

Geometria de situação: investigação de sua história pela metodologia da rede de textos

Geometry of situation: investigation of its history using the methodology of network of texts

Cleber Haubrichs¹  

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

RESUMO

A geometria de situação foi uma área de pesquisa em matemática que floresceu nas décadas de 1810 e 1820 na França. Trata-se de uma geometria em que a principal característica é que os problemas, demonstrações e teoremas podem ser organizados aos pares, visto que formalmente há uma simetria nos seus enunciados. Um exemplo elementar dessa simetria de sentenças matemáticas é o par de afirmações “dois pontos distintos num plano determinam uma única reta” e “duas retas distintas num plano determinam um único ponto”. Já a metodologia da rede de textos é uma metodologia heurística de pesquisa usada recentemente em história da matemática. Consiste em estudar de maneira sistemática um coletivo de textos, visando rastrear práticas matemáticas compartilhadas por uma comunidade. Neste artigo eu mostro detalhadamente como utilizei a metodologia da rede de textos para investigar e redigir uma história da geometria de situação.

Palavras-chave: geometria de situação; rede de textos; geometria no século dezanove; métodos quantitativos em história.

ABSTRACT

Geometry of situation was an area of research in mathematics that flourished in the 1810s and 1820s in France. It is a geometry in which the main characteristic is that problems, demonstrations and theorems can be organized in pairs, since there is formal symmetry in their statements. An elementary example of this symmetry in mathematical sentences is the pair of statements “two distinct points in a plane determine a single straight line” and “two distinct straight lines in a plane determine a single point”. On the other hand, the methodology of network of texts is a heuristic research methodology recently used in the history of mathematics. It consists of systematically studying a collective of texts, aiming to trace mathematical practices shared by a community. In this article I show in detail how I used the methodology of network of texts to investigate and write a history of geometry of situation.

Keywords: geometry of situation, network of texts, geometry in the nineteenth century, quantitative methods in history.

¹ Doutor em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (UFRJ) e Docteur en Philosophie et Histoire des Sciences (Université de Lorraine). Professor Titular no IFRJ, Nilópolis, RJ, Brasil. E-mail: cleber.santos@ifrj.edu.br.

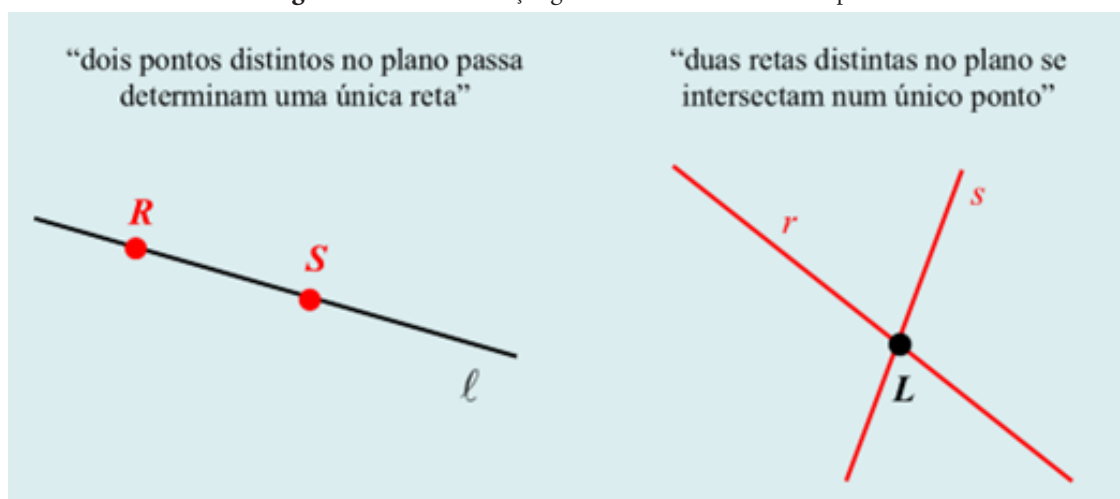
O QUE É A GEOMETRIA DE SITUAÇÃO

Para começar a exposição, preciso logo dizer o que é a “geometria de situação”. Inicialmente vou dar uma amostra ingênua. A seguir vou dar um exemplo um pouco mais sofisticado.

Enunciados aos pares

Pensemos nas duas seguintes proposições de geometria ilustradas na figura 1.

Figura 1 – Duas sentenças geométricas enunciadas em par



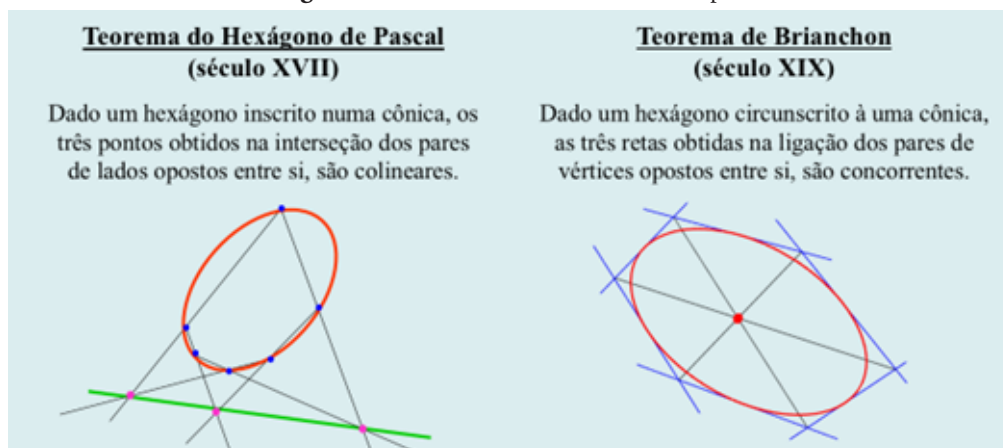
Fonte: Elaborada pelo autor

Observando essas duas proposições, e sem levar em consideração o arcabouço matemático no qual essas sentenças são válidas, mas olhando estritamente para os enunciados, parece que a gente percebe que há uma certa simetria no vocabulário. De fato, onde aparece palavra “pontos” numa sentença, na outra aparece “retas”. Além disso, ambas as sentenças começam com dois objetos da mesma natureza dados e chega-se num terceiro objeto que é único e de outra natureza. Essa simetria nos enunciados indica que parece ser possível passar de um enunciado ao outro meramente por uma troca de vocabulários.

