ANAIS DO XVI SNHM

SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

DE 13 A 16 DE ABRIL DE 2025

Organização:

SBHMat
SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

INSTITUTO FEDERAL
Sul-rio-grandense
Câmpus Pelotas

COORDENADORIA DE MATEMÁTICA

ppgedu
Programa de Pós-Graduação em Educação

Apoio:

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

PELOTAS - RIO GRANDE DO SUL - BRASIL

Marcos Lübeck
Rafael Montoito
Organizadores

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática

2025

Copyright © 2025 Marcos Lübeck e Rafael Montoito

Editores: Marcos Lübeck e Rafael Montoito

Capa: Marcos Lübeck e Rafael Montoito

Design editorial e diagramação: Luis Andrés Castillo Bracho

Revisão de prova: Os Autores

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores). — Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .

Vários autores.
ISSN 2236–4102

1. História – Matemática 2. História – Educação Matemática 3. Matemática – Estudo e Ensino 4. Professores – Formação Profissional I. Lübeck, Marcos II. Montoito, Rafael
CDD–510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática: História e ensino 510.7

Esta obra está sob a Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional. É permitido copiar e redistribuir este material em qualquer meio ou formato, desde que sejam atribuídos os devidos créditos, não haja utilização comercial e nenhuma modificação ou criação de obras derivadas a partir deste conteúdo.

Impresso no Brasil • *Printed in Brazil*

SBHMat
SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat)
E-mail: sbhmat1@gmail.com
Site: https://www.sbhmat.org/

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM)

Organização

Sociedade Brasileira de História da Matemática – SBHMat

Local e Data

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul

Pelotas – Rio Grande do Sul – Brasil

13 a 16 de abril de 2025

Diretoria da SBHMat (2023-2027)

Presidente: Mariana Feiteiro Cavalari Silva

Vice-Presidente: Marcos Lübeck

Secretária Geral: Ana Carolina Costa Pereira

1ª Secretária: Lucieli Maria Trivizoli

Tesoureira: Mônica de Cássia Siqueira

Conselheiros: Viviane de Oliveira Santos e Fábio Maia Bertato

Conselho Fiscal: Angélica Raiz, Giselle Costa de Sousa e Sabrina Helena Bonfim

Comissão Científica do XVI SNHM

Ana Carolina Costa Pereira – UECE

Angélica Raiz – Ceuclar

Carlos Henrique Barbosa Gonçalves – USP

Carlos Roberto de Moraes – FHO

Circe Mary Silva da Silva Dynnikov – UFPel

Cristiane Coppe de Oliveira – UFU

Elenice de Souza Lodron Zuin – PUC/MG

Fábio Maia Bertato – Unicamp

Giselle Costa de Sousa – UFRN

Iran Abreu Mendes – UFPA

John Andrew Fossa – UFRN

Lígia Arantes Sad – IFES

Lucieli Maria Trivizoli da Silva – UEM

Marcos Lübeck – Unioeste *(Coordenador Científico)*

Marcos Vieira Teixeira – Unesp

Mariana Feiteiro Cavalari Silva – Unifei
Miguel Chaquiam – UEPA
Mônica de Cássia Siqueira – UFTM
Rafael Montoito – IFSul
Sabrina Helena Bonfim – UFMS
Sergio Roberto Nobre – Unesp
Viviane de Oliveira Santos – UFAL
Wagner Rodrigues Valente – Unifesp
Zaqueu Vieira Oliveira – Unesp

Comissão Local do XVI SNHM

Adriana Duarte Leon
Aline Vieira da Cunha
Bianca Herreira Capilheira
Cássio Baissvenger Pazinatto
Cauê Duarte
Cristiane Winkel Elert
Denise Nascimento Silveira
Erenita Martins David
Fabiana Celente Montiel
Fabrício Freitas
Graça Peraça
Juliana Madruga da Silveira
Rafael de Souza Velasco
Rafael Montoito *(Coordenador Local)*
Roger Minks
Stefânia da Silveira Glaeser
Thaís Philipsen Grutzmann

Apoio Científico/Institucional/Editorial

Sociedade Brasileira de História da Matemática – SBHMat
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul
Livraria da Física – LF

Apoio Financeiro

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq

Sumário

Apresentação 14
Marcos Lübeck
Rafael Montoito

Palestra de Abertura

Ubiratan D'Ambrosio: do Cálculo das Variações às Variações Curriculares 21
Wagner Rodrigues Valente

Palestra de Encerramento

Um olhar histórico-matemático sobre o cálculo vetorial no Brasil e na França nas três primeiras décadas do século XX 23
Sabrina Helena Bonfim

Palestras Paralelas

Geometria de situação: investigação de sua história pela metodologia da rede de textos 40
Cleber Haubrichs

História da Matemática para o bem viver: reflexões por vias da etnomatemática 54
Claudia Alessandra Costa de Araujo Lorenzoni

História da Matemática, imagens e inteligência artificial na pesquisa e no ensino 69
Andréia Dalcin

Arquimedes: matemática na poesia, nos brinquedos e no infinito 85
Henrique Marins de Carvalho

Algumas histórias sobre a história da educação matemática e do ensino de matemática no Brasil 99
Dulcyene Maria Ribeiro

Mesas Redondas

Transferência cultural entre Portugal e Brasil: primeira aritmética em Pelotas em 1848 106
Circe Mary Silva da Silva Dynnikov
Fernando Ripe

Literatura como fonte histórica: vestígios de um Lewis Carroll educador 121
Rafael Montoito

Caminhos Percorridos: a história da matemática na minha prática de formadora de professores 133
Bruna Moustapha Corrêa

Fonte de pesquisa: uma reflexão sobre monumentos na perspectiva documento/monumento...147
Elmha Coelho Martins Moura

30 anos dos Seminários Nacionais de História da Matemática – memórias de quem participou de todos e atuou na organização de muitos...160
Sergio Roberto Nobre

Uma visão histórica sobre a produção em educação matemática no RS...168
José Carlos Pinto Leivas

Comunicações Científicas

Riemann ou Riemann-Dini? Qual o nome do teorema sobre séries condicionalmente convergentes?...179
Mateus Bernardes

Definições e demonstrações segundo a característica geométrica de Leibniz...195
Fernando Antonio de Araujo Carneiro

Leibniz e Huygens: correspondências de 1691 sobre equações diferenciais separáveis...204
Anna Karla Silva do Nascimento
Iran Abreu Mendes

Paleoevidência do Conceito de Número - Ponta de Machado Acheuleana, com quatro incisões - Zarqa, Jordânia, c. 500 Ka...218
Manoel de Campos Almeida

Pioneiro da Matemática na Colômbia: a vida e obra de Víctor Samuel Albis González (1939-2017)...232
Diana Carolina Pineda Pérez

A trajetória acadêmica de Gilberto Loibel: uma breve descrição do seu processo de doutoramento...245
Ana Paula Brandão Carvalho de Melo

A Matemática na 2ª Guerra Mundial: o desembarque aliado na Normandia, 06/06/1944...258
Luis Manuel Ribeiro Saraiva

Instrumentos matemáticos multiplicativos nas produções do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática...275
Pedro Henrique Sales Ribeiro
Ednaldo Nunes da Silva
Ana Carolina Costa Pereira

Um estudo sobre o instrumento histórico *Finitorium* e suas possibilidades didáticas...290
Marina Oliveira Tavares
Ana Carolina Costa Pereira

O uso do teodolito no ensino de conceitos trigonométricos: uma abordagem histórica e prática...304
Sara Carolayne Mendonça Salgado
Marcos Andrey Rosa

Mulheres na matemática: um estudo sobre suas principais contribuições 316
Isabela Strantica
Rachel Mariotto

A formação da identidade social e corporal da professora que ensinava matemática até século XX 331
Lorrayne Ferreira dos Santos de Paula
Roseli Alves de Moura

Reflexões históricas no ensino da matemática: caminhos para uma compreensão significativa 334
Daniela Almeida Barbosa
Bruno Felipe Gonçalves Diamantino da Silva
Humberto de Assis Clímaco

A teoria da especulação de Louis Bachelier, considerações de Norbert Wiener e o movimento browniano: aproximações com o mercado financeiro 356
Douglas Gonçalves Leite
Kleyton Vinicyus Godoy

A relação entre o Teorema de Sturm e Teoria dos Invariantes na obra de Sylvester 367
Magno Luiz Ferreira

Os novos conceitos na geometria: a percepção de Poncelet sobre o princípio da projetividade 377
Jansley Alves Chaves
Leandro Silva Dias
Gérard Émile Grimberg

Al-Biruni, contemporâneos e contribuições para matemática islâmica medieval 369
Vitória Lima Quaresma
Giselle Costa de Sousa

Pesquisas que utilizaram criptografia em diálogo com história da matemática em aliança com tecnologias digitais 402
Lais Luisa Pereira da Silva
Giselle Costa de Sousa

Equações quadráticas e GeoGebra: uma releitura da resolução de Agnesi 416
Vívia de Souza Marins
Roseli Alves de Moura
Renan de Souza Teixeira

Aspectos gerais da obra Cálculo Vetorial de Christovam Colombo dos Santos (1890-1980) 429
Davidson Paulo Azevedo Oliveira
Roseli Alves de Moura
Sabrina Helena Bonfim

O desenvolvimento das investigações nos campos de História da Matemática e História da Educação Matemática utilizando os arquivos digitais como fonte de pesquisa: uma breve introdução 439
Angelica Raiz
Maria Maroni Lopes

I Seminário Nacional de História da Matemática: um resgate histórico 451
Josinalva Estacio Menezes
Cícero Monteiro de Souza

Um estudo sobre o Noticiário Brasileiro de Matemática 465
Raphael Alcaires de Carvalho

Desenvolvimento de um Centro de História e Memória em Educação Matemática no Oeste do Pará 478
José Ricardo e Souza Mafra

A matemática e o jogo da tômbola no contexto da imigração italiana no Rio Grande do Sul 487
Delma Tânia Bertholdo

Ecos matemáticos refletidos pelo Congo Capixaba: um estudo etnomatemático e histórico ... 501
Alexandre Maia Ferreira
Ligia Arantes Sad

Etnomatemática e corpo-território: a feitura de cestarias de uma artesã *Avá Guarani* como fonte historiográfica 514
Midiã Barbosa
Rhuan Guilherme Tardo Ribeiro

Etnomatemática, história da matemática e o ensino de trigonometria a partir da produção de vídeos 528
Juliana Batista Pereira dos Santos
Isabel Cristina Machado de Lara

A Escola Normal de Cuiabá: o design de uma pesquisa histórica 543
Simone Simionato dos Santos
Circe Mary Silva da Silva

Os números inteiros relativos durante a Matemática Moderna no ensino liceal em Portugal 558
Mária Cristina Almeida

O ensino de Matemática a partir de cadernos escolares: Colégio São José/RS (1905) 572
Malcus Cassiano Kuhn
Silvio Luiz Martins Britto

Um estudo das pesquisas sobre formação de professores de matemática em Mato Grosso do Sul 586
Marisa Raquel de Melo Pereira
Thiago Pedro Pinto

Histórias, memórias e consolidação do curso de licenciatura em matemática do CERES: quarenta e quatro anos formando docentes na região do Seridó/RN 598
Maria Maroni Lopes
Angélica Raiz

Disciplina Didática na Licenciatura de Matemática da Ufes: trajetórias de constituição e polêmicas (1960 a 2002) 610
Célio Moacir dos Santos
Lígia Arantes Sad

Thomas Hood e sua contribuição para o desenvolvimento das matemáticas na Inglaterra Elizabethana 620
Lívia Bezerra de Alencar
Ana Carolina Costa Pereira

Conceituando o Laboratório de História da Matemática na formação de professores a partir das vivências do GPEHM 633
Ana Carolina Costa Pereira
Joelma Nogueira dos Santos

Lewis Carroll enquanto matemático e educador matemático: olhares sobre "*Pillow Problems*" 641
Roger Minks
Rafael Montoito

Apreciação inicial do documento *New and Complete Epitome of Practical Navigation* (de 1805) 654
Anna Beatriz de Andrade Gomes
Giselle Costa de Sousa
Valdenize Lopes do Nascimento

Os Números Complexos em Instituições de Ensino Superior do Paraná 666
Kelly Roberta Mazzutti Lübeck

Aspectos de História da Matemática na Análise Real para docentes 678
Diogo Sampaio da Silva

O "Tesouro da Análise" de Pappus de Alexandria 690
Marcela Melo Amorim

A evolução da geometria euclidiana de Euclides a Proclo 702
Bruno Felipe Gonçalves Diamantino da Silva
Humberto de Assis Clímaco

Segredo das circunferências: uma jornada histórica para o π e ao comprimento da circunferência 715
José Fernando Ugoski Silveira
Otto Germano Blank
Diogo Franco Rios

A matemática na Proposta Curricular Pernambucana (1974): um estudo histórico fundamentado na teoria da objetivação 725
Natália Lucile Medeiros de Lira
Juliana Martins

A avaliação na lei de diretrizes e bases da educação de 1971: o tecnicismo em foco 736
Leonardo Severo
Dulcyene Maria Ribeiro

Frações: um olhar para as obras de Osvaldo Sangiorgi 746
Pamela Gonçalves
Dulcyene Maria Ribeiro

O papel dos determinantes em abordagens geométricas do século XIX 760
Caio Emanuel Curty Lima
Yasmin Cristina Motta Fernandes
Magno Luiz Ferreira

Determinantes a partir de livros-textos do século XIX 771
Maria Luisa Mendonça Pitassi
Caio Emanuel Curty Lima
Leandro Silva Dias

Revisitando as matrizes a partir de Cayley 1858 782
Yasmin Cristina Motta Fernandes
Maria Luisa Mendonça Pitassi
Magno Luiz Ferreira

Gaston Darboux e as métricas de Cayley 794
Leandro Silva Dias
Gérard Émile Grimberg

Cartas na mesa: etnomatemática e história da matemática com o Boi Pintadinho de Muqui-ES 806
Arthur Constantino Dutra da Silva
Claudia Alessandra Costa de Araujo Lorenzoni

Indícios de saberes e fazeres etnomatemáticos presentes na Educação de Jovens e Adultos 820
Adriana da Silva Klippel
Marcos Lübeck

Janelas do tempo: experiência de ensino em uma escola pública de Belém do Pará 834
Edna Machado da Silva
João Cláudio Brandemberg

Pôsteres

Constituição do Acervo Histórico do Instituto de Física e Matemática da UFPel 848
Caio Leandro Costa da Silva
Diogo Franco Rios

Geometria, Egito e Número de Ouro: oficina de desenho geométrico da grande pirâmide 850
Carlos Eduardo Massuquetto Zanon
Ana Cristina Corrêa Munaretto

História em quadrinhos como recurso didático para o ensino do sistema de numeração decimal 852
Matheus Eduardo Olimpio Sabino

Uma breve apresentação da *L'Álgebra* de Rafael Bombelli 853
Bernadete Barbosa Morey
Ana Paula Pereira do Nascimento Silva

Perspectiva na obra Cônicas de Apolônio: traçando caminhos e tradições 855
Pã Montenegro

Tratado sobre a determinação do seno de 1° 857
Ana Paula Pereira do Nascimento Silva
Bernadete Barbosa Morey

Uma visão histórica do cálculo: a guerra entre Newton e Leibniz 859
Fernando Rodrigo Rafaeli
Nicollas Luduvichack Barbosa Amaral

Logaritmos: uma conexão entre Michael Stifel e John Napier 861
André Marques dos Santos

Utilizando os Sona para calcular o Máximo Divisor Comum de dois números inteiros 863
Patrícia Nunes da Silva

Sobre os Organizadores 865

Apresentação

arte: leandro selister | @lselister

Apresentação

Marcos Lübeck[1]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

Rafael Montoito[2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul

Seiscentos e sessenta e seis
A vida é uns deveres que nós trouxemos para fazer em casa.
Quando se vê, já são 6 horas: há tempo...
Quando se vê, já é 6ª-feira...
Quando se vê, passaram 60 anos...
Agora, é tarde demais para ser reprovado...
E se me dessem - um dia - uma outra oportunidade,
eu nem olhava o relógio, seguia sempre, sempre em frente...
E iria jogando pelo caminho a casca dourada e inútil das horas.
Mario Quintana (Esconderijos do Tempo, 1980).

O XVI **Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM)** deu continuidade aos tradicionais eventos da área, momento em que professores e pesquisadores, do Brasil e do exterior, se encontram para apresentar pesquisas e compartilhar conhecimentos sobre a História da Matemática. As edições ocorrem bienalmente, em anos ímpares, começando no Domingo de Ramos e encerrando na Quarta-Feira da Semana Santa, sendo realizadas em diferentes locais e regiões brasileiras, seguindo objetivos estatutários específicos.

Esta foi a primeira vez que o SNHM aconteceu no Rio Grande do Sul (RS), tendo como sede a cidade de Pelotas e, como lugar, o campus do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSul). Essa foi uma oportunidade à parte para se encantar com a Princesa do Sul, seus casarios, museus e a *Bibliotheca Pelotense*, para conhecer a sua gente, as charqueadas ao longo do Arroio Pelotas, a praia às margens da Lagoa dos Patos, e para apreciar as suas cores e seus sabores, enfim, seus ícones histórico-geográficos e culturais tão peculiares.

O evento foi especial por muitos motivos, mas dois merecem destaque. Um deles é que o estado sofreu com uma calamidade que deixou marcas no território e na memória do RS, cicatrizes em corpos e na alma rio-grandense, causadas pela tragédia climática que nos flagelou em 2024. Reencontrar-nos e promover um evento que recebeu profissionais, pesquisadores e estudantes de todo o país, e de fora, para escrevermos mais um capítulo na biografia dos SNHM, foi uma atitude necessária, de resiliência, pujança e superação.

A solidariedade e a união abrilhantaram o evento, desde quem apoiou a iniciativa à participação daqueles que compareceram. Isto fez cintilar a tradicional hospitalidade da nossa querência e levou ao RS, além do que há de mais atual em História da Matemática, outras histórias, lembranças constituídas somente durante esses encontros. Essas sempre retornam, na forma de contos e causos

[1] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro/SP. Professor no Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGEn) e no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Foz do Iguaçu, Paraná, Brasil. E-mail: marcoslubeck@gmail.com.
[2] Doutor em Educação para a Ciência pela Universidade Estadual Paulista (Unesp), Bauru/SP. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSul), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: xmontoito@gmail.com.

que o pensamento guarda e a existência eterniza, e que se juntam a tantos vividos antes, os quais, depois, em momentos de saudosismo ou nostalgia, voltam a ser realidade.

O outro e melhor motivo é que, em 2025, celebramos os 30 anos da realização do I SNHM, uma razão especial para comemorar, com entusiasmo e esperança. Esta contínua e exemplar jornada científica demonstra intensos pulsares, conectando passado e presente ao futuro, saberes culturais e acadêmicos, materializados pela ocorrência de cada edição, na expectativa e preparativos da próxima, que sempre fica agendada. Uma caminhada que tem percorrido caminhos exuberantes em diversidade. E, dessas passagens, temos:

Quadro 1 – Edições do SNHM de 1995 a 2025

I SNHM, 1995, Recife (PE)	IX SNHM, 2011, Aracaju (SE)
II SNHM, 1997, Águas de São Pedro (SP)	X SNHM, 2013, Campinas (SP)
III SNHM, 1999, Vitória (ES)	XI SNHM, 2015, Natal (RN)
IV SNHM, 2001, Natal (RN)	XII SNHM, 2017, Itajubá (MG)
V SNHM, 2003, Rio Claro (SP)	XIII SNHM, 2019, Fortaleza (CE)
VI SNHM, 2005, Brasília (DF)	XIV SNHM, 2021, Uberaba (MG) / *Online*
VII SNHM, 2007, Guarapuava (PR)	XV SNHM, 2023, Maceió (AL)
VIII SNHM, 2009, Belém (PA)	XVI SNHM, 2025, Pelotas (RS)

Fonte: Elaborado pelos Autores (2025)

Mesmo florescendo agora, a recente edição tem raízes de três décadas, quando um grupo de pessoas com interesse em comum se reuniu em torno da História da Matemática. Membros dessa aliança, que congregou pesquisadores de várias partes do país, realizaram o I SNHM, em 1995. Em 1996, formaram o **Comitê Brasileiro de História da Matemática**, grupo que organizou os dois seguintes. Essa comunidade científica, durante o III SNHM, constitui uma associação: a **Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat)**.

A SBHMat foi fundada em 30 de março de 1999. Ela tem o objetivo de promover estudos e pesquisas visando divulgar informações, reflexões e conhecimentos referentes à História da Matemática. A SBHMat vem alcançando o desígnio, sobretudo, nos eventos de História da Matemática e seus **Anais**[3], além de editar e divulgar publicações brasileiras no campo da História da Matemática, da História da Educação Matemática e áreas afins, que têm se constituído em potentes fontes de pesquisa. Desde sua constituição, a SBHMat tem crescido e se fortalecido, sendo a responsável pela organização dos SNHM[4].

O XVI SNHM foi realizado de 13 a 16 de abril de 2025, sob a Coordenação Local do Prof. Dr. Rafael Montoito, sendo Coordenador Científico o Prof. Dr. Marcos Lübeck, ambos gaúchos. E, como nota o poeta, se "a vida é uns deveres que nós trouxemos para fazer em casa", organizar o SNHM foi uma tarefa que nos deixou lisonjeados. Então, para cumpri-la, consideramos ao evento quatro áreas temáticas: 1) História da Matemática; 2) História da Educação Matemática; 3) História no Ensino de Matemática e; 4) História da Matemática e Etnomatemática.

Iniciamos pelos minicursos. Colegas professores e pesquisadores propuseram oito minicursos, cada um acompanhado da sua respectiva obra escrita. As obras, voltadas ao desenvolvimento de

[3] Para mais informações, acesse: https://snhm.com.br/anais/
[4] Para mais informações, acesse: https://www.sbhmat.org/

ações didático-pedagógicas com uso da História da Matemática para o ensino em diferentes níveis, atendem ao objetivo basilar da sua existência nos SNHM, oferecendo, assim, a professores do Ensino Fundamental, Médio e Superior, uma lista de livros com temas que podem ser usados em suas práticas docentes, uma linda coletânea intitulada de **Série 30 anos do Seminário Nacional de História da Matemática**.

As obras desta série comemorativa se juntam a uma coleção maior, nomeada de **Coleção História da Matemática para Professores**, a qual conta agora com 137 livros de minicursos, produzidos desde 2001 pela SBHMat e que, a partir de 2015, passou a contar com apoio da Livraria da Física Editorial. Todos os livros encontram-se disponíveis para acesso digital gratuito no **Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat)**[5]. A seguir, temos imagens das capas deste rol mais recente.

Figura 1 – Série 30 anos do Seminário Nacional de História da Matemática

Fonte: SBHMat/Livraria da Física (2025)

Seguimos com os trabalhos, pois "quando se vê, já são 6 horas: há tempo... quando se vê, já é 6ª-feira..." Logo, para as comunicações científicas – pesquisa concluída ou em andamento, realizada por pesquisadores, professores e alunos de pós-graduação; relato de experiência realizado por professores; iniciação científica concluída realizada por alunos de graduação e recém graduados –, recebemos textos completos. Para pôsteres – iniciação científica não concluída de graduação e projeto de pesquisa de graduação, pós-graduação e professores –, recebemos resumos. Preliminarmente, reunimos 80 trabalhos.

[5] https://www.crephimat.com.br/livrosdeminicursos

Destes, 77 foram aprovados – 64 comunicações científicas e 13 pôsteres – após a avaliação da comissão científica e pareceristas *ad hoc*, sendo que 62 foram apresentados no evento – 53 comunicações e nove pôsteres. Nestes **Anais** constam apenas os textos apresentados e os artigos e resumos enviados pelos conferencistas e palestrantes. Por fim, vale ressaltar que estamos publicando 75 textos, após a apresentação, assinados por mais de uma centena de autores. Ainda sobre os números, tivemos 180 inscrições confirmadas, estas oriundas do Brasil, Argentina, Uruguai, Colômbia, Estados Unidos e Portugal.

A programação incluiu uma conferência plenária de abertura e outra conferência de encerramento, seis palestras paralelas e quatro mesas-redondas. Entre proponentes de minicursos, conferencistas, palestrantes e mediadores de atividades, foram quatro dezenas de pesquisadores, além das comunicações científicas e pôsteres. A programação envolveu ainda uma ação cultural, cafés com lançamentos de livros e momentos de integração, que aparecem reproduzidas a seguir.

Quadro 2 – Programação Geral do XVI SNHM

Programação Geral			
Domingo 13/04	**Segunda-feira 14/04**	**Terça-feira 15/04**	**Quarta-feira 16/04**
	Comunicações 08:00 – 10:00	**Comunicações** 08:00 – 10:00	**Mesa 4** 08:00 – 10:00
	Café 10:00 – 10:30	**Café** 10:00 – 10:30	**Café** 10:00 – 10:30
	Pôsteres 10:30 – 11:00	**Pôsteres** 10:30 – 11:00	**Conferência Final** 10:30 – 11:30
	Palestras 1, 2 e 3 11:00 – 12:00	**Palestras 4, 5 e 6** 11:00 – 12:00	**Encerramento** 11:30 – 12:00
	Almoço 12:00 – 13:30	**Almoço** 12:00 – 13:30	
Credenciamento 13:30 – 16:00	**Mesa 1** 13:30 – 16:00	**Mesas 2 e 3** 13:30 – 16:00	
Ação Cultural 16:00 – 16:30	**Café** 16:00 – 16:30	**Café** 16:00 – 16:30	
Abertura 16:30 – 17:00	**Minicursos 1 a 8** 16:30 – 18:00	**Minicursos 1 a 8** 16:30 – 18:00	
Conferência Inicial 17:00 – 18:00			

Fonte: Elaborado pelos Autores (2025).

A evidência marcante foi a presença de pesquisadores que estiveram no I SNHM. Alguns pesquisadores não só participaram daquele, mas de todos os demais. Aliás, entre constâncias e ausências, nem parece que passaram 30 anos. "Quando se vê, passaram 60 anos..." Tomara que permaneçamos nesse caminho, que continuemos os projetos dos que vieram antes, nos mostraram o rumo e daí seguiram... Para muitos, "agora, é tarde demais para ser reprovado..." É o tempo – e a vida – que passam! Apenas histórias permanecem.

Nos pormenores da programação, como segue, vemos atores e seus papéis, desde antigos personagens até mais recentes, referidos por pesquisadores iniciantes ou seniores, sempre no tocante à História da Matemática e as suas relações com os eixos temáticos do XVI SNHM. Vemos, igualmente, assuntos, personalidades, sentidos, contextos, lugares... diferentes fontes, tecnologias

e metodologias empregadas. Na expectativa de transcender o tempo oportunizado pela pesquisa e pela própria realização do evento, registramos todo o possível nestes Anais. Por isso, convidamos os passantes a adentrarem em sua leitura.

