Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores). Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

O papel dos determinantes em abordagens geométricas do século XIX

The role of determinants in 19th century geometric approaches

Caio Emanuel Curty Lima[1]
Instituto Federal do Rio de Janeiro Campus Volta Redonda – IFRJ

Yasmin Cristina Motta Fernandes[2]
Instituto Federal do Rio de Janeiro Campus Volta Redonda – IFRJ

Magno Luiz Ferreira[3]
Instituto Federal do Rio de Janeiro Campus Volta Redonda – IFRJ

RESUMO

Pode-se observar que atualmente o conceito de determinantes é abordado de forma superficial nas disciplinas que utilizam desse recurso matemático. Comparando como esse assunto é tratado com autores de séculos passados, nota-se uma significativa diferença na profundidade do tratamento dado ao tema. De modo mais específico, para matemáticos do século XIX, os determinantes tinham, também, um papel crucial em problemas geométricos. James Joseph Sylvester, autor do artigo "*On the Intersections, Contacts, and other Correlations of two Conics Expressed by Indeterminate Coordinates, publicado no Cambridge and Dublin Mathematical Journal*", que consideramos central para o presente estudo, por exemplo, utilizava de determinantes em investigações sobre contatos de curvas algébricas, principalmente cônicas. Ele empregava a geometria em coordenadas homogêneas como método para relacionar problemas de contatos com as propriedades dos determinantes. Uma abordagem mais aprofundada do tema era recorrente no Reino Unido durante o mesmo período histórico, sendo incorporada em trabalhos e livros-textos de outros matemáticos renomados, como George Salmon e Norman Macleod Ferrers. O presente trabalho tem como objetivo adaptar um trecho do artigo sobre contatos de Sylvester para a linguagem atual, explicar e exemplificar os estudos abordados, apresentando uma perspectiva alternativa ao que se entende sobre a utilização dos determinantes. Além disso, busca-se compreender a conexão entre Sylvester e os demais autores mencionados.

Palavras-chave: Determinante; Polinômios Homogêneos; Cônicas; James Joseph Sylvester.

ABSTRACT

It can be observed that currently, the concept of determinants is approached superficially in disciplines that utilize this mathematical tool. When comparing how this subject is treated by authors from past centuries, a significant difference in the depth of treatment given to the topic becomes evident. More specifically, for 19th-century mathematicians, determinants also played a crucial role in geometric problems. James Joseph Sylvester, the author of the article "On the Intersections, Contacts, and other Correlations of two Conics Expressed by Indeterminate Coordinates," published in the Cambridge and Dublin Mathematical Journal, which we consider central to the present study, for example, used determinants in investigations into the contacts of algebraic curves, particularly conics. He employed geometry in homogeneous coordinates as a method to relate contact problems with the properties of determinants. A more in-depth approach to the subject was recurrent in the United Kingdom during the same historical period, being incorporated into the works and textbooks of other renowned mathematicians, such as George Salmon and Norman Macleod Ferrers. The present work aims to adapt an excerpt from Sylvester's article on contacts to modern language, explain and exemplify the studies addressed, and present an alternative perspective on the understanding of the use of determinants. Additionally, it seeks to understand the connection between Sylvester and the other mentioned authors.

Keywords: Determinant; Homogeneous Polynomials; Conics; James Joseph Sylvester.

[1] Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: caioecl13@gmail.com.

[2] Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: mottafernandesyc@gmail.com.

[3] Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBTT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: magno.ferreira@ifrj.edu.br.

INTRODUÇÃO

Atualmente vemos e encontramos de maneira comum como forma de interpretação possível para os determinantes, uma função associativa entre matrizes e números reais ou um método para resolução de sistemas lineares. Porém, historicamente, é possível encontrar as mais diversas interpretações e usos que vão além da utilização como um simples operador. O presente trabalho tem como finalidade trazer para a linguagem atual um trecho de uma destas interpretações no artigo *On the Intersections, Contacts, and other Correlations of two Conics Expressed by Indeterminate Coordinates*, publicado no *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* publicado em 1850, pelo matemático britânico James Joseph Sylvester (1814 – 1897). Neste artigo, Sylvester utiliza os determinantes para operações geométricas que se tornaram comuns no Reino Unido do século XIX: pontos de contato em cônicas projetivas através de polinômios homogêneos, polinômios esses que na época expandiram se tornando um objeto importante para elaboração do que ficou conhecido posteriormente como Teoria dos Invariantes. Além disso, a seleção do recorte do texto que há de ser apresentado se dá ao fato de que os autores compreenderem ser material suficiente para analisar a abordagem do instrumento matemático em questão do autor.

