

Algumas histórias sobre a história da educação matemática e do ensino de matemática no Brasil

Some stories about the history of mathematics education and mathematics teaching in Brazil

Dulcyene Maria Ribeiro¹  

Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

RESUMO

Considerando que aspectos da história da educação matemática e do ensino de matemática são importantes de serem discutidos na formação de professores, seja inicial ou continuada, neste texto destaco como o teorema de Pitágoras e sua generalização são ou não apresentados em livros de diferentes períodos. Na palestra também foram discutidos aspectos relativos às frações e aos produtos notáveis. Os livros, especialmente os didáticos, são as principais fontes utilizadas. Como resultados, destaca-se que a generalização do teorema de Pitágoras não figura nos livros didáticos atuais e o desconhecimento dos professores sobre a ela. Além disso, há a necessidade de que os livros didáticos e os professores ao tratarem do teorema de Pitágoras possam associá-lo às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, possibilitando que o teorema volte a ter um sentido geométrico, além do algébrico.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Generalização do Teorema de Pitágoras; Formação de professores de Matemática; História na formação.

ABSTRACT

Considering that aspects of the history of mathematics education and of mathematics teaching are important to discuss in teacher training, initial or continuing, this text highlights how Pythagoras' theorem and its generalization are or are not presented in textbooks from different periods. In the lecture also discussed aspects related to fractions and notable products. Books, especially textbooks, are the main sources used. As a result, it is highlighted that the generalization of Pythagoras' theorem does not appear in current textbooks and that teachers are unfamiliar with it. Further, textbooks and teachers need to associate Pythagorean theorem with the areas of squares constructed on the sides of a right triangle, allowing the theorem to regain a geometric meaning, beyond its algebraic one.

Keywords: Pythagorean theorem; Generalization of the Pythagorean theorem; Mathematics teacher training; History in training.

¹ Doutora, Universidade de São Paulo (USP). Professora na Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Cascavel, Paraná, Brasil. E-mail: dulcyenemr@yahoo.com.br.

INTRODUÇÃO

Quando o Marcos Lübeck me convidou para palestrar no Seminário Nacional de História da Matemática a ser realizado em 2025, me pediu apenas que em minha fala envolvesse alguma história da educação matemática brasileira.

Dentre as várias opções que poderia escolher sobre o assunto, decidi destacar alguns aspectos da história da educação matemática e do ensino de matemática no Brasil, que de alguma forma estão relacionados ou com as minhas pesquisas próprias de doutorado ou pós-doutorado ou com as pesquisas de algum orientando meu, tanto de iniciação científica, como de mestrado e doutorado. Mas também se relacionam com as minhas atividades como professora atuante tanto na formação de professores de matemática, que defende que aspectos da história da educação matemática e do ensino de matemática são importantes de serem discutidos na formação de professores, seja inicial ou continuada.

Então o que discuti teve dois focos:

- Apresentar algumas investigações em história da educação matemática e do ensino de matemática;
- Discutir como a formação de professores pode se beneficiar do conhecimento da história da matemática, da educação matemática e do ensino de matemática;

Desde os meus trabalhos iniciais, quanto os que tenho orientado, temos tomado como fonte os livros didáticos de matemática, e de um ponto de vista histórico, vamos traçando o caminho de como alguns conteúdos vão figurando nos livros didáticos e tomando forma como conteúdos escolares.

Para fazer uma abordagem na palestra escolhi tratar de três conteúdos específicos, frações, produtos notáveis e teorema de Pitágoras e como estão destacados em livros de diferentes períodos do século XX. No entanto, nesse texto, abordarei apenas o que tratei relativo ao teorema de Pitágoras.

TEOREMA DE PITÁGORAS: O QUE SABEMOS SOBRE?