Quadro 3 – Conferências, Palestras e Mesas-Redondas do XVI SNHM

Conferência de Abertura	
Título da Conferência Inicial	**Conferencista**
Ubiratan D'Ambrosio: do cálculo das variações às variações curriculares	Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente
Conferência de Encerramento	
Título da Conferência Final	**Conferencista**
Um olhar histórico-matemático sobre o cálculo vetorial no Brasil e na França nas três primeiras décadas do século XX	Profa. Dra. Sabrina Helena Bonfim
Palestras Paralelas	
Título da Palestra 1	**Palestrante**
Geometria de Situação: investigação de sua história pela metodologia da rede de textos	Prof. Dr. Cleber Haubrichs dos Santos Mediador: Prof. Dr. Carlos Roberto de Moraes
Título da Palestra 2	**Palestrante**
Arquimedes: matemática na poesia, nos brinquedos e no infinito	Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho Mediadora: Profa. Dra. Juliana Martins
Título da Palestra 3	**Palestrante**
História da Matemática para o bem viver: reflexões por vias da Etnomatemática	Profa. Dra. Claudia Alessandra Costa de Araujo Lorenzoni Mediador: Prof. Dr. Marcos Lübeck
Título da Palestra 4	**Palestrante**
História da Matemática, imagens e inteligência artificial na pesquisa e no ensino	Profa. Dra. Andreia Dalcin Mediadora: Profa. Dra. Maria Maroni Lopes
Título da Palestra 5	**Palestrante**
"Lugar de fala" e vanguarda na Europa setecentista: Maria Gaetana Agnesi - matemática e ensino	Prof. Dra. Roseli Alves de Moura Mediadora: Profa. Dra. Angélica Raiz
Título da Palestra 6	**Palestrante**
Algumas histórias sobre a história da Educação Matemática e do Ensino de Matemática no Brasil	Profa. Dra. Dulcyene Maria Ribeiro Mediadora: Profa. Dra. Rachel Mariotto
Mesas-Redondas	
Título da Mesa 1	**Convidados**
Seminário Nacional de História da Matemática: 30 anos	Prof. Dr. Iran Abreu Mendes Prof. Dr. Sergio Roberto Nobre Mediadora: Profa. Dra. Lígia Arantes Sad
Título da Mesa 2	**Convidados**
Pesquisas da História em Diferentes Fontes	Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira Profa. Dra. Elmha Coelho Martins Moura Prof. Dr. Rafael Montoito Mediador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira
Título da Mesa 3	**Convidados**
Pesquisas em História da Matemática, por Recém Doutores	Profa. Dra. Bruna Moustapha-Corrêa Prof. Dr. Douglas Gonçalves Leite Prof. Dr. Magno Luiz Ferreira Mediadora: Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira

Título da Mesa 4	Convidados
História da Educação Matemática no Sul do Brasil	Profa. Dra. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas Mediador: Prof. Dr. Fernando Ripe

Fonte: Elaborado pelos Autores (2025).

Desejamos que os **Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática** possam ser fonte e inspiração para mais pesquisas e pesquisadores, e que sirvam ainda de memórias sobre as pessoas que dele participaram e de como isto aconteceu. Para registro, seguem duas fotos do evento. Aproveitem essa história! Particularmente, "se me dessem - um dia - uma outra oportunidade, eu nem olhava o relógio, seguia sempre, sempre em frente... E iria jogando pelo caminho a casca dourada e inútil das horas". A tempo, aos partícipes dessa história, os nossos sinceros agradecimentos e melhores cumprimentos.

Figura 2 – Fotos da Abertura e do Encerramento do XVI SNHM

Fonte: Organização do XVI SNHM (2025).

Palestra de Abertura

arte: leandro selister | @lselister

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Ubiratan D'Ambrosio: do cálculo das variações às variações curriculares

Ubiratan D'Ambrosio: from the calculation of variations to curricular variations

Wagner Rodrigues Valente[1]
Universidade Federal de São Paulo – Unifesp

RESUMO

O texto analisa a trajetória profissional de Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021). Atém-se a três momentos desse percurso. O primeiro, de sua atuação no Brasil, como professor universitário. Posteriormente, o texto analisa sua estadia nos EUA. Por fim, considera o seu retorno ao Brasil. O estudo inscreve-se no movimento internacional de pesquisas sobre a história do conhecimento, com análises sobre os bastidores da produção científica. Tal perspectiva remonta ao chamado "Programa Forte" de David Bloor, de 1976, na afirmação da produção científica como empreendimento social, e seus desdobramentos nas décadas seguintes. Nesse sentido o estudo, lança mão de arquivos pessoais, como os documentos reunidos por D'Ambrosio. Tais documentos, como fontes de pesquisa, permitem a entrada nos bastidores da produção de saberes ligados ao âmbito da matemática, à organização de cursos de matemática e referências para a pesquisa matemática, à ambiência estadunidense para recepção de estrangeiros nas academias e ao movimento de constituição de campos disciplinares como a Educação Matemática no Brasil.

Palavras-chave: Educação Matemática; Formação de Professores de Matemática; Currículo.

ABSTRACT

This text analyzes the professional trajectory of Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021). It focuses on three periods of this journey. The first involves his work in Brazil as a university professor. Later, the text analyzes his stay in the United States. Finally, it considers his return to Brazil. The study is part of the international research movement on the history of knowledge, with analyses of the behind-the-scenes aspects of scientific production. This perspective dates to David Bloor's so-called "Strong Program" of 1976, which affirmed scientific production as a social enterprise, and its developments in the following decades. In this sense, the study draws on personal archives, such as the documents collected by D'Ambrosio. These documents, as research sources, provide insight into the production of knowledge related to mathematics, the organization of mathematics courses and references for mathematical research, the American environment for welcoming foreigners into academia, and the movement toward establishing disciplinary fields such as Mathematics Education in Brazil.

Keywords: Mathematics Education; Mathematics Teacher Training; Curriculum.

[1] Pós-Doutor pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC). Professor Adjunto Livre Docente da Universidade Federal de São Paulo (Unifesp), Guarulhos, São Paulo, Brasil. E-mail: wagner.valente@unifesp.br.

Palestra de Encerramento

arte: leandro selister | @lselister

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Um olhar histórico-matemático sobre o cálculo vetorial no Brasil e na França nas três primeiras décadas do século XX

A historical-mathematical perspective on vector calculus in Brazil and France during the first three decades of the 20th century

Sabrina Helena Bonfim[1]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

RESUMO

Adentrando-se a História das Ciências, com foco na Matemática e em sua história, especificamente na História da Matemática do Brasil, com seus personagens e obras que possuíram notável importância para o desenvolvimento desta ciência, a presente proposta busca fornecer subsídios historiográficos acerca da história do cálculo vetorial no Brasil. Dados de pesquisas anteriores apontaram que, partindo da temática como disciplina, esta foi primeiramente implantada no país no ano de 1926, na Escola Politécnica de São Paulo, e teve como docente da cadeira o engenheiro-matemático Theodoro Augusto Ramos (1895-1935), também autor da primeira obra publicada no país (1927) e da primeira publicação internacional de um brasileiro acerca da temática (França, 1930). Obras estas analisadas e publicadas, assim como a biografia acadêmica e profissional permeada por fatos pessoais acerca do autor, até então inéditos para a história da matemática brasileira. O resultado da análise destas duas obras de Ramos possibilitou verificar, dentre outros aspectos o intercâmbio científico com personagens franceses. Contemporâneo as obras do brasileiro Ramos, tem-se na França a publicação, em 1923, por Albert Châtelet (1883-1960) e Marie Joseph Kampé de Fériet (1893-1982) de um livro sobre a temática. Neste sentido, levando em consideração uma reflexão no tocante as relações científicas estabelecidas entre os dois países, intenta-se por meio deste trabalho apresentar um primeiro estudo destas obras possibilitando avançar num entendimento da situação do Cálculo Vetorial pertinente aos dois países nas três primeiras décadas do século XX.

Palavras-chave: Cálculo Vetorial; História da Matemática no Brasil; Theodoro Augusto Ramos; Albert Châtelet; Marie Joseph Kampé de Fériet.

ABSTRACT

Delving into the History of Science, with a focus on Mathematics and its historical development—specifically the History of Mathematics in Brazil, along with its key figures and works that played a significant role in the advancement of this field—this proposal seeks to provide historiographical contributions regarding the history of vector calculus in Brazil. Previous research has shown that vector calculus, as an academic discipline, was first introduced in the country in 1926, at the Polytechnic School of São Paulo. The course was taught by the engineer-mathematician Theodoro Augusto Ramos (1895–1935), who was also the author of the first work published on the subject in Brazil (1927) and the first international publication by a Brazilian scholar on the topic (France, 1930). These works have been analyzed and published, as well as Ramos's academic and professional biography, enriched by personal facts previously unknown to the history of mathematics in Brazil. The analysis of these two works by Ramos revealed, among other aspects, scientific exchange with French scholars. Contemporaneous to Ramos's publications, a book on the same subject was published in France in 1923 by Albert Châtelet (1883–1960) and Marie Joseph Kampé de Fériet (1893–1982). In this context and considering the scientific relations established between the two countries, this study intends to present a first comparative investigation of these works, thereby contributing to a deeper understanding of the situation of vector calculus in Brazil and France during the first three decades of the twentieth century.

Keywords: Vector Calculus; History of Mathematics in Brazil; Theodoro Augusto Ramos; Albert Châtelet; Marie Joseph Kampé de Fériet.

[1] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro/SP. Docente na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Paranaíba, Mato Grosso do Sul, Brasil. E-mail: sabrina_helenabonfim@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

Dos fatos que precedem esta pesquisa é necessário observar que o engenheiro-matemático Theodoro Augusto Ramos (1895-1935) é reconhecido na História da Matemática no Brasil como uma das figuras principais por seu papel no recrutamento de professores estrangeiros para a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, recém-criada na época (1934) (D'Ambrosio, 2011; Silva, 2003, 2008). Em Bonfim (2013, Doutorado), a autora realizou a análise da tese de doutorado de Ramos, seguida, em Bonfim (2015) por uma primeira biografia. Em Bonfim e Teixeira (2019) foi apresentada uma análise matemática da tese e complementos à biografia e, em Bonfim e Nobre (2021, Pós-doutorado) uma pesquisa com o objetivo de compreender a introdução do cálculo vetorial no Brasil, bem como sua história e a primeira análise histórico-matemática dos trabalhos de Ramos sobre o tema (Ramos, 1927, Brasil; Ramos, 1930, França). Seguidos de Bonfim, (2023a): Trajetória acadêmica, combinando os papéis de gestor, administrador, pesquisador e professor. Esses fatos permitiram elaborar uma reflexão acerca do caminho traçado por esse engenheiro civil que se tornou um matemático notável de sua época e, posteriormente (Bonfim, 2023b).

Desta forma, a narrativa construída a partir desse histórico permitiu uma reflexão crítica sobre a obra de Cálculo Vetorial de Ramos, publicada na França em 1930, no contexto dos intercâmbios científicos com figuras francesas. Este foi o objetivo principal do projeto submetido ao CNPq para este estágio de pós-doutorado em Paris (2024). Em Bonfim (2025), um histórico dos trabalhos brasileiros na Academia de Ciências de Paris até os anos 1930 foi apresentado, estabelecendo assim, o primeiro registro histórico das publicações brasileiras na França que antecederam a publicação de Ramos. Desta forma, a narrativa histórico-matemática construída até o momento permite levantar a seguinte questão, que se traduz em um desdobramento da pesquisa e, um recorte da conferência apresentada: Quais aspectos da história do cálculo vetorial e dos intercâmbios científicos entre Brasil e França nas três primeiras décadas do século XX podem ser evidenciados a partir da obra *Sur le Calcul Vectoriel* (1930), de Ramos, e da publicação *Calcul Vectoriel. Théorie, applications géométriques et cinématiques* (1923), de Châtelet e Kampé de Fériet?

Para responder a esta pergunta, recorreremos a considerações historiográficas que propõem uma nova periodização da História da Matemática no Brasil, orientada por um enfoque voltado à história das ideias em países periféricos, conforme a proposta de D'Ambrosio (1999), uma vez que:

> A História da Matemática, subentendido a matemática ocidental, segue a periodização mais comum: Antiguidade, Idade Média, Renascimento e Idade Moderna e Contemporânea. Após o Renascimento se inicia a criação de escolas e se identificam as grandes direções teóricas que tomou a matemática moderna. A História da Matemática estuda o progresso da matemática, a criação das escolas e os fatores que determinaram as direções nas quais se deu o progresso. Os países periféricos não participaram do progresso da matemática antes do final do século XIX. Até então se deu apenas a recepção do conhecimento matemático e não sua elaboração. Portanto a periodização usual faz pouco sentido para estudarmos a história da matemática nos países periféricos. Além de ser necessária uma outra periodização, é importante uma revisão epistemológica, incluindo prioridades e avanços que não são considerados ao se fazer a história da matemática dos países centrais (D'Ambrosio, 1999, p. 9).

Ainda segundo o autor (D'Ambrosio, 1999, p. 9), uma periodização sugerida para História da Matemática brasileira com novo enfoque historiográfico para se fazer história das ideias nos países periféricos encontra-se dividida em seis grandes períodos. São eles: 1) Pré-Colombro/Cabral: os

primeiros povoamentos, a partir da pré-história; 2) Conquista e colônia (1500-1822) [De colônia a ida da família real portuguesa para o Brasil]; 3) Império (1822 – 1889) [Independência do Brasil até a Proclamação da República (15/09/1889) e primeira constituição]; 4) Primeira Republica (1889 – 1916) e a entrada na modernidade (1916 – 1933)[Fundação da Sociedade Brasileira de Ciências (1916) posteriormente renomeada como Academia Brasileira de Ciências (ABC, 1921)]; 5) Tempos modernos (1934 – 1957) [Criação da primeira universidade, USP – Criação do CNPq (1951) e realização do primeiro Colóquio de Matemática, Poços de Caldas, MG (1957)] e, 6) Desenvolvimentos contemporâneos (a partir de 1957).

A fim de responder à pergunta proposta, o foco deste trabalho centra-se no quarto período acima descrito, visto que nosso período de estudo em questão possui recorte nas três primeiras décadas do século XX, ou seja, de 1900 e 1930.

AS TROCAS CIENTÍFICAS ENTRE BRASIL E FRANÇA NAS TRÊS PRIMEIRAS DÉCADAS DO SÉCULO XX NO CONTEXTO DO CÁLCULO VETORIAL

Em uma tentativa de periodização das trocas científicas entre o Brasil e a França descritas por Petitjean (1996), dentre os cinco períodos abordados pelo autor, o terceiro refere-se ao período de estudo em questão. O autor aponta que:

> Duas diferenças ocorrem no terceiro período: o desenvolvimento de uma comunidade científica brasileira — com o papel desempenhado pela Academia Brasileira de Ciências — e a emergência de uma política francesa mais sistemática de trocas científicas com a América Latina, com a criação do Groupement des Universités et Grandes Écoles de France pour les Relations avec l'Amérique Latine (Agrupamento das Universidades e Grandes Escolas da França para as Relações com a América Latina), em 1907, por cientistas franceses representativos das principais instituições científicas — Collège de France (Colégio de França), Faculté des Sciences (Faculdade de Ciências) etc. O Groupement será dissolvido em 1940, quando da ocupação da França pela Alemanha, que quer o monopólio das relações com a América Latina, e não conseguirá se reconstituir após 1945. A partir desse ano a França concentra-se em suas colônias, e os Estados Unidos ocupam uma posição dominante na América Latina. Sobretudo, as relações científicas internacionais haviam mudado de natureza. O período mais ativo do Groupement é nos anos 20. [...] O Groupement exprime, pela primeira vez, uma "oferta" consciente e organizada da ciência por parte da comunidade científica francesa, com uma sustentação cada vez mais devorante do Estado francês (Petitjean, 1996, p. 37. Grifo da autora).

Assim, temos que os visitantes científicos ao Brasil durante este período, de acordo com Micali (1999) foram: Em 1922, Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956); agosto e setembro de 1924, Jacques Salomon Hadamard (1865-1963); maio de 1925, Albert Einstein (1879-1955), que esteve em 1922 na França; em agosto de 1926, Marie Skłodowska-Curie (1867-1934) e, em setembro 1928, Paul Langevin (1872-1946). De acordo com Micali (1999, p. 5):

> De fato, no momento em que Émile Borel chega ao Brasil, ele já tem diante de si um auditório capaz de compreender essa nova teoria, e alguns, como Theodoro A. Ramos, já haviam publicado pesquisas nesse domínio (Micali, 1999, p. 5. Tradução da autora).

Figura 1 – Theodoro Augusto Ramos (1895-1935)

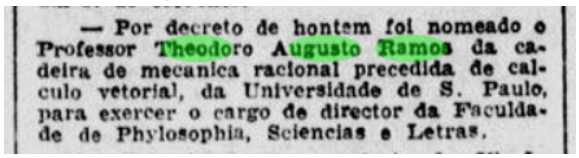
Fonte: Galeria dos presidentes do Rotary Club de São Paulo. Ramos esteve como presidente de 1929 a 1930.

De fato, pois de acordo com Paty (1996):

> Amoroso Costa - A 25 de agosto de 1923, ele leu perante os acadêmicos uma comunicação de seu aluno Theodoro Ramos, engenheiro formado pela Escola Politécnica do Rio e professor titular da cadeira de mecânica racional na Escola Politécnica de São Paulo, sobre a relatividade geral e o deslocamento dos raios do espectro do hidrogênio. Este trabalho é geralmente considerado como a primeira pesquisa verdadeiramente original feita no Brasil sobre a teoria da relatividade; sem dúvida, pode-se igualmente considerá-lo como a primeira publicação, no Brasil, de um artigo de física teórica propriamente dito. [...] Assinalemos ainda a publicação em 1923, na *Revista de Engenharia do Rio de Janeiro*, talvez em correlação com a passagem de Borel no ano precedente, da tradução de um artigo de Paul Painlevé, publicado em 1922, nos Compte-rendus da Academia de Ciências de Paris (Paty, 1996, p. 165).

Num breviário sobre Theodoro Augusto Ramos, temos que este ingressou na Escola Politécnica do Rio de Janeiro em 1912 onde graduou-se em Engenharia Civil com diploma conferido em 27 de abril de 1916. Em 1918, realizou na mesma Escola a defesa da tese de doutorado intitulada *Sobre as funcções de variaveis reaes*. No mesmo ano assumiu cargo como membro do corpo docente da Escola Politécnica de São Paulo. Em 1923, escreveu o artigo científico considerado como pioneiro concernente a teoria da relatividade no Brasil intitulado *A theoria da relatividade e as raias espectraes do hydrogenio*, conforme já citado por Amoroso Costa. Em 1926, tornou-se responsável pela disciplina do Curso Geral da Escola Politécnica de São Paulo, 1 ano, 1ª cadeira: *Vectores, Geometria Analítica, Geometria projetiva e suas aplicações à Nomografia*, introduzindo o cálculo vetorial na referida escola e no Brasil (Bonfim; Nobre, 2021), culminando em 1927, na publicação da obra *Calculo Vectorial* baseada nas notas de curso ministradas no ano precedente, Brasil. Além disso, publicou no ano de 1930, a obra *Leçons sur le Calcul Vectoriel*, em Paris, França. No ano de 1931 foi prefeito da cidade de São Paulo por um curto período de tempo. Além de ter sido o primeiro diretor da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (atual Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, FFLCH) da Universidade de São Paulo, na época (1934) recentemente fundada e primeira universidade do Brasil. Deixou a direção para assumir, no Rio de Janeiro, a direção do Departamento Nacional de Educação.

Figura 2 – Recorte de jornal.

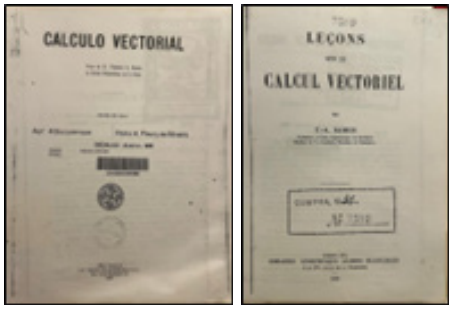


— Por decreto de hontem foi nomeado o Professor Theodoro Augusto Ramos da cadeira de mecanica racional precedida de calculo vetorial, da Universidade de S. Paulo, para exercer o cargo de director da Faculdade de Philosophia, Sciencias e Letras.

Fonte: *Jornal do Commercio*, Rio de Janeiro, quinta-feira, 7 de junho de 1934.

Assim, de acordo com Bonfim e Nobre (2021), a respeito do cálculo vetorial no Brasil, no período em questão, sabe-se que Theodoro Augusto Ramos introduziu a temática na Escola Politécnica de São Paulo, no ano de 1926, sendo o autor do primeiro livro fruto de suas notas de aula, publicado no ano seguinte, em 1927, e, posteriormente, de uma nova obra acrescida do cálculo tensorial, publicada em francês, na cidade de Paris, França, em 1930.

Figura 3 – Capa das obras de cálculo vetorial.

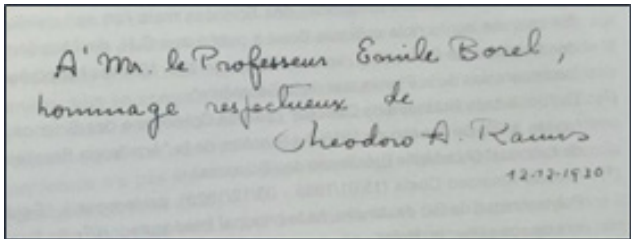


Fonte: Ramos (*Calculo Vectorial*, 1927 e *Leçons sur le Calcul Vectoriel*, 1930).

Um olhar sobre os pioneiros nas trocas científicas com franceses que antecederam Ramos, com publicações ou tentativas de, de acordo com Bonfim (2025), são: Joaquim Gomes de Souza (1829-1864) que, conforme o Diccionario Bibliographico Portuguez (1884, p. 49) e Portela (1975) realizou trocas científicas com Gabriel Lamé (1795-1870). De acordo com as correspondências identificadas nos arquivos da Academia de Ciências de Paris, França, ele estava na cidade de 1855 até o início de 1857, entretanto, embora tenha realizado submissões de trabalhos para a publicação nos Comptes rendus da Academia de Ciências de Paris, não teve nenhum trabalho publicado. Seguido por Otto de Alencar Silva (1874-1912) que, de acordo com Silva (1998, p. 21) e Silva (2006, p. 8), realizou trocas científicas com Jean Gaston Darboux (1842-1917) e Jules Henri Poincaré (1854-1912). Teve também um trabalho publicado no *Bulletin des Sciences Mathématiques* (Section des Sciences Mathématiques, 1901), intitulado *Sur l'équation de Riccati* (Silva, 2006, p. 125). Manuel Amoroso Costa (1885-1928) foi o primeiro brasileiro a ter uma publicação na seção de Matemática e Física dos *Comptes Rendus* da Academia de Ciências de Paris (1922) (Bonfim, 2025) e, quem realizou trocas cientificas com Jacques Salomon Hadamard (1865-1963). Especificamente citamos a participação do brasileiro no *Séminaire Hadamard*, Paris, França, em 23 de março 1928, conforme apontado por Audin (2014, p. 18) e Micali (1999, p. 1), além de Felix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956), conforme, por exemplo, o relato da carta de Borel à Amoroso Costa feita por Ramos (1933, p. 76). E, finalizando, Theodoro Augusto Ramos quem encerra o período em questão sendo o primeiro brasileiro a ter uma obra sobre o cálculo vetorial publicada em Paris, França (1930), conforme exposto em Bonfim e Nobre (2021). Ramos efetuou trocas científicas com Borel, já mencionado acima e citado por Micali (1999) além de Arnaud Denjoy (1884-1974), conforme descrito por Ramos (1934, p. 124). Estes são os *pioneiros*[2] nas trocas científicas entre Brasil e França.

[2] Acerca da expressão pioneiros, ver C. M. da Silva (2006).

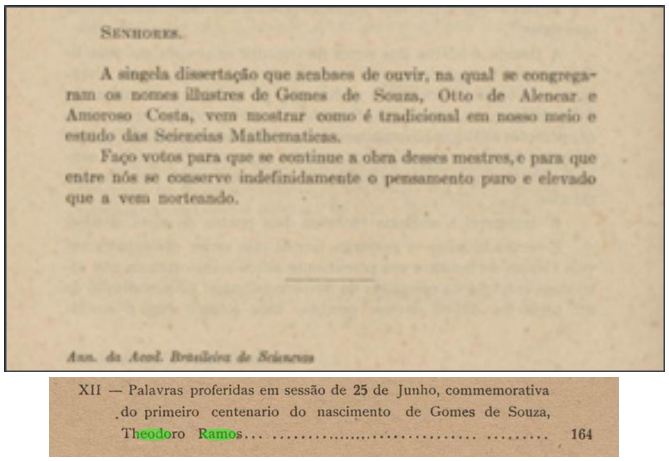
Figura 4 – Dedicatória do livro de Cálculo Vetorial escrito por Ramos a Borel.



Fonte: Micali (1999, p. 8)

Lembremos que Amoroso Costa tinha sido professor, mestre e ativo correspondente com Ramos (Bonfim, 2023) abrindo caminhos para seu intercâmbio científico com a França. Nas palavras proferidas por Ramos em comemoração ao Centenário de nascimento de Gomes de Souza, este expõe:

Figura 5 – Palavras proferidas em comemoração ao Centenário do nascimento de Gomes de Souza.



SENHORES.

A singela dissertação que acabaes de ouvir, na qual se congregaram os nomes illustres de Gomes de Souza, Otto de Alencar e Amoroso Costa, vem mostrar como é tradicional em nosso meio o estudo das Sciencias Mathematicas.

Faço votos para que se continue a obra desses mestres, e para que entre nós se conserve indefinidamente o pensamento puro e elevado que a vem norteando.

Ann. da Acad. Brasileira de Sciencias

XII — Palavras proferidas em sessão de 25 de Junho, commemorativa do primeiro centenario do nascimento de Gomes de Souza, Theodoro Ramos..... 164

Fonte: Ramos, Annaes da Academia Brasileira de Ciencias (RJ) (1929, p.170).
Centenário do nascimento de Gomes de Souza.

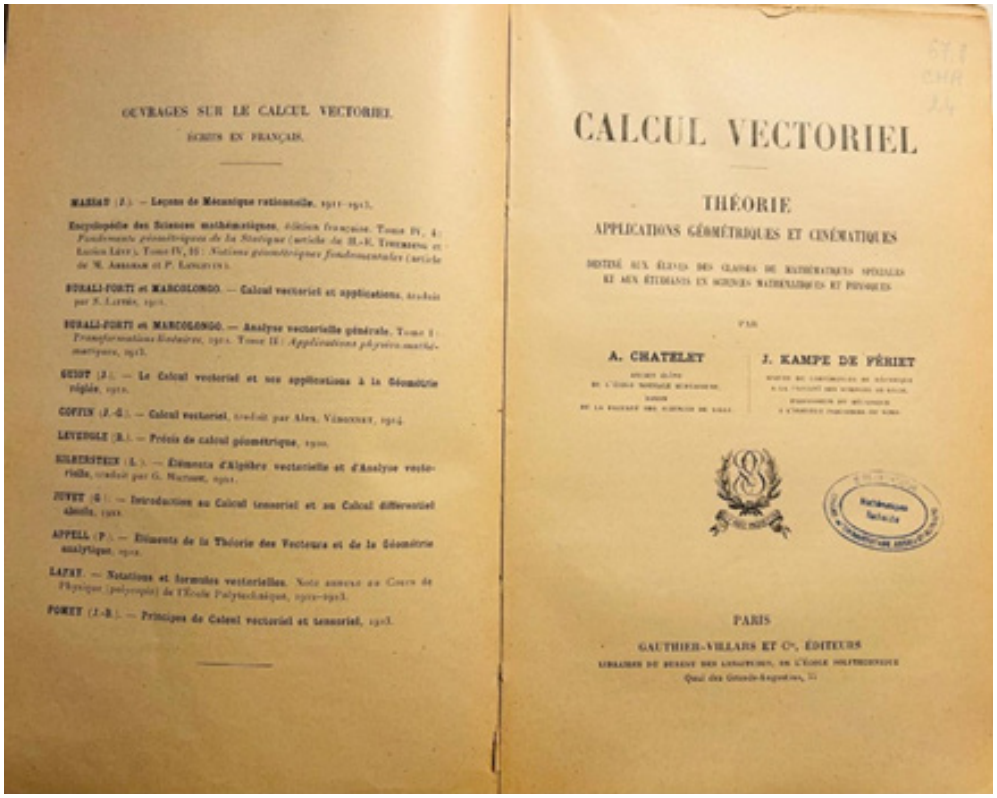
Assim, o percurso dos primeiros brasileiros que tiveram publicações científicas na França (Bonfim, 2025) demonstra um intercâmbio de conhecimentos cientificos para a época, abrindo caminhos para influências posteriores que culminaram na publicação de uma obra acerca do cálculo vetorial.

O CÁLCULO VETORIAL NO PERÍODO DE 1900 A 1930.

Neste tópico intenta-se apresentar uma síntese da história do cálculo vetorial com seus principais autores e obras para o período nos países Brasil e França. Para o Brasil, estas informações podem ser encontradas em Bonfim e Nobre (2021).