É possível associar os determinantes com polinômios homogêneos ao lidar com problemas da Filosofia Natural, como o cálculo do movimento rotacional de corpos rígidos e das desigualdades nos movimentos dos planetas (Katz; Parshall, 2014). Quanto a esse cálculo de movimento, Brechenmacher (2014) aponta que uma das principais autorias foi a de Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) que, em 1775, nas palavras de Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), apresenta a seguinte reflexão nas memórias da academia de ciências de Paris:

> Dei noutra Memória... as expressões das desigualdades seculares dos planetas... mas a falta de utilidade deste cálculo para as necessidades da Astronomia, aliada às dificuldades que apresentava, fizeram-me abandonar esta ideia, e admito que eu não teria retomado o assunto sem ler um excelente livro de memórias sobre as desigualdades seculares do movimento dos nós e da inclinação das órbitas dos planetas que o Sr. de Lagrange acaba de enviar à Academia, e que aparecerá em um dos seguintes volumes. Este ilustre geômetra, por meio de uma transformação bem-sucedida, reduz o problema à integração de tantas equações lineares de primeira ordem quantas forem as incógnitas; ele então fornece um método muito engenhoso para integrá-los e para determinar as constantes contidas na integral, qualquer que seja o número de planetas.[4] (Laplace, 1775, p. 354 Apud. Brechenmacher, 2014, p. 85, tradução nossa).

Apesar do problema ser interessante para a astronomia, a solução traz uma discussão importante sobre transformações lineares. Isso pode ser observado a partir do século seguinte através de matemáticos como Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), que apresenta uma investigação sobre classificação de curvas (Cauchy, 1829) e George Boole (1815 – 1864), que apresenta a propriedade invariante do determinante associado a transformação linear que reduz um polinômio homogêneo à soma de quadrados positivos ou negativos em 1841 (Boole, 1841). Além da relação com a Equa-

[4] J'ai donné dans un autre Mémoire … les expressions des inégalités séculaires des planètes … mais le peu d'utilité de ce calcul pour les besoins de l'Astronomie, joint aux difficultés qu'il présentait, m'avait fait abandonner cette idée, et j'avoue que je ne l'aurais pas reprise, sans la lecture d'un excellent Mémoire Sur les inégalités séculaires du mouvement des nœuds et de l'inclinaison des orbites des planètes que M. de Lagrange vient d'envoyer à l'Académie, et qui paraîtra dans un des Volumes suivants. Cet illustre géomètre, au moyen d'une transformation heureuse, réduit le problème à l'intégration d'autant d'équations linéaires du premier ordre qu'il y a d'inconnues; il donne ensuite une méthode fort ingénieuse pour les intégrer, et pour déterminer les constantes que renferme l'intégrale, quelque soit le nombre de planètes

ção Secular, nome que ficou ligado ao problema proposto por Lagrange, estes trabalhos apresentam uma forte conexão entre os determinantes e problemas de geometria.

Citando Ferreira (2023), nesse contexto Sylvester contribui ao trazer o desenvolvimento das investigações em formas binárias e ternárias (polinômios homogêneos em duas e três variáveis). Após um trabalho importante sobre resolução de sistemas de equações, e até apresentar os determinantes como meio para esta solução, ele percebe uma aplicação importante deste objeto matemático para a interpretação dos contatos entre cônicas representadas em coordenadas indeterminadas, nome dado por ele ao que conhecemos atualmente como coordenadas homogêneas.

> Estou extremamente agradecido pela sua pronta resposta (em um período em que eu sei que seu tempo está muito ocupado com a sua ocupação bifara) e sua referência ao artigo de Salmon. Eu mencionei que uma dúvida pendia sobre a afirmação de que, a menos que as raízes de $\square\ (U + \lambda V)$ fossem todas reais, os pontos de inflexão devem ser todos imaginários. Ao olhar mais para o assunto, acho que a dúvida estava bem fundada, de fato, se todas as raízes são imaginárias, é verdade que as "flexões" são todas imaginárias, mas se duas raízes são reais e duas imaginárias, descobri com alguma surpresa que 4 das flexões (nem mais nem menos) não só podem, mas devem ser reais![5] [Sylvester para Calyley, dez/1850] (Parshall, 1998, p. 28, tradução nossa).