Considerando que as pessoas que me ouviam eram professores de matemática era esperado que tivessem conhecimentos sobre esse tema. Quando fiz a pergunta que está no título dessa seção, vários presentes recitaram o enunciado: “o quadrado da hipotenusa é igual ao quadrado dos catetos”. Algumas lembraram que se tratava de uma proposição que está no livro *Os Elementos*, de Euclides, mas nem todas se lembraram desse fato. A proposição 47 do livro I de *Os Elementos* de Euclides é conhecida por Teorema de Pitágoras. Ele pode ser expresso da seguinte forma:

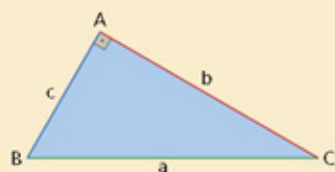
“Nos triângulos retângulos, a soma das áreas dos quadrados tomados sobre os catetos é igual à área do quadrado tomado sobre a hipotenusa”.

Esse enunciado e o anteriormente recitado pelos presentes têm diferenças. Aqui se dá destaque à palavra área. Trata-se das medidas das áreas construídas sobre os lados do triângulo retângulo, mas de modo geral essa ideia não tem sido reforçada nas aulas de matemática, nem nos livros didáticos. Mesmo quando não é tão resumido, quanto na descrição dos presentes, aparece como o quadrado da medida da hipotenusa e dos catetos, como na figura 1:

Figura 1- Teorema de PitágorasPodemos, então, enunciar o **teorema de Pitágoras**.

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Fonte: Giovanni Júnior (2022, p. 209)

Na unidade 1 do mesmo livro, quando trata dos números irracionais, Giovanni Júnior (2022)² usa um triângulo retângulo isósceles para a construção da $\sqrt{2}$ e destaca as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo em uma malha quadriculada. Nesse momento, até enuncia a propriedade de modo diferente e ressalta que será demonstrada na unidade 7. Nesta unidade, retoma, com exemplos, a ideia as áreas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo isósceles, e escreve “A área do quadrado com um dos lados comuns à hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados com um dos lados comuns a cada um dos catetos”. Mas o teorema é finalmente apresentado como está enunciado na figura 1, sem o destaque à palavra área e sem qualquer representação de quadrados sobre os lados do triângulo.

Na maioria das vezes, o teorema de Pitágoras decorre da apresentação das relações métricas no triângulo retângulo, como em Iezzi, Dolce e Machado (2022)³. O enunciado do teorema foi explicitado da seguinte forma: “Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa: $b^2 + c^2 = a^2$. Essa última relação é conhecida como teorema de Pitágoras” (Iezzi, Dolce e Machado, 2022, p. 149). Nesse material não é feita nenhuma associação com áreas das figuras construídas sobre os lados do triângulo, nem apresentada qualquer imagem relacionada a isso. Apenas mencionado que há outras formas de demonstração do teorema que seriam apresentadas na seção *Na história*, ao final do capítulo. Nessa seção, é mencionado sobre a história de Pitágoras, apresentadas as demonstrações do teorema atribuídas aos pitagóricos, a Bhaskara e a James A. Garfield, mas nenhum enunciado diferente do teorema é apresentado.

É como enunciado em Iezzi, Dolce e Machado (2022) que o teorema aparece na maioria dos materiais consultados, que está muito próximo do que foi relatado pelos ouvintes na palestra, que apenas não destacaram a palavra soma.

Verificar como esse enunciado tem sido apresentado em livros didáticos nos ajuda a entender com a maioria dos professores de matemática desconhecem a associação às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo. E, um enunciado tão importante quanto esse, decorrente de uma figura geométrica, um triângulo retângulo, fica sem sentido geométrico.

Voltando à interlocução com os presentes durante a palestra, quando perguntei se o teorema de Pitágoras tinha aplicações, foram unânimes em dizer que sim. Ressaltaram aplicações nas construções, na física, na arquitetura, entre tantas outras.

Agora, quando questionei se esse resultado tinha generalização foi um silêncio só. Nenhum dos presentes mencionou que o teorema de Pitágoras pode ser generalizado para quaisquer figuras

² Livro aprovado no PNLD vigente.

³ Livro aprovado no PNLD vigente.

semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo, muito menos que era um resultado que também figura no livro *Os Elementos* de Euclides.