No tocante a França, no intuito de traçar uma aproximação inicial para a história do cálculo vetorial para o período em questão, utilizou-se a obra de Châtelet e Kampé de Fériet (1924), que em seu prefácio elenca uma listagem com a biografia do tema correspondente ao período em questão, conforme apresentado abaixo:

Figura 6 – Contracapa da obra.



OUVRAGES SUR LE CALCUL VECTORIEL
ÉCRITS EN FRANÇAIS.

MASSAU (J.). — Leçons de Mécanique rationnelle, 1911-1913.

Encyclopédie des Sciences mathématiques, édition française. Tome IV, 4: *Fondements géométriques de la Statique* (article de H.-E. Timerding et Lucien Lévy); Tome IV, 16: *Notions géométriques fondamentales* (article de M. Abraham et P. Langevin).

BURALI-FORTI et MARCOLONGO. — Calcul vectoriel et applications, traduit par S. Lattès, 1911.

BURALI-FORTI et MARCOLONGO. — Analyse vectorielle générale. Tome I: *Transformations linéaires*, 1912. Tome II: *Applications géométriques*, 1913.

GUIOT (J.). — Le Calcul vectoriel et ses applications à la Géométrie réglée, 1912.

GOUIN (J.-G.). — Calcul vectoriel, traduit par Alex. Vénouvrat, 1914.

LEVEDOLE (R.). — Précis de calcul géométrique, 1920.

SILBERSTEIN (L.). — Éléments d'Algèbre vectorielle et d'Analyse vectorielle, traduit par G. Marmet, 1921.

JUVET (G.). — Introduction au Calcul tensoriel et au Calcul différentiel absolu, 1922.

APPELL (P.). — Éléments de la Théorie des Vecteurs et de la Géométrie analytique, 1922.

LAPAZ. — Notations et formules vectorielles. Note annexe au Cours de Physique (polycopié) de l'École Polytechnique, 1922-1923.

POMEY (J.-B.). — Principes du Calcul vectoriel et tensoriel, 1923.

CALCUL VECTORIEL

THÉORIE
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET CINÉMATIQUES

DESTINÉ AUX ÉLÈVES DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
ET AUX ÉTUDIANTS ES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

PAR

A. CHATELET
ANCIEN ÉLÈVE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
AGRÉGÉ
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

J. KAMPÉ DE FÉRIET
DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES
CHARGÉ DE CONFÉRENCES DE MÉCANIQUE
À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE,
PRÉPARATEUR DE MÉCANIQUE
À L'INSTITUT INDUSTRIEL DU NORD.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

Fonte: Châtelet e Kampé de Fériet, 1924.

De acordo com os autores Châtelet e Kampé de Fériet (1924):

> Dado o nosso objetivo, não fornecemos informações históricas ou bibliográficas sobre o Cálculo Vetorial em si; limitamo-nos a apresentar acima uma lista de obras sobre o tema, escritas em francês. Ao contrário, fazemos referências bastante frequentes a obras de Matemática Especial e de Mecânica para a comparação de certos métodos ou o desenvolvimento de certas teorias. Temos o agradável dever de expressar todos os nossos agradecimentos à Editora Gauthier-Villars; com sua cortesia e seu tradicional empenho, ela se dispôs a cuidar da edição e da impressão deste livro, que gostaríamos de poder chamar de "Matemática Especial", mas que, até novo aviso, ainda está fora dos programas oficiais. Esperamos que esta publicação acelere um pouco a chegada desse novo contexto (Châtelet; Kampé de Fériet, 1924, p. ix. Tradução da autora).

Assim, utilizando a listagem fornecida por Châtelet e Kampé de Fériet em seu livro de 1924, acrescida daquela fornecida por Siqueira (2020), conforme apontamos abaixo, temos uma primeira listagem das obras publicadas na França para o período em questão. Esta por sua vez, nos fornece uma primeira aproximação para a construção de uma história do cálculo vetorial na França.

> 1911-1913: MASSAU (J.). - Leçons de Mécanique rationnelle. (Lições professadas em 1906); 1911: BURALI-FORTI et MARCOLONGO. – Calcul vectoriel et applications, traduit par S. LATTES; 1912: Encyclopédie des Sciences mathématiques, édition Française. Tome IV, 4: *Fondements géométriues de la Statique* (article de H. -E. TIMERDING e Lucien LÉVY). Tome IV, 16: *Notions géométriques fondamentales* (article de M. ABRAHAM et P. LANGEVIN); 1912: GUIOT (J.) - Le Calcul vectoriel et ses applications à la Géométrie réglée; 1912: BURALI-FORTI et MARCOLONGO. – Analyse vectorielle générale, Tome I: Transformations linéaires; 1913: BURALI-FORTI et MAR-

> COLONGO. – Analyse vectorielle générale, Tome II: Applications physico-mathématiques; 1914: COFFIN (J. G.) – Calcul vectoriel, traduit par Alex, VÉRONNET. 1920: LEVEUGLE (R.). – Précis de calcul géométrique; 1921: SILBERSTEIN (L.). – Élements d'Algèbre vectorielle et d'Analyse vectorielle, traduit par G. MATISSE; 1922: APPELL (P.). – Éléments de la Théorie des Vecteurs et de la Géométrie analytique; 1922: JUVET (G.) – Introduction au Calcul tensoriel et au Calcul differentiel absolu; 1922-1923: LAFAY. – Notations et formules vectorielles. Note anexe au Cours de Physique, (polycopie) de l'Ecole Polytechnique e, 1923: POMEY (J. B.). – Principes de Calcul vectoriel et tensoriel (Châtelet; Kampé de Fériet, edição de 1924).

Adicionando a esta listagem a própria obra dos autores com primeira edição datada de 1923[3], ou seja, Châtelet, A.; Kampe de Fériet, J. Calcul Vectoriel**.**

> 1897: NÉDÉLE - *Le calcul vectoriel et ses applications en géométrie et en mécanique;* 1926: EGNELL - L'ochématique (le calcul vectoriel): ses applications géométriques et ses rapports avec le calcul différentiel absolu; 1927: MALLET - Exposé élémentaire du calcul vectoriel et de quelques applications; 1929: BRICARD - Le calcul vectoriel; 1930: RAMOS (T. A.) - Leçons sur le calcul vectoriel e, 1931: NILLUS - Leçons de calcul vectoriel (Siqueira, 2020, p. 162).

Uma observação para o período que se estende de 1914 a 1920 demonstra a ausência de publicações, o que pode ser um fato da participação da França na I Guerra Mundial (1914-1918), na Guerra Civil Russa (1918-1920) e na Guerra Franco-Turca (1920-1921). De acordo com Aubin e Goldstein (2014, p. 5): "Only in the 1990s did historians of mathematics start to pay attention to WWI in their studies".

Neste sentido:

> Após a guerra, Borel levou suas atividades sociais e culturais a uma escala maior, e seu engajamento tornou-se institucional. Muitos dos matemáticos mais jovens, envolvidos em pesquisas relacionadas à guerra na Primeira Guerra Mundial, também assumiram a tarefa atribuída a eles pelos mais velhos de (re)construir as instituições de ensino superior e pesquisa por toda a França. O período entre as duas guerras testemunhou uma mudança na relação entre Paris e as províncias, caracterizada por um forte desejo de desenvolver de maneira mais duradoura os postos avançados provinciais da matemática. Sozinho entre seus pares, Gaston Julia, severamente debilitado durante a guerra, conseguiu uma cátedra em Paris em 1923. Outros matemáticos brilhantes foram enviados às províncias com a missão de reconstruí-las, ou melhor, reconquistá-las. Lá, impulsionaram significativamente o ensino inovador e novas tendências de pesquisa, renovando vigorosamente as instituições. O exemplo de Albert Châtelet é instrutivo. Um dos poucos teóricos dos números na França antes da Primeira Guerra Mundial, ele foi nomeado em 1921 reitor da Faculdade de Ciências da Universidade de Lille, em uma região que havia sofrido muito com a guerra. Em 1924, Châtelet tornou-se reitor da universidade. Nessas funções, ele fundou vários institutos de ciências aplicadas para a indústria do carvão, mecânica de fluidos e agricultura. Além de Châtelet, podemos citar Joseph Kampé de Fériet, também na Universidade de Lille, Henri Eyraud na Universidade de Lyon, e Maurice Fréchet, Ernest Esclangon e Georges Valiron na Universidade de Estrasburgo. Alguns deles (mas não todos) voltariam a Paris por volta da Segunda Guerra Mundial para ocupar posições influentes. Assim, a guerra gerou uma geração de organizadores habilidosos do ensino superior francês e do sistema de pesquisa, que também se empenhariam para reconstruir as relações internacionais (Aubin; Gispert; Goldstein, 2014, p. 161-162. Tradução e grifos da autora).

[3] A primeira publicação desta obra ocorreu em 1923 e existe uma versão na biblioteca MIR da Sorbonne Université. Entretanto, por se tratar de uma obra rara e não sendo possível a retirada, optou-se por uma análise da publicação de 1924, que não difere da publicada em 1923.

Ainda segundo os autores:

> Após a guerra, reconheceu-se amplamente que a ciência havia sido chamada a desempenhar um novo papel nas sociedades modernas (Aubin; Gispert; Goldstein, 2014, p.157. Tradução da autora).

A saber:

> Cita-se como exemplo de reconstrução do período pós-guerra a criação de novas cátedras, bem como a disciplinarização acadêmica com a elaboração de novos currículos e manuais escolares (Aubin; Goldstein, 2014. Tradução de autora).

Esse foi o caso da obra intitulada *Calcul vectoriel. Théorie, applications géométriques et cinématiques, destinée aux élèves des classes de mathématiques spéciales et aux étudiants en sciences mathématiques et physiques*, escrita por Albert Châtelet[4] (1883-1960) e Joseph Kampé de Fériet[5] (1893-1982), publicada em 1923 em Paris. Contemporânea dos trabalhos do brasileiro Theodoro Augusto Ramos, como mencionado anteriormente, publicadas no Brasil (1927) e na França (1930), o que explica o particular interesse. Esta obra, contendo prefácio e seguida de seis capítulos, engloba o cálculo tensorial, foi escrita em 406 páginas e publicada pela editora Gauthier-Villars na cidade de Paris, França.

Figura 7 – Albert Châtelet (1883-1960) e Joseph Kampé de Fériet (1893-1982)

Fonte: *Mac Tutor History of Mathematics*, biografia de Albert Châtelet e *Wikipédia*, França, biografia de Kampé de Fériet.

De acordo com os autores:

> O Cálculo Vetorial começa, aliás, a se introduzir na França: muitos professores de Mecânica e Física estão adotando seu uso no ensino e em suas pesquisas; há várias exposições sobre o tema disponíveis nas livrarias; por fim, a prática dos exames de admissão à École Normale Supérieure e à École Navale nos mostrou que se reserva um espaço, ainda pequeno, para ele no ensino das turmas de Matemáticas especiais. É esse espaço que gostaríamos de ver ampliado, para o benefício, acreditamos, dos alunos, de seus estudos atuais e das aplicações que farão posteriormente em sua vida científica ou industrial [...] (Châtelet; Kampé de Fériet, 1924, p. vi. Tradução e grifos da autora).

Pisot (1986), destaca que:

> Gostaria ainda de destacar o profundo interesse de A. Châtelet pelo ensino de matemática. Esse interesse, ele não o demonstrou apenas em sua área específica, ao publicar um tratado de Álgebra que é um testemunho brilhante da maneira viva e pessoal com que ele apresentava o conteúdo árido de um curso de matemática. Ele também elaborou um curso sobre cálculo vetorial. Esse curso contribuiu amplamente para difundir, no ensino,

[4] Uma biografia sobre Châtelet pode ser encontrada em Condette (2007, 2009, 2012), Gauthier e Goldstein (2022, p. 410-412).
[5] Acerca de Kampé de Fériet em Delporte (2002, p. 5).

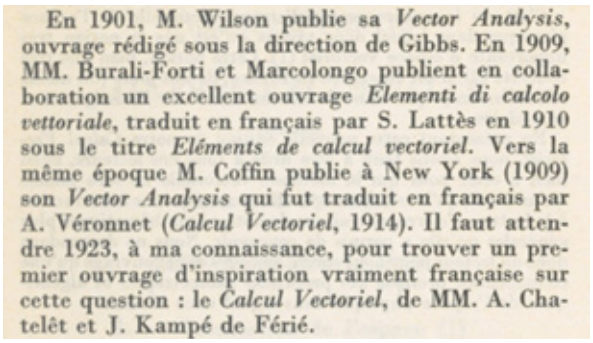
> essa ferramenta que hoje nos parece tão indispensável. Além disso, preparou de forma decisiva o advento da álgebra linear, que tanto deve a A. Châtelet. Ele chegou até a ensinar mecânica e, em comissões de artilharia, levou seus estudos até aplicações práticas (Pisot, 1986, p. 20-21. Tradução e grifos da autora.).

PIONEIRISMO?

Em busca da primeira obra publicada acerca da temática na França, empreendi uma investigação pelos arquivos e bibliografias do país, na busca de indícios que atestassem a minha conjectura acerca de ser a obra escrita por Châtelet e Kampé de Fériet, verdadeiramente o primeiro trabalho acerca da temática publicado na França. Conjectura esta levantada a partir de uma análise da origem das obras listadas pelos autores conforme mencionado ao longo do texto, observando que os trabalhos anteriores eram fruto de traduções para o francês.

Neste sentido, após uma cuidadosa análise dos prefácios destas obras, encontrei no trabalho de Delachet (1967), a citação que segue. Nesta o autor após dissertar sobre um histórico das obras de cálculo vetorial até então publicadas na França, assim como Châtelet e Kampé de Fériet (1924), destaca a obra em 1909 escrita pelos italianos Burali-Forti e Marcolongo e traduzida para o francês, em 1910 por Samuel Lattès (1873-1918). Além disso explica que foi preciso esperar até 1923, no seu conhecimento, para encontrar uma primeira obra de inspiração verdadeiramente francesa sobre esta questão: o Cálculo Vetorial, de Châtelet e Kampé de Fériet. Este fato, associado a análise da listagem prévia proposta pelos autores, conduz para esta pesquisa, a um indicativo de que a obra dos autores franceses em questão é de fato a primeira publicação acerca da temática na França, corroborando assim com a indagação inicial proposta. Uma análise completa sobre este trabalho encontra-se em trabalho de edição para publicação.

Figura 8 – *Le Calcul Vectoriel*, Delachet (1967). Capa e contra-capa. Destaque p. 7.



En 1901, M. Wilson publie sa *Vector Analysis*, ouvrage rédigé sous la direction de Gibbs. En 1909, MM. Burali-Forti et Marcolongo publient en collaboration un excellent ouvrage *Elementi di calcolo vettoriale*, traduit en français par S. Lattès en 1910 sous le titre *Eléments de calcul vectoriel*. Vers la même époque M. Coffin publie à New York (1909) son *Vector Analysis* qui fut traduit en français par A. Véronnet (*Calcul Vectoriel*, 1914). Il faut attendre 1923, à ma connaissance, pour trouver un premier ouvrage d'inspiration vraiment française sur cette question : le *Calcul Vectoriel*, de MM. A. Chatelêt et J. Kampé de Férié.

Fonte: *Gallica.* Acesso em 8 de agosto de 2024.

REFLEXÕES FINAIS

Assim, respondendo **à** questão inicial proposta, ou seja, quais aspectos da história do cálculo vetorial e dos intercâmbios científicos entre Brasil e França nas três primeiras décadas do século XX podem ser evidenciados a partir da obra *Sur le Calcul Vectoriel* (1930), de Ramos, e da publicação *Calcul Vectoriel. Théorie, applications géométriques et cinématiques* (1923), de Châtelet e Kampé de Fériet, temos que: Quanto aos trabalhos de Châtelet e Kampé de Fériet (1923) e de Ramos (1930), observa-se para os franceses a importância do trabalho de Burali-Forti e Marcolongo, traduzido do italiano pelo francês Samuel Latt**è**s (1873-1918), em um momento de intenso intercâmbio científico e matemático entre Itália e França [(Goodstein, 2007), (Audin, 2014), (Mas'ya et Shaposhnikova, 2005), (Mazliak, 2020)], personificado nas figuras de Samuel Giuseppe Vito Volterra (1860-1940), Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) e seu mais brilhante sucessor, Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956), e, posteriormente, Tullio Levi-Civita (1873-1941). Audin (2014) aponta que:

> Samuel Lattès: Nascido em Nice em 1873, ingressou na ENS em 1892 após apenas um ano de preparação em Marselha, formou-se em 1895, defendeu sua tese em 1906, foi professor na Universidade de Toulouse a partir de 1911 e morreu de febre tifóide durante o verão de 1918 (Audin, 2014, p. 23. Tradução da autora).

Sabe-se que:

> Em primeiro lugar, houve encontros pessoais entre Vito Volterra e Émile Borel, por um lado, e entre Vito Volterra e Jacques Hadamard, por outro. A proximidade entre os três homens desempenhou um papel importante na criação dos intercâmbios de estudantes entre a França e a Itália. [...] Hadamard e Volterra se encontraram pela primeira vez por ocasião do Congresso Internacional de Matemáticos de 1897, em Zurique [...] (Mazliak, 2020, p. 2-3. Tradução da autora).

Personagens franceses importantes fizeram parte destes intercâmbios científicos entre França e Itália. A citar temos, por exemplo, em 1898, René Baire (1874-1932) conhecido pelo trabalho que influenciou H. Lebesgue (1875-1941) acerca da integral; em 1912, Joseph Jean Camille Pérès (1890-1962), bolsista do programa David-Weill que ocupou a cátedra de mecânica em 1950, sendo em 1954 decano da Faculdade de Ciências, sucedendo a Albert Châtelet após sua morte. Na década de 1920, citam-se André Weil (1906-1998), um dos membros fundadores do grupo Bourbaki.

Em um olhar paralelo a obra do brasileiro Ramos, observa-se a clara influência dos referenciais de Burali-Forti e Marcolongo, o contato com Borel e a publicação da obra na cidade de Paris, França. Ressalta-se também a crítica elaborada por Levi-Civita a respeito da obra de Ramos (Freire, 1936

e Ramos, 1933). Estes nuances da pesquisa também estão em fase de finalização para publicação e aqui foi tratado apenas como recorte.

Deste modo, no que se refere à história do cálculo vetorial e as relações entre o Brasil e a França nas primeiras três décadas do século XX, o tema revela-se particularmente interessante. Isso se deve ao fato de que, à época, o cálculo tensorial passava por uma reavaliação significativa devido ao seu papel na nova teoria da relatividade de Einstein, tornando-se, assim, um ponto central para a análise das transformações nas interações entre álgebra, engenharia e física.

A Primeira Guerra Mundial remodelou o cenário político, gerando consequências epistemológicas e científicas que impactaram as ferramentas e abordagens matemáticas adotadas em diversas comunidades. Dessa maneira, o cálculo tensorial pode ser considerado um excelente ponto de partida para situar as relações matemáticas entre Brasil e França no contexto mais amplo das interações científicas entre Brasil e Europa no início do século XX. Fatos estes que permitem avançar no entendimento da trajetória de Theodoro Augusto Ramos (1895-1935), bem como da história da matemática e da ciência brasileira e suas relações científicas com a França abrindo caminhos para futuras pesquisas na área.

Para finalizar, partilho o entendimento de que matemática, história da matemática e poesia podem — e devem — caminhar juntas. Como singela homenagem aos colegas pelotenses que tão calorosamente nos acolheram neste evento, deixo uma poesia de um conterrâneo e uma célebre frase do idealizador do Seminário Nacional de História da Matemática. Que viva em nossas mentes a certeza de que:

Das Utopias

Se as coisas são inatingíveis... ora!
Não é motivo para não querê-las...
Que tristes os caminhos, se não fora
A presença distante das estrelas

Mário de Miranda Quintana

(Alegrete, 30 de julho de 1906 – Porto Alegre, 5 de maio de 1994)

Mas como ser educador sem ter uma utopia?

Ubiratan D'Ambrosio

(São Paulo, 8 de dezembro de 1932 – São Paulo, 12 de maio de 2021)

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil (CNPq) – Bolsa PDE: Projeto individual para doutores com até 10 anos de conclusão de doutoramento. Projeto Internacional 2023.

REFERÊNCIAS

AUBIN, David; GOLDSTEIN, Catherine. **The War of Guns and Mathematics: Mathematical Practices and Communities in France and Its Western Allies around World War 1**. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2014.

AUBIN, David; GISPERT, Hélène; GOLDSTEIN, Catherine. **The Total War of Paris Mathematicians**. 2013. ffhal-00830377v1f. Disponível em: https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-00830377v1. Acesso em 03 mar. 2024.

AUDIN, Michèle. *Fatou, Julia, Montel: The Great Prize of Mathematical Sciences of 1918, and Beyond*. 1st ed., vol. 2014, Berlin, Heidelberg: Springer Nature, 2011. Edição usada 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17854-2.

BONFIM, Sabrina Helena. **Theodoro Augusto Ramos**: um estudo comentado de sua tese de doutoramento, 2013. 124f. Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2013.

BONFIM, Sabrina Helena. Theodoro Augusto Ramos (1895-1935): Uma biografia. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 14, p. 59, 2015.

BONFIM, S. H; TEIXEIRA, M. V. Um estudo histórico-matemático acerca da tese de doutoramento de Theodoro Augusto Ramos (1895-1935). **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 19, p. 23-44, 2019.

BONFIM. Sabrina Helena; NOBRE, Sergio Roberto. Historical Mathematical Study About Vector Calculus Introduction in Brazil: First Notes. **Almagest: international journal for the history of scientific ideas**, v. 11.2, p. 84-110, 2021.

BONFIM, Sabrina Helena. Theodoro Augusto Ramos (1895-1935): uma construção de sua trajetória acadêmica oficial baseada em Arquivos. **Anais do XV Seminário Nacional de História da Matemática**, Maceió, 2023.

BONFIM, Sabrina Helena. Theodoro Augusto Ramos (1895-1935): De engenheiro a matemático notável. **Anais do 9º Encontro Luso Brasileiro de História da Matemática**. Setúbal (Portugal), 2023a. (No prelo)

BONFIM, Sabrina Helena. Theodoro Augusto Ramos (1895-1935) e o Cálculo Vetorial no Brasil: Apontamentos históricos. Bicentenário da Independência do Brasil, 2023b. (Artigo aceito para publicação como capítulo de livro, originado da palestra apresentada por ocasião do Bicentenário da Independência, no portal de mesmo nome.)

BONFIM, Sabrina Helena. Um olhar histórico acerca das publicações de brasileiros no *Comptes rendus* da academia de ciências de Paris até 1930. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 25, n. 49, p. 34-71, 2025.

CHÂTELET, Albert; KAMPÉ DE FÉRIET, Marie-Joseph. **Calcul vectoriel : théorie, applications géométriques et cinématiques : destiné aux élèves des classes de mathématiques spéciales et aux étudiants en sciences mathématiques et physiques**. Paris: Gauthier-Villars, 1923.

CHÂTELET, Albert; KAMPÉ de FÉRIET, Marie-Joseph. **Calcul vectoriel : théorie, applications géométriques et cinématiques : destiné aux élèves des classes de mathématiques spéciales et aux étudiants en sciences mathématiques et physiques**. Paris: Gauthier-Villars, 1924.

CONDETTE, Jean-François. Albert Châtelet. In **Dictionnaire biographique du mouvement ouvrier et du mouvement social***:* Période 1940 à 1968, ed. Claude Pennetier, Vol. 3: CA-COR, 254-257. Paris: L'Atelier, 2007.

CONDETTE, Jean-François. **Albert Châtelet. La République par l'école (1883-1960)**. Arras: Artois Presses Université, 2009.

CONDETTE, Jean-François. Une innovation pédagogique septentrionale : l'École unique de SaintAmand-les-Eaux. Un « modèle » pour la réforme de l'enseignement moyen dans l'entre-deuxguerres? *Revue du Nord 394*: 91-123, 2012.

CONDETTE, Jean-François; SAVOYE, Antoine. Le congrès du Havre (31 mai-4 juin 1936): Albert Châtelet et la réforme de l'enseignement du Second degré. *Carrefours de l'Education 31* (janvier-juin 2011): 61-88, 2011.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Uma História Concisa da Matemática no Brasil**. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2. ed. 2011.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **História da Matemática no Brasil**: Uma visão panorâmica até 1950. *Saber y Tiempo,* vol. 2, n° 8, Julio-Deciembre 1999; pp. 7-37. Disponível em <http://www.ifba.edu.br/dca/Corpo_Docente/MAT/EJS/HISTORIA_DA_MATEMATICA_NO_BRASIL_ATE_1950.pdf >. Acesso Mai. 2022.

DELACHET, André. **Le Calcul Vectoriel**, Paris: Presses Universitaires de France, 1967.

DELPORTE, Jean. La Vie et l'oeuvre de Joseph Kampé de Fériet, Publications de l'UFR de Mathématiques Pures et Appliquées de Lille (IRMA), vol 58 (numéro spécial), 2002. https://ssaal.univ-lille.fr/wp-content/uploads/2014/08/JKF.pdf

GAUTHIER, Sebastien; GOLDSTEIN, Catherine. Albert Châtelet (Valhuon, 1883 – Paris, 1960), Président 1952-1954. Fulvia Furinghetti; Livia Giacardi. *The International Commission on Mathematical Instruction, 1908-2008,* Springer, pp. 409-416, 2022.

GOODSTEIN, Judith Ronnie. **The Volterra chronicles : the life and times of an extraordinary mathematician, 1860-1940**. London : American Mathematical Society London Mathematical Society, 2007. [History of Mathematics, volume 31]

MAZ'YA, Vladimir. Gilelevich; SHAPOSHNIKOVA, Tatyana. Olegovna. **Jacques Hadamard:** Un Mathématicien Universel (1re éd.). Traduit par Gérard Tronel. Les Ulis: EDP Sciences, 2005.

MICALI, Artibano. Émile Borel et le Brésil. Les Mathématiques en France au début du XX° siècle. *Colloque Émile Borel,* 1ère Session. Saint-Affrique, Aveyron, 16 et 17 Juillet 1999.

PATY, Michel. A Recepção da Relatividade no Brasil e a influência das Tradições Científicas Européias. In: HAMBURGUER, Amélia Império; DANTES, Maria Amélia M.; PATY, Michel; PETITJEAN, Patrick (Orgs.) **A Ciência nas relações Brasil-França** *(1850-1950).* São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo; Fapesp, 1996. P. 143-181.

PETITJEAN, Patrick. Ciências, Impérios, Relações Científicas Franco-brasileiras. In: HAMBURGUER, Amélia Império; DANTES, Maria Amélia M.; PATY, Michel; PETITJEAN, Patrick (Orgs.) **A Ciência nas relações Brasil-França** *(1850-1950).* São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo; Fapesp, 1996. P. 25-39.

PORTELA, João Bacelar. **Gomes de Souza e sua obra**. São Luís: Universidade do Maranhão, 1975.

RAMOS, Theodoro Augusto. **Sobre as Funcções de Variaveis Reaes**. Tese de doutorado. Rio de Janeiro: Escola Politécnica do Rio de Janeiro, 1918.

RAMOS, Theodoro Augusto. **Questões sobre as curvas reversas**. São Paulo: Secção de obras d' "O Estado de São Paulo", 1919.

RAMOS, Theodoro Augusto. A propósito das notas dos Snrs. Borel e Amoroso Costa. **Revista da Academia Brasileira de Sciencias**, Rio de Janeiro, n.1, p. 74-75, 1926.

RAMOS, T. A. **Integraes definidas das funcções discontínuas**. São Paulo: Typographia Brasil de Rothschild, 1926.

RAMOS, Theodoro Augusto. **Calculo vectorial**. São Paulo: Typografia Brasil de Rothschild, 1927.

RAMOS, Theodoro Augusto. Manoel Amoroso Costa. **Revista Brasileira de Engenharia**. Tomo XVI, n.6, 1928, p. 480-483.

RAMOS, Theodoro Augusto. A theoria da relatividade e as raias espectraes do hydrogenio**. Annaes da Academia Brasileira de Ciências**. Rio de Janeiro, T. 1, n. 1, março de 1929, p. 20-27.