Nesta correspondência entre Sylvester e seu amigo Arthur Cayley (1821 – 1895) estramos o tratamento de problemas sobre pontos específicos de curvas algébricas. Neste caso, os matemáticos discutiam a associação das raízes da expressão $\square\ (U + \lambda V)$[6] e a natureza dos pontos de contato das U e V, a partir de uma combinação linear destes elementos. A expressão utilizada representa o determinante simétrico associado ao polinômio gerado pela combinação das duas cônicas citadas. Esta prática se tornou comum naquele período, tendo sido presente em outras obras e produções matemáticas como os tratados de álgebra moderna de George Salmon na mesma década de 1850 (Salmon, 1859) e a obra sobre coordenadas trilineares, publicada Norman Mcleod Ferrers, em 1861 (Ferrers, 1861).

Dado este contexto, este trabalho apresenta uma adaptação, para linguagem moderna, de termos utilizados ao longo do artigo publicado por Sylvester em 1850, de modo a evidenciar o papel dos determinantes na discussão sobre os contatos de cônicas. Para isso, nos concentramos nos conceitos que podem ser associados a conhecimentos contemporâneos da Álgebra Linear e Geometria Analítica. Além disso, realizamos comparações com as obras de Salmon e Ferrers. Esperamos contribuir para esclarecimentos sobre a pesquisa em História da Matemática e práticas comuns no curso de Licenciatura em Matemática e por vezes desprovidas de sentido.

REFERENCIAL TEÓRICO

Dentro da comunidade científica de pesquisa em história da matemática, pudemos ressaltar alguns autores que contribuíram como guias para debater o tema abordado no presente trabalho.

[5] I am exceedingly obliged by your prompt reply (at a period when I know your time is so much taken up with your bifarious occupation) and your reference to Salmon's paper. I mentioned that a doubt hung over my assertion that unless the roots of $\square\ (U + \lambda V)$ were all real, the points of inflexion must be all imaginary. On looking further into the matter I find that the doubt was well founded, in fact if all the roots are imaginary, it is true that the "flexures"are all imaginary, but if two roots are real and two imaginary, I have discovered with some surprise, that 4 of the flexures (neither more nor less) not only may but must be real!

[6] O símbolo $\square$ trata-se de uma representação do determinante.

Bernardes (2016) em seu artigo "História da noção de matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas" traz diversas reflexões sobre a utilização dos determinantes no século XIX, com foco no Cayley e Sylvester. A autora aborda o mesmo texto selecionado e traz alguns dos usos para o determinante trazidos por Sylvester, como por exemplo, a análise da multiplicidade algébrica das raízes da equação cúbica de $|U + \mu V| = 0$. Apesar da passagem histórica e da análise do mesmo texto do problema dos contatos, a autora não aprofunda a abordagem selecionada pelo presente trabalho, ou seja, o determinante nulo como condição para uma cônica degenerada. Consideramos, então, que ambos trabalhos dialogam e podem vir a servir como complemento um do outro, sem o intuito de esgotar as discussões sobre o tema.

Ferreira (2023) ressalta diversos aspectos importantes das obras de nosso autor foco, como a explicação sobre os contatos e equações homogêneas. Além disso, podemos vinculá-lo à nossa pesquisa ao colocarmos em questão o debate sobre as comunidades científicas de algum tema existente, o que nos incentivou a abordar uma ramificação do debate sobre determinantes, mais especificamente, trazer para a comunidade científica um dos aspectos que Sylvester considerava importante para a utilização do determinante, além do seu diálogo para com outros autores relacionados de mesma época (Salmon e Ferrers).

Além disso, vale ressaltar que não consideramos que o presente trabalho tem o intuito de solucionar problemas históricos ao que se trata do assunto de determinantes e esgotar as discussões, mas sim, enriquecer o debate a partir da leitura e análise de textos desses autores citados anteriormente.