Agora vou dar uma amostra um pouco mais sofisticada de enunciados emparelhados. Trata-se dos teoremas de Blaise Pascal (1623-1662) e de Charles Julien Brianchon (1783-1864), ilustrados na figura 2.

Mais uma vez, se a gente observar os dois enunciados postos lado a lado, percebe-se uma simetria nessas frases, como se fossem a *cara* e a *coroa* de uma mesma moeda. Nas duas sentenças temos hexágonos relacionados à cônica em que, por um lado, o polígono aparece inscrito na curva, e na outra sentença o polígono está circunscrito à curva. Se por um lado começamos com três pontos obtidos na interseção de pares de lados opostos, do outro lado começamos com três retas obtidas na ligação de pares de vértices opostos. Por fim, um dos teoremas termina com a colinearidade dos três pontos, enquanto que o outro termina com a concorrência das três retas.

Figura 2 – Dois teoremas enunciados em par



Fonte: Elaborada pelo autor

Geometria de Situação

O fenômeno dos enunciados aos pares caracteriza a *geometria de situação*. Essa geometria foi percebida inicialmente pelos geômetras franceses em atividade nas décadas de 1810 e 1820. Esses geômetras, demonstrando teoremas “avulsos”, começaram a perceber que muitos desses enunciados poderiam ser pareados um com o outro, poderiam ser juntados em pares, ainda que a demonstração de cada um pudesse ser feita independentemente da demonstração de seu par. Houve então a percepção de que existe todo um ramo da geometria que coloca teoremas, problemas, enunciados, proposições e demonstrações “lado a lado”. Quando essa percepção foi notada, o matemático Joseph Diez Gergonne (1771-1859) sistematizou diversos resultados dispersos, apresentou uma axiomatização formal para esses enunciados, a partir do que ele chamou de “*princípio da dualidade*”, e por fim ele mesmo deu a essa área de pesquisa o nome de geometria de situação (Gergonne, 1826).

Além da apresentação formal de Gergonne, outro geômetra elaborou uma justificativa para o fenômeno dos enunciados aos pares. Jean Victor Poncelet (1788-1867), explicou os enunciados aos pares baseado numa construção geométrica que ele nomeou de “*reciprocidade polar*” (Poncelet, 1829). Gergonne e Poncelet, que a princípio tinham uma relação cordial um com o outro, a partir das justificativas elaboradas, acabaram entrando numa disputa, que se tornou, aliás, muito severa. O fato é que as explicações dos dois geômetras eram igualmente boas para responder diversos (mas não todos os) aspectos da geometria de situação. Mas também ambas as teorias tinham “pontos cegos”, lacunas, ausências e até sutis erros matemáticos na elaboração teórica deles para abordar o fenômeno.

Muitos outros geômetra franceses se engajaram nessa pesquisa. Alguns aderindo irrestritamente ao princípio da dualidade de Gergonne, outros defendendo o princípio da reciprocidade polar de Poncelet, outros ainda tentando conciliar o melhor das duas abordagens. E todos eles acrescentando novos exemplos, novos problemas, novas conjecturas, novas definições e novos resultados para encorpar a geometria de situação. Tudo isso foi publicado em artigos no periódico *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* (1810-1832). Esse periódico, de tiragem mensal, era editado pelo próprio Gergonne e por isso era mais conhecido na época (e até hoje pelos historiadores) com o apelido de *Annales de Gergonne*. Mais adiante voltarei a falar sobre esse jornal, pioneiro e especializado em publicar pesquisas matemáticas.

A METODOLOGIA DA REDE DE TEXTOS

Em minha tese de doutorado escrevi uma biografia científica de Étienne Bobillier (1798-1840), um dos geômetras que na década de 1820 se engajou na pesquisa da geometria de situação (Haubrichs, 2015). A tese é muito ampla e cobre diferentes temas, atividades e instituições em torno de Bobillier. Em particular, há um longo trecho da tese que trata da produção coletiva da geometria de situação nas décadas de 1810 e 1820. Esse trecho selecionado, reelaborado e contextualizado tornou-se o livro “Geometria de Situação: problemas e teoremas aos pares no século dezenove”, publicado pela editora da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) em 2024. Para esta parte da minha tese, a principal metodologia de pesquisa que utilizei foi a metodologia da rede de textos.

No que se segue vou apresentar sucintamente esta metodologia e apontar três exemplos recentes de pesquisas que utilizaram a mesma metodologia (ou semelhante). Depois vou relatar como eu selecionei e utilizei uma rede de textos na minha pesquisa para investigar a geometria de situação.

Dizendo numa definição inicial e um pouco ingênua, uma rede de textos é simplesmente um coletivo de textos. Para estudar uma rede, não somente se estuda cada texto isoladamente, em si mesmo, olhando para os seus resultados ou para o que o texto diz. Mas trata-se de estudar o coletivo de textos naquilo que eles têm em comum ou em contraposição, naquilo que eles têm de semelhanças ou diferenças. Pretende-se, a partir desse coletivo de textos, obter um panorama de uma área de pesquisa ou de uma disciplina matemática.