RAMOS, Theodoro Augusto. Palavras proferidas em sessão de 25 de junho, commemorativa do primeiro centenario do nascimento de Gomes de Souza. **Annaes da Academia Brasileira de Sciencias,** n.3, 1929.

RAMOS. Theodoro Augusto. **Leçons sur le calcul vectoriel**. Paris: Librarie Scientifique Albert Blanchard. 1930.

RAMOS, Theodoro Augusto. **Estudos: ensino, sciencias physicas e mathematicas**. São Paulo: Escolas Profissionais do Liceu Coração de Jesus, 1933.

RAMOS, Theodoro Augusto. Algumas propriedades de uma integral hyperelliptica. **Annaes da Academia Brasileira de Sciencias**. t. Iv, n.3, 1934.

RAMOS, Theodoro Augusto . A theoria da relatividade e as raias espectraes do hydrogenio. **Annaes da Academia Brasileira de Sciencias**. n.3, 1934, p. 20-27.

ROTARY CLUB DE SÃO PAULO. **Galeria dos presidentes do Rotary Club de São Paulo**. Disponível em: https://rotarysp.org.br/pages/galeria-dos-presidentes/. Acesso em: 5 mai. 2024.

SARAIVA, Luís. A actividade dos matemáticos portugueses no Recife 1953-1974. *Anais–Seminário Nacional de História da Matemática*, [*s. l.*], v. 15, 2023. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/122. Acesso em: 29 mar. 2025.

SILVA, Cl**ó**vis Pereira da, Theodoro A. Ramos: Sua Correspondência para Lélio Gama. *Revista da SBHC*, n. 17, p. 11-20, 1997.

SILVA, Clóvis Pereira da, A contribuição de Otto de Alencar Silva para o desenvolvimento da ciência no Brasil. *Revista da SBHC*, n. 19, p. 13-30, 1998.

SILVA, Clóvis Pereira da. Manuel Amoroso Costa: O continuador da obra matemática de Otto de Alencar Silva. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y l*as Técnicas, vol. 23, 2000, p. 91-101.

SILVA, Clóvis Pereira da*, A Matemática no Brasil. História de seu Desenvolvimento***.** São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda. 3.ed., 2003.

SILVA, Clóvis Pereira da, BASTOS, Gervasio Gurgel. *Otto de Alencar Silva. Uma coletânea de estudos e cartas.* Fortaleza: Universidade Federal do Ceará – UFC, 2006.

SILVA, Clóvis Pereira da, *Início e Consolidação da Pesquisa Matemática no Brasil.* Brasília: Senado Federal, Conselho Editorial, 2008. (v.98)

SILVA, Circe Mary da. Politécnicos ou matemáticos? *História, Ciências, Saúde – Manguinhos,* Rio de Janeiro, v. 13, n. 4, p. 891-908, out.-dez. 2006.

SILVA, Circe Mary Silva da. *Marília Chaves Peixoto – uma matemática brasileira à sombra.* Anais do 2019, p. 159. Anais do XIII Seminário Nacional de História da Matemática, Fortaleza, 2019, p. 151-171.

SILVA, Inoc**ê**ncio Francisco da. *Diccionario bibliographico portuguez***.** Lisboa: Imprensa Nacional, 1884. Disponível em: https://www2.senado.leg.br/bdsf/handle/id/242735. Acesso em: 13 mai. 2024.

SIQUEIRA, Rogério Monteiro de. Entre São Paulo e Paris: o Cálculo vetorial do engenheiro Theodoro Ramos. *História, Ciências, Saúde – Manguinhos*, Rio de Janeiro, v.27, n.1, jan.-mar. 2020, p.151- 170.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Albert Châtelet*. MacTutor History of Mathematics Archive. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. Última atualização: jan. 2013. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Chatelet_Albert/. Acesso em: 2 maio 2025.

WIKIPÉDIA. L'encyclopédie libre. *Joseph Kampé de Fériet*. Disponível em: https://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph_Kamp%C3%A9_de_F%C3%A9riet. Acesso em: 20 mar. 2024.

Palestras Paralelas

arte: leandro selister | @lselister

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Geometria de situação: investigação de sua história pela metodologia da rede de textos

Geometry of situation: investigation of its history using the methodology of network of texts

Cleber Haubrichs[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

RESUMO

A geometria de situação foi uma área de pesquisa em matemática que floresceu nas décadas de 1810 e 1820 na França. Trata-se de uma geometria em que a principal característica é que os problemas, demonstrações e teoremas podem ser organizados aos pares, visto que formalmente há uma simetria nos seus enunciados. Um exemplo elementar dessa simetria de sentenças matemáticas é o par de afirmações "dois pontos distintos num plano determinam uma única reta" e "duas retas distintas num plano determinam um único ponto". Já a metodologia da rede de textos é uma metodologia heurística de pesquisa usada recentemente em história da matemática. Consiste em estudar de maneira sistemática um coletivo de textos, visando rastrear práticas matemáticas compartilhadas por uma comunidade. Neste artigo eu mostro detalhadamente como utilizei a metodologia da rede de textos para investigar e redigir uma história da geometria de situação.

Palavras-chave: geometria de situação; rede de textos; geometria no século dezenove; métodos quantitativos em história.

ABSTRACT

Geometry of situation was an area of research in mathematics that flourished in the 1810s and 1820s in France. It is a geometry in which the main characteristic is that problems, demonstrations and theorems can be organized in pairs, since there is formal symmetry in their statements. An elementary example of this symmetry in mathematical sentences is the pair of statements "two distinct points in a plane determine a single straight line" and "two distinct straight lines in a plane determine a single point". On the other hand, the methodology of network of texts is a heuristic research methodology recently used in the history of mathematics. It consists of systematically studying a collective of texts, aiming to trace mathematical practices shared by a community. In this article I show in detail how I used the methodology of network of texts to investigate and write a history of geometry of situation.

Keywords: geometry of situation, network of texts, geometry in the nineteenth century, quantitative methods in history.

[1] Doutor em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (UFRJ) e Docteur en Philosophie et Histoire des Sciences (Université de Lorraine). Professor Titular no IFRJ, Nilópolis, RJ, Brasil. E-mail: cleber.santos@ifrj.edu.br.

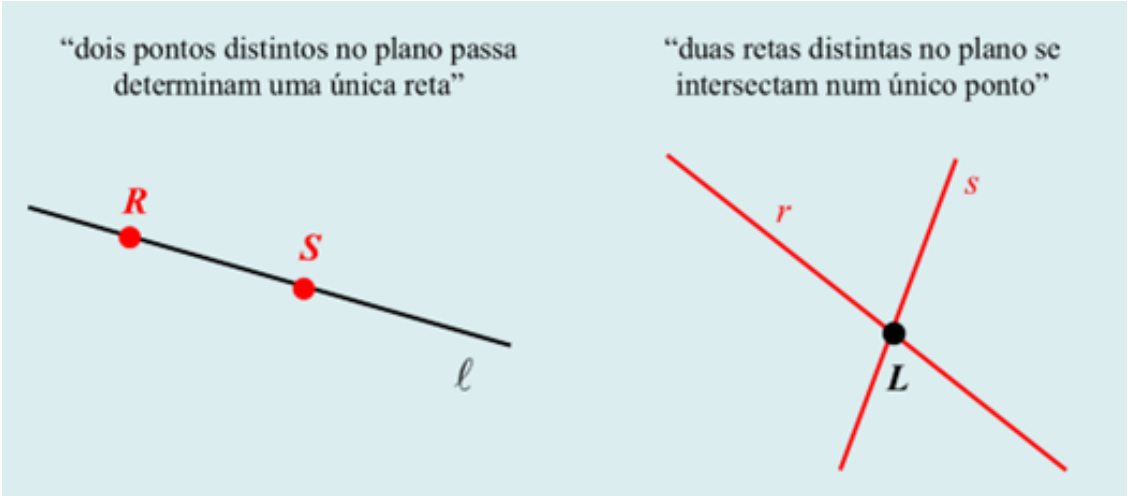
O QUE É A GEOMETRIA DE SITUAÇÃO

Para começar a exposição, preciso logo dizer o que é a "geometria de situação". Inicialmente vou dar uma amostra ingênua. A seguir vou dar um exemplo um pouco mais sofisticado.

Enunciados aos pares

Pensemos nas duas seguintes proposições de geometria ilustradas na figura 1.

Figura 1 – Duas sentenças geométricas enunciadas em par



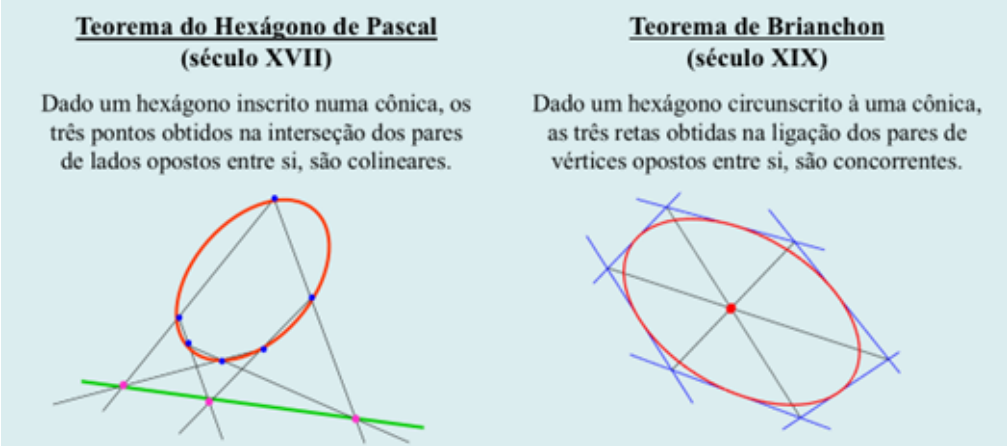
Fonte: Elaborada pelo autor

Observando essas duas proposições, e sem levar em consideração o arcabouço matemático no qual essas sentenças são válidas, mas olhando estritamente para os enunciados, parece que a gente percebe que há uma certa simetria no vocabulário. De fato, onde aparece palavra "pontos" numa sentença, na outra aparece "retas". Além disso, ambas as sentenças começam com dois objetos da mesma natureza dados e chega-se num terceiro objeto que é único e de outra natureza. Essa simetria nos enunciados indica que parece ser possível passar de um enunciado ao outro meramente por uma troca de vocabulários.

Agora vou dar uma amostra um pouco mais sofisticada de enunciados emparelhados. Trata-se dos teoremas de Blaise Pascal (1623-1662) e de Charles Julien Brianchon (1783-1864), ilustrados na figura 2.

Mais uma vez, se a gente observar os dois enunciados postos lado a lado, percebe-se uma simetria nessas frases, como se fossem a *cara* e a *coroa* de uma mesma moeda. Nas duas sentenças temos hexágonos relacionados à cônicas em que, por um lado, o polígono aparece inscrito na curva, e na outra sentença o polígono está circunscrito à curva. Se por um lado começamos com três pontos obtidos na interseção de pares de lados opostos, do outro lado começamos com três retas obtidas na ligação de pares de vértices opostos. Por fim, um dos teoremas termina com a colinearidade dos três pontos, enquanto que o outro termina com a concorrência das três retas.

Figura 2 – Dois teoremas enunciados em par



Fonte: Elaborada pelo autor

Geometria de Situação

O fenômeno dos enunciados aos pares caracteriza a *geometria de situação*. Essa geometria foi percebida inicialmente pelos geômetras franceses em atividade nas décadas de 1810 e 1820. Esses geômetras, demonstrando teoremas "avulsos", começaram a perceber que muitos desses enunciados poderiam ser pareados um com o outro, poderiam ser juntados em pares, ainda que a demonstração de cada um pudesse ser feita independentemente da demonstração de seu par. Houve então a percepção de que existe todo um ramo da geometria que coloca teoremas, problemas, enunciados, proposições e demonstrações "lado a lado". Quando essa percepção foi notada, o matemático Joseph Diez Gergonne (1771-1859) sistematizou diversos resultados dispersos, apresentou uma axiomatização formal para esses enunciados, a partir do que ele chamou de "*princípio da dualidade*", e por fim ele mesmo deu a essa área de pesquisa o nome de geometria de situação (Gergonne, 1826).

Além da apresentação formal de Gergonne, outro geômetra elaborou uma justificativa para o fenômeno dos enunciados aos pares. Jean Victor Poncelet (1788-1867), explicou os enunciados aos pares baseado numa construção geométrica que ele nomeou de "*reciprocidade polar*" (Poncelet, 1829). Gergonne e Poncelet, que a princípio tinham uma relação cordial um com o outro, a partir das justificativas elaboradas, acabaram entrando numa disputa, que se tornou, aliás, muito severa. O fato é que as explicações dos dois geômetras eram igualmente boas para responder diversos (mas não todos os) aspectos da geometria de situação. Mas também ambas as teorias tinham "pontos cegos", lacunas, ausências e até sutis erros matemáticos na elaboração teórica deles para abordar o fenômeno.

Muitos outros geômetra franceses se engajaram nessa pesquisa. Alguns aderindo irrestritamente ao princípio da dualidade de Gergonne, outros defendendo o princípio da reciprocidade polar de Poncelet, outros ainda tentando conciliar o melhor das duas abordagens. E todos eles acrescentando novos exemplos, novos problemas, novas conjecturas, novas definições e novos resultados para encorpar a geometria de situação. Tudo isso foi publicado em artigos no periódico *Annales de Mathématiques Pures et Apliquées* (1810-1832). Esse periódico, de tiragem mensal, era editado pelo próprio Gergonne e por isso era mais conhecido na época (e até hoje pelos historiadores) com o apelido de *Annales de Gergonne*. Mais adiante voltarei a falar sobre esse jornal, pioneiro e especializado em publicar pesquisas matemáticas.

A METODOLOGIA DA REDE DE TEXTOS

Em minha tese de doutorado escrevi uma biografia científica de Étienne Bobillier (1798-1840), um dos geômetras que na década de 1820 se engajou na pesquisa da geometria de situação (Haubrichs, 2015). A tese é muito ampla e cobre diferentes temas, atividades e instituições em torno de Bobillier. Em particular, há um longo trecho da tese que trata da produção coletiva da geometria de situação nas décadas de 1810 e 1820. Esse trecho selecionado, reelaborado e contextualizado tornou-se o livro "Geometria de Situação: problemas e teoremas aos pares no século dezenove", publicado pela editora da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) em 2024. Para esta parte da minha tese, a principal metodologia de pesquisa que utilizei foi a metodologia da rede de textos.

No que se segue vou apresentar sucintamente esta metodologia e apontar três exemplos recentes de pesquisas que utilizaram a mesma metodologia (ou semelhante). Depois vou relatar como eu selecionei e utilizei uma rede de textos na minha pesquisa para investigar a geometria de situação.

Dizendo numa definição inicial e um pouco ingênua, uma rede de textos é simplesmente um coletivo de textos. Para estudar uma rede, não somente se estuda cada texto isoladamente, em si mesmo, olhando para os seus resultados ou para o que o texto diz. Mas trata-se de estudar o coletivo de textos naquilo que eles têm em comum ou em contraposição, naquilo que eles têm de semelhanças ou diferenças. Pretende-se, a partir desse coletivo de textos, obter um panorama de uma área de pesquisa ou de uma disciplina matemática.

Esse coletivo de textos não necessariamente é uma "rede de referências bibliográficas". Não se trata, por exemplo, de partir de um texto e identificar quais foram os demais textos citados naquele que se está lendo inicialmente. Também não se trata necessariamente de uma "rede de pessoas". O objetivo não é apenas conhecer que são os colaboradores mais próximos e/ou mais frequentes de um determinado matemático.

Uma rede de texto é principalmente uma rede de *compartilhamento de práticas*. O historiador francês Frédéric Brechenmacher define bem especificamente uma rede de textos assim:

> Uma rede de textos pode ser entendida como um espaço de interações entre as diferentes ações concretas de indivíduos e grupos de indivíduos, um espaço de circulação de *práticas matemáticas*: formas de representação, procedimentos operatórios, ideais, valores, interconexão entre vários domínios científicos. (...) Os significados de certas categorias (como [por exemplo] *análise*, *qualitativa*, *equação* etc) estão implicitamente definidas dentro de tais espaços de circulação. (...) Uma análise da rede dá acesso ao significado que tais termos tem numa determinada região e num intervalo determinado de tempo" (Brechenmacher, 2013, pp. 3, 31, 50, 51, 58; grifos do autor).

Eu chamo atenção para essa definição e destaco a expressão "espaço de circulação de práticas matemáticas", bem como "determinada região" e "intervalo determinado de tempo". Pretendo ilustrar esses três aspectos nas próximas páginas quando descrever o uso que fiz das redes de textos.

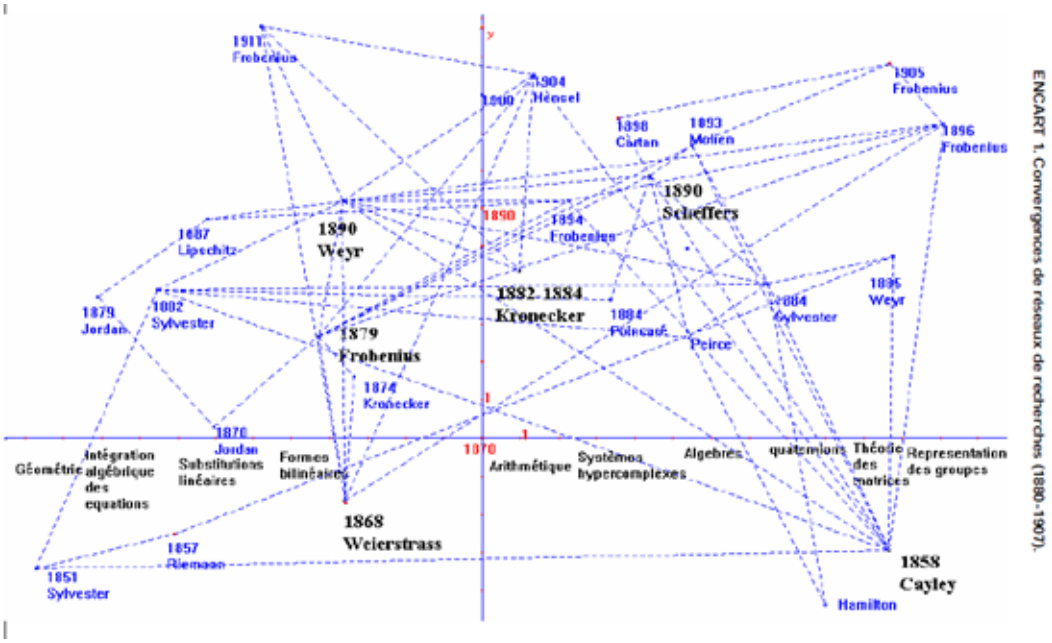
Três pesquisas recentes usando a metodologia da rede de textos

Apresento agora três exemplos de usos de redes de textos em trabalhos relativamente recentes em história da matemática: a tese de doutorado de Frédéric Brechenmacher, uma pesquisa original de Tatiana Roque e a tese de doutorado de Magno Luiz Ferreira. Começo informando que nos três

exemplos os pesquisadores apresentaram as suas redes de textos com imagens em forma de grafo, onde os vértices são nomes próprios de matemáticos, normalmente colocados com datas ao lado, e as arestas ligando os diferentes vértices são indicações da circulação de práticas compartilhadas que esses pesquisadores encontraram entre um autor ou outro nas suas redes de textos.

A tese de doutorado de Frédéric Brechenmacher foi defendida em 2006 na Escola de Altos Estudos em Ciências Sociais de Paris (EHESS), na França, sob orientação de Jean Dhombres. É uma tese que versa sobre o Teorema da Forma Canônica de Jordan, do período de 1870 até 1930, suas diferentes elaborações, apresentações e enunciados. Nas redes de textos de Brechenmacher, como se pode observar na figura 3, abaixo, temos um eixo horizontal onde são colocadas áreas da matemática, como por exemplo, representações de grupos, teoria das matrizes, quaternions, álgebras, etc, enquanto que no eixo vertical são colocadas datas. No cruzamento dos dois eixos está a data 1870, o eixo vertical subindo avança para 1890 e por aí vai. Então os diversos vértices que são os nomes próprios de autores, cujos textos fazem parte da rede, como por exemplo, Cayley, Kronecker, Frobenius, Weierstrass, etc, são colocados nesse plano cartesiano nas coordenadas (área, data) e são ligados uns aos outros pelas arestas indicando ali a circulação de certas práticas.

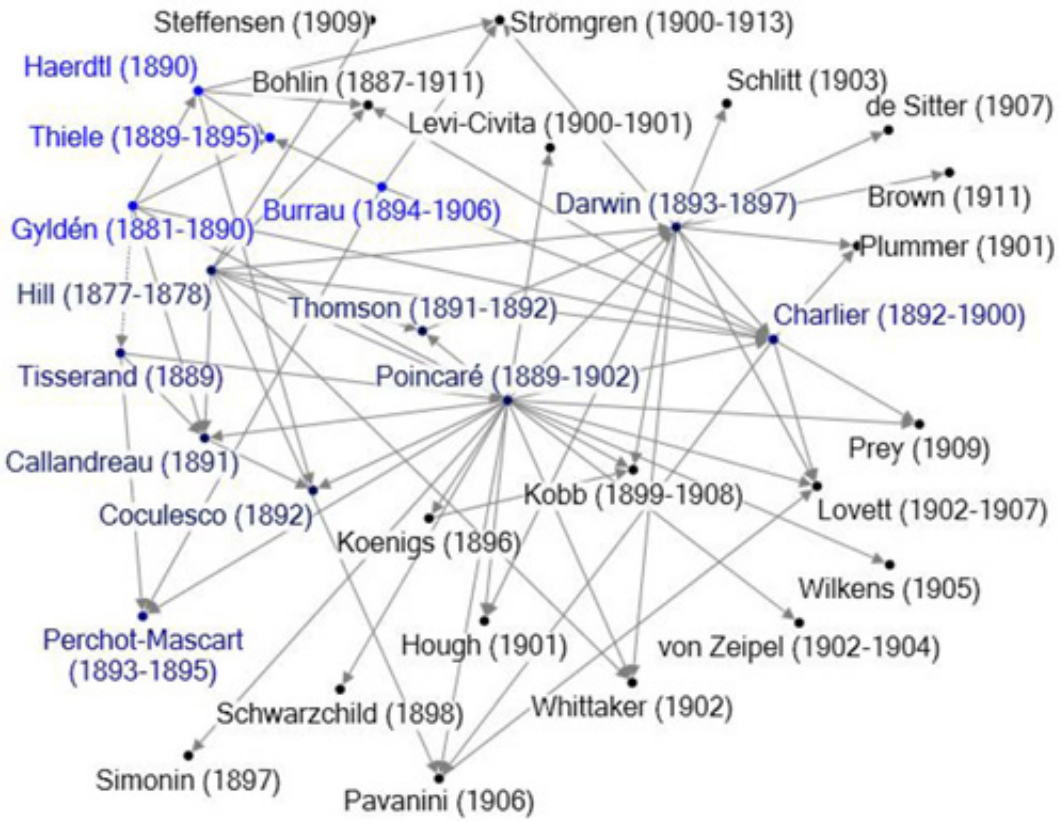
Figura 3 – Uma das redes de textos da tese de Brechenmacher



Fonte: (Brechenmacher, 2006, p. 14)

O segundo exemplo é uma pesquisa da Tatiana Roque, que foi publicada em 2015 na *Revue d'Histoire des Mathématiques*. Essa pesquisa é sobre Henri Poincaré (1854-1912) e sobre práticas compartilhadas em mecânica celeste entre o final do século XIX e o início do século XX. A rede ilustrada na figura 4 abaixo não tem eixos de referência, como um plano cartesiano, mas os nomes dos autores estão colocados lá junto com datas das publicações dos seus textos. Observa-se nessa rede, que a ligação de um vértice ao outro é feita por meio de arestas com direção, ou seja, um vetor, indicando não só a circulação de práticas compartilhadas, mas dando o sentido no qual um autor pega emprestado de outro autor uma determinada prática que apareça no seu texto.

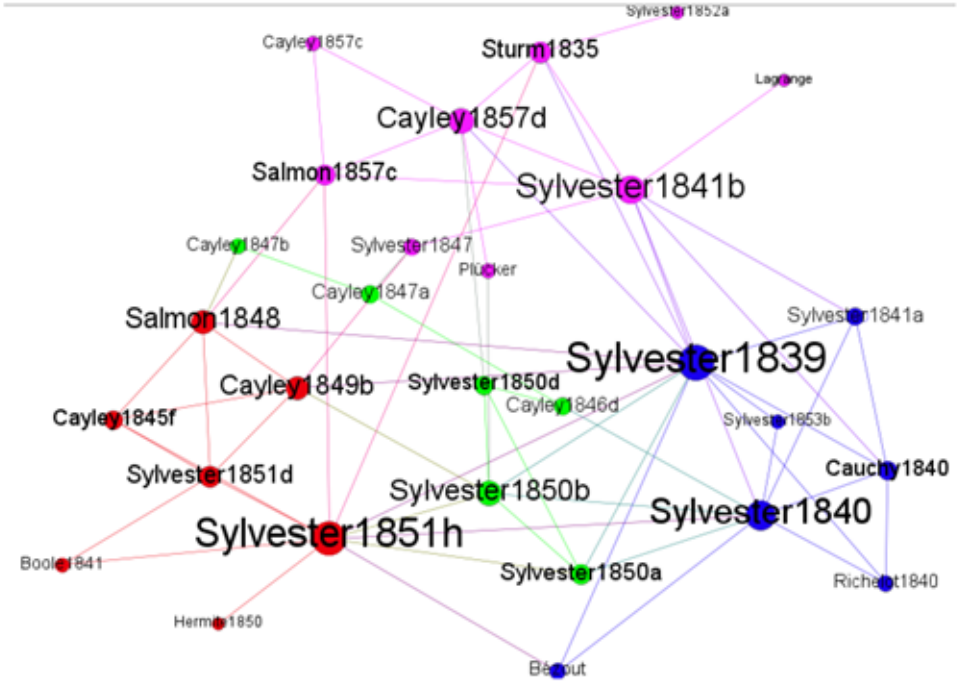
Figura 4 – Uma rede de textos da pesquisa de Roque



Fonte: (Roque, 2015, p. 10)

O terceiro exemplo é a tese de doutorado de Magno Luiz Ferreira, defendido no PEMAT (Programa de Pós Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física), da UFRJ, em novembro de 2023. O trabalho foi orientado por Gérard Grimberg e eu estive presente na banca de doutorado como examinador. Essa tese fala sobre o matemático britânico James Joseph Sylvester (1814-1897) e sobre a formação da comunidade matemática britânica em torno desse personagem. Fala ainda sobre a teoria dos invariantes, que recebeu uma contribuição muito grande de Sylvester, mas também de outras tantas pessoas. Nas diversas redes de textos que Ferreira apresenta em seu trabalho, mais uma vez os nomes próprios dos autores são apresentados em vértices. Ferreira teve o cuidado de colocar cores em suas redes, pintando vértices e arestas para indicar diferentes áreas de pesquisa matemática em que aqueles artigos estão colocados. Observa-se também que um mesmo autor com diferentes trabalhos pode aparecer em diferentes vértices, e esses vértices são ligados pelas arestas. Os vértices nesse grafo têm espessuras diferentes indicando qualitativamente se um determinado vértice/autor empresta muito ou pouco às práticas matemáticas dos demais vértices/autores a eles ligados.

Figura 5 – Uma rede de textos da tese de Ferreira



Fonte: (Ferreira, 2023, p. 228)

A apresentação de uma rede de textos em grafos, não é a única maneira de fazê-la. Os três exemplos que mostrei acima preferiram ilustrar o seu trabalho desse modo, mas no meu trabalho, por exemplo, eu não me utilizei de grafos para mostrar a minha rede. Eu me utilizei de muitas tabelas. Na fase da pesquisa, utilizei de tabelas "internas", que não foram para exibição do leitor, preparadas no Excel onde uma quantidade enorme de dados eram lançados e investigados. E depois, na apresentação do texto, mais tabelas, um pouco menores, enxutas, mostrando os resultados alcançados.