METODOLOGIA

Para compreender o papel dos determinantes na obra de Sylvester de 1850, buscamos evidenciar o modo como suas ideias geométricas se conectam com este objeto matemático. Como forma de evidenciar estas ligações nos concentramos na produção das ilustrações de um texto específico do autor. A escolha do artigo analisado nesta comunicação se deu através da análise prévia das publicações do matemático britânico no início da década de 1850. Este período é apontado por Ferreira (2023) como uma mudança de perspectiva das investigações de Sylvester. O objetivo foi analisar o texto através da abordagem sobre matrizes/determinantes e compreender como certos aspectos presentes nessa obra do século XIX podem ser adaptados para os conceitos didáticos atuais.

Como métodos de pesquisa e análise, seguimos as seguintes etapas que consideramos cruciais: levantamento e análise dos textos originais de Sylvester complementado por fontes secundárias que ajudaram a contextualizar sua publicação. Além disso, o trecho do artigo selecionado foi adaptado para a linguagem moderna, comentado e comparado com outras obras produzidas no período posterior à sua divulgação, selecionadas com base nas discussões sobre cônicas e determinantes. Os textos posteriores foram escolhidos no período posterior a publicação de Sylvester (1850) até o fim do século XIX. Esta opção leva em consideração o período em que o matemático se estabelece como personagem central da produção matemática britânica. Como forma de comparar as obras selecionadas, nos concentramos em evidenciar práticas comuns no artigo central deste estudo e nestas outras publicações.

OS DETERMINANTES E AS CÔNICAS PROJETIVAS, O ARTIGO DE 1850

Antes de partirmos para o artigo, vale ressaltar que selecionamos apenas as primeiras 5 páginas do "*On the Intersections, Contacts, and other Correlations of two Conics Expressed by Indeterminate Coordinates*" para a discussão, pois entendemos, a partir da leitura e análise do texto, já serem suficientes para conseguirmos entender como o autor utiliza o determinante na aplicação geométrica que queremos trazer.

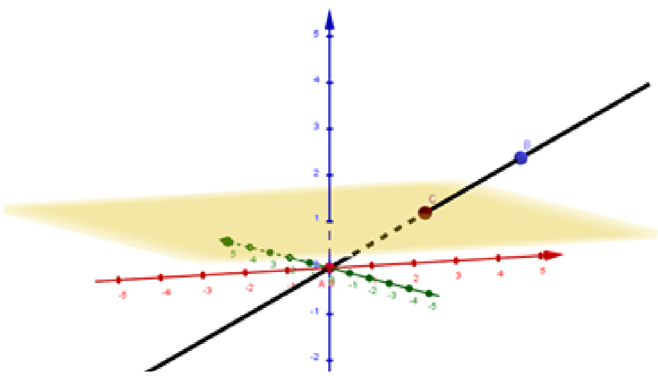
J. J. Sylvester inicia sua publicação com um problema de eliminação de variáves em polinômios homogêneos sugerindo a ideia das intersecções de curvas em cônicas: Dados U = 0, V = 0, sendo estas duas equações homogêneas de segundo grau com coeficientes reais entre as 3 variáveis[7] x, y, z. O modo considerado mais prático e generalizado de determinar as intersecções das cônicas expressas por essas equações seria formá-las a partir de:

$$ax+by+cz = t \qquad (1)$$

$$a'x+b'y+c'z = u \qquad (2)$$

Vale ressaltar que essas são equações lineares referentes as retas que ele acrescenta às duas formas quadráticas para U e V de modo a poder lidar mais facilmente com os sistemas de equações ou coexistências (nome dado pelo autor para sistemas). A partir disso, o autor busca observar como as propriedades dos contatos das cônicas se configuram a partir de determinantes associados aos polinômios homogêneos, através de um sistema de coordenadas que considera a interseção de uma reta qualquer com um plano z = 1, onde se forma uma projeção da reta. Exemplificando, ao traçar uma reta r: (5,3,2):

Figura 1 - Ponto em coordenadas homogêneas



Fonte: Elaborada pelos autores.

Pelo processo de eliminação das variáveis x, y, z podemos chegar em uma equação biquadrática entre t e u. A natureza dessas interseções depende diretamente da natureza das raízes da biquadrática formada. Assim, a partir das condições expressas podemos dizer onde teremos casos de todas as interseções sendo reais ou imaginárias, ou um par real e outro imaginário. Essas condições dependem dos sinais de certas funções dos coeficientes das dadas equações.