Esse coletivo de textos não necessariamente é uma “rede de referências bibliográficas”. Não se trata, por exemplo, de partir de um texto e identificar quais foram os demais textos citados naquele que se está lendo inicialmente. Também não se trata necessariamente de uma “rede de pessoas”. O objetivo não é apenas conhecer que são os colaboradores mais próximos e/ou mais frequentes de um determinado matemático.

Uma rede de texto é principalmente uma rede de *compartilhamento de práticas*. O historiador francês Frédéric Brechenmacher define bem especificamente uma rede de textos assim:

Uma rede de textos pode ser entendida como um espaço de interações entre as diferentes ações concretas de indivíduos e grupos de indivíduos, um espaço de circulação de *práticas matemáticas*: formas de representação, procedimentos operatórios, ideais, valores, interconexão entre vários domínios científicos. (...) Os significados de certas categorias (como [por exemplo] *análise, qualitativa, equação* etc) estão implicitamente definidas dentro de tais espaços de circulação. (...) Uma análise da rede dá acesso ao significado que tais termos tem numa determinada região e num intervalo determinado de tempo” (Brechenmacher, 2013, pp. 3, 31, 50, 51, 58; grifos do autor).

Eu chamo atenção para essa definição e destaco a expressão “espaço de circulação de práticas matemáticas”, bem como “determinada região” e “intervalo determinado de tempo”. Pretendo ilustrar esses três aspectos nas próximas páginas quando descrever o uso que fiz das redes de textos.

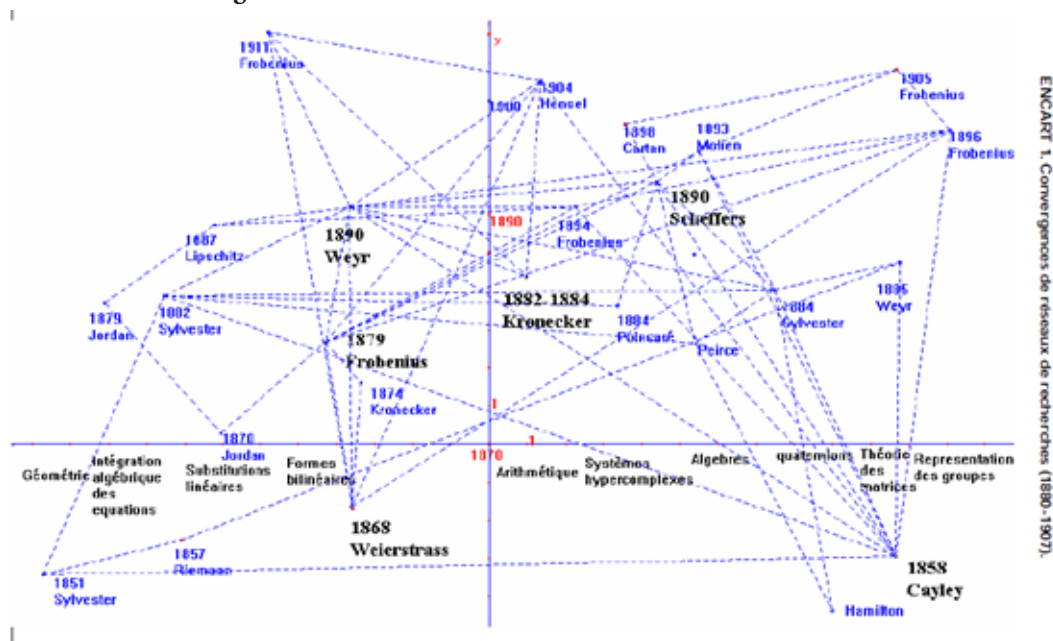
Três pesquisas recentes usando a metodologia da rede de textos

Apresento agora três exemplos de usos de redes de textos em trabalhos relativamente recentes em história da matemática: a tese de doutorado de Frédéric Brechenmacher, uma pesquisa original de Tatiana Roque e a tese de doutorado de Magno Luiz Ferreira. Começo informando que nos três

exemplos os pesquisadores apresentaram as suas redes de textos com imagens em forma de grafo, onde os vértices são nomes próprios de matemáticos, normalmente colocados com datas ao lado, e as arestas ligando os diferentes vértices são indicações da circulação de práticas compartilhadas que esses pesquisadores encontraram entre um autor ou outro nas suas redes de textos.

A tese de doutorado de Frédéric Brechenmacher foi defendida em 2006 na Escola de Altos Estudos em Ciências Sociais de Paris (EHESS), na França, sob orientação de Jean Dhombres. É uma tese que versa sobre o Teorema da Forma Canônica de Jordan, do período de 1870 até 1930, suas diferentes elaborações, apresentações e enunciados. Nas redes de textos de Brechenmacher, como se pode observar na figura 3, abaixo, temos um eixo horizontal onde são colocadas áreas da matemática, como por exemplo, representações de grupos, teoria das matrizes, quaternions, álgebras, etc, enquanto que no eixo vertical são colocadas datas. No cruzamento dos dois eixos está a data 1870, o eixo vertical subindo avança para 1890 e por aí vai. Então os diversos vértices que são os nomes próprios de autores, cujos textos fazem parte da rede, como por exemplo, Cayley, Kronecker, Frobenius, Weierstrass, etc, são colocados nesse plano cartesiano nas coordenadas (área, data) e são ligados uns aos outros pelas arestas indicando ali a circulação de certas práticas.