Bases teóricas para a metodologia da rede de textos

Quero chamar a atenção para o fato de que a metodologia de rede de textos é resultado direto do uso de métodos quantitativos em história da matemática. Nessa direção, há um artigo fundamental da historiadora francesa Catherine Goldstein publicado em 1999 chamado "Sobre a questão dos métodos quantitativos em história da matemática: o caso da teoria dos números na França em 1870-1914". Nesse trabalho, Goldstein problematiza a questão de uma narrativa histórica interna *versus* uma narrativa histórica externa. Não dá mais para narrar uma história da matemática estritamente internalista, olhando apenas para os resultados matemáticos em si mesmos, como algo com uma lógica interna própria e que se desenvolve sem a intervenção de outros fenômenos. Mas também não dá para se fazer história de matemática de maneira completamente externalista, falando apenas dos autores dos diversos textos publicados em matemática, suas afiliações institucionais, os lugares onde publicam, suas relações diretas ou indiretas como colegas, colaboradores entre si, ou como rivais que competem em torno de uma teoria. Uma história da matemática baseada apenas numa perspectiva ou noutra é pobre, pois despreza a complexidade do fenômeno social, bem como da natureza do conhecimento matemático.

A rede de textos tenta dar uma resposta para essa questão ao articular a criatividade individual de cada geômetra com sua participação numa comunidade. As práticas matemáticas compartilhadas

circulam de um texto a outro, e do outro ao seguinte, por meios de empréstimos, explicitamente mencionados ou não, e que faz a teoria matemática avançar. Isso deixa bastante evidente o quanto a fabricação matemática é uma fabricação coletiva que acontece ou por colaboração ou por competição, mas sempre em comunidade.

E mais, no artigo de Catherine Goldstein, ela vai além de problematizar essa questão da articulação entre o indivíduo e a comunidade, ou da criatividade individual com as práticas compartilhadas por um grupo. Ela também argumenta o quanto os métodos quantitativos podem ser úteis em história da matemática no sentido de compilar amplas bases de dados a partir das quais se possa descrever de maneira detalhada um panorama que mostre o estado da pesquisa de uma certa área, de um certo assunto em matemática, numa determinada região e num determinado período de tempo.

Essas técnicas quantitativas em história da matemática são inspiradas em sociólogos e historiadores que na segunda metade do século XX estiveram em evidência nos estudos em ciências sociais. Mencionamos o sociólogo Pierre Bourdieu com seus trabalhos sobre campos e *habitus*, o historiador Jacques Revel a partir da sua teoria da microhistória, e ainda os educadores Etienne Wenger-Trayner e Bervely Wenger-Trayner pelo conceito de comunidades de práticas. Pierre Bourdieu e Jacques Revel são as fundamentações teóricas que estão na base do meu trabalho de doutorado e que redundou no meu livro de 2024. Já Wenger-Trayner e Wenger-Trayner são a base teórica oriunda da sociologia para o trabalho de doutorado do Magno Luiz Ferreira.

Por fim, esses métodos quantitativos em história da matemática acabam se prestando como método heurístico eficiente em pelo menos duas vertentes: as prosopografias e a redes de textos. Enquanto que as redes de textos são coletivos de textos dos quais se extraem práticas compartilhadas, as prosopografias são coletivos de biografias do quais se extraem também estruturas compartilhadas. Na metodologia da prosopografia, um grupo de indivíduos com algo em comum, bem delimitado numa região e num intervalo de tempo, pode fornecer um bom panorama de uma certa estrutura social.

Apenas para indicar um exemplo, imaginemos uma prosopografia de professoras e professores de matemática, que atuam no território do estado do Rio Grande do Sul, nos anos 1990 e nos anos 2000. Digamos que sejam alistados sistematicamente, para esse coletivo de pessoas, dados tais como quais são suas origens institucionais, onde se formaram, onde estudaram, para que lugares eles se espalharam na execução do seu trabalho, qual a carga horária dos seus trabalhos, que tipo de disciplinas lecionam, em que tipo de escolas trabalham, qual o tempo de carreira de cada um, etc. Então olhando essa quantidade enorme de informações para uma população bastante específica, se pode redigir uma espécie de biografia coletiva, ou melhor dizendo, se pode descrever um panorama de um grupo social num tempo e num lugar. E depois, olhando especificamente para um ou outro indivíduo neste grupo, pode-se inferir onde, quando, como e quanto esta trajetória individual segue a estrutura, ou escapa da estrutura. Isso fornece melhor compreensão, não só da comunidade, mas também de um indivíduo enquanto membro da comunidade.

COMO EU USEI A METODOLOGIA DA REDE DE TEXTOS PARA INVESTIGAR A GEOMETRIA DE SITUAÇÃO

Agora vou contar pra vocês, na terceira parte dessa palestra plenária, como foi que eu fiz a minha rede de textos. Mais especificamente, como foi que eu selecionei os textos que compõem minha rede e alguns dos resultados que obtive dela.

Para selecionar os textos da rede, eu fixei o meu "conjunto universo" no jornal *Annales de Gergonne*. Trata-se de um jornal que foi publicado na França de 1810 a 1832. Ao longo desses 22 anos o jornal foi publicado em fascículos mensais de mais ou menos 30 a 40 páginas. Ali nesse jornal houve uma população de 107 autores e um total de 839 artigos, totalizando cerca de 8 mil laudas.

Comecei minha rede selecionando o artigo em que aparece pela primeira vez no corpo do texto a expressão "geometria de situação". É um artigo que foi publicado em janeiro de 1826 por Gergonne e que se chama "Filosofia matemática. Considerações filosóficas sobre os elementos da ciência da extensão" (Gergonne, 1826).[2] Na sequência eu peguei o texto seguinte em que aparece a palavra "geometria de situação", agora no título do artigo. Esse texto também é de Gergonne e foi publicado em janeiro de 1827 (Gergonne, 1827). A seguir peguei também os seis artigos seguintes em que a palavra "geometria de situação" aparece nos títulos. Todos seis são do geômetra Étienne Bobillier e foram publicados nos fascículos de outubro de 1827 a abril de 1829 (Bobillier, 1827a, 1827b, 1828a, 1828b,1828c,1829).

No conjunto desses oito textos, analisando detalhadamente o seu conteúdo, mas principalmente a sua forma, eu estabeleci quatro critérios. São quatro descritores que caracterizam, segundo a compreensão que eu tive no decorrer da pesquisa, do que é essa geometria de enunciados aos pares. Os critérios são:

- aparição explícita no corpo do texto ou no título do artigo da expressão "geometria de situação";
- aparição explícita no corpo do texto ou no título do artigo da expressão "reciprocidade polar" ou "teoria das polares recíprocas" ou ainda "princípio da dualidade", sendo evocadas pelo autor como um princípio utilizado na dedução de algum teorema;
- a redação de parte de (ou de todo) o texto colunas duplas;
- a aparição explícita da palavra "polo" ou da palavra "polar".

Em resumo, os oito primeiros textos da rede, foram selecionados pelo critério de "antiguidade" da expressão "geometria de situação": o primeiro em que aparece a expressão no corpo do texto e depois os sete primeiros em que aparece a expressão no seu título. Foi neles que identifiquei os quatro descritores, cada um dos quais atendidos por todos eles.

Na etapa seguinte eu percorri o jornal completamente, página por página, desde o primeiro exemplar de maio de 1810 até o último de maio de 1832, procurando a ocorrência dos descritores. Quero destacar que os descritores são bem objetivos e não deixam margem para subjetividades ou interpretações, num primeiro momento. Caso algum texto contivesse pelo menos uma das quatro marcas, ele era automaticamente selecionado para a rede. E se num artigo, em nenhuma de suas páginas eu encontrasse nenhum dos quatro descritores, esse texto era descartado.

[2] Uma tradução integral desse artigo do francês para o português, com uma nota introdutória, foi publicada por mim na *Revista Brasileira de História da Matemática*, na edição temática de "Traduções" (Haubrichs, 2023).

Feita a primeira rodada de seleção, encontrei um total de 92 artigos, que apelidei de "rede básica de textos". É necessário dizer bem claramente que nesses 92 artigos constam apenas os textos que atendem pelo menos um dos critérios anunciados acima. Nesses 92 textos há uma totalidade de 20 autores identificados (e alguns anônimos), cobrindo o período de 1810 a 1829, sendo que a maioria dos textos está concentrada nos três anos de 1826 a 1829. No triênio estão 62 dos 92 textos, cerca de dois terços do total.

Depois da seleção desses 92 textos, eu percorri mais uma vez todo o periódico em questão, dessa vez fazendo uma rede de referências bibliográficas explícitas. Ou seja, no conjunto desses 92 artigos, eu olhei a partir do título (caso informasse) ou a partir das notas de rodapé (caso existissem) a indicação de artigos anteriores publicados no mesmo jornal. Esses "artigos anteriores", digamos assim, também foram selecionados para compor uma rede de textos que eu apelidei de "rede aumentada de textos". Nessa rodada eu obtive um total de 191 artigos, ou seja, depois dos 92 que tinham sido selecionados antes, foram acrescentados 99 textos novos. Deixando bastante claro, mais uma vez, que esses 99 textos novos são textos que vêm apenas de referências bibliográficas explícitas daqueles 92 primeiros, e que esses 99 textos novos não atendiam a nenhum dos critérios descritores da geometria de situação. Até porque, caso qualquer um deles tivesse um critério atendido, já teria sido selecionado na primeira rodada.

Da rede básica para a rede aumentada a quantidade de artigos quase que dobrou. Essa rede aumentada tem 38 autores, que também é quase o dobro de 20, quantidade de autores na rede básica. A rede aumentada também cobre o período que vai de 1810 a 1829, e semelhantemente, ela é concentrada no triênio de 1826 a 1829, com 70 artigos dos 191.

Tomando as duas redes, o que eu fiz foi investigar, então, agora sim, fazendo a leitura minuciosa dos textos que obtive. E coletando sistematicamente as seguintes informações:

- uma lista dos autores identificando a filiação institucional de cada um, o lugar onde cada um deles estudou e o lugar onde cada um deles trabalha;
- a localização geográfica deles, o território que eles ocuparam – a grande maioria dos autores são franceses, mas havia alguns estrangeiros que também participaram dessa rede;
- os conteúdos matemáticos nesse conjunto de textos;
- a rubrica editorial no qual esses textos estão colocados, para ter uma compreensão de como o editor do jornal, bem como os geômetras da época, compreendiam em que tipo de geometria essa geometria de situação está encaixada – se é uma geometria analítica, se é uma geometria elementar, se é uma geometria superior, ou mesmo se é alguma outra parte da matemática que não seja geometria.

Neste ponto da minha pesquisa eu notei que o estudo da rede aumentada seria redundante se comparado com o estudo da rede básica. Digo, qualitativamente as duas redes me forneciam a mesma descrição. Uma evidência é que tanto numa quanto na outra o peso de artigos recai sobre o triênio 1826 a 1829, embora ambas sejam espalhadas de 1810 a 1829. Outra evidência é que as duas redes têm o mesmo "Top 4" dos autores que mais inseriram textos na rede: Gergonne, Poncelet, Bobillier, Michel Chasles (1793-1880). A diferença de uma rede pra outra, nesse quesito, é apenas uma pequena mudança na ordem: aquele que é o primeiro colocado numa rede ficou em terceiro na outra, o que é o quarto colocado numa rede ficou em segundo na outra, etc.

Essas são apenas algumas das características que observei, que me fizeram compreender que para descrever a geometria de situação a rede aumentada é redundante no sentido de que embora os números se modifiquem e eu tenha uma quantidade bem maior de dados, do ponto de vista qualitativo e panorâmico o que a rede aumentada acrescenta não é melhor, nem mais bem descrito do que o que a rede básica já me fornecia. Então segui minha pesquisa, coletando sistematicamente mais essas informações apenas na rede básica:

- os teoremas que se repetiam com mais frequência, aqueles que eram retomados mais vezes, os que poderiam então ser considerados os teoremas principais dessa teoria – os teoremas campeões de menção e de demonstrações diferentes e originais dentro desse conjunto foi o par "Pascal e Brianchon", que eu usei para ilustrar o que significa geometria de situação lá na primeira parte dessa palestra;

- os textos externos mencionados na minha rede de textos, ou seja, livros, tratados ou artigos publicados em outros periódicos que não fosse os *Annales de Gergonne* – o texto mais mencionado é o *Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras* (Poncelet, 1822), bem como *Os Elementos de Euclides*, e a *Memória* de Brianchon (Brianchon, 1817), onde aparece, não por acaso, a primeira demonstração do Teorema de Brianchon, numa versão ainda não pareada com o Teorema de Pascal;

- todas as pessoas mencionadas no corpo do texto, totalizando 58 personagens, geômetras na sua imensa maioria, mas também outras pessoas como, por exemplo, nome de editores de jornais ou nome de diretores de instituições científicas.

Caso curioso é o dos nomes mencionados. Ali a gente encontra, evidentemente, geômetras em atividade nos anos 1810 e 1820, contemporâneos àqueles que estavam engajados na fabricação coletiva da geometria de situação. Mas a gente também encontra geômetras de um período ligeiramente anterior (por exemplo, Monge e Carnot), da era moderna (Pascal, Newton, Desargues), e geômetras da antiguidade (Apolônio, Pappus, Arquimedes, Pitágoras, Euclides). A curiosidade dessa nominata, é que normalmente os personagens eram evocados em listas que serviam para legitimar uma espécie de "ancestralidade matemática" que celebra grande nomes de mitos, heróis e precursores, em ordem progressiva, e que culmina no distinto autor que ora apresenta seus resultados.

É interessante registrar também a ocorrência bastante frequente de uma equação linear do tipo $\lambda P+\mu Q$, onde P e Q são polinômios que descrevem uma curva ou uma superfície (no plano cartesiano ou no espaço cartesiano, respectivamente), e λ e μ são constantes reais indeterminadas. Os polinômios quase sempre aparecem e são manipulados assim abreviados, e não como soma de monômios nas variáveis x, y e z. Por isso mesmo, alguns geômetras da geração posterior aos anos 1820, referiam-se a esse modo de argumentar como *método da notação abreviada*.

Com isso, eu consegui descrever de maneira detalhada e entender a geometria da situação, não só nos seus resultados principais ou no seu principal problema: o de explicar o fenômeno do emparelhamento de enunciados. Mas também a sistematização, a redação, os teoremas, as pessoas, as instituições, os exemplos e os resultados no entorno desse fenômeno.

Informo, por fim, que a geometria de situação é um fenômeno social em história das ciências conhecida como *rise and fall*, ou seja, emergência e declínio. É um tipo de fenômeno em que um determinado tema de pesquisa em matemática entra na moda, se desenvolve com força por um tempo, e depois sai de moda, mostrando que os valores de utilidade e beleza se modificam com o passar do tempo ou o passar das gerações. No caso da geometria de situação, ela entrou em declínio e praticamente se esgotou quando em 1828 e 1831 foram publicados os dois volumes do tratado *Desenvolvi-*

mentos de Geometria Analítica, assinado pelo geômetra prussiano Julius Plüker (1801-1868). Nesses livros volumosos Plüker consegue conciliar numa teoria bem elaborada as explicações divergentes de Gergonne e de Poncelet (mas não conciliar os dois geômetras, porque estes permaneceram rivais e ressentidos um com o outro até o fim da vida). A explicação proposta por cada um naquilo em que estavam corretos, foi reelaborada e unificado por Plücker com uma nova linguagem, uma nova notação e a introdução de novos conceitos. E naquilo em que estavam incorretos, Plücker conseguiu desembaraçar e corrigir. Então quando o significado profundo do fenômeno dos enunciados aos pares entrou em cena, a efervescência das pesquisas matemáticas nessa área cessou e novos trabalhos originais nessa área não apareceram mais.

Aos interessados no assunto, informo que há outras hipóteses para o "fim" da geometria de situação e alguns desdobramentos posteriores ao ano 1832 que são narradas com detalhadas no meu livro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma rede de texto põe em relevo como a fabricação coletiva da matemática acontece, seja por colaboração ou por competição, porque exibe de um texto ao outro, de maneira bastante clara e explícita, quais são e onde estão as práticas compartilhadas. Mesmo quando a perspectiva ou a interpretação de um certo resultado por um geômetra é divergente do geômetra anterior, ainda assim o geômetra quando prepara o seu texto, lê o texto anterior e pega emprestado ali algum vocabulário, alguma equação, alguma técnica de demonstração que depois ele vai aplicar no seu próprio texto. Ao rastrear as práticas matemática compartilhadas nos textos publicados, é como se estivéssemos vislumbrando indiretamente os "bastidores" da pesquisa matemática, que é viva, é dinâmica e é composta por uma comunidade e não por indivíduos isolados. As pessoas interagem em comunidade, e no caso da minha pesquisa, por exemplo, essa comunidade é intermediada por um jornal que congrega leitores e autores. As pessoas também produzem dentro de um sistema. E esse sistema, no caso da minha pesquisa, diz respeito às instituições de ensino e ou de pesquisa às quais aquelas pessoas são vinculadas.

O estudo de uma rede de textos mostra, além disso, que a produção matemática é um fenômeno circunscrito num período de tempo, num território e numa comunidade. Ou seja, a matemática não é atemporal e nem é universal, mas ela é uma produção humana que entra na moda, que sai de moda e que enquanto está na moda se desenvolve plenamente e floresce plenamente. Encontrar essa plenitude está mais do que apenas ler os resultados de um coletivo de artigos, mas em persegui-los nos detalhes.

REFERÊNCIAS

BOBILLIER, Étienne. Géométrie de situation. Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 18 (1827-1828), pp. 89-98, 1827a. https://www.numdam.org/item/AMPA_1827-1828__18__89_0/

BOBILLIER, Etienne. Géométrie de situation. Recherches sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 18 (1827-1828), pp. 157-166, 1827b. https://www.numdam.org/item/AMPA_1827-1828__18__157_0/

BOBILLIER, Etienne. Géométrie de situation. Recherche sur les lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 18 (1827-1828), pp. 253-269, 1828a. https://www.numdam.org/item/AMPA_1827-1828__18__253_0/

BOBILLIER, Etienne. Géométrie de situation. Recherches sur les lois générales qui régissent les courbes algébriques. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 19 (1828-1829), pp. 106-114, 1828b. https://www.numdam.org/item/AMPA_1828-1829__19__106_1/

BOBILLIER, Etienne. Géométrie de situation. Recherches sur les lois générales qui régissent les surfaces algébriques. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 19 (1828-1829), pp. 138-150, 1828c. https://www.numdam.org/item/AMPA_1828-1829__19__138_0/

BOBILLIER, Etienne. Géométrie de situation. Théorèmes sur les polaires successives. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 19 (1828-1829), pp. 302-307, 1829. https://www.numdam.org/item/AMPA_1828-1829__19__302_0/

BRECHENMACHER, Frédéric. **Histoire du Théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930): Formes de représentations et méthodes de décompositions.** Thèse (Doctorat en Histoire) – École des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris, 2006.

BRECHENMACHER, Frederic. Constructing networks of texts: a heuristical method for discovering some collective dimensions of mathematics. Intervenção na Ecole du GDR 3398 "Histoire de mathématiques". **Des sources en histoire des mathématiques.** Luminy, Marselha, 05 de novembro de 2013.

BRIANCHON, Charles Julien. **Mémoire sur les lignes du second ordre.** Paris: Bachelier, 1817.

FERREIRA, Magno Luiz. **JJ Sylvester e a comunidade formada através do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes.** Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

GERGONNE, Joseph Diaz. Philosophie mathématique. Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendu. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 16 (1825-1826), pp. 209-231, 1826. https://www.numdam.org/item/AMPA_1825-1826__16__209_0/

GERGONNE, Joseph Diaz. Géométrie de situation. Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, tome 17 (1826-1827), pp. 214-252, 1827. https://www.numdam.org/item/AMPA_1826-1827__17__214_0/

GOLDSTEIN, Catherine. Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques: le cas de la théorie des nombres em France (1870-1914). **Acta historiae rerum naturalium technicarum**, new series, v. 3, pp. 187-214, 1999.

HAUBRICHS, Cleber. **Étienne Bobillier (1798-1840): percursos matemático, docente e profissional.** Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

HAUBRICHS, Cleber. Tradução das "Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue" de Joseph Diez Gergonne, Janeiro de 1826. **Revista Brasileira de História da Ma-**

temática, v. 23, n. 46, pp. 258–295, 2023. https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/409/357

HAUBRICHS, Cleber. **Geometria de situação: problemas e teoremas aos pares no século dezenove.** Coleção História da Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2024.

PLÜCKER, Julius. **Analytisch Geometrisch Entwicklungen.** Essen: Baedeker, vol 1, 1828, vol 2, 1831.

PONCELET, Jean Victor. **Traite des propriétés projectives des figures.** Paris: Bachelier, 1822.

PONCELET, Jean Victor. Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques; pour faire suite au Mémoire sur les centres moyennes harmoniques. **Journal für die reine und angewandte mathematik**, v. 4, pp. 1-71, 1829.

ROQUE, Tatiana. L'originalité de Poincaré en mécanique céleste: pratique des solutions périodiques dans un réseau de textes. **Revue d'histoire des mathématiques**, tome 21, n. 1, pp. 41-109, 2015.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

História da Matemática para o bem viver: reflexões por vias da etnomatemática

History of Mathematics for good living: reflections through ethnomathematics

Claudia Alessandra Costa de Araujo Lorenzoni[1]
Instituto Federal do Espírito Santo – IFES

RESUMO

O artigo expõe resultados de experiências de pesquisa nos entrelaçamentos de etnomatemática e história da matemática, organizados no texto de forma a construir reflexões para a educação escolar acerca da natureza e do papel nas sociedades do que se costuma chamar de matemática. Os dados foram construídos no contexto de investigações de cunho etnográfico e são interpretados sob uma perspectiva da etnomatemática enquanto programa de pesquisa em história e filosofia da matemática com implicações pedagógicas, para a qual se recorre a trabalhos de Ubiratan D'Ambrosio, Alan Bishop e Manoel de Campos Almeida. O bem viver, como fio condutor para as reflexões propostas, se fundamenta na obra homônima de Alberto Acosta tanto quanto em experiências da autora junto a povos tradicionais presentes no norte do Espírito Santo — Tupinikim, Guarani e Quilombola —, reforçadas pelas análises de Ailton Krenak sobre as atuais formas de viver com o planeta. Entre os resultados, o leitor é apresentado a possibilidades distintas de práticas pedagógicas de matemática nos entrelaçamentos com história e etnomatemática, concluindo-se que a matemática é um dentre os variados sistemas de conhecimento humano que dá conta da busca por sobrevivência e transcendência. No campo específico da história da matemática, reforça-se que pesquisas e práticas dessa natureza no universo escolar são potentes na construção de outros mundos, como se almeja com o bem viver, nos quais haja pontes entre conhecimentos ancestrais e modernos, inclusive em harmonia com os outros seres do cosmos, com o passado e com o futuro.

Palavras-chave: História da matemática; Etnomatemática; Guarani; Tupinikim; Educação escolar.

ABSTRACT

The article presents the results of research experiences at the intersections of ethnomathematics and the history of mathematics, organized in the text to construct reflections for school education about the nature and role in societies of what is commonly referred to as mathematics. The data were constructed in the context of ethnographic investigations and are interpreted from the perspective of ethnomathematics as a research program in the history and philosophy of mathematics with pedagogical implications, drawing on the works of Ubiratan D'Ambrosio, Alan Bishop, and Manoel de Campos Almeida. Buen vivir (the good life), as a guiding thread for the proposed reflections, is grounded in the homonymous work of Alberto Acosta as well as in the author's experiences with traditional communities in northern Espírito Santo — Tupinikim, Guarani, and Quilombola —, reinforced by Ailton Krenak's analyses of current ways of living with the planet. Among the results, the reader is introduced to distinct possibilities of pedagogical practices of mathematics in its intersections with history and ethnomathematics, concluding that mathematics is one among the various human knowledge systems that address the quest for survival and transcendence. In the specific field of the history of mathematics, it is emphasized that research and practices of this nature in the school environment are powerful in constructing other worlds, as envisioned by the buen vivir, in which there are bridges between ancestral and modern knowledge, including in harmony with other beings of the cosmos, with the past, and with the future.

Keywords: History of mathematics; Ethnomathematics; Guarani; Tupinikim; School education.

[1] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes). Mestre em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Professora do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) do IFES, Espírito Santo, Brasil. E-mail: claudia.araujo@ifes.edu.br.

INTRODUÇÃO: O BEM VIVER

Na ocasião de comemoração dos 30 anos do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), proponho neste texto uma discussão sobre entrelaçamentos entre etnomatemática e história da matemática, especialmente por via das contribuições que a história da matemática como área de pesquisa pode e precisa dar para a educação escolar. Parto da compreensão de que a educação, de maneira geral, almeja o bem viver, expresso no bem viver de seus sujeitos. E a escola, enquanto uma instituição educacional, não está isenta desse compromisso maior.

Situo minha fala como alguém com formação profissional e acadêmica sob forte influência da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat). A propósito, neste ano de aniversário do evento, do SNHM, também comemoro meus 30 anos de graduação.

Impulsionada por reflexões que a matemática e sua história me proporcionaram sobre ciência, sociedade, ancestralidade, identidade, individualidade, entre outros temas, tomo meu lugar de fala como Claudia Alessandra Costa de Araujo Lorenzoni, mulher, parda, "capixaba da gema", nascida e criada no bairro de Jucutuquara[2], onde estudei na infância e adolescência, onde atuo como profissional no Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes) e fortaleço meu ofício, o de professora de matemática com grande vínculo com a Educação Básica, quer seja como professora ou como formadora de professores.

Como fio condutor do debate, persigo o alvo do bem viver. O bem viver é um conceito que venho conhecendo (e almejando) a partir das minhas experiências junto aos Guarani e Tupinikim e, recentemente, aos Quilombolas, todos no norte do Espírito Santo. Em contatos recentes de trabalho com Mônica Mesquita, da Universidade NOVA de Lisboa, fui apresentada ao livro de Alberto Acosta sobre o bem viver como oportunidade para se construir outros mundos (Acosta, 2006). Eu não me surpreendi quando encontrei na leitura descrições de uma "proposta holística" (p. 71), como uma "forma de vida em equilíbrio com todos os indivíduos e coletividades, com a sociedade e a Natureza" (p. 205), guiada por "uma ética da suficiência para toda a comunidade, e não somente para o indivíduo" (p. 84), possibilitando "a cultura do estar em harmonia", em vez da "civilização do viver melhor" (p. 90). Em resumo e em sintonia com as palavras de Ailton Krenak, no livro *A vida não é útil*: "Ou você ouve a voz de todos os outros seres que habitam o planeta junto com você, ou faz guerra contra a vida na Terra." (Krenak, 2020, p. 73).

Em termos de referenciais em Educação Matemática, considerações como as do saudoso Professor Ubiratan D'Ambrosio reforçam a urgência de um diálogo na alteridade por um bem viver:

> Parafraseando V. V. Raman, do Rochester Institute of Technology, pode-se afirmar que as metas para o novo século devem ser a identificação do que é comum na busca de verdade e sabedoria entre todas as culturas e civilizações do planeta, aprendendo um do outro a corrigir os equívocos, a resistir à tentação de considerar as percepções das nossas tradi-

[2] Dois monumentos contam parte da história da região de Jucutuquara e remetem a elementos comuns na história nacional: o rochedo conhecido como Pedra dos Dois Olhos e o Museu Solar Monjardim, um casarão colonial com construção iniciada na década de 1780. De acordo com a Secretaria de Cultura de Vitória (Semc), o primeiro monumento dá nome ao bairro, do tupi *Jucú-ita-quera* ("pássaro do buraco da pedra") ou *Yticú-tuquara* ("conchas suspensas"). O segundo foi sede da Fazenda Jucutuquara, propriedade originalmente dos padres da Companhia de Jesus que se tornou particular após a expulsão dos jesuítas no século XVIII. Conforme o *site* do Cadastro Nacional de Museus (CNM), a construção abrigou personagens famosos da história, como o naturalista francês Auguste de Saint-Hilaire e o Padre Antônio Diogo Feijó, enquanto em "construções anexas ficavam estabelecimentos de indústrias caseiras e alojamento de escravos domésticos". Ou seja, como grande parte das localidades no Brasil, Jucutuquara é mais uma testemunha do movimento da colonização europeia e da luta de resistência dos povos originários e negros escravizados.