Considerando a tradução do livro de Euclides realizada por Irineu Bicudo, trazemos, a seguir, a proposição 31, do livro 6, de *Os elementos*, bem como sua demonstração, que apresenta a generalização do teorema de Pitágoras.

31. Nos triângulos retângulos, a figura sobre o lado subtendendo o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e também semelhantemente descritas sobre os lados contendo o ângulo reto.

Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que a figura sobre a BC é igual às figuras semelhantes e também semelhantemente descritas sobre as BA, AC. Fique traçada a perpendicular AD.

Como, de fato, no triângulo retângulo ABC, foi traçada a perpendicular AD do ângulo reto junto ao A até a base BC, os triângulos ABD, ADC junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo ABC quanto entre si. E, como o ABC é semelhante ao ABD, portanto, como a CB está para a BA, assim a AB para a BD. E, como três retas estão em proporção, como a primeira está para a terceira, assim a figura sobre a primeira para a semelhante e semelhantemente descrita sobre a segunda. Portanto, como a CB está para a BD, assim a figura sobre a CB para a semelhante e semelhantemente descrita sobre a BA. Pelas mesmas coisas, então, também como a BC para a CD, assim a figura sobre a BC para a sobre a CA. Desse modo, também como a BC para as BD, DC, assim a figura sobre a BC para as semelhantes e semelhantemente descritas sobre as BA, AC. Mas a BC é igual às BD, DC; portanto, também a figura sobre a BC é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre as BA, AC.

Portanto, nos triângulos retângulos, a figura sobre o lado subtendendo o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados contendo o ângulo reto; o que era preciso provar. (Euclides, 2009, p. 264. Itálico como no original).

Em uma linguagem mais próxima aos dias de hoje, podemos descrever essa proposição, que estende o teorema de Pitágoras ao caso de figuras semelhantes de qualquer espécie, da seguinte maneira: *Em triângulos retângulos, a medida da área de uma figura qualquer construída sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas das figuras semelhantes à primeira, construídas sobre os catetos.*

Esse resultado, apesar de praticamente desconhecido por hora figurou em livros utilizados no mundo europeu nos séculos XVII e XVIII, como *Cvrsvs sev mvndvs mathematicvs: Complectens Euclidis Libros Octo, Arithmetica, Theodosij sphaerica, Trigonometriam, Geometriam practicam, Mechanicam, Staticam, Geographiam vniuersalem, Tractatum de Magnete, Architecturam Ciuilem, & Artem tignariam.*, do francês Claude François Milliet Dechaies (1621-1678) e *Cours de Mathematique*, do francês Jaques Ozanam (1640-1718). Os livros de Dechaies, tiveram um alcance mais geral, indo além das aulas de formação em escolas militares, que parece ter sido o destino mais comum do livro de Ozanam.

Mas, essa proposição, que estende o teorema de Pitágoras ao caso de figuras semelhantes de qualquer espécie, também esteve presente em livros didáticos brasileiros do princípio do século XX, como no livro *Curso de Mathematica, 4º ano*, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza. Nele há informações de que o teorema de Pitágoras poderia ser generalizado para outros polígonos e que não passa de um caso particular de um teorema mais geral. Como exemplo, utilizando a fórmula do cálculo da área do triângulo equilátero, mostram que o teorema vale também para os triângulos equiláteros.

No triângulo retângulo ABC os elementos a , b e c são, como sabemos, ligados pela relação (*): $a^2 = b^2 + c^2$

Multiplicando todos os termos dessa igualdade pelo número $\frac{\sqrt{3}}{4}$, vem:

$$a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = b^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + c^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

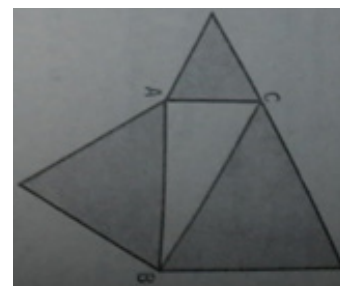
O primeiro membro exprime a área do triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa; o segundo membro é a soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos.

Podemos, pois, concluir a seguinte propriedade:

O triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos.

De um modo geral:

O polígono regular construído sobre a hipotenusa é equivalente a soma dos polígonos semelhantes construídos sobre os catetos ()*. (Roxo; Thiré; Mello e Souza, 1938, p. 243-244. Itálico e asteriscos como no original).



O asterisco dessa citação remete à seguinte nota de rodapé: “Do mesmo modo demonstraríamos que para três polígonos semelhantes quaisquer S , P e Q construídos respectivamente sobre a , b e c (lados homólogos dos polígonos), teríamos: $S = P + Q$ ” (Roxo; Thiré; Mello e Souza, 1938, p. 244). Esse resultado geral não foi demonstrado, mas foram apresentadas as demonstrações para os casos do círculo e das lúnulas. Apesar dessas demonstrações e das várias notas históricas do livro, não foi mencionado que o resultado já estava na obra de Euclides. Para mais detalhes sobre a história do teorema de Pitágoras em livros didáticos ver Ribeiro e Ciani (2019).

Não encontramos livros didáticos atuais em que esse resultado esteja expresso. É possível encontrar menções a ele em trabalhos específicos desenvolvidos em programas de pós-graduação, como Silva (2014) e Oliveira (2013) ou como em Wagner (2015), que se trata de uma apostila disponibilizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), para preparação dos estudantes para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). No entanto, nenhum dos materiais consultados apresenta que a generalização é a proposição 31 do livro 6 de *Os Elementos* de Euclides, dando a impressão de ser resultado do trabalho de matemáticos atuais.

Não estar nos materiais didáticos é um indicativo do desconhecimento dos professores atuais sobre a generalização do teorema de Pitágoras, manifestada inclusive durante a palestra como já mencionado.

CONSIDERAÇÕES

Para finalizar, o que foi discutido nesse texto reforça a necessidade de que os professores ao tratar do teorema de Pitágoras possam associá-lo às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, possibilitando aos estudantes compreenderem que a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ está relacionada a áreas e não apenas a letras sem sentido geométrico. E, que os professores tenham familiaridade com a história da matemática e com os fundamentos históricos dos conhecimentos que ensinam. Ainda que não apresentem aos alunos a generalização do teorema, por exemplo, é essencial que a conheçam, saibam da relevância que já teve em diversos materiais didáticos e do fato de não se tratar de um conceito recente.

REFERÊNCIAS

DECHALES, Claude François Milliet. **Complectens Evclidis libros octo, Arithmetica, Theodosii Spharica, Trigonometriam, Geometriam practica, Mechanica, Statica, Geographiam universalem, Tractatum de Magnete, Architecturam civilem, & Artem tignariam**: Tomus primus. Oficina Anissoniana, 1674.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da Matemática**: 9º ano: ensino fundamental: anos finais. São Paulo: FTD, 2022.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e realidade**: 9º ano. 10 ed. São Paulo: Saraiva Educacional S.A, 2022.

OLIVEIRA, Idalice Maria Santiago. **Geometrização do teorema de Pitágoras e sua generalização como o teorema de Pólya**. 2023. 169 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2023.

OZANAM, Jacques. **Curs de Mathematique: qui comprend toutes les parties de cette science les plus utiles & les plus necessaires à un homme de guerre...** Paris: Impresso por chez Jean Jombert, 1693.

RIBEIRO, Dulcyene Maria; CIANI, Andréia Büttner. O teorema de Pitágoras: um caso particular de algo mais geral. In: Seminário Nacional de História da Matemática - SNHM, 13., 2019, Fortaleza. **Anais eletrônicos** [...]. Fortaleza: SBHMat, 2019, p. 813-827. Disponível em: https://www.sbhmat.org/download/download?ID_DOWNLOAD=7. Acesso em: 12 jul. 2025.

ROXO, Euclides; THIRÉ, Cecil; MELLO e SOUZA, Julio César de. **Curso de Mathematica, 4º anno**. 4 ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1938.

SILVA, João Evangelista Brito da. **Teorema de Pitágoras**: algumas extensões/generalizações e atividades com o Software GeoGebra. 2014. 152p. Dissertação (Mestrado profissional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2014.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e áreas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 86p.