberta de verdades geométricas. Ele aplicou esse princípio para determinar propriedades de figuras, como quadriláteros inscritos e circunscritos a uma cônica, conforme ilustrado na Figura 4.

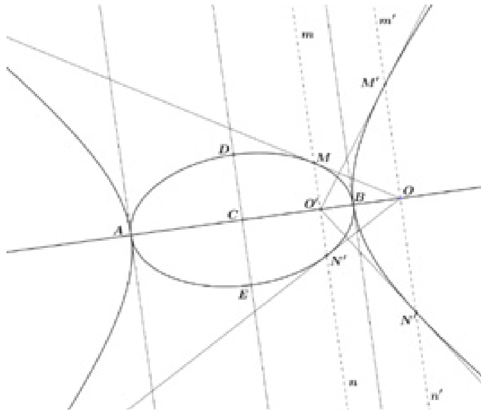
Ele buscava sistematicamente as propriedades que são preservadas por projeção, as propriedades projetivas das figuras. Com essa técnica, ofereceu enormes contribuições à Matemática, permitindo um entendimento mais profundo das relações entre as figuras e seus aspectos geométricos. Essa abordagem independe da posição ou orientação das figuras no espaço, tornando a Geometria Projetiva um novo ramo.

Ao adicionar o princípio da continuidade ao princípio de projeção, Poncelet pôde utilizar o conceito de pontos e retas no infinito, bem como pontos e retas imaginárias no infinito. Ele percebeu que os geômetras usavam o conceito de princípio de projeção, às vezes implicitamente. Um exemplo é a polar do centro de uma circunferência, que pode ser entendida como estando no infinito como o exemplo da Figura 4, onde o encontro das diagonais é o polo da reta no infinito.

Desta forma, pôde identificar dois princípios fundamentais para estudar propriedades projetivas das figuras: o princípio de projeção, que revela as propriedades invariantes sob perspectiva, e o princípio de continuidade, que permite considerar todas as transformações de uma figura. Esses princípios o permitiram conectar elementos ao infinito, imaginários ou não, à ideia de continuidade.

Ao investigar famílias de elipses semelhantes, Poncelet introduz, também, a ideia de pontos imaginários. Isso fica evidente ao estudar o caso de uma família de elipses concêntricas e suas hipérboles complementares, como ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Elipses e suas cônicas suplementares

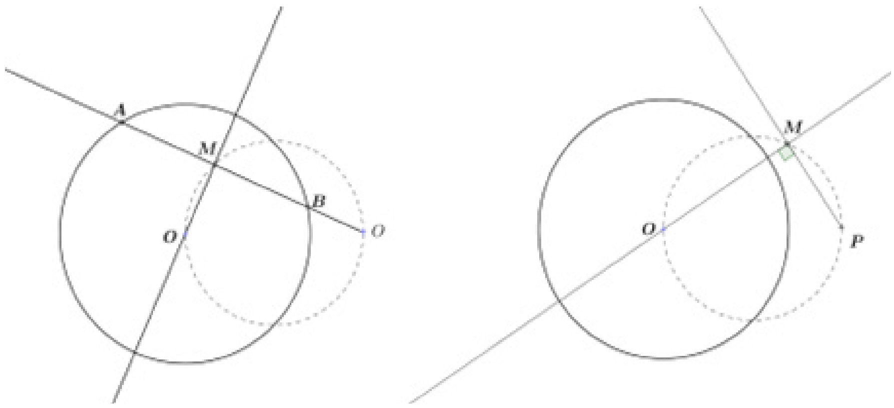


Fonte: Chaves (2023, p. 33)

Poncelet utiliza a noção de diâmetro conjugado para mostrar que o ponto médio da corda *MN* (paralela ao diâmetro *DE*), ou seja, o ponto *O'*, e o ponto *O*, intersecção das tangentes à elipse nos pontos de contato da corda *MN*, estão ambos os incidentes no diâmetro *AB*. Os pontos *A*, *B*, *O* e *O'* são conjugados harmônicos, o que leva Poncelet a considerar a reta *m'n'*, na qual incide o ponto *O* e é paralela à reta *mn*, como uma secante ideal da elipse. Os pontos *O* e *O'* são recíprocos, sendo *O* a intersecção das tangentes reais à elipse e *O'* a intersecção das tangentes imaginárias à elipse. Similarmente, *O* é a intersecção das tangentes imaginárias à hipérbole suplementar, enquanto *O'* é a intersecção das tangentes reais à hipérbole suplementar.