> ções como sendo, de algum modo, superior a outras, a reconhecer que nossos ancestrais erraram gravemente em muitas decisões e ações, e a buscar em comum soluções para os muitos problemas que a humanidade enfrenta num espírito de harmonia e dedicação coletiva (D'Ambrosio, 2022, p. 14).

No presente artigo, procuro argumentar o quanto a construção do bem viver diz respeito também a nós, dedicados a estudos em história da matemática, e o quanto nossas pesquisas precisam estar cada vez mais próximas das práticas pedagógicas na matemática escolar. Com esse intuito, compartilho a seguir três experiências pessoais de pesquisa na área da etnomatemática, entendida como um "programa de pesquisa de pesquisa em história e filosofia da matemática, com óbvias implicações pedagógicas", como sugeriu D'Ambrosio (2007, p. 27). Por meio delas, procuro apontar reflexões para a educação escolar promovidas por entrelaçamentos da história e da etnomatemática.

DE JOGO DE BADERNEIRO À MATEMÁTICA ESCOLAR

A primeira experiência que compartilho é extraída do livro *Jogos, Brincadeiras e Experiências em Matemática com os Guarani e Tupinikim* (Lorenzoni *et al.*, 2022), que escrevi com colegas no Grupo de Pesquisas em História da Matemática e Saberes Tradicionais (GHMat), fruto de um projeto de pesquisa desenvolvido de 2018 a 2023[3]. A obra foi produzida por seis autores com características que enriquecem a nossa experiência e de quem lê a obra, uma vez que são quatro autoras, dois autores, um Tupinikim, um Guarani, professores de Educação Básica indígena e não indígena, profissionais de três Instituições de Ensino Superior, Instituto Federal e Universidades Federais. Todos reunidos por jogos e brincadeiras do passado e do presente desses dois povos, conforme dinâmicas próprias de pesquisa, que envolveram pesquisa bibliográfica, conversas, observações e registros de relatos por meio de caderno de campo, imagem e som.

No Espírito Santo, os Guarani e Tupinikim compõem a população de indígenas aldeados nas Terras Indígenas (TI)[4] do estado e contabilizam 4.663 pessoas, segundo dados do Censo 2022[5]. Vivendo em cerca de 18 mil hectares de TI, localizados no município de Aracruz, cidade litorânea ao Norte do estado, os povos aldeados são parte do grupo dos 7.425 indígenas da cidade, o que corresponde a 7,84% da população. Na cidade, seis escolas municipais e uma estadual de Ensino Médio atendem, atualmente, cerca de 1.100 estudantes na Educação Escolar Indígena, conforme dados de profissionais da área.

Nosso livro tentou priorizar essa comunidade indígena como público-alvo, entre os quais identificamos os que têm acesso a processos de alfabetização na escola (língua guarani ou português), como professores, demais profissionais, estudantes e seus familiares, e os que não são alfabetizados ou não falam português (no caso, maioria de crianças ou idosos). Por isso, o livro está escrito em português e guarani, com títulos também em tupi, como parte do processo dos Tupinikim de reconstrução da própria língua. Também devido ao público-alvo da obra, o conteúdo se distribui em três seções: uma com mais ilustrações e pouco texto – numa espécie de catálogo imagético de brinquedos –, uma com relatos e outra com propostas para a matemática na Educação Básica.

Destaco o que ficou conhecido para nós autores como Jogo do Milho Queimado, em razão das peças que cada jogador deveria usar, conforme relatado por um ancião: grãos de milho com uma

[3] Jogos e brincadeiras indígenas numa perspectiva etnomatemática (PJ4936 PJ5819 SigPesq/PRPPG/Ifes).
[4] Aproximadamente, segundo fontes do Instituto Socioambiental (ISA). Disponível em: https://terrasindigenas.org.br. Acesso em: 10 abr. 2025.
[5] Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/. Acesso em: 10 abr. 2025.

marca em uma das faces, feita com um palitinho de madeira com a ponta bem quente. Na brincadeira, a cada rodada, os jogadores (dois ou mais) colocam os grãos de milho nas mãos, balançam e jogam no chão. Todos observam e quem ficar com menos grãos com as marcas voltadas para cima sai do jogo. As rodadas continuam até que reste um único participante, que será o vencedor. Por exemplo, na situação simulada na Figura 1, deve sair da rodada quem tiver uma quantidade de grãos com as marcas para cima, menor ou igual a três.

Figura 1 – Simulação de rodada no Jogo do Milho Queimado

Fonte: Lorenzoni *et al.* (2022, p. 90).

Conhecemos o Jogo do Milho Queimado por intermédio da dissertação de mestrado da colega Dóris Reis Magalhães (2007). Desde então, já encontramos relatos na comunidade da prática do mesmo jogo com peças de búzios e outros tipos de grãos, marcados da forma tradicional por pirografia, por caneta ou outro recurso disponível. Segundo relatos, a brincadeira chegou a ser proibida no município, sendo associada a jogo de baderneiros. Diferentes movimentos de pesquisa e de formação de professores têm tornado a brincadeira uma opção de recurso na educação escolar indígena do estado, ampliando a variedade de material para as peças. Um breve relato encontra-se em Lorenzoni *et. al* (2018).

Já em relatos do século XVI, encontramos indícios da variedade na cultura material dos povos originários da região litorânea do atual território brasileiro. Gabriel Soares de Sousa, em seu tratado sobre o Brasil em 1587, descreve alguns ornamentos tupinambás como "grandes contas brancas, que fazem de búzios, lançadas ao pescoço" (Sousa, 1879, p. 319) e "ramais de contas de toda a sorte ao pescoço e nos braços" (Sousa, 1587, p. 320). No capítulo "Que trata como os tupinambás agasalham os hóspedes", o autor descreve uma prática deliberativa das lideranças sobre a procedência e o destino do hóspede usando a expressão "lançar contas", o que pode sugerir alguma função de estudo da sorte com uso de búzios e outros tipos de contas, apesar da narrativa ter ótica europeia:

> [...] e ao outro dia [da chegada do hóspede] se ajunta este principal em outra casa, onde se ajuntam os anciãos da aldeia, e praticam sobre a vinda do índio estrangeiro, e sobre as coisas que contou de onde vinha; e lançam suas contas se vem de bom título ou não; e se é seu contrário, de maravilha escapa que não o matem, e lhe façam seu ofício com muita

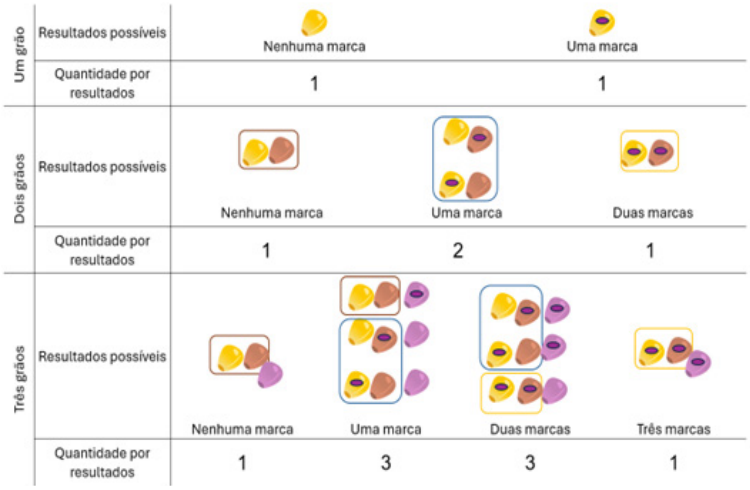
> festa e regozijo; ao qual hóspede choram as velhas também antes que coma, como atrás fica declarado (Sousa, 1851, p. 333).

De fato, a história tem registros de jogos – às vezes, com função mística também – praticados até com ossos, como pelos gregos da Antiguidade ou pelos gaúchos que usam astrágalos de boi no tradicional Jogo do Osso, que "consiste no arremesso do osso do garrão do boi sobre uma cancha plana e, conforme a maneira que cai, dá a suerte ou culo, isto é, ganha ou perde a pessoa que o atira"[6]. Em referência à ausência de dados entre os gregos, Mlodinow (2011, p. 41) descreve um astrágalo, com "seis lados, mas só quatro deles são estáveis o suficiente para permitir que o osso se apoie sobre eles".

Com os seis grãos do jogo tupinikim, algum leitor pode ser tentado também a supô-lo como imitação de alguma prática de sorte com um dado justo de seis faces trazido por colonizadores. No entanto, poucas jogadas na brincadeira tupinikim seriam suficientes para demonstrar que os resultados possíveis por jogador a cada rodada não são eventos equiprováveis, por exemplo, obter "todos os grãos com as marcas queimadas para cima" ou "somente dois grãos com as marcas queimadas para cima".

O esquema na Figura 2 simula os resultados possíveis em situações de lançamento de um grão, dois grãos e três grãos de milho, sucessivamente. Note-se que, para cada unidade acrescida no número de peças (grãos), a quantidade de resultados possíveis está diretamente relacionada a quantidades anteriores, por exemplo, como está ilustrado pela união de diagramas coloridos na figura. Particularmente, no lançamento de três grãos, os resultados possíveis para obter somente uma marca para cima são gerados acrescentando-se um grão aos resultados possíveis de dois grãos sem marca ou de dois grãos em que somente um tem a marca para cima. Na primeira situação, acrescenta-se um grão com a marca voltada para cima, e, na segunda, um grão sem a marca para cima.

Figura 2 – Contagem de resultados possíveis no lançamento de um, dois ou três grãos



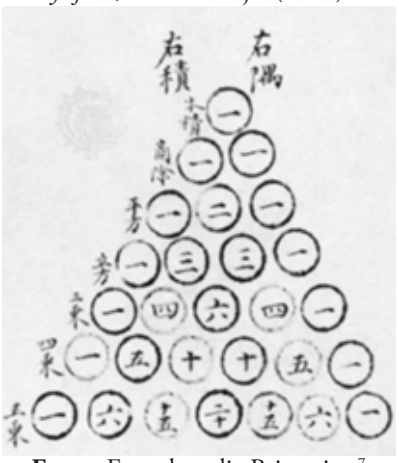
Fonte: A autora.

Seguindo o raciocínio descrito, no caso do lançamento dos seis grãos, chega-se às quantidades de 1, 6, 15, 20, 15, 6 e 1, resultados possíveis para se obter, respectivamente, nenhuma marca para cima, uma, duas, três, quatro, cinco ou seis.

[6] Disponível em: https://www.ufrgs.br/quemquerbrincar/wp-content/uploads/2016/06/Jogo-do-osso.pdf. Acesso em: 5 maio 2025.

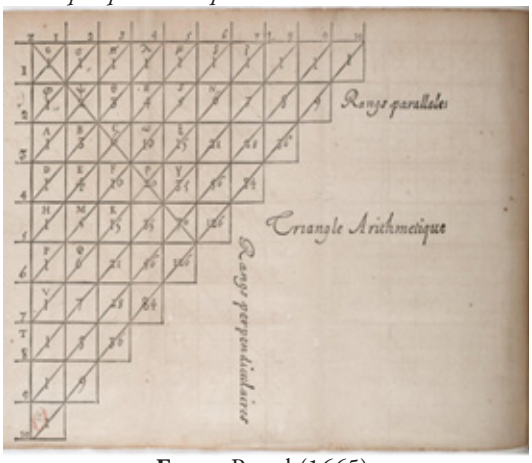
A análise da Figura 2 leva a algumas conclusões: tomando como referência o contexto da matemática escolar, o Jogo do Milho Queimado não equivale a um jogo de dado, mas, sim, a um jogo de sorte com seis moedas e o estudo da quantidade de resultados possíveis diante da variável "número de grãos" corresponde ao resultado dos chineses registrado no início do século XIV sobre o Triângulo Aritmético (Figura 3), popularizado mais tarde na Europa pela obra de Pascal (Figura 4).

Figura 3 – Ilustração extraída da obra *Siyuan yujian*, de Zhu Shijie (1303)



Fonte: Encyclopedia Brittanica.[7]

Figura 4 – Ilustração da obra *Traite dv triangle arithmetiqve avec qvelqves avtres petits traitez svr la mesme matiere*



Fonte: Pascal (1665).

Atuando na Educação Básica, já tive a oportunidade de apresentar o Jogo do Milho Queimado a estudantes e professores de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. São muitas as possibilidades de diversão, investigação, exercício da criatividade e uma grande oportunidade de apresentar o Brasil de volta a seus povos originários. Em Lorenzoni *et al.* (2022, p. 46), Valdemir Tupinikim escreve sobre seu povo:

> Os Tupinikim são indígenas integrantes da Família Linguística Tupinambá, que, por conseguinte, pertence ao Tronco Linguístico Tupi-Guarani, mas atualmente falam somente a Língua Portuguesa. Os remanescentes dos Tupinikim, historicamente, viveram próximo à estreita faixa de terra entre Camamu, Estado da Bahia, e o rio Cricaré ou São Mateus, no Estado do Espírito Santo. No Espírito Santo, desde o início da conquista portuguesa (1535), o contato entre a população indígena e o colonizador foi permeado de hostilidades e conflitos [...]
>
> Os indígenas querem afirmar sua existência, e não sinalizar apenas para uma construção cronológica e linear, do tipo antes e depois. Eles estão afirmando tempos e racionalidade que se cruzam e que exigem uma nova leitura da história aprendida e ensinada até então [...]

Para nós, professores de matemática, experiências como essa podem proporcionar na escola uma reflexão ou aproximação do que o Prof. Manoel de Campos Almeida, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, chama, na obra *Origens da matemática* (Almeida, 2011), de natureza da matemática. Claro que, para isso, a escola precisa se perguntar: O que é essa coisa que chamamos de matemática?

Em termos operacionais, diferentes autores associam a atividade matemática a processos racionais como "*organização*: comparação, ordenação, classificação; *quantificação*: contagem, medição, pesagem; *descrição* (desenho, pintura, escultura); *formalização* (simbolismo); *combinação* (opera-

[7] Disponível em: https://www.britannica.com/biography/Zhu-Shijie#/media/1/116631/71483. Acesso em: 10 abr. 2025.

ções); *relação*; *causação*; *lógicos*: indução, dedução" (Almeida, 2013, p. 35). De fato, reconhecemos tais processos em diferentes ambientes da existência humana. Sendo contingentes, encontramos manifestações como estas:

> […] relacionadas e mesmo identificadas com o que hoje se chama matemática (processos de organização, classificação, contagem, medição, inferência) geralmente mescladas ou dificilmente distinguíveis de outras formas, hoje identificadas como arte, religião, música, técnicas, ciências. Em todos os tempos e em todas as culturas, matemática, artes, religião, música, técnicas, ciências foram desenvolvidas com a finalidade de explicar, de conhecer, de aprender, de saber/fazer e de predizer (artes divinatórias) o futuro (D'Ambrosio, 2005, p. 112).

Bishop (1999) destaca que, a partir de processos como esses (ele elencou contar e medir; localizar e desenhar; jogar e explicar), se desenvolvem ideias importantes para a "nossa matemática", a matemática da escola.

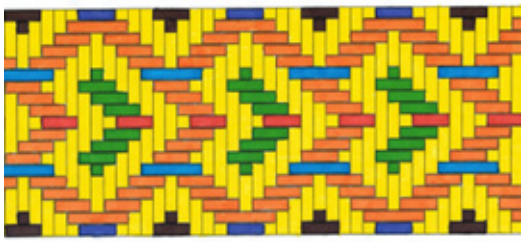
ADJAKA ETE: DO CESTO À VIDA DE VERDADE

Penso que outras perguntas reflexivas são necessárias sobre a matemática na escola. Para enunciar mais uma, apresento um breve resumo da minha pesquisa de doutoramento, que investigou a cestaria guarani no Espírito Santo por uma perspectiva etnomatemática (Lorenzoni, 2010).

Comecei a estudar a cestaria guarani seduzida pelos padrões gráficos que eu reconhecia nos seus trançados. Não foi difícil encontrar simetrias de rotação ou translação nas peças que, pelo seu próprio processo de confecção com as talas de fibras naturais, já implicam padrões, movimentos de repetição, comportamentos recorrentes com relação ao espaço. E as técnicas de confecção me aproximaram dos padrões ornamentais dos bojos, que eu pude classificar por diferentes aspectos, conforme eles foram me ensinando. Com as leituras em história cultural, a etnografia interpretativa e o trabalho de campo por meio de visitas semanais à escola guarani, às lideranças e aos artesãos, houve a necessidade de mais uma semana de permanência na comunidade. Ao longo da pesquisa, foi ficando mais evidente que compreender um cesto guarani implicava conhecer seu artesão, a região onde foi confeccionado, tanto quanto a caminhada do povo para a Terra sem Males, seu sistema educacional, e, de forma geral, o jeito de ser guarani, ao qual eles se referem como *nhandereko*. Então, minha análise em busca dos processos de organização, quantificação, descrição, formalização, combinação etc. na cestaria precisou contemplar unidades como cor e função, devido às maneiras próprias daquele grupo de lidar com a vida.

Mais uma vez, como no caso do jogo tupinikim – do Milho Queimado –, meu olhar de professora de matemática sobre a cestaria guarani vislumbra muitas possibilidades de ação pedagógica, que ilustro com um exemplo desenvolvido em uma escola não indígena (Figura 5) e outro na escola indígena (Figura 6).

Figura 5 – Ilustração sobre malha com padrões de trançado guarani para estudo de simetrias na antiga 8ª série, 2010



Autoria: Paloma Ostergren Cruz Oliveira.
Fonte: Acervo da autora.

Figura 6 – Capa de caderno de atividades da Educação Infantil ao 5º ano para a Educação Escolar Guarani

Fonte: Lorenzoni, 2010.

De fato, os saberes, os fazeres e o próprio exercício de ser humano sempre transcendem os limites da pesquisa. Em toda essa diversidade de elementos da cestaria que os Guarani me apresentaram, eles sempre tomavam como referência o *adjaka ete* (cesto verdadeiro, em tradução livre), isto é, "o *adjaka* mesmo", o da vida guarani.

Segundo observações, relatos que colhi e leituras, o *adjaka ete* é um cesto cargueiro em que as mulheres transportam crianças, produtos de colheitas ou bens da família, sempre auxiliadas por uma alça para cingir a testa (Figura 8). A tradição guarani conta que a mulher foi gerada de um cesto, o que o torna uma espécie de artefato feminino e símbolo de feminilidade. Dessa forma, caso um homem guarani o transporte, o fará com auxílio de duas alças nos ombros, tal como uma mochila, mas não com a alça na testa.

Provavelmente devido à sua funcionalidade e à forma de ser transportado, o *adjaka ete* tem aspecto acinturado (*adjaka iku'atxo wa'e*), marcado no meio da altura. Além disso, as lâminas de taquara empregadas na sua confecção devem ser na cor natural, com desenhos em um tipo específico de cipó, como já se vê no cesto colhido por Egon Schaden (Figura 7).

Figura 7 – Cesto cargueiro guarani, coletor E. Schaden, SP, 1951 (40x35cm).

Fonte: Silva; Neve; Blasis (2004)

Figura 8 – Desenho de mulher carregando cesto.

Autor: Jonas Carvalho Tupã Kwaray.
Fonte: Lorenzoni (2010, p. 106)

Figura 9 – Cesto cargueiro guarani.

Fonte: Lorenzoni (2010, p. 107)

Os exemplares mais próximos das descrições do *adjaka ete* que encontrei foram confeccionados em 2009 por ocasião das gravações de um filme de produção indígena, juntamente com outros artefatos que a comunidade julgava remeter a sua identidade cultural. A Figura 9 ilustra um deles. Note-se que o cesto foi caracterizado pela cor natural das fibras trançadas, o desenho em preto e as alças para transporte. Os artesãos optaram por não confeccionar os cestos na forma acinturada, uma vez que a manufatura seria mais laboriosa injustificadamente já que não se destinava a práticas tradicionais.

Diferentes colaboradores guarani na pesquisa foram categóricos ao afirmar sobre os cestos cargueiros guarani: "Hoje o Guarani não usa mais". Por conta de fatores como o contato com a sociedade nacional, eles vêm sendo substituídos por recipientes industrializados e outros meios de transporte. Contudo, um estudo da cestaria guarani no Espírito Santo precisa considerar mais do que a existência ou não desses "cestos verdadeiros" nas aldeias do estado, analisando o que isso pode significar nesse espaço-tempo vivido pelos Guarani. De fato,

> As narrativas sobre o *adjaka ete* levam seus autores a tratar a história mítica da origem e trajetória do povo guarani, em elementos como a migração em busca da Terra sem Males, a vida social baseada na complementaridade do homem e da mulher, a relação com a terra e com o que ela lhes oferece, como o material para confeccionar cestos e os frutos para colher. A ausência desses cestos, relatada às vezes em tom melancólico, remete a uma falta, falta do material apropriado, da terra fecunda e produtiva, de uma organização econômica e social, etc., porém, também reporta à esperança de alcançá-los.
> No constante movimento do povo guarani, seu cesto verdadeiro vai se reapresentando em outros cestos por meio de aspectos diversos que comunicam, preservam e desenvolvem concepções guarani em relação à vida e ao mundo (Lorenzoni, 2010, p. 108).

Assim, ao concluir minha pesquisa no Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes), na área de Educação Matemática, os resultados me levaram a algo que extrapola os limites da academia, um sistema mais amplo que, em termos educacionais, visa a formar "um bom guarani", parafraseando Bartolomeu Meliá (1999) quando escreve sobre educação indígena.

Uma experiência semelhante é descrita no Quilombo São Domingos, Território de Sapê do Norte, em Conceição da Barra - Espírito Santo, por Bianca Blandino Florentino (2024). A autora, uma professora quilombola de matemática, investiga a cestaria de sua comunidade e apresenta um produto educacional com destaque para o que intitulou de "Mata + Mestre = Produção de cestaria Quilombola do Sapê do Norte" (Florentino; Lorenzoni; Silva, 2024, p. 46).

Falando do jacá[8], um "cesto grande de cipó, bojudo e achatado, feito com cipó jacaré ou timbó, que é grosso pra carregar peso" (Florentino; Lorenzoni; Silva, 2024, p. 29), o mestre artesão Lauro Blandino faz referência a saberes, técnicas e valores do seu povo:

> *Cuido da minha mata, que chamam de mata de Lauro, porque é o que sobrou… A mãe do cipó é a mais importante na mata, porque cuida dos filhos e tem que deixar ela pra eles ficarem fortes... Hoje, poucos se interessam em aprender a fazer jacás... Os jovens preferem telefone e carro. Eu monto no meu cavalo e viajo mais de 10 km pra pegar cipó quando não tenho na mata aqui do lado... Um jacá dura muito tempo se não ficar no sol e na chuva. Faço um jacá em um dia, mas leva dois dias pra completar um conjunto... Naquele tempo, o jacá valia muito dinheiro, era como nosso carro e carregava muita coisa... Hoje, as crianças não querem aprender, mas eu vou continuar fazendo até quando Deus me levar.*

Diante desses exemplos potentes de produção, organização e difusão de conhecimento de processos de organização, quantificação, descrição, formalização, combinação, relação etc., quem dá o nome de matemática? Um cesteiro não parece precisar dessa palavra... Como país colonizado, visando um autoconhecimento de nação, a escola precisa ter consciência da força desse nome, matemática, até para se apropriar dele no sentido de formar um bom cidadão, um bom brasileiro. A cestaria guarani é somente um exemplo de como distintos grupos sociais realizam seus processos de organização, quantificação, descrição, formalização, combinação, relação etc., indiferentemente a uma denominação de matemática. Conhecê-los é uma forma de aprofundar a experiência escolar com a natureza da matemática, com o que nomeamos de matemática, valorizando e utilizando conhecimentos construídos de forma ancestral sobre o mundo (físico, social, cultural), de modo a "entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva" (Brasil, 2018).

MATEMÁTICA E VIDA EM ATIVIDADES

Uma reflexão sobre "quem dá o nome" nos leva automaticamente a interrogar sobre os usos desse termo. Sigo nessa direção, relatando uma terceira experiência na perspectiva da etnomatemática, extraída de um livro recém-lançado, em 2024, com outro colega do GHMat, meu ex-orientando Lucas Mulinari Bongiovani. O livro *Etnomatemática e saberes indígenas na sala de aula: um jogo de tabuleiro dos Guarani Mbyá (Tambeopé) do Espírito Santo* (Bongiovani; Lorenzoni, 2024) é resultado de pesquisas de Iniciação Científica e Trabalho de Conclusão de Curso sobre um jogo com o qual o grupo teve contato em 2017. Os métodos de produção e análise de dados seguiram a linha que

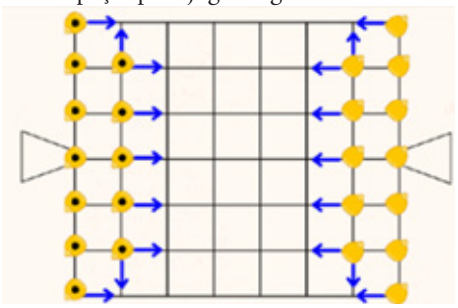
[8] Segundo o Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa, *Michaelis*, a etimologia do termo vem do tupi *aiaká*. Note-se que a pronúncia é a mesma do guarani *adjaka*.

nosso grupo vem priorizando, de trabalhos de cunho etnográfico com a comunidade, em diálogo com suas fontes e seus métodos.

O jogo em questão é um jogo de tabuleiro que simula a disputa entre gatos e ratos ou entre cachorros e gatos. Para jogar, dois participantes precisam de um tabuleiro dividido em grade, em que cada um deve dispor um mesmo número de peças (grãos ou pedras, por exemplo) sobre os pontos definidos pela grade em regiões opostas do tabuleiro, representando os territórios dos animais protagonistas do jogo.

O jogador avança para o território vizinho operando as peças com manobras semelhantes às do jogo de damas. E, de forma análoga, pode realizar capturas de peças do adversário, que ficarão armazenadas na sua respectiva "toca" – a região de formato afunilado, anexa à sua região-território (Figura 10). Uma diferença importante do jogo guarani para o de damas é que um jogador (gato com relação ao rato ou cachorro com relação ao gato) pode recuar com suas peças (andar para frente ou para trás) e o outro não.

Figura 10 – Exemplo de tabuleiro e quantidade de peças para jogo de gato e rato



Fonte: Bongiovani; Lorenzoni (2024, p. 54).

Figura 11 - Jogo representando a disputa do macaco contra jabutis

Fonte: Acervo da autora (2024).

A partida segue até que um jogador chegue com todas suas peças disponíveis no extremo oposto do tabuleiro ou até que algum deles tenha todas as peças capturadas. Independentemente do número de capturas realizado por cada jogador, vence quem chegar na porta da "toca" do adversário com o número maior de peças. Ou seja, o objetivo de cada participante no jogo é preservar o maior número de membros (peças) do seu grupo.

A história registra muitos jogos que simulam batalhas sobre tabuleiros. Um de origem provavelmente ameríndia, por exemplo, é o Jogo da Onça, também conhecido como Jogo da Onça e dos Cachorros, que aparece na Figura 11 em uma variação, representando a disputa do macaco contra os jabutis. Em todos eles, há um ensinamento dito por meu amigo Mauro Guarani Karai Arã: "Jogo é como na vida". Em ambos os jogos – do gato e rato guarani e o da onça – a estratégia de quem tem mais poder é procurar dispersar o grupo adversário, enquanto os mais fracos procuram se manter unidos, impedindo o adversário de avançar. No jogo, embora a ideia de vitória não esteja atrelada à ideia de juntar ou de acumular pontos (peças adversárias), realizam-se atividades caras para o que temos chamado de matemática, tais como comparar (jogadas), classificar (decisões), representar graficamente (trajetórias possíveis), relacionar (fatos ou observações), operar (as jogadas), deduzir e formalizar. Dessa análise, retomo as interrogações propostas ao longo do texto para completar um trio de reflexões possíveis para a escola: O que é matemática? Quem dá esse nome? Quem faz uso dela?