[7] O autor utiliza as letras gregas ξ, η e ς para representar coordenadas homogêneas. Neste trabalho, utilizaremos uma notação moderna no intuito de esclarecer os exemplos, não alterando os resultados dos exemplos.

A partir das formações proporcionais das coordenadas de x : y : z correspondentes aos conjuntos proporcionais de t : u, chegaremos em um padrão dado por:

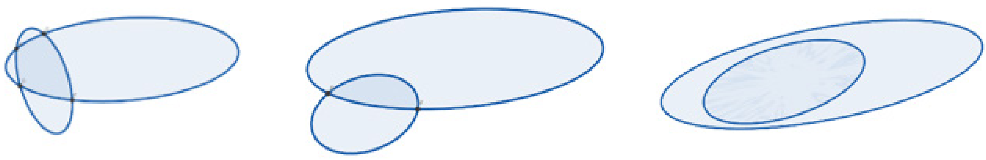
$$\begin{array}{ll} \frac{x_1}{z_1} = a + b\sqrt{(-1)} & \frac{y_1}{z_1} = c + d\sqrt{(-1)} \\ \frac{x_2}{z_2} = a - b\sqrt{(-1)} & \frac{y_2}{z_2} = c - d\sqrt{(-1)} \\ \frac{x_3}{z_3} = \alpha + \beta\sqrt{(-1)} & \frac{y_3}{z_3} = \gamma + \delta\sqrt{(-1)} \\ \frac{x_4}{z_4} = \alpha - \beta\sqrt{(-1)} & \frac{y_4}{z_4} = \gamma - \delta\sqrt{(-1)} \end{array} \quad (2)$$

O autor, então, a partir da análise das interseções, traça as seguintes conclusões:

> Se todos os quatro pontos do quadrângulo de intersecções forem todos reais, os três vértices e três pares de lados são todos reais. Se somente dois pontos do quadrângulo são reais, um vértice e um dos três pares de lados serão reais; sendo os outros dois vértices e dois pares de lados imaginários. Se todos os quatro pontos do quadrângulo são irreais, um par de lados vai ser real e os outros dois pares imaginários, assim como no último caso; Mas todos os três vértices permanecerão reais, como no primeiro caso. Portanto temos uma direta e simples caracterização para distinguir o caso de intersecções mistas de intersecções totalmente imaginários ou totalmente reais; nominalmente, essa equação cúbica de raízes de cada coordenada dos vértices são funções lineares reais terá um par de raízes imaginárias. Esta é a única e inequívoca condição necessária[8] (Sylvester, 1850, p. 263, tradução nossa).

De uma perspectiva geométrica visual, o autor pretende representar a interseção de duas cônicas quaisquer, onde poderemos encontras quatro interseções reais, duas reais e duas imaginárias ou todas as interseções complexas, respectivamente:

Figura 2 - Tipos de interseção das cônicas



Fonte: Elaborada pelos autores.

As equações formadas em questão são o produto do determinante de x, y, z em relação ao feixe de cônicas λU + μV. Se escrevemos as coordenadas proporcionais de x, y, z dos vértices de λU + μV, podemos chegar em:

$$AB - C2 : C'A' - B'B : B'C' - A'A \ (3)$$

[8] If all the four points of the quadrangle of intersection are real, the three vertices and the three pairs of sides are all real. If only two points of the quadrangle are real, one vertex and one of the three pairs of sides will be real; the other two vertices and two pairs of sides being imaginary. If all four points of the quadrangle are unreal, one pair of sides will be real and the other two pairs imaginary, as in the last case; but all the three vertices will remain real, as in the first case. Hence, we have a direct and simple criterion for distinguishing the case of mixed intersection from intersection wholly real or wholly imaginary; namely, that the cubic equation of the roots of which the coordinates of the vertices are real linear functions shall have a pair of imaginary roots. This is the sole and unequivocal condition required

Para chegar nesse caso, devemos efetuar o determinante de λU + μV. A partir do método de eliminação por determinantes menores, encontrando coordenadas em z = 1. Com isso, nos resta apenas os coeficientes maiores e, fazendo deles coordenadas, encontramos justamente o citado acima.