No exemplo seguinte, Poncelet usa de forma intuitiva o princípio de continuidade e de projeção para apresentar o ponto médio da corda apoiada em uma reta secante a uma circunferência de círculo, mesmo quando esta reta deixa de ser secante e se torna exterior à curva. O motivo de sempre se obter o ponto médio por meio de uma construção é que os pontos extremos da corda se tornam imaginários conjugados, e seu ponto médio sempre será real. Vamos observar a construção da Figura 7.

Figura 7 – O ponto é determinado, mesmo na reta exterior



Fonte: Chaves (2023, p. 35)

O ponto *M* é facilmente determinado, mesmo quando a reta de apoio da corda está fora da circunferência. *M* é sempre o ponto médio dos pontos extremos da corda, que podem ser imaginários conjugados. Geometricamente *M* é a interseção da reta externa com a perpendicular ao centro da circunferência. Em resumo, a posição da corda em relação à circunferência não afeta a localização de M como o ponto médio da corda.

CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho é destacar as percepções de Poncelet sobre as propriedades projetivas. Embora outros autores sejam mencionados ao longo do estudo, isso ocorre apenas para demonstrar que, ainda que de forma implícita, já existiam indícios do conceito de projetividade em seus trabalhos. No entanto, é o tratado das propriedades projetivas de Poncelet que consolida e dá visibilidade a essa ideia. Dessa forma, a ênfase deste estudo está em suas contribuições, o que nos conduz nesta conclusão reforçar sua relevância.

Os conceitos explorados por Poncelet em seu Tratado, como transversais, polo e polar, eixo radical e ponto ideal, estabeleceram uma base teórica sólida para a Geometria Projetiva, abordando relações geométricas sob uma perspectiva inovadora. Esses conceitos fundamentais permitiram deduções profundas e abriram novos caminhos para a resolução de problemas clássicos.

O princípio de continuidade, em conjunto com o de projeção, viabilizou o tratamento de elementos abstratos, como pontos no infinito, ressaltando o dinamismo das figuras geométricas, conforme observado por Chaves e Grimberg (2014). Essa integração demonstra que o movimento contínuo do centro de projeção está diretamente associado à manutenção de certas propriedades, ampliando a compreensão da Geometria Projetiva Sintética.

Além disso, a introdução dos pontos imaginários, descritos como pontos cíclicos no infinito, teve um papel fundamental na teoria de interseção de circunferências. Esses pontos não apenas asseguram a continuidade do sistema, mas também expandem suas possibilidades, conferindo maior flexibilidade e profundidade teórica, ainda que sua justificativa seja frequentemente abordada por meio de métodos algébricos.

Assim, o trabalho de Poncelet não só reformulou a geometria tradicional, mas também introduziu uma visão dinâmica e contínua das figuras, combinando rigor matemático com intuição geométrica. Seu legado consolidou a Geometria Projetiva como uma ferramenta essencial para a compreensão das propriedades fundamentais do espaço.

REFERÊNCIAS

CARNOT, Lazare Nicolas Marguerite. **Géométrie de position**. Imprimerie de Crapelet, 1803.

CHAVES, Jansley Alves. **Jean-Victor Poncelet: das fundações da Geometria Projetiva à Patrimonialização de um personagem**. 2023. Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Brasil.

CHAVES, J.A; GRIMBERG, G. E. **O tratado sobre as propriedades projetivas das figuras de Jean-Victor Poncelet : elementos de uma gênese**. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 14, p. 85–106, 2014.

FRIEDELMEYER, J.-P. Le théorème de clôture de poncelet, une démonstration « imparfaite », qui fait toute une histoire. Évelyne Barbin et Dominique Bénard, éditeurs : **Histoire et enseignement des mathématiques–Rigueurs, erreurs, raisonnements**, p. 229–261, 2007.

LAURENTIN, Jerôme. **Fidélités et reconstructions, l'exemple de l'école géométrique française de Gaspard Monge** (1771-1816). Tese (Doutorado) — Paris, EHESS, 2000.

NABONNAND, P. **Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19e siècle**. HAL, 2006. Acessado em 02/05/2023. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-010822/.

PONCELET, Jean-Victor. **Traité des propriétés projectives des figures**. Paris: Bachelier, 1822

PONCELET, J.-V. Réflexions sur l'usage de l'analise algébrique dans la géométrie ; suivies de la solution de quelques problèmes d'dépendant de la géométrie de la règle. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, v. 8, p. 141–155, 1817–1818.

SERVOIS, François Joseph. **Solutions peu connues de différens problèmes de géométrie-pratique**. [S.l.]: Devilly; Paris: Courcier, 1805.

SERVOIS, F.-J. Solution du premier des deux problèmes proposés à. In: **Annales de mathématiques pures et appliquées**. [S.l.: s.n.], 1810. v. 1, n. 1810-1811, p. 337–341.