Para um aprofundamento no sentido de algumas respostas, a análise de Manuela Carneiro da Cunha sobre o uso do termo "cultura" é inspiradora. Em *Cultura com aspas* (2017), a autora enun-

cia categorias analíticas exportadas pelo Ocidente para suas colônias como "trabalho", "dinheiro", "higiene", que ela chama de "bens (ou males) exportados" (Cunha, 2017, p. 305). Os *cantes de ida y vuelta*, gênero da música flamenca, são apresentados como frutos do encontro interétnico da Espanha com suas colônias correspondentes às atuais Cuba, Colômbia e Argentina.

O papel do cristianismo africano na resistência contra potências coloniais é citado como exemplo de itinerários imprevistos da imposição do cristianismo em grande parte da África. Esboçado esse quadro, Cunha (2017, p. 305) argumenta que "Do mesmo modo, a 'cultura', uma vez introduzida no mundo todo, assumiu um novo papel como argumento político e serviu de 'arma para os fracos'". Disso, ela situa um problema para a pesquisa etnográfica que é investigar como tem se dado a apropriação da "cultura" por povos periféricos. Analogamente, penso que é importante refletir sobre os produtos dos encontros interculturais consequentes do ensino da matemática junto aos mais diferentes públicos onde há uma escola e onde a vida segue em meio atividades envolvendo os processos comparar, organizar, classificar, inferir, formalizar, deduzir etc. independentemente do título de matemática ou não.

PARA O BEM VIVER

Tomando-se como referência a atividade matemática relacionada a processos racionais de organização, quantificação, formalização, descrição, combinação etc., é possível argumentar que os relatos aqui apresentados possuem traços tanto de uma história de outras matemáticas, quanto de outras histórias da matemática. Uma e outra ainda precisam ser contadas em mais detalhes. De fato, a história trilhada pela matemática, a "nossa matemática", a matemática que nós, academia, nomeamos e usamos é:

> *uma* resposta à busca de transcendência, acumulada e transmitida ao longo de gerações, desde a pré-história. O mesmo se dá com as religiões, com as técnicas, com as artes e com as ciências, em geral. Em suma todos os fazeres e saberes são respostas do homem a informações recebidas da realidade, que é o complexo de tudo que é material, ampliado por experiências vividas e acumuladas, na forma de memórias. Essas respostas, em permanente transformação, são as estratégias desenvolvidas pela espécie para responder às pulsões de sobrevivência e de transcendência (D'Ambrosio, 2011, p. 22, grifo meu).

Dessa compreensão, é razoável imaginar que há outros sistemas de conhecimento que também dão conta da busca da sobrevivência e da transcendência humanas, inclusive em harmonia com os outros seres do cosmos, com o passado e com o futuro. Na educação escolar, as pesquisas em história da matemática, ou mesmo seu desenvolvimento com e nesse ambiente, tendem a fortalecer a reflexão sobre o que é matemática, quem dá esse nome, quem usa, no sentido de discutir a natureza e o papel nas sociedades do que tem sido chamado de matemática. Reflexão essa especialmente necessária pelos grupos socialmente minorizados.

Eu, como aprendiz nesta SBHMat há tantos anos, venho lembrar do seu compromisso na construção do bem viver, ao qual me referi no início deste texto. Entre contribuições do bem viver, Acosta (2016, p. 239) aponta para a construção de pontes entre conhecimentos ancestrais e modernos, assumindo o conhecimento como uma construção social. Ora, essas pontes não são o que se produz constantemente aqui, na comunidade de história da matemática? Então, prossigamos no exercício do bem viver!

Encerro lançando um desafio para a empreitada, motivado pela crítica de Ailton Krenak (2020, p. 113) a um modo dominante de pensamento, o daqueles que "acham que o trabalho é a razão da existência"; que "escravizaram tanto os outros que agora precisam escravizar a si mesmos". Nas palavras dele, esse "pensamento vazio" "não consegue conviver com a ideia de viver à toa no mundo". De fato, "Viver a experiência de fruir a vida de verdade deveria ser a maravilha da existência" (Krenak, 2020, p. 110).

Em alguns dicionários da língua portuguesa, encontramos o termo "toa", em contexto náutico, como "cabo para uma embarcação rebocar outra", presente no Dicionário Michaelis. Assim, o sentido figurado na expressão "viver à toa" pode ser simplesmente viver sem querer comandar o próprio percurso, como se encontra na obra *Minidicionário da Língua Portuguesa*, de Evanildo Bechara:

> **à toa (à to.a) [ô]** *loc. adv.* 1. Sem ter o que fazer, a esmo. "... Estava **à toa** na vida, o meu amor me chamou, pra ver a banda passar…" (Chico Buarque de Holanda, "A banda").

De fato, os recursos científicos e tecnológicos cada vez mais precisos de extrair dados do passado, interpretando no presente possibilidades para o futuro não tiram da vida a sua essência de imprevisibilidade para cada indivíduo e sua conexão com "todos os outros seres que habitam o planeta" (Krenak, 2020, p. 73). Que a matemática possa promover tais reflexões na escola.

REFERÊNCIAS

ACOSTA, Alberto. **O bem viver**: uma oportunidade para imaginar outros mundos. Tradução: Tadeu Breda. São Paulo: Autonomia Literária, Elefante, 2016. Disponível em: https://rosalux.org.br/wp-content/uploads/2017/06/Bemviver.pdf. Acesso em: 10 abr. 2025.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **O Nascimento da matemática**: a neurofisiologia e a pré-história da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Origens da matemática**: a pré-história da matemática – o neolítico e o alvorecer da história. Curitiba, PR: Progressiva, 2011.

BECHARA, Evanildo. **Minidicionário da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2009.

BISHOP, Alan J. **Enculturación matemática**: la educación matemática desde una perspectiva cultural. Barcelona: Paidós, 1999.

BONGIOVANI, Lucas Mulinari; LORENZONI, Claudia A. C. de Araujo. **Etnomatemática e saberes indígenas na sala de aula**: um jogo de tabuleiro dos Guarani Mbyá (Tambeopé) do Espírito Santo. Vitória, ES: Edifes, 2024. DOI: http://dx.doi.org/10.36524/9788582638729.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. https://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase. Acesso em: 10 abr. 2025.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Transdisciplinaridade e a proposta de uma nova universidade. **REMATEC**, Belém (PA), v. 17, n. 40, p. 1-19, jan./abr. 2022.

DOI: https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n40.p01-19.id507.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. 2. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Uma síntese sociocultural da história da matemática**. São Paulo: Proem Editora, 2011.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed., 3ª reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

Dicionário Michaelis. Disponível em: www.michaelis.uol.com.br. Acesso em: 25 maio 2025.

FLORENTINO, Bianca Blandino. **Tecendo cestaria no Quilombo São Domingos no Sapê do Norte do Espírito Santo: entrelaçando saberes, cultura e matemática.** 2024. 252 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2024. Disponível em: https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/6110. Acesso em: 23 maio 2025.

FLORENTINO, Bianca Blandino; LORENZONI; Claudia A. C. de Araujo; SILVA, Sandro José da. **Cestaria quilombola no Sapê do norte - Espírito Santo: histórias que contam matemática.** Vitória: Edifes Acadêmico, 2024. DOI: http://doi.org/10.36524/9788582639849.

KRENAK, Ailton. **A vida não é útil**. São Paulo: Companhia das Letras, 2020.

INSTITUTO BRASILEIRO DE MUSEUS (IBRAM). Cadastro Nacional de Museus. Disponível em: https://cadastro.museus.gov.br/. Acesso em: 22 maio 2025.

LORENZONI, Claudia A. C. de Araujo. **Cestaria Guarani do Espírito Santo numa Perspectiva Etnomatemática**. 2010. 269 f. Tese (Doutorado) - Programa de

Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal do

Espírito Santo, Vitória, 2010. Disponível em: https://sappg.ufes.br/tese_drupal//nometese_357_LORENZONI%20Claudia_tese%20%281%29.pdf. Acesso em: 10 abr. 2025.

LORENZONI, Claudia A. C. de Araujo; SAD, Ligia Arantes; SILVA, Circe Mary Silva da; RIBEIRO, Laira Lamburghini Brandão. Educação matemática e educação escolar tupinikim e guarani. *In*: ZOCOLOTTI, Alexandre Krüger (org.). **Relatos de experiências de professores de matemática**. Vitória, ES: Edifes, 2018. p. 41-64. Disponível em: https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/864.

LORENZONI, Claudia A. C. de Araujo; SAD, Ligia Arantes; MARCILINO, Ozirlei Teresa; SILVA, Circe Mary Silva da; KARAI ARÃ, Mauro Luiz Carvalho; YBYRATÃ, Valdemir de Almeida Silva. **Jogos, Brincadeiras e Experiências em Matemática com os Guarani e Tupinikim**: Nhewanga Guarani aegwi Tupinikim matematica regwa oetxauka : T'îanhemorasaraî Guarani tupinakyîa irūnamo: Mba'epapasaba kuapaba. Vitória, ES: Edifes, 2022. DOI: https://doi.org/10.36524/9788582636220.

MAGALHÃES, Dóris Reis. **Concepções, crenças e atitudes dos educadores tupinikim frente à matemática**. 2007. 237 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2007.

MELIÁ, Bartolomeu. **Educação indígena na escola**. Cadernos Cedes, ano XIX, n. 49, dez. 1999.

MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado**. Como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

PASCAL, Blaise (1623-1662). **Auteur du texte. Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière**. Par Monsieur Pascal. 1665. Disponível em: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262012/f4.item.texteImage. Acesso: 10 abr. 2025.

SECRETARIA DE CULTURA DE VITÓRIA (SEMEC). **Coleção Elmo Elton:** relatos sobre a história de bairros da cidade. Disponível em: https://vitoria.es.gov.br/semc/colecao-elmo-elton-relatos-sobre-a-historia-de-bairros-da-cidade. Acesso em: 22 maio 2025.

SHIJIE, ZHU. **Siyuan yujian** ("Precious Mirror of Four Elements"). 1303. Disponível em: www.britannica.com/biography/Zhu-Shijie#/media/1/116631/71483. Acesso em: 10 abr. 2025.

SILVA, Fabíola Andréa; NEVES, Eduardo Góes; BLASIS, Paulo Antonio Dantas de. **Brasil Tupi**: beleza, rigor e dignidade: a cultura material tupi no tempo e no espaço. São Paulo: Conjunto Cultural da Caixa, 2004. Disponível em: http://www.marajoara.com/files/catalogo.pdf. Acesso em: 25 abr. 2010.

SOUSA, Gabriel Soares de. **Tratado descritivo do Brasil em 1587**. Rio de Janeiro: Laemmert, 1851. Disponível em: https://fundar.org.br/publicacoes/biblioteca-basica-brasileira/tratado-descritivo-do-brasil-em-1587/. Acesso em: 10 abr. 2025.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

História da Matemática, Imagens e Inteligência Artificial na pesquisa e no ensino

History of Mathematics, images and artificial intelligence in research and teaching

Andréia Dalcin[1]
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

RESUMO

O texto sintetiza a palestra *História da Matemática, imagens e inteligência artificial na pesquisa e no ensino* proferida durante o XVI Seminário Nacional de História da Matemática, no dia 15 de abril de 2025, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense, na cidade de Pelotas. O objetivo da palestra foi apresentar algumas reflexões e provocações sobre a presença das imagens na sociedade contemporânea identificando potencialidades e limitações dos diferentes tipos de imagens, inclusive aquelas produzidas por Inteligência Artificial, enquanto fontes históricas a serem consideradas na produção de pesquisas em História da Matemática e História da Educação Matemática, bem como em atividades de ensino de Matemática nos diferentes níveis.

Palavras-chave: Imagens como fonte histórica; Matemática e Arte; Matemática e História; Inteligência Artificial e Educação Matemática.

ABSTRACT

The text summarizes the lecture *History of Mathematics, images, and artificial intelligence in research and education* given during the XVI National Seminar on the History of Mathematics, on April 15, 2025, at the Federal Institute of Education, Science and Technology of South Rio Grande do Sul, in the city of Pelotas. The objective of the lecture was to present some reflections and provocations regarding the presence of images in contemporary society, identifying the potentialities and limitations of different types of images, including those produced by Artificial Intelligence, as historical sources to be considered in the production of research in the History of Mathematics and History of Mathematics Education, as well as in mathematics teaching activities at different levels.

Keywords: Images as a historical source; Mathematics and Art; Mathematics and History; Artificial Intelligence and Mathematical Education.

[1] Doutora em Educação pela UNICAMP. Docente da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: deiadalcin@gmail.com.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Convivemos com imagens desde as primeiras pinturas rupestres do hominídeo pré-histórico; no entanto, na contemporaneidade, sua presença vem se intensificando, em parte devido aos avanços tecnológicos que possibilitaram o aumento de tipologias de imagens (pintura em tela, xilogravura, fotografia, imagens digitais...), em parte por se adequarem aos diferentes modos de vida da modernidade, que cada vez mais faz uso de imagens de si, dos outros e das coisas como meio de se fazer/estar presente no mundo real e virtual. As imagens estão presentes ao longo da história de diferentes modos e assumem diversas funções e papéis.

As imagens criam, representam, subvertem, idealizam, desmontam, constroem, potencializam, inventam, mentem, capturam, tecem realidades possíveis. As imagens, de certo modo, têm uma "vida própria", pois trazem no seu interior conflitos, ambiguidades, presenças e ausências que podem ou não ser percebidas pelo observador. As imagens nos provocam, convocam a pensar, possuem "um verdadeiro 'poder de ideação' (isto é, um potencial intrínseco de suscitar pensamentos e 'ideias') ao se associar a outras imagens" (Samain, 2012, p. 23).

No campo da História da Matemática e da História Educação Matemática, as imagens podem se constituir em documentos históricos. As fotografias, em especial, vêm participando como fonte da construção de narrativas históricas mais recentes. Chamo atenção, em Dalcin (2018), para a fotografia como fonte histórica.

> De fonte de segunda categoria, posição atribuída a imagem, dentre estas a fotografia, em seus primeiros anos de origem ainda no século XIX, a fotografia deixa de ser ilustração que reforça, reafirma o posto nos documentos escritos e passa a ser considerada como indício ampliando o espaço de atuação e funcionalidade nas Ciências Sociais, pois "funcionam como sinais de orientação, como linguagens" (Borges, 2005, p. 72), "registram atos de testemunho ocular" (Burke, 2004, p. 17) e constitui-se como "documento do imaginário social e não preponderantemente como documento da factualidade social" (Martins, 2008, p. 174). A fotografia passa a ser objeto de análise, deixa de ser uma cópia do real e passa a ser representação de uma realidade, cuja compreensão depende de informações que não estão nelas expressamente contidas, é tida como "uma representação do mundo que varia de acordo com os códigos culturais de quem a produz" (Borges, 2005, p. 80) e dos códigos culturais de quem a "consome" ou "recebe" (Dalcin, 2018, p. 21).

Assim como as fotografias, também as pinturas em tela, as ilustrações em livros didáticos, as xilogravuras em cordéis e mesmo as imagens produzidas por Inteligência Artificial podem constituir-se em documentos históricos à medida que suscitam discussões e revelam informações de natureza histórica, seja no campo da pesquisa ou do ensino de matemática, como veremos ao longo desse texto.

IMAGENS COMO DOCUMENTOS HISTÓRICOS

Em síntese, trago, nesse momento, quatro contribuições das imagens, enquanto documentos históricos, para os estudos no campo da História da Matemática e da História da Educação Matemática: imagens como legitimadoras de narrativas; imagens como fonte informações; imagens como estratégia de validação de modos de pensar; e imagens enquanto potencializadoras da visualização de práticas matemáticas e culturais. A casos em que uma mesma imagem pode adequar-se a mais de um tipo de contribuição, a depender do uso que se quer fazer da imagem.

Imagens como legitimadoras de narrativas

Alberto Manguel nos lembra "as narrativas existem no tempo, e as imagens no espaço" (Manguel, 2001, p. 24). As narrativas são transmitidas pela oralidade, pela literatura, por diferentes tipos de textos escritos, mas também pelas imagens. O uso de imagens para legitimar e dar longevidade para uma narrativa não é algo novo, pois o cristianismo faz uso dessa estratégia há séculos. Na semana da Páscoa, período em que tradicionalmente este evento de História da Matemática acontece, evidenciamos um exemplo muito contundente de imagens legitimadoras de narrativas: a Via sacra. Há mais de mil anos, em igrejas católicas de todo o Planeta, acontece o ritual da Via sacra ou Via-crúcis. A história da paixão e morte de Cristo é contada e recontada na sexta feira-santa em detalhes que são intensificados por meio das 14 cenas pintadas que constituem a Via sacra, fixadas ou pintadas nas paredes das igrejas. Essa sequência de imagens gera uma narrativa visual que registra os principais momentos da Via-crúcis, ou o caminho da cruz, que inicia no Pretório de Pôncio Pilatos e encerra no Monte Calvário, onde acontece a crucificação de Jesus Cristo. O Papa João Paulo II criou uma décima-quinta estação para recordar a ressurreição de Jesus, embora esta seja opcional e não entre na estrutura tradicional da Via sacra.

A Via sacra mais bela que já conheci está na Igreja de São Pelegrino, na cidade de Caxias do Sul, no Rio Grande do Sul, e foi pintada pelo italiano Aldo Locatelli (1915-1962 – o mesmo pintor cujas obras ornam a Catedral de Pelotas), ao longo da década de 1950. Ela é uma obra de arte que se destaca por suas cores, perspectivas e elementos anacrônicos, em que o pintor narra o drama da agonia e morte, "para tanto exclui tudo o que poderia atrapalhar e distrair o seu espectador desta sua escolha. Escolheu, entre os seus elementos plásticos do pintor, aqueles que conduzem e centram-se no rosto, na proximidade máxima possível do ser humano visto, e ou encaixado, nos ângulos retos urbanos" (Círio, 2010), a exemplo da Imagem da Figura 1.

Figura 1 – Cena Via Sacra de Aldo Locatelli – Igreja São Pelegrino

Fonte: https://profciriosimon.blogspot.com/2010/05/via-sacra-de-aldo-locatelli.html

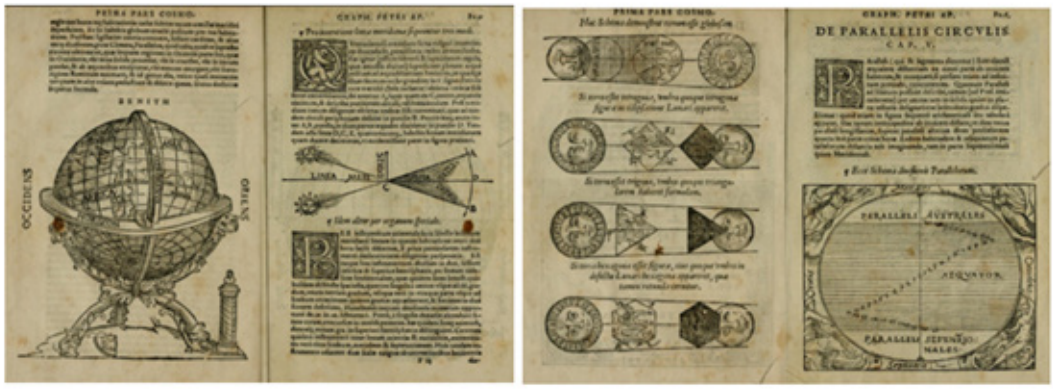
Pensar as narrativas visuais como documentos que possibilitam a análise de determinado ritual, crença, acontecimento e suas implicações históricas é algo que tem me instigado, enquanto pesqui-

sadora. Mais especificamente, tenho produzido argumentos que possam responder positivamente à questão: é possível produzir narrativas histórias que abordem temáticas do campo da História da Educação Matemática ou da História da Matemática a partir de sequências de imagens? Inspiro-me nas composições visuais de Aby Warburg (1866 - 1929) quando (re)constrói os painéis de seu *Atlas de imagens, Mnemosyne*. Warburg, segundo Samain (2012, p. 51), não somente buscava elaborar uma "história da arte sem palavras", mas desvendava, através de formas mais expressivas – patéticas e passionais – da história, o sentido profundo de nossa própria marcha humana.

Imagens como fontes de informações para estudos históricos

As imagens estão presentes em livros de Matemática e livros didáticos de Matemática. No entanto, usualmente são tratados como ilustrações, como elementos dispensáveis que podem ou não contribuir para a compreensão do que está sendo dito no texto. Nesse sentido, entendo que as imagens, principalmente em livros de matemática, incluindo os mais antigos que versam sobre matemática, a exemplo dos livros de cosmologias, são mais do que meras ilustrações: podem ser muitas coisas e, nesse momento, enfatizo que podem fornecer informações valiosas para o campo da História da Matemática, podem trazer no seu interior dados numéricos, elementos e representações geométricas e procedimentos de cálculos, dentre outros elementos. Como exemplo, trago algumas imagens (Figura2) da obra *Cosmographia Petri Apiani* – publicada pela primeira vez em Landshut, 1524 – que teve vinte e seis edições entre 1526 e 1609.

Figura 2 – Páginas de *Cosmographia Petri Apiani*



Fonte: https://archive.org/details/cosmographiaapia00apia/page/n97/mode/2up

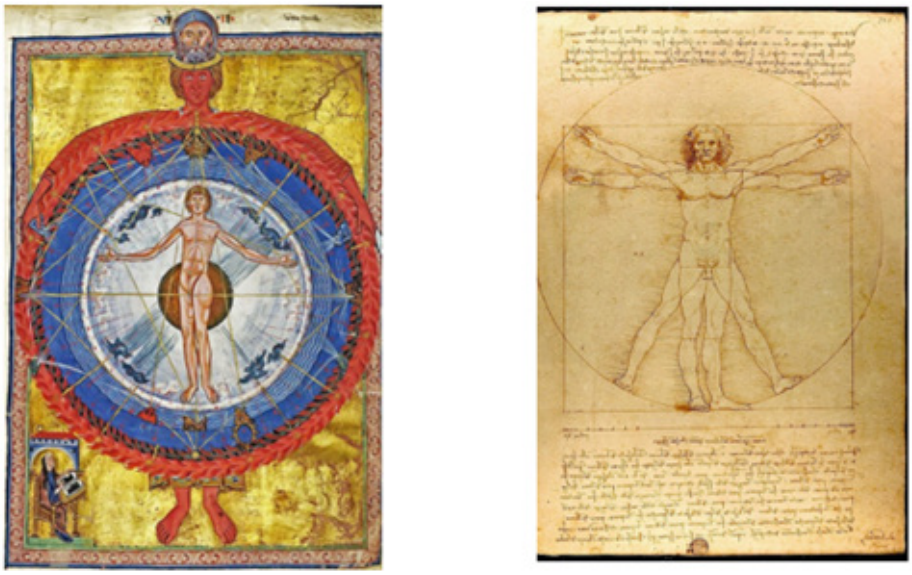
A obra apresenta várias imagens, muitas vezes ocupando a maior parte de uma página. As imagens trazem: representações das relações entre os planetas e as órbitas celestes; esquemas e desenhos que trazem informações sobre a Terra, necessárias para que fosse possível compreender as estações do ano; instrumentos de medição que eram pensados para as navegações, ou usados para a confecção de mapas. Tal obra é conhecida por um mapa *múndi* que representava a cosmovisão europeia da época, possibilitando identificar "*ciertas características de la cosmografía durante la modernidad temprana, ciencia que 'recurría a la antigüedad griega para encontrar su modelo, lo vinculaba al astrolabio, al globo del navegante y a la ingenua experiencia del narrador observador*'" (Hurtado, 2014, p. 107). Nessa perspectiva, as imagens estão impregnadas por uma série de informações que estão contidas na própria imagem ou diretamente relacionadas a ela, havendo um imbricamento entre texto, contexto e imagem. Para Hurtado (2014) os diferentes tipos de imagens da *Cosmographia Petri Apiani* "*cumplen, por un lado, una función didáctica visualizando un conocimiento técnico o científico y, por*

otra parte, dan luces de una posición ideológica al ilustrar el poder del hombre sobre su entorno" (2014, p. 114). As imagens do *Cosmographia Petri Apiani* são um exemplo do que Burke enfatiza "uma vantagem particular do testemunho de imagens é a de que elas comunicam rápida e claramente os detalhes de um processo complexo" (Burke, 2004, p. 101).

Imagens como estratégia de validação de modos de pensar

Ao longo da história, as imagens têm sido usadas como estratégia para a divulgação de ideias, modos de pensar e compreender a vida e as relações sociais. Têm sido pensadas e mobilizadas como uma estratégia eficaz de validação de cosmovisões. Exemplo disso é a quantidade de imagens de diferentes épocas que exploram o antropocentrismo. Trago duas imagens: *As Esferas Cósmicas e o Ser Humano*, também conhecida como "A Roda do Firmamento", localizada na obra *Liber Divinorum Operum* (1163 - 1174), pintada pela monja Hildegarda Bingen (1098 - 1179), e o famoso quadro *Homem Vitruviano*, pintado por Leonardo Da Vinci (1452 - 1519), em 1490.

Figura 3 – A Roda do Firmamento e o Homem Vitruviano



Fonte: *Liber Divinorum Operum* (1163-1174); Homem Vitruviano (1490)

Ambas as imagens, com séculos de diferença, contribuem para a validação de uma determinada cosmovisão que coloca o homem no processo de criação, fortalecendo o antropocentrismo (vocábulo híbrido de composição greco-latina, do grego: *antropos*, o homem; do latim: *centrum, centricum*, o centro) e a ideia de que "o homem é a medida de todas as coisas", cunhada pelo filósofo grego Protágoras de Abdera (c. 490 a.C. – c. 420 a.C.), um dos mais conhecidos sofistas da Grécia Antiga. Tal cosmovisão foi fortalecido pelo cristianismo ao longo de séculos e atualmente vem sendo problematizada devido às suas consequências, entre tantas, pelo modo como a humanidade tem provocado o esgotamento dos recursos naturais do Planeta, caminhando para a auto extinção.

As narrativas que acompanham as imagens direcionam a olhar sobre estas e garantem a sobrevivência de crenças, mitos, lendas e concepções do sagrado, de maneira tão ou mais eficaz do que os textos escritos (Dalcin, 2008), ou seja, elas intentam formar não apenas um "olhar correto", mas também um "pensar correto" pautado em uma determinada cosmovisão eurocêntrica.

Imagens enquanto potencializadoras da visualização de práticas matemáticas e culturais

Por meio de imagens é possível visualizar e imaginar ambientes, espaços e práticas situadas em determinado tempo. As imagens podem auxiliar no estudo da cultura escolar, pois nos provocam a pensar sobre outros tempos e práticas, sobre um passado não tão longínquo e que deixou marcas nas práticas escolares contemporâneas. Exemplo disso é o quadro da Figura 4, que representa uma cena de João Batista de La Salle (1651 - 1719) em sala de aula, que está no Museu do Vaticano, pintado por Cesare Mariani (1826 - 1901), a qual foi produzida por ocasião da beatificação de La Salle, em 19 de fevereiro de 1888, durante o papado de Leão XIII. A imagem revela elementos da cultura escolar da época de La Salle que, dentre outras coisas, legitima o ensino simultâneo.

Figura 4 – La Salle em sala de aula – Museu do Vaticano

Fonte: Dalcin; Brito (2015)

Tal pintura é analisada por Dalcin e Brito (2015) e, dentre outras coisas, é possível dizer que "o ângulo em que o quadro foi pintado coloca o observador como mais um aluno, sugerindo que devemos aprender com os ensinamentos de La Salle, ou seja, essa imagem não pretende apenas representar uma sala de aula lassalista, mas também, educar nosso olhar e nosso modo de pensar sobre aquele ensino" (Dalcin; Brito, 2015, p.244).