Se as equações em λ:μ nominados[9] $\square_{xyz}(\lambda U + \mu V) = 0$ tem um par de raízes imaginárias, ou seja, se $\square_{\lambda\mu}\square_{xyz}(\lambda U + \mu V)$ é positivo, a interseção de U e V serão um "tipo misto", onde as duas cônicas terão dois pontos reais em comum.

Vale ressaltar que $\square_{xyz}(\lambda U + \mu V) = 0$ e $\square_{\lambda\mu}\square_{xyz}(\lambda U + \mu V)$ trata-se de dois determinantes que são utilizados para definição dos pontos de interseção das cônicas. Com o determinante da matriz associada à forma quadrática sendo nulo garante-se que as cônicas se degenerem. Para isso é necessário encontrar as raízes do polinômio característico, ou seja, os valores de (λ ∶ μ) que fazem com que o determinante da matriz associada à forma quadrática seja zero.

Dadas duas cônicas:

$$\begin{aligned} U &= ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'zx+2c'xy \\ V &= \alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+2\alpha' yz+2\beta' zx+2\gamma' xy \end{aligned} \qquad (4)$$

Faz-se, $A = \lambda a+\mu\alpha$, $B = \lambda b+\mu\beta$, $C = \lambda c+\mu\gamma$, $A'=\lambda a'+\mu\alpha'$, $B'=\lambda b'+\mu\beta'$, $C'=\lambda c'+\mu\gamma'$.

Assim, uma nova cônica $W= \lambda U+\mu V=Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy$ surgirá.

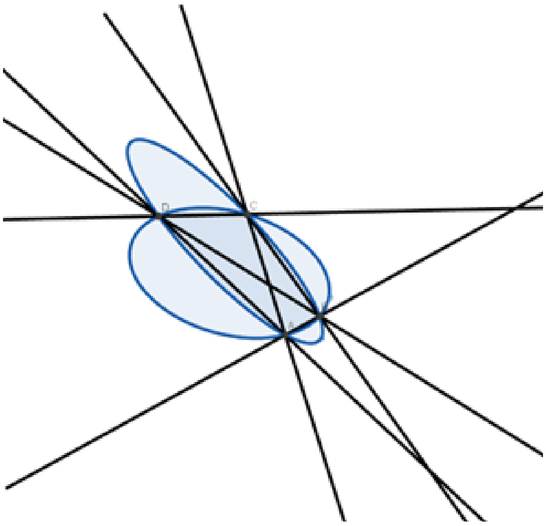
Sendo assim, operando o determinante de $\square_{\lambda\mu}\square_{xyz}(\lambda U + \mu V)$ com valores quaisquer, conseguimos encontrar a natureza dos pontos de interseção dados por:

$$(\lambda U + \mu V) = \begin{vmatrix} A & C' & B' \\ C' & B & A' \\ B' & A' & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a + \mu\alpha & \lambda c' + \mu\gamma' & \lambda b' + \mu\beta' \\ \lambda c' + \mu\gamma' & \lambda b + \mu\beta & \lambda a' + \mu\alpha' \\ \lambda b' + \mu\beta' & \lambda a' + \mu\alpha' & \lambda c + \mu\gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Com esta definição de Sylvester, podemos definir as interseções das retas dentro das cônicas. Neste caso, os polinômios podem ser escritos de forma matricial e, quando o determinante dos coeficientes é igual a 0 temos uma cônica degenerada. Nesse caso de Sylvester, são 3 valores que geram os pares de retas, como podemos ver na Figura 3:

[9] No material original Sylvester encontramos $\square_{\lambda\mu}\square_{\xi\eta\zeta}(\lambda U + \mu V)$. As letras gregas ξηζ são comumente utilizadas nas operações com cônicas no século XIX.

Figura 3 - Quadrângulo formado pela interseção das retas das cônicas degeneradas



Fonte: Elaborado pelos autores.

Essas retas formadas passando pelas interseções das cônicas só podem ser definidas a partir das cônicas degeneradas que tem como característica o determinante nulo encontrado no exemplo anterior.

CONSIDERAÇÕES DOS AUTORES ACERCA DO TRABALHO DE SYLVESTER

Nesta seção separamos aspectos que consideramos importantes para compreender melhor o texto e exemplificar certos pontos, a fim de enriquecer o debate e essa aproximação com a linguagem moderna para o texto.

Pudemos perceber durante a leitura do artigo de Sylvester que o autor em 1850 não só já utilizava do termo determinante enquanto narrava suas operações, como o associava sempre a funções ligadas a polinômios homogêneos. Outro momento que vale ressaltar é que o autor também utilizou de dados retirados da operação por determinantes menores quando busca as coordenadas dos vértices em $\lambda U + \mu V$. Apesar de não utilizar o termo, vindo a trazer essas noções apenas em outra publicação posterior de mesmo ano na *Philosophical Magazine* de acordo com Bernardes (2016), já podemos perceber que se trata disso pois podemos encontrá-los a partir da separação em coordenadas dos menores presentes no determinante da equação 5.

Figura 4 - Quadrângulo formado pela interseção das retas das cônicas degeneradas

The equation in question is, or ought to be, well known to be the determinant in respect to ξ, η, ζ of $\lambda U + \mu V$. In fact, if we write

$$U = a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2a'\eta\zeta + 2b'\zeta\xi + 2c'\xi\eta,$$

$$V = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 + 2\alpha'\eta\zeta + 2\beta'\zeta\xi + 2\gamma'\xi\eta,$$

$$\lambda U + \mu V = (a\lambda + \alpha\mu)\,\xi^2 + \&c. = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2A'\eta\zeta + 2B'\zeta\xi + 2C'\xi\eta,$$

the ratios of the coordinates ξ, η, ζ of the vertex of $\lambda U + \mu V$ may easily be shown to be identical with

$$AB - C^2 : C'A' - B'B : B'C' - A'A,$$

and will be real or imaginary as $\lambda : \mu$ is one or the other.

Fonte: *On the Intersections, Contacts, and other Correlations of two Conics Expressed by Indeterminate Coordinates* (Sylvester, 1850)

Isso posto, consideramos que a abordagem de Sylvester busca um propósito e uma associação do determinante com "algo", nesse caso, sendo uma forma algébrica através da representação de polinômios homogêneos, o que, se compararmos com as operações que realizamos hoje em dia, realizamos operações geralmente de determinantes "quaisquer" de tamanho n x n sem necessariamente uma contextualização, associação ou necessidade específica para tal.

OUTRAS OBRAS DO SÉCULO XIX

O texto de Sylvester apresentou repercussões em livros-textos e apresentaram desdobramentos importantes, como foi o caso do *Lessons Introductory to the Mordern Higher Algebra* (Salmon, 1859). Sendo a primeira obra elaborada com intuito de divulgar novas técnicas desenvolvidas pelos britânicos para investigações sobre as relações entre os polinômios homogêneos e as transformações lineares, sendo conhecido como Teoria dos Invariantes. Além de apresentar as práticas citadas, o autor se concentrou em interpretações geométricas dos resultados. Este é o caso da seção 140 de seu livro (Salmon, 1859, p. 108), onde o autor destaca a característica covariante do que ele chama de *Pencil* (nome dado à combinação $\lambda U + \mu V$).

Outro caso que dialoga com o material deste trabalho é o capítulo VIII do livro *An Elementary Treatise on Trilinear Co-Ordinates* (Ferrers, 1861, p. 136). Ferrers se preocupa em trabalhar os conceitos, em suas próprias palavras, de Geometria Moderna ao destrinchar as coordenadas trilineares. Coordenadas trilineares nada mais são que um tipo de coordenada homogênea onde a posição de um ponto num plano é determinada pela razão de suas distâncias a partir de três retas distintas dadas neste plano.

Em determinado momento, Ferrers analisa as interseções de cônicas. Durante a leitura do texto, compreendemos que o autor considera o tema importante para entender as coordenadas trilineares, pois a estrutura do livro-texto destaca conhecimentos a partir de capítulos e/ou subtópicos, como a distância entre dois pontos num plano, condição para perpendicularidade, condições para formação de parábolas, entre outros, sendo um desses capítulos justamente o XVIII entitulado "*On the intersection of conics, on projections, and on the determination of a conic from five given geometrical conditions*", que trata do assunto de interseções de cônicas a partir de condições geométricas. Inicialmente, o autor fala de diversos exemplos de operações com cônicas e análise sobre o comportamento das retas no mesmo plano das cônicas em questão. Mas para além disso, podemos perceber que em seu texto, o autor trás as mesmas considerações sobre a definição de curvas degeneradas e a interseção de retas com seus padrões (imaginárias e/ou reais).

Figura 5 - Trechos da autoria de N. M. Ferrers

ON THE INTERSECTION OF CONICS, AND ON PROJECTIONS.

1. WE shall here say a few words on the subject of the intersection of two conics, as an acquaintance with this branch of the subject will be useful in future investigations.

Since every conic is represented by an equation of the second degree, it follows that any two conics intersect in four points, which may be (1) all real, (2) two real and two imaginary, or (3) all imaginary.

INTERSECTION OF CONICS. 147

If the left-hand member of this equation break up into two factors, the conic degenerates into two straight lines, real or imaginary. The condition that this should happen is

$$\begin{vmatrix} u+pk, & w'+r'k, & v'+q'k \\ w'+r'k, & v+qk, & u'+p'k \\ v'+q'k, & u'+p'k, & w+rk \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots (4),$$

a cubic for the determination of k, of which the roots are either all real, or one real and two imaginary. If the roots be all real, the vertices of the quadrangle, which will be the centres of the several conics included in the form (3), will be all real. If one root only be real, then one vertex only of the quadrangle will be real. We proceed to consider how the reality of the vertices L, M, N depends upon that of the points P, Q, R, S.

Fonte: *An Elementary Treatise on Trilinear Co-Ordinates* (Ferrers, 1861)

Nestes trechos recortados, de forma traduzida e resumida, o autor trás conceitos estabelecidos por Sylvester em sua autoria (ressaltando a importância do determinante nulo para se estabelecer uma cônica degenerada) levando-nos a entender melhor o contexto daquela época, onde os autores britânicos já tinham esses conhecimentos pré-estabelecidos devido a comunidade cientifica criada, além da relevância de tais estudos produzidos.

CONCLUSÕES

Em suma, podemos afirmar que os saberes que rondam o assunto dos determinantes dentro da matemática hoje em dia dificilmente abordam da mesma forma ou com a mesma utilização prática de autores do século XIX. No que se trata dos problemas de contatos em curvas algébricas, podemos, ainda, analisar o quanto para aquela comunidade científica da época, tais assuntos eram de suma importância para a fomentação de conhecimento.

Desta forma, a adaptação do texto de Sylvester proporciona uma perspectiva mais ampla de um objeto matemático que tem sido apresentado de forma descontextualizada. Os desdobramentos encontrados em outras obras do século XIX caracterizam a relevância deste tipo de abordagem na época, fator que reforça a importância de sua retomada em dias atuais.

Isto posto, nossa intenção não foi a de esgotar o estudo dos determinantes e sua utilização no decorrer da história, porém, entendemos e enxergamos, então, que através deste trabalho, em que destacamos autores que utilizam os determinantes como meio para compreender a natureza dos pontos de contatos entre duas cônicas, podemos ter a oportunidade da expansão do ensino e conhecimentos sobre Álgebra Linear a partir de conceitos importantes citados durante a presente pesquisa.

REFERÊNCIAS

BERNARDES, A.; ROQUE, T. História da noção de matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 16, n. 31, p. 01-19, 2016.

BOOLE, G. Exposition of a general theory of linear transformations. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 3, p. 1–20, 1841.

BRECHENMACHER, F. Lagrange and the secular equation. **Lettera Matematica**, Springer, v. 2, n. 1, p.79–91, 2014.

CAUCHY, A.-L. Sur l'équation l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes. **Oeuvres Completes (IIeme Série)**, v. 9, 1829.

FERREIRA, M. L. **JJ Sylvester e a comunidade formada através do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes**. 2023. Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Brasil.

FERRERS, N. M. **An elementary treatise on trilinear co-ordinates, the method of reciprocal polars, and the theory of projections**. Cambridge: Macmillan and Co., 1861.

KATZ, V. J.; PARSHALL, K. H. **Taming the unknown: history of algebra from antiquity to the early twentieth century**. Princeton: Princeton University Press, 2014.

PARSHALL, K. F. **James Joseph Sylvester: Life and work in letters**. [S.l.]: Oxford University Press, 1998.

SALMON, G. **Lessons introductory to the modern higher algebra**. 1. ed. [S.l.]: Hodges, Smith, and Company, 1859.

SYLVESTER, J. J. On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 5, n. 262-282, p. 162, 1850.