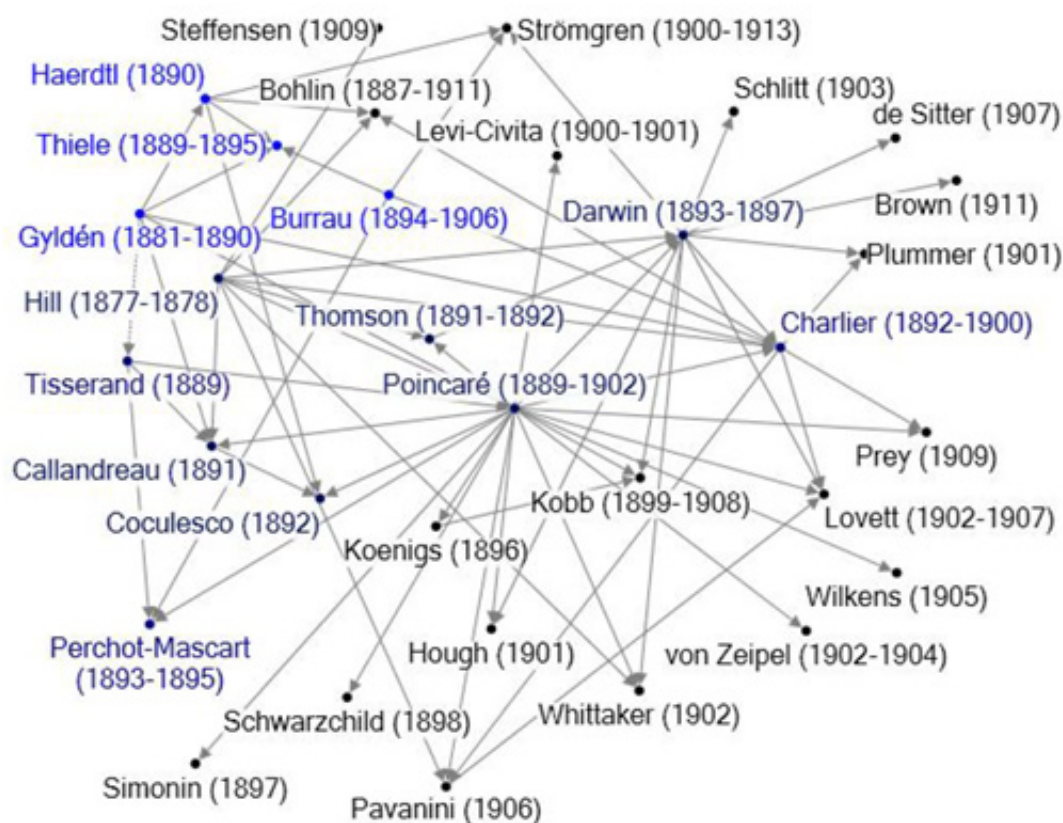
Figura 3 – Uma das redes de textos da tese de Brechenmacher



Fonte: (Brechenmacher, 2006, p. 14)

O segundo exemplo é uma pesquisa da Tatiana Roque, que foi publicada em 2015 na *Revue d'Histoire des Mathématiques*. Essa pesquisa é sobre Henri Poincaré (1854-1912) e sobre práticas compartilhadas em mecânica celeste entre o final do século XIX e o início do século XX. A rede ilustrada na figura 4 abaixo não tem eixos de referência, como um plano cartesiano, mas os nomes dos autores estão colocados lá junto com datas das publicações dos seus textos. Observa-se nessa rede, que a ligação de um vértice ao outro é feita por meio de arestas com direção, ou seja, um vetor, indicando não só a circulação de práticas compartilhadas, mas dando o sentido no qual um autor pega emprestado de outro autor uma determinada prática que apareça no seu texto.

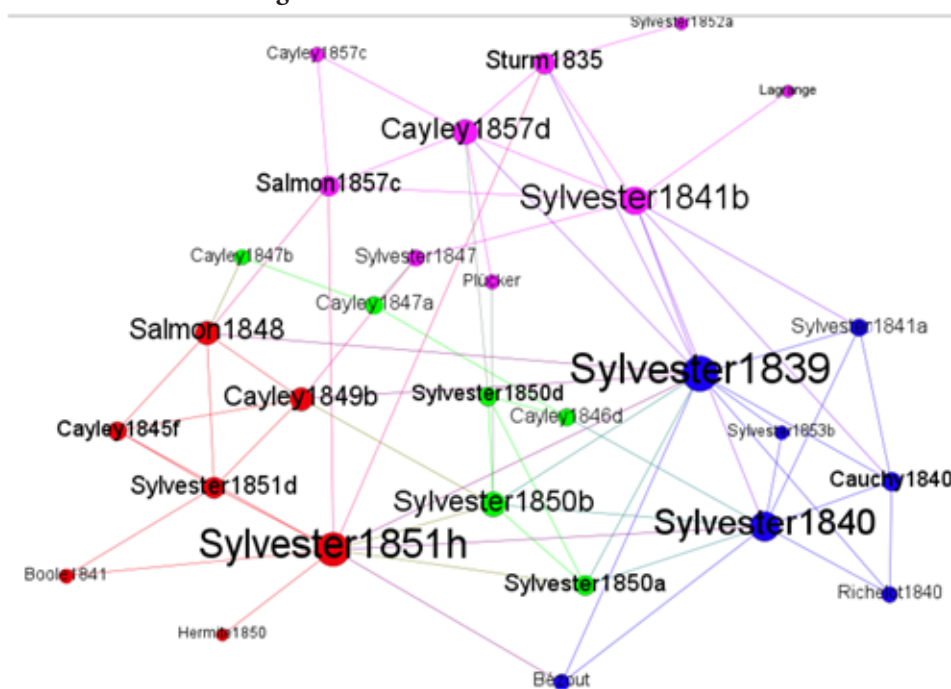
Figura 4 – Uma rede de textos da pesquisa de Roque



Fonte: (Roque, 2015, p. 10)

O terceiro exemplo é a tese de doutorado de Magno Luiz Ferreira, defendido no PEMAT (Programa de Pós Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física), da UFRJ, em novembro de 2023. O trabalho foi orientado por Gérard Grimberg e eu estive presente na banca de doutorado como examinador. Essa tese fala sobre o matemático britânico James Joseph Sylvester (1814-1897) e sobre a formação da comunidade matemática britânica em torno desse personagem. Fala ainda sobre a teoria dos invariantes, que recebeu uma contribuição muito grande de Sylvester, mas também de outras tantas pessoas. Nas diversas redes de textos que Ferreira apresenta em seu trabalho, mais uma vez os nomes próprios dos autores são apresentados em vértices. Ferreira teve o cuidado de colocar cores em suas redes, pintando vértices e arestas para indicar diferentes áreas de pesquisa matemática em que aqueles artigos estão colocados. Observa-se também que um mesmo autor com diferentes trabalhos pode aparecer em diferentes vértices, e esses vértices são ligados pelas arestas. Os vértices nesse grafo têm espessuras diferentes indicando qualitativamente se um determinado vértice/autor empresta muito ou pouco às práticas matemáticas dos demais vértices/autores a eles ligados.

Figura 5 – Uma rede de textos da tese de Ferreira



Fonte: (Ferreira, 2023, p. 228)

A apresentação de uma rede de textos em grafos, não é a única maneira de fazê-la. Os três exemplos que mostrei acima preferiram ilustrar o seu trabalho desse modo, mas no meu trabalho, por exemplo, eu não me utilizei de grafos para mostrar a minha rede. Eu me utilizei de muitas tabelas. Na fase da pesquisa, utilizei de tabelas “internas”, que não foram para exibição do leitor, preparadas no Excel onde uma quantidade enorme de dados eram lançados e investigados. E depois, na apresentação do texto, mais tabelas, um pouco menores, enxutas, mostrando os resultados alcançados.

Bases teóricas para a metodologia da rede de textos

Quero chamar a atenção para o fato de que a metodologia de rede de textos é resultado direto do uso de métodos quantitativos em história da matemática. Nessa direção, há um artigo fundamental da historiadora francesa Catherine Goldstein publicado em 1999 chamado “Sobre a questão dos métodos quantitativos em história da matemática: o caso da teoria dos números na França em 1870-1914”. Nesse trabalho, Goldstein problematiza a questão de uma narrativa histórica interna *versus* uma narrativa histórica externa. Não dá mais para narrar uma história da matemática estritamente internalista, olhando apenas para os resultados matemáticos em si mesmos, como algo com uma lógica interna própria e que se desenvolve sem a intervenção de outros fenômenos. Mas também não dá para se fazer história de matemática de maneira completamente externalista, falando apenas dos autores dos diversos textos publicados em matemática, suas afiliações institucionais, os lugares onde publicam, suas relações diretas ou indiretas como colegas, colaboradores entre si, ou como rivais que competem em torno de uma teoria. Uma história da matemática baseada apenas numa perspectiva ou noutra é pobre, pois despreza a complexidade do fenômeno social, bem como da natureza do conhecimento matemático.

A rede de textos tenta dar uma resposta para essa questão ao articular a criatividade individual de cada geômetra com sua participação numa comunidade. As práticas matemáticas compartilhadas

circulam de um texto a outro, e do outro ao seguinte, por meios de empréstimos, explicitamente mencionados ou não, e que faz a teoria matemática avançar. Isso deixa bastante evidente o quanto a fabricação matemática é uma fabricação coletiva que acontece ou por colaboração ou por competição, mas sempre em comunidade.

E mais, no artigo de Catherine Goldstein, ela vai além de problematizar essa questão da articulação entre o indivíduo e a comunidade, ou da criatividade individual com as práticas compartilhadas por um grupo. Ela também argumenta o quanto os métodos quantitativos podem ser úteis em história da matemática no sentido de compilar amplas bases de dados a partir das quais se possa descrever de maneira detalhada um panorama que mostre o estado da pesquisa de uma certa área, de um certo assunto em matemática, numa determinada região e num determinado período de tempo.

Essas técnicas quantitativas em história da matemática são inspiradas em sociólogos e historiadores que na segunda metade do século XX estiveram em evidência nos estudos em ciências sociais. Mencionamos o sociólogo Pierre Bourdieu com seus trabalhos sobre campos e *habitus*, o historiador Jacques Revel a partir da sua teoria da microhistória, e ainda os educadores Etienne Wenger-Trayner e Bervely Wenger-Trayner pelo conceito de comunidades de práticas. Pierre Bourdieu e Jacques Revel são as fundamentações teóricas que estão na base do meu trabalho de doutorado e que redundou no meu livro de 2024. Já Wenger-Trayner e Wenger-Trayner são a base teórica oriunda da sociologia para o trabalho de doutorado do Magno Luiz Ferreira.

Por fim, esses métodos quantitativos em história da matemática acabam se prestando como método heurístico eficiente em pelo menos duas vertentes: as prosopografias e a redes de textos. Enquanto que as redes de textos são coletivos de textos dos quais se extraem práticas compartilhadas, as prosopografias são coletivos de biografias dos quais se extraem também estruturas compartilhadas. Na metodologia da prosopografia, um grupo de indivíduos com algo em comum, bem delimitado numa região e num intervalo de tempo, pode fornecer um bom panorama de uma certa estrutura social.

Apenas para indicar um exemplo, imaginemos uma prosopografia de professoras e professores de matemática, que atuam no território do estado do Rio Grande do Sul, nos anos 1990 e nos anos 2000. Digamos que sejam alistados sistematicamente, para esse coletivo de pessoas, dados tais como quais são suas origens institucionais, onde se formaram, onde estudaram, para que lugares eles se espalharam na execução do seu trabalho, qual a carga horária dos seus trabalhos, que tipo de disciplinas lecionam, em que tipo de escolas trabalham, qual o tempo de carreira de cada um, etc. Então olhando essa quantidade enorme de informações para uma população bastante específica, se pode redigir uma espécie de biografia coletiva, ou melhor dizendo, se pode descrever um panorama de um grupo social num tempo e num lugar. E depois, olhando especificamente para um ou outro indivíduo neste grupo, pode-se inferir onde, quando, como e quanto esta trajetória individual segue a estrutura, ou escapa da estrutura. Isso fornece melhor compreensão, não só da comunidade, mas também de um indivíduo enquanto membro da comunidade.

COMO EU USEI A METODOLOGIA DA REDE DE TEXTOS PARA INVESTIGAR A GEOMETRIA DE SITUAÇÃO

Agora vou contar pra vocês, na terceira parte dessa palestra plenária, como foi que eu fiz a minha rede de textos. Mais especificamente, como foi que eu selecionei os textos que compõem minha rede e alguns dos resultados que obtive dela.

Para selecionar os textos da rede, eu fixei o meu “conjunto universo” no jornal *Annales de Gergonne*. Trata-se de um jornal que foi publicado na França de 1810 a 1832. Ao longo desses 22 anos o jornal foi publicado em fascículos mensais de mais ou menos 30 a 40 páginas. Ali nesse jornal houve uma população de 107 autores e um total de 839 artigos, totalizando cerca de 8 mil laudas.

Comecei minha rede selecionando o artigo em que aparece pela primeira vez no corpo do texto a expressão “geometria de situação”. É um artigo que foi publicado em janeiro de 1826 por Gergonne e que se chama “Filosofia matemática. Considerações filosóficas sobre os elementos da ciência da extensão” (Gergonne, 1826).² Na sequência eu peguei o texto seguinte em que aparece a palavra “geometria de situação”, agora no título do artigo. Esse texto também é de Gergonne e foi publicado em janeiro de 1827 (Gergonne, 1827). A seguir peguei também os seis artigos seguintes em que a palavra “geometria de situação” aparece nos títulos. Todos seis são do geômetra Étienne Bobillier e foram publicados nos fascículos de outubro de 1827 a abril de 1829 (Bobillier, 1827a, 1827b, 1828a, 1828b, 1828c, 1829).

No conjunto desses oito textos, analisando detalhadamente o seu conteúdo, mas principalmente a sua forma, eu estabeleci quatro critérios. São quatro descritores que caracterizam, segundo a compreensão que eu tive no decorrer da pesquisa, do que é essa geometria de enunciados aos pares. Os critérios são:

- aparição explícita no corpo do texto ou no título do artigo da expressão “geometria de situação”;
- aparição explícita no corpo do texto ou no título do artigo da expressão “reciprocidade polar” ou “teoria das polares recíprocas” ou ainda “princípio da dualidade”, sendo evocadas pelo autor como um princípio utilizado na dedução de algum teorema;
- a redação de parte de (ou de todo) o texto em colunas duplas;
- a aparição explícita da palavra “polo” ou da palavra “polar”.

Em resumo, os oito primeiros textos da rede, foram selecionados pelo critério de “antiguidade” da expressão “geometria de situação”: o primeiro em que aparece a expressão no corpo do texto e depois os sete primeiros em que aparece a expressão no seu título. Foi neles que identifiquei os quatro descritores, cada um dos quais atendidos por todos eles.

Na etapa seguinte eu percorri o jornal completamente, página por página, desde o primeiro exemplar de maio de 1810 até o último de maio de 1832, procurando a ocorrência dos descritores. Quero destacar que os descritores são bem objetivos e não deixam margem para subjetividades ou interpretações, num primeiro momento. Caso algum texto contivesse pelo menos uma das quatro marcas, ele era automaticamente selecionado para a rede. E se num artigo, em nenhuma de suas páginas eu encontrasse nenhum dos quatro descritores, esse texto era descartado.

² Uma tradução integral desse artigo do francês para o português, com uma nota introdutória, foi publicada por mim na *Revista Brasileira de História da Matemática*, na edição temática de “Traduções” (Haubrichs, 2023).

Feita a primeira rodada de seleção, encontrei um total de 92 artigos, que apelidei de “rede básica de textos”. É necessário dizer bem claramente que nesses 92 artigos constam apenas os textos que atendem pelo menos um dos critérios anunciados acima. Nesses 92 textos há uma totalidade de 20 autores identificados (e alguns anônimos), cobrindo o período de 1810 a 1829, sendo que a maioria dos textos está concentrada nos três anos de 1826 a 1829. No triênio estão 62 dos 92 textos, cerca de dois terços do total.

Depois da seleção desses 92 textos, eu percorri mais uma vez todo o periódico em questão, dessa vez fazendo uma rede de referências bibliográficas explícitas. Ou seja, no conjunto desses 92 artigos, eu olhei a partir do título (caso informasse) ou a partir das notas de rodapé (caso existissem) a indicação de artigos anteriores publicados no mesmo jornal. Esses “artigos anteriores”, digamos assim, também foram selecionados para compor uma rede de textos que eu apelidei de “rede aumentada de textos”. Nessa rodada eu obtive um total de 191 artigos, ou seja, depois dos 92 que tinham sido selecionados antes, foram acrescentados 99 textos novos. Deixando bastante claro, mais uma vez, que esses 99 textos novos são textos que vêm apenas de referências bibliográficas explícitas daqueles 92 primeiros, e que esses 99 textos novos não atendiam a nenhum dos critérios descritores da geometria de situação. Até porque, caso qualquer um deles tivesse um critério atendido, já teria sido selecionado na primeira rodada.

Da rede básica para a rede aumentada a quantidade de artigos quase que dobrou. Essa rede aumentada tem 38 autores, que também é quase o dobro de 20, quantidade de autores na rede básica. A rede aumentada também cobre o período que vai de 1810 a 1829, e semelhantemente, ela é concentrada no triênio de 1826 a 1829, com 70 artigos dos 191.

Tomando as duas redes, o que eu fiz foi investigar, então, agora sim, fazendo a leitura minuciosa dos textos que obtive. E coletando sistematicamente as seguintes informações:

- uma lista dos autores identificando a filiação institucional de cada um, o lugar onde cada um deles estudou e o lugar onde cada um deles trabalha;
- a localização geográfica deles, o território que eles ocuparam – a grande maioria dos autores são franceses, mas havia alguns estrangeiros que também participaram dessa rede;
- os conteúdos matemáticos nesse conjunto de textos;
- a rubrica editorial no qual esses textos estão colocados, para ter uma compreensão de como o editor do jornal, bem como os geômetras da época, compreendiam em que tipo de geometria essa geometria de situação está encaixada – se é uma geometria analítica, se é uma geometria elementar, se é uma geometria superior, ou mesmo se é alguma outra parte da matemática que não seja geometria.

Neste ponto da minha pesquisa eu notei que o estudo da rede aumentada seria redundante se comparado com o estudo da rede básica. Digo, qualitativamente as duas redes me forneciam a mesma descrição. Uma evidência é que tanto numa quanto na outra o peso de artigos recai sobre o triênio 1826 a 1829, embora ambas sejam espalhadas de 1810 a 1829. Outra evidência é que as duas redes têm o mesmo “Top 4” dos autores que mais inseriram textos na rede: Gergonne, Poncelet, Bobillier, Michel Chasles (1793-1880). A diferença de uma rede pra outra, nesse quesito, é apenas uma pequena mudança na ordem: aquele que é o primeiro colocado numa rede ficou em terceiro na outra, o que é o quarto colocado numa rede ficou em segundo na outra, etc.

Essas são apenas algumas das características que observei, que me fizeram compreender que para descrever a geometria de situação a rede aumentada é redundante no sentido de que embora os números se modifiquem e eu tenha uma quantidade bem maior de dados, do ponto de vista qualitativo e panorâmico o que a rede aumentada acrescenta não é melhor, nem mais bem descrito do que o que a rede básica já me fornecia. Então segui minha pesquisa, coletando sistematicamente mais essas informações apenas na rede básica:

- os teoremas que se repetiam com mais frequência, aqueles que eram retomados mais vezes, os que poderiam então ser considerados os teoremas principais dessa teoria – os teoremas campeões de menção e de demonstrações diferentes e originais dentro desse conjunto foi o par “Pascal e Brianchon”, que eu usei para ilustrar o que significa geometria de situação lá na primeira parte dessa palestra;
- os textos externos mencionados na minha rede de textos, ou seja, livros, tratados ou artigos publicados em outros periódicos que não fosse os *Annales de Gergonne* – o texto mais mencionado é o *Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras* (Poncelet, 1822), bem como *Os Elementos de Euclides*, e a *Memória* de Brianchon (Brianchon, 1817), onde aparece, não por acaso, a primeira demonstração do Teorema de Brianchon, numa versão ainda não pareada com o Teorema de Pascal;
- todas as pessoas mencionadas no corpo do texto, totalizando 58 personagens, geômetras na sua imensa maioria, mas também outras pessoas como, por exemplo, nome de editores de jornais ou nome de diretores de instituições científicas.

Caso curioso é o dos nomes mencionados. Ali a gente encontra, evidentemente, geômetras em atividade nos anos 1810 e 1820, contemporâneos àqueles que estavam engajados na fabricação coletiva da geometria de situação. Mas a gente também encontra geômetras de um período ligeiramente anterior (por exemplo, Monge e Carnot), da era moderna (Pascal, Newton, Desargues), e geômetras da antiguidade (Apolônio, Pappus, Arquimedes, Pitágoras, Euclides). A curiosidade dessa nominata, é que normalmente os personagens eram evocados em listas que serviam para legitimar uma espécie de “ancestralidade matemática” que celebra grande nomes de mitos, heróis e precursores, em ordem progressiva, e que culmina no distinto autor que ora apresenta seus resultados.

É interessante registrar também a ocorrência bastante frequente de uma equação linear do tipo $\lambda P + \mu Q$, onde P e Q são polinômios que descrevem uma curva ou uma superfície (no plano cartesiano ou no espaço cartesiano, respectivamente), e λ e μ são constantes reais indeterminadas. Os polinômios quase sempre aparecem e são manipulados assim abreviados, e não como soma de monômios nas variáveis x , y e z . Por isso mesmo, alguns geômetras da geração posterior aos anos 1820, referiam-se a esse modo de argumentar como *método da notação abreviada*.

Com isso, eu consegui descrever de maneira detalhada e entender a geometria da situação, não só nos seus resultados principais ou no seu principal problema: o de explicar o fenômeno do emparelhamento de enunciados. Mas também a sistematização, a redação, os teoremas, as pessoas, as instituições, os exemplos e os resultados no entorno desse fenômeno.

Informo, por fim, que a geometria de situação é um fenômeno social em história das ciências conhecida como *rise and fall*, ou seja, emergência e declínio. É um tipo de fenômeno em que um determinado tema de pesquisa em matemática entra na moda, se desenvolve com força por um tempo, e depois sai de moda, mostrando que os valores de utilidade e beleza se modificam com o passar do tempo ou o passar das gerações. No caso da geometria de situação, ela entrou em declínio e praticamente se esgotou quando em 1828 e 1831 foram publicados os dois volumes do tratado *Desenvolvi-*

mentos de Geometria Analítica, assinado pelo geômetra prussiano Julius Plücker (1801-1868). Nesses livros volumosos Plücker consegue conciliar numa teoria bem elaborada as explicações divergentes de Gergonne e de Poncelet (mas não conciliar os dois geômetras, porque estes permaneceram rivais e ressentidos um com o outro até o fim da vida). A explicação proposta por cada um naquilo em que estavam corretos, foi reelaborada e unificado por Plücker com uma nova linguagem, uma nova notação e a introdução de novos conceitos. E naquilo em que estavam incorretos, Plücker conseguiu desembaraçar e corrigir. Então quando o significado profundo do fenômeno dos enunciados aos pares entrou em cena, a efervescência das pesquisas matemáticas nessa área cessou e novos trabalhos originais nessa área não apareceram mais.

Aos interessados no assunto, informo que há outras hipóteses para o “fim” da geometria de situação e alguns desdobramentos posteriores ao ano 1832 que são narradas com detalhadas no meu livro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma rede de texto põe em relevo como a fabricação coletiva da matemática acontece, seja por colaboração ou por competição, porque exhibe de um texto ao outro, de maneira bastante clara e explícita, quais são e onde estão as práticas compartilhadas. Mesmo quando a perspectiva ou a interpretação de um certo resultado por um geômetra é divergente do geômetra anterior, ainda assim o geômetra quando prepara o seu texto, lê o texto anterior e pega emprestado ali algum vocabulário, alguma equação, alguma técnica de demonstração que depois ele vai aplicar no seu próprio texto. Ao rastrear as práticas matemática compartilhadas nos textos publicados, é como se estivéssemos vislumbrando indiretamente os “bastidores” da pesquisa matemática, que é viva, é dinâmica e é composta por uma comunidade e não por indivíduos isolados. As pessoas interagem em comunidade, e no caso da minha pesquisa, por exemplo, essa comunidade é intermediada por um jornal que congrega leitores e autores. As pessoas também produzem dentro de um sistema. E esse sistema, no caso da minha pesquisa, diz respeito às instituições de ensino e ou de pesquisa às quais aquelas pessoas são vinculadas.

O estudo de uma rede de textos mostra, além disso, que a produção matemática é um fenômeno circunscrito num período de tempo, num território e numa comunidade. Ou seja, a matemática não é atemporal e nem é universal, mas ela é uma produção humana que entra na moda, que sai de moda e que enquanto está na moda se desenvolve plenamente e floresce plenamente. Encontrar essa plenitude está mais do que apenas ler os resultados de um coletivo de artigos, mas em persegui-los nos detalhes.

REFERÊNCIAS

- BOBILLIER, Étienne. Géométrie de situation. Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 18 (1827-1828), pp. 89-98, 1827a. https://www.numdam.org/item/AMPA_1827-1828__18__89_0/
- BOBILLIER, Etienne. Géométrie de situation. Recherches sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 18 (1827-1828), pp. 157-166, 1827b. https://www.numdam.org/item/AMPA_1827-1828__18__157_0/

BOBILLIER, Etienne. Géométrie de situation. Recherche sur les lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 18 (1827-1828), pp. 253-269, 1828a. https://www.numdam.org/item/AMPA_1827-1828__18__253_0/

BOBILLIER, Etienne. Géométrie de situation. Recherches sur les lois générales qui régissent les courbes algébriques. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 19 (1828-1829), pp. 106-114, 1828b. https://www.numdam.org/item/AMPA_1828-1829__19__106_1/

BOBILLIER, Etienne. Géométrie de situation. Recherches sur les lois générales qui régissent les surfaces algébriques. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 19 (1828-1829), pp. 138-150, 1828c. https://www.numdam.org/item/AMPA_1828-1829__19__138_0/

BOBILLIER, Etienne. Géométrie de situation. Théorèmes sur les polaires successives. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 19 (1828-1829), pp. 302-307, 1829. https://www.numdam.org/item/AMPA_1828-1829__19__302_0/

BRECHENMACHER, Frédéric. **Histoire du Théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930): Formes de représentations et méthodes de décompositions**. Thèse (Docteurat en Histoire) – École des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris, 2006.

BRECHENMACHER, Frederic. Constructing networks of texts: a heuristical method for discovering some collective dimensions of mathematics. Intervenção na Ecole du GDR 3398 “Histoire de mathématiques”. **Des sources en histoire des mathématiques**. Luminy, Marselha, 05 de novembro de 2013.

BRIANCHON, Charles Julien. **Mémoire sur les lignes du second ordre**. Paris: Bachelier, 1817.

FERREIRA, Magno Luiz. **JJ Sylvester e a comunidade formada através do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes**. Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

GERGONNE, Joseph Diaz. Philosophie mathématique. Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendu. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 16 (1825-1826), pp. 209-231, 1826. https://www.numdam.org/item/AMPA_1825-1826__16__209_0/

GERGONNE, Joseph Diaz. Géométrie de situation. Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 17 (1826-1827), pp. 214-252, 1827. https://www.numdam.org/item/AMPA_1826-1827__17__214_0/

GOLDSTEIN, Catherine. Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques: le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914). **Acta historiae rerum naturalium technicarum**, new series, v. 3, pp. 187-214, 1999.

HAUBRICHS, Cleber. **Étienne Bobillier (1798-1840): percursos matemático, docente e profissional**. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

HAUBRICHS, Cleber. Tradução das “Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue” de Joseph Diez Gergonne, Janeiro de 1826. **Revista Brasileira de História da Ma-**

temática, v. 23, n. 46, pp. 258–295, 2023. <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/409/357>

HAUBRICHS, Cleber. **Geometria de situação: problemas e teoremas aos pares no século dezanove**. Coleção História da Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2024.

PLÜCKER, Julius. **Analytisch Geometrisch Entwicklungen**. Essen: Baedeker, vol 1, 1828, vol 2, 1831.

PONCELET, Jean Victor. **Traite des propriétés projectives des figures**. Paris: Bachelier, 1822.

PONCELET, Jean Victor. Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques; pour faire suite au Mémoire sur les centres moyennes harmoniques. **Journal für die reine und angewandte mathematik**, v. 4, pp. 1-71, 1829.

ROQUE, Tatiana. L'originalité de Poincaré en mécanique céleste: pratique des solutions périodiques dans un réseau de textes. **Revue d'histoire des mathématiques**, tome 21, n. 1, pp. 41-109, 2015.