É possível termos indícios sobre o modo como os meninos ocupam os espaços da sala, percebermos o destaque para crucifixo, o estrado e a "cadeira do mestre", repararmos nas vestimentas, observarmos a postura de La Salle com o dedo em riste, identificarmos os cartazes para leitura e a

presença de um Irmão, membro da ordem dos Irmão das Escolas Cristãs, que observa e intervém quando solicitado. Tal imagem tem um caráter didático, pois deixa ver a dinâmica de uma sala de aula lassalista e pode servir como disparadora de discussões e estudos sobre o espaço da sala de aula e as relações entre professor, alunos e o processo de ensinar, sendo que algumas das práticas daquela época permanecem e constituem o que, no senso comum, se denomina de aula tradicional. Encontramos esse quadro em diferentes espaços das escolas lassalistas no tempo presente, como uma prática memorialística.

INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL E A PRODUÇÃO DE IMAGENS

Como bem lembra Roger Chartier (1998), as práticas de leitura mudam à medida que os suportes de leitura mudam. Os suportes mudam em consequências das tecnologias que vão sendo criadas e ressignificadas, uma vez que "a obra não é jamais a mesma quando inscrita em formas distintas, ela carrega a cada vez, um outro significado" (Chartier, 1998, p. 71). Passamos pelos textos manuscritos, impressos e chegamos à era digital. Cada nova tecnologia é acompanhada por reações de resistência, medo e insegurança. Com a chegada da Inteligência Artificial esse ciclo se repete, mas agora com novos nuances, perigos e desafios.

A Inteligência Artificial não é algo tão novo, ela já habitava a literatura de ficção e vem sendo desenvolvida desde a década de 1950 no meio científico. No entanto, até então, estava restrita a um grupo seleto de pessoas que tinham acesso a essa tecnologia. Gosto da definição de IA que Isaac Asimov apresenta em uma nota de rodapé no artigo *Reflexões sobre a Inteligência*, no livro *Antologias 2*, uma coletânea de ensaios escritos entre 1974 e 1989.

> Em computação, são agrupadas sob o termo "inteligência artificial" as pesquisas que tentam fazer com que as máquinas manipulem símbolos que representam conhecimentos ao invés de números. As regras de combinação desses símbolos substituem os métodos tradicionais de processamento numérico da informação (algoritmos). Assim, as máquinas podem ser levadas a simular comportamentos inteligentes, usando procedimentos semelhantes a uma pesquisa exploratória. Jogos que envolvem lógica foram os primeiros experimentos nesse terreno. É possível, por exemplo, incluir num programa as dezenas de bilhões de combinações que o jogo de xadrez pode apresentar. Por isso, a partir de uma posição qualquer, o computador deve ser capaz de examinar sequências de movimentos que ele nunca "viu" e fazer operações novas, não previstas. Trata-se, em todo o caso, apenas de uma mimetização do comportamento inteligente (Asimov, 1992, p. 1939).

Isaac Asimov desmistifica o poder da IA situando-a como uma máquina que imita o comportamento inteligente humano, mas não é humana e nem será. Recentemente, os avanços da IA generativa (IAG) "tem provocado um verdadeiro alarido cultural, que não é casual, dado o fato de que as suas aplicações, embora não passem de simulações, chegam muito perto, ou melhor, imitam convincentemente habilidades humanas" (Santaella; Kaufman, 2024, p. 38). Isso se deve ao fato de que nos últimos anos as IAG

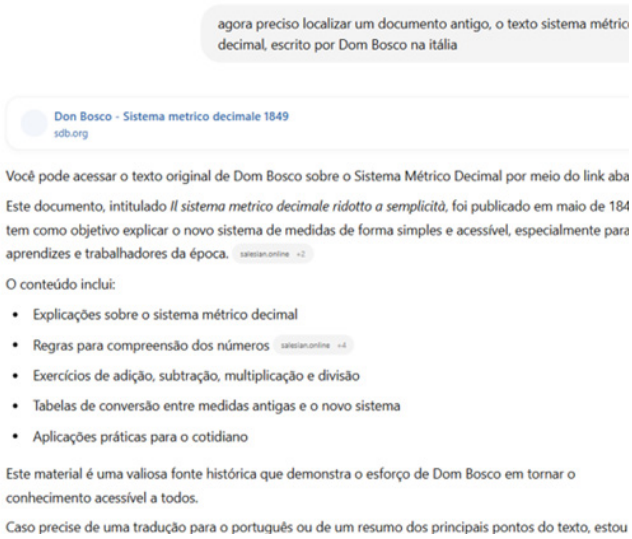
> podem ser concebidas como uma forma de aprendizagem automática, realizada a partir de algoritmos computacionais capazes de aprender a reconhecer padrões em grandes arquivos, por meio de sequências indutivas de tentativas e erros, a fim de fazer previsões sobre dados recém-fornecidos, imitando, de maneira simplificada e esquemática, as conexões entre os neurônios: daí a origem do nome "redes neurais artificiais" (Dondero, 2024, p. 1).

De fato, a IAG tem gerado polêmicas e perigos, dentre os quais evidenciamos vários deles nos últimos anos, oriundos do mal uso dessa tecnologia por parte dos humanos que as manipulam sem um debate ético mais robusto. É fundamental que se promovam debates sobre ética e se criem regramentos para o uso da IA, mas negar suas potencialidades ou refutar seu uso pode trazer resultados tão desastrosos e muito mais perigosos, aumentando entre outras coisas a desigualdade social e econômica entre as pessoas e os diferentes grupos sociais.

Tenho feito alguns ensaios com algumas Inteligências Artificiais Generativas (IAG), em especial com o ChatGPT, o BING e o GEMINI, com o intuito de compreender como as imagens estão sendo elaboradas e como seria possível fazer uso dessa tecnologia para o desenvolvimento de pesquisas em História da Educação Matemática e História da Matemática ou em contextos de ensino de matemática que envolvam elementos históricos. Trago aqui dois experimentos e algumas considerações iniciais, ambos realizados com o ChatGPT.

Iniciei a conversa com o ChatGPT situando quem sou e meus objetivos, enfatizando que sou pesquisadora e que investigo temáticas no campo da História da Educação Matemática e História da Matemática, e que gostaria de conhecer o potencial do ChatGPT para minhas pesquisas, ou seja, apresento informações que possibilitem a IAG identificar o tipo de linguagem e nível de aprofundamento das informações que busco. Em determinado momento da conversa, inseri o *prompt* "agora preciso localizar um documento antigo, o texto sistema métrico decimal, escrito por Dom Bosco na Itália", a que me foi devolvido:

Figura 5: Conversa com IA, parte 1



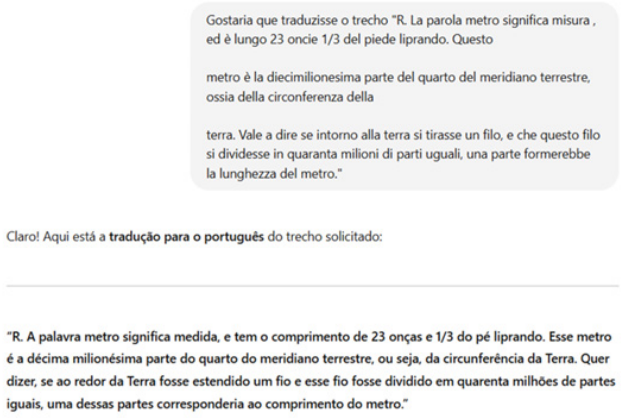
Fonte: Autora em diálogo com ChatGPT

A IAG apresentou o link oficial da Ordem Salesianos de Dom Bosco, um site italiano no qual é possível localizar o PDF do livro que buscava. O texto em questão não é de fácil localização, tive acesso a ele por meio de uma cópia impressa, doação do padre Mário Quilici, que atuava como arquivista no Liceu Coração de Jesus em São Paulo, em 2004, durante o Doutorado, e constituiu-se em um dos principais textos que analiso na Tese[2]. Além do acesso ao texto, me foi apresentada uma

[2] DALCIN, Andréia. Cotidiano e práticas salesianas no ensino de matemática entre 1885-1929 no Colégio Liceu Coração de Jesus de São Paulo: construindo uma história. 2008. 307f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação. UNICAMP, 2008.

síntese sobre o que pode ser encontrado nele. Considerando que se trata de um texto em italiano, escrito em 1849, ou seja, um italiano em dialeto, que eu já conhecia e traduzira, solicitei que a IA traduzisse para o português o trecho em que Dom Bosco definiu "metro", com o intuito de perceber como seria feita a tradução.

Figura 6: Conversa com IA, parte 1



Fonte: Autora em diálogo com ChatGPT

A tradução foi satisfatória, mantendo o sentido original e respeitando a gramática em língua portuguesa. A palavra pé – *liprando* – foi mantida, sendo essa uma das unidades de medida antigas. O termo pé – *liprando* – deriva do rei longobardo Liutprando (690-744) e a medida, que variava de região para região (44,6 cm em Milão, 51,37 em Piemonte), ainda era utilizada no norte da Itália (com o nome de pé de Piemonte) no início do século XIX (Borgi, 2011).

Por tratar-se de um livro que aborda o processo de conversão de um sistema local (campesino, da região de Turim, norte da Itália) para o Sistema Métrico Decimal, que passava a ser adotado oficialmente, solicitei que a IAG estabelecesse a conversão entre os sistemas no contexto de uma imagem.

Figura 7 – Imagem conversão medidas

Fonte: Autora em diálogo com ChatGPT

Embora a imagem seja relativamente simples, ela exibe detalhes atraentes como a tentativa de representar, pelo tom amarelado da cor e os detalhes da borda, a ideia de que seria um texto antigo, uma imagem que poderia ser oriunda de um livro da época. A opção da IA por fazer uso de uma tabela para a conversão também é algo interessante e, mesmo apresentando os dados em português, não optou por buscar algum tipo de tradução dos termos em italiano para as unidades de medida envolvidas. Em seguida, solicitei que produzisse uma nova imagem a partir do seguinte *prompt*: "poderia gerar uma imagem que pudesse auxiliar os italianos da época de Dom Bosco a compreender o que era o metro? Use a ideia de que 'se ao redor da Terra fosse estendido um fio e esse fio fosse dividido em quarenta milhões de partes iguais, uma dessas partes corresponderia ao comprimento do metro.'" E foi gerada a imagem da Figura 8.

Figura 8 – Imagem definição de metro para italianos

Fonte: Autora em diálogo com ChatGPT

A imagem foi gerada com cores sóbrias, o mapa é apresentado tendo a Itália com certa centralidade, mantendo-se a proporcionalidade em relação ao globo, a informação é objetiva, direta e em língua italiana. No entanto, como não localizei a palavra "milliomt" em italiano, parece ter sido essa uma invenção da IA, uma junção de *milioni* e metro, uma invenção da máquina. De certo modo, a IA opera com as informações dadas e se permite criar outras, sem que haja a possibilidade de conferência.

O que fica como reflexão a partir dessa experimentação é que a produção de imagens com IA pode ser uma opção interessante para a apresentação e organização de ideias e informações. A IA mostrou-se eficaz na localização de documentos, pois, com relativamente poucas informações e

opções de busca, localizou o texto em poucos segundos. No entanto é preciso ter cautela e conhecer sobre o que está sendo produzido, pois as informações podem não ser corretas ou ainda podem ser "inventadas" a partir dos modos como a IA relaciona as informações, as palavras e seus possíveis significados.

A segunda experimentação foi direcionada para a produção de imagens com a intenção de uso em contextos de ensino, em aulas de matemática. Inicialmente solicitei que o ChatGPT fizesse uma busca no google acadêmico sobre as principais temáticas que vêm sendo pesquisadas na Internet (últimos 5 anos) sobre História da Matemática, no Brasil e em Portugal, usando como fonte de busca dados reais do *Google Trends*, uma ferramenta que permite comparar a popularidade de termos de pesquisa ao longo do tempo e por região. A escolha por Portugal, além do Brasil, deve-se ao fato de eu saber que a palestra poderia vir a ser assistida por colegas pesquisadores de Portugal, e penso ser importante estabelecer alguns paralelos entre países que falem português. A IA retornou que, no Brasil, os tópicos em alta são: Teorema de Pitágoras, Matemáticos famosos e matemática no Egito Antigo; em Portugal: História da Matemática em Portugal, Matemática Grega e Contributos de matemáticos portugueses. A partir de tais informações, elaborei um *prompt* que provocasse a IA a gerar uma imagem que poderia ser utilizada em uma aula de matemática em uma turma de Educação Básica. O *prompt* foi: "Gere uma imagem realística no contexto egípcio com pessoas realizando medições usando o teorema de Pitágoras". Foi gerada a Imagem da Figura 9.

Figura 9 – Imagem egípcios e teorema de Pitágoras 1

Criado com a versão antiga da geração de imagens. Novas imagensem breve.

Aqui está uma imagem realística representando estudiosos egípcios aplicando o Teorema de Pitágoras para medições de terra. Eles utilizam cordas e bastões para formar triângulos retângulos, enquanto um escriba registra cálculos em um papiro. Se quiser ajustes ou mais detalhes, me avise!

Fonte: Autora em diálogo com ChatGPT

De imediato, chama atenção a presença de um avião, suscitando anacronismo, o que pode ter várias causas, dentre as quais o modo como a IA interpreta a ideia de imagem "realística". O *prompt* que elaborei não deixou claro que eu desejava uma imagem do Egito Antigo, no entanto toda a conversação anterior e o próprio tópico "teorema de Pitágoras", sendo aplicado em medições, induziria para a compreensão de que estaria se falando do passado. Para a IA, a palavra "realístico" estaria

associada ao tempo presente? Percebi que a imagem não trazia números. Então solicitei: "gostaria que números aparecessem nos lados e hipotenusa, respeitando o teorema de Pitágoras", e foi gerada a imagem da Figura 10.

Figura 10: Imagem egípcios e teorema de Pitágoras 2

Criado com a versão antiga da geração de imagens. Novas imagensem breve.

Agora a imagem inclui números nos lados e na hipotenusa dos triângulos, respeitando o Teorema de Pitágoras. Se precisar de mais ajustes ou detalhes, é só avisar!

Fonte: Autora em diálogo com ChatGPT

Na nova imagem, foram inseridos os números 3 e 4, mas os triângulos já não são mais retângulos e os números parecem estar distribuídos aleatoriamente. Ou seja, a IA não reconhece o que seria uma hipotenusa em uma imagem e, embora consiga realizar problemas que envolvem o teorema de Pitágoras a partir de enunciados, não consegue interpretar ou interagir com as imagens produzidas. Essa segunda imagem já não traz mais o avião.

Chamei a tenção para o fato de não haver mulheres representadas em ambas as imagens por meio do *prompt* "Por que nas imagens não aparecem mulheres?", e a resposta que recebi (Figura 11) foi politicamente correta!

Figura 11 – Egípcios e teorema de Pitágoras com mulheres

Essa é uma ótima observação! A ausência de mulheres nas imagens pode estar relacionada a vieses históricos e culturais sobre a representação do conhecimento matemático na antiguidade. Muitas representações artísticas, especialmente em contextos científicos e matemáticos, tendem a enfatizar figuras masculinas devido a narrativas históricas que privilegiaram os feitos de homens.

No entanto, há evidências de que as mulheres no Egito Antigo desempenharam papéis importantes na sociedade, inclusive na matemática e na administração. Escribas mulheres existiam, e há registros de mulheres envolvidas em atividades intelectuais e científicas.

Se quiser, posso gerar uma nova imagem que inclua mulheres participando ativamente das medições e cálculos. Isso ajudaria a trazer uma representação mais diversa e fiel à realidade histórica!

Criado com a versão antiga da geração de imagens. Novas imagensem breve.

Aqui está a nova imagem, agora incluindo tanto mulheres quanto homens egípcios envolvidos nas medições usando o Teorema de Pitágoras. Se precisar de mais ajustes, é só avisar!

Fonte: Autora em diálogo com ChatGPT

Nessa terceira imagem mulheres foram inseridas, porém os números desapareceram! No céu é possível ver pássaros e outros objetos não identificados. A cena permaneceu com sua estrutura básica, constituída pelo cenário de um deserto, cortado por um rio (provavelmente uma representação do Nilo), com pirâmides, um obelisco, um barco, algumas colunas, árvores e vegetações, inserções de escritas pictóricas que parecem remeter a escrita egípcia, cordas e construções de madeira que remetem a triângulos e arestas de pirâmides, pessoas brancas com vestimentas que parecem sinalizar para diferentes posições sociais, todas envolvidas com a prática da medição sem uma conexão entre o que e porquê estariam sendo medidos os objetos que compõem a cena. Um cenário de certo modo caótico, uma composição de diferentes cenas que não se articulam.

Foi solicitado também que a IA elaborasse uma atividade envolvendo Teorema de Pitágoras para estudantes do 9º ano, fazendo uso da segunda imagem produzida anteriormente, que deveria aparecer no corpo do texto do Plano de Aula. Isso não foi possível, pois a IA não consegue fazer a articulação entre o que ela mesma produz, problema que em pouco tempo, creio, será resolvido. A atividade elaborada pela IA está na Figura 12.

Figura 12 – Atividade sobre Teorema de Pitágoras

Atividade: Explorando o Teorema de Pitágoras no Egito Antigo

Objetivo: Aplicar o Teorema de Pitágoras em um contexto histórico, desenvolvendo habilidades matemáticas e interpretativas.

Material: Imagem representando egípcios realizando medições com triângulos retângulos.

Parte 1 – Observação e Contexto Histórico

1. Observe atentamente a imagem.

2. Descreva a cena e identifique quais elementos estão relacionados à matemática.

3. Por que os egípcios precisavam medir terrenos com precisão? Como o Teorema de Pitágoras pode ter sido útil para isso?

Parte 2 – Aplicação Matemática

1. Na imagem, um dos triângulos formados tem os lados 3 e 4 unidades de comprimento. Calcule a hipotenusa usando o Teorema de Pitágoras.

2. Se um triângulo maior tiver lados de 6 e 8 unidades, qual será o comprimento da hipotenusa?

3. Os egípcios usavam cordas com nós para formar ângulos retos. Como você poderia criar um triângulo retângulo usando uma corda com 12 nós?

Parte 3 – Reflexão e Discussão

1. O que essa atividade mostra sobre a relação entre matemática e a vida cotidiana na antiguidade?

2. Você consegue pensar em outras aplicações do Teorema de Pitágoras em nossa vida hoje?

3. Como você explicaria esse conceito a alguém que nunca estudou matemática?

Conclusão: Ao finalizar essa atividade, os alunos terão exercitado o Teorema de Pitágoras de forma contextualizada, compreendendo sua importância tanto na história quanto em aplicações práticas.

Fonte: Produção da autora com ChatGPT

Observa-se que a atividade foi organizada em três momentos e que as orientações são claras e diretas. Trata-se de um plano estruturado, amplo e genérico, que induz o estudante a buscar por outras fontes de modo a poder responder as questões que exploram o contexto. O enunciado "Na imagem, um dos triângulos formados tem os lados 3 e 4 unidades de comprimento. Calcule a hipotenusa usando o Teorema de Pitágoras." chama a atenção, uma vez que os números 3 e 4 não estão dispostos na imagem referenciada, de modo a representar um triângulo retângulo, o que reforça a percepção de que a IA não interage com a imagem produzida, mas com outros enunciados a que

tem acesso e seleciona informações mais usuais, a exemplo da terna 3, 4 e 5, muito presente nos textos introdutórios do Teorema de Pitágoras presentes em livros didáticos e sites de internet.

A sequência didática gerada apresenta atividades relativamente usuais, não insere desafios ou atividade originais, ou que não poderiam ser pensadas por professores com uma formação básica em matemática com conhecimentos mínimos sobre planejamento e didática. Ela gera atividades a partir de combinações que (re)produzem o que já existe em livros didáticos de matemática ou sites disponíveis na Internet. Ou seja, a máquina produz a partir dos exemplos que estão presentes nos bancos de dados que ela consulta. Nesse sentido, a falta de originalidade da máquina reflete a mesmice que identificamos no cotidiano das nossas aulas, o que nos provoca a pensar sobre a necessidade de buscarmos não os padrões, o que se mantém, o que permanece, mas o que se difere, o que é não é comum, talvez aí repouse uma ideia para ser explorada tanto no campo da IA como em contextos de formações de professores.

Por fim, a IA não apresentou/explorou informações de natureza histórica, mesmo ao trazer a questão "O que essa atividade mostra sobre a relação entre matemática e a vida cotidiana na antiguidade?" Não ofereceu elementos ou possibilidades de locais de busca para o estudante ampliar seu repertório e poder responder à questão para além de banalidades.

Com essa segunda experimentação, fica evidente que ainda há muito o que avançar em termos de geração de Imagens e, principalmente, no processo de análise das imagens geradas pela própria IA. A análise/leitura de imagens se mostra como algo complexo, pois envolve subjetividades e, também, um reportório já construído por aqueles que as analisam. Nesse sentido, IA e humanos precisam pensar/produzir/interagir sobre/com as imagens de forma mais analítica e menos passiva, receptiva. A grande maioria das pessoas consome imagens, alguns as produzem, principalmente com as câmeras de celular e agora com a IA, alguns poucos as produzem com propriedade (artistas, fotógrafos, designers, programadores...) e pouquíssimos efetivamente conseguem analisar imagens a partir de critérios técnicos, estéticos, culturais e éticos. Com a IA não parece ser muito diferente, até o momento. É preciso, de certo modo, que as pessoas sejam alfabetizadas para a leitura de imagens, percebam incoerências e inconsistências, operem eticamente com imagens, o que pode ser constituir como uma estratégia profícua de combate as Fake News imagéticas, que tanto tem impactado a vida das pessoas comuns.

ALGUNS APONTAMENTOS FINAIS

A partir do exposto ao longo da palestra e nesse texto gostaria de deixar algumas provocações. O tempo presente tem exigido cada vez mais da humanidade um repensar sobre seus passos, sobre as escolhas feitas no passado e suas implicações no tempo presente, tensionando posturas éticas e revisitando modos de pensar sobre como nos relacionamos com o ambiente natural e fazemos uso das tecnologias. A IAG é uma realidade, não é possível retroceder, mas é preciso refletir sobre seus limites, usos, impactos e regramentos. Entendo que precisamos aprender com a IA, que aprende conosco a cada busca que fazemos na internet e escolha do que pretendemos ver, ouvir, seguir, compartilhar. Nesse sentido, nossas escolhas não podem ser aleatórias, assim como não é possível não participar das discussões que emergem nesse momento histórico.

As imagens, enquanto testemunhas oculares, são polissêmicas e exigem uma leitura complexa, que pode apresentar diversas armadilhas, dentre as quais a crença equivocada de que as imagens estão isentas de intencionalidades ou que são evidências da realidade, de uma verdade, seja qual

for. As imagens, enquanto documentos, como já dizia o historiador Carlos Ginzburg (1989) em seu paradigma indiciário, precisam ser lidas em suas entrelinhas, buscando por indícios e pistas, por permanências e ausências que possam auxiliar o pesquisador em História da Matemática e da Educação Matemática a construir sua interpretação do passado.

REFERÊNCIAS

ASIMOV, Isaac. **Antologia 2**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1992.

BORGI, Elena. L'italia unita dalla stessa unità di misura: I libri e il sistema metrico. Accademie & biblioteche d'Italia: trimestrale di cultura delle biblioteche e delle istituzioni culturali: nuova serie, VI, 1/4, 2011, p. 60-61, 2011.

BURKE, Peter. **Testemunha Ocular**: História e Imagem. Bauru: Edusc, 2004.

CHARTIER, Roger. **A aventura do livro**: do leitor ao navegador: conversações com Jean Lebrun. São Paulo: UNESP, 1999.

CIRIO, Simon. VIA SACRA de ALDO LOCATELLI. 2010. Disponível em: https://profciriosimon.blogspot.com/2010/05/via-sacra-de-aldo-locatelli.html.

DALCIN, Andréia. FOTOGRAFIA, HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: Apontamentos para pesquisas sobre a cultura escolar. **Revista de História da Educação Matemática**, [S. l.], v. 4, n. 1, 2018. Disponível em: https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/195. Acesso em: 26 jun. 2025.

DALCIN, Andréia. **Cotidiano e práticas salesianas no ensino de matemática entre 1885-1929 no Colégio Liceu Coração de Jesus de São Paulo**: construindo uma história.. 2008. 307f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação. UNICAMP, 2008.

DALCIN, Andreia; BRITO, Arlete de Jesus. O exercício do olhar como possibilidade para interpretar práticas escolares do passado. **Alexandria**, [s. l.], v.8, n.2, p.233-247, 2015. DOI: https://doi.org/10.5007/1982-5153.2015v8n2p233

DONDERO, Maria. Gulia. Inteligência artificial e enunciação: análise de grandes coleções de imagens e geração automática via Midjourney. Tradução, revisão e notas Gustavo H. R. de Castro e Matheus Nogueira Schwartzmann. **Todas as Letras – Revista de Língua e Literatura**, São Paulo, v. 26, n. 2, p. 1-24, maio/ago. 2024. DOI: https://doi.org/10.5935/1980-6914/eLETTR17164.

GINZBURG, Carlo. "Sinais: Raízes de um paradigma indiciário". In: **Mitos emblemas sinais. Morfologia e história**. Tradução Federico Carotti. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

MANGUEL, Alberto. **Lendo imagens**: uma história de amor e ódio. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.

SAMAIN, Etienne. **Como pensam as imagens**. Campinas: Editora Unicamp, 2012.

SANTAELLA, Lucia; KAUFMAN, Dora. A Inteligência artificial generativa como quarta ferida narcísica do humano. **MATRIZes**, São Paulo, Brasil, v. 18, n. 1, p. 37–53, 2024. DOI: 10.11606/issn.1982-8160.v18i1p37-53.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Arquimedes: matemática na poesia, nos brinquedos e no infinito

Archimedes: mathematics in poetry, puzzles and infinity

Henrique Marins de Carvalho[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP

RESUMO

Este artigo propõe uma leitura de três obras atribuídas a Arquimedes — Stomákhion, Problema Bovino e O Contador de Areia — a partir da estética matemática helenística descrita por Reviel Netz, verificando em que medida os textos matemáticos desse período compartilham características estilísticas com a literatura alexandrina, como a surpresa narrativa, a estrutura em mosaico e um certo tom lúdico. Por meio de análise textual e estilística das obras selecionadas, busca-se identificar marcas dessa estética, interpretando a matemática de Arquimedes como uma forma de expressão erudita, engenhosa e culturalmente situada. O estudo destaca como esses textos operam não apenas como demonstrações rigorosas, mas também como performances intelectuais que mobilizam jogos retóricos e prazeres intelectuais, contribuindo para uma compreensão mais ampla da matemática antiga como prática estética.

Palavras-chave: Arquimedes; estética alexandrina; matemática grega; ludicidade.

ABSTRACT

This article proposes a reading of three works attributed to Archimedes — Stomachion, The Cattle Problem, and The Sand Reckoner — through the lens of the Hellenistic mathematical aesthetic described by Reviel Netz in Ludic Proof: Greek Mathematics and the Alexandrian Aesthetic. According to Netz, the mathematical texts of this period share stylistic features with Alexandrian literature, such as narrative surprise, mosaic structure, and a certain ludic tone. Through textual and stylistic analysis of the selected works, the article aims to identify traces of this aesthetic, interpreting Archimedes' mathematics as a form of erudite, ingenious, and culturally embedded expression. The study emphasizes how these texts function not only as rigorous demonstrations but also as intellectual performances that deploy rhetorical play and cognitive pleasure, contributing to a broader understanding of ancient mathematics as an aesthetic practice.

Keywords: Archimedes; Alexandrian aesthetic; Greek mathematics; ludicity.

[1] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP). Professor no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - Campus São Paulo (IFSP), São Paulo, Brasil. E-mail: hmarins@ifsp.edu.br.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Arquimedes de Siracusa é um nome que praticamente dispensa apresentações para quem estuda a História das matemáticas e ciências, especialmente aquelas desenvolvidas no intervalo temporal que se convencionou chamar de Grécia Antiga. No entanto, talvez algumas informações cronológicas e geográficas mais precisas possam auxiliar a compreender melhor sua produção matemática.

Os períodos convencionados na maior parte da literatura da área para demarcar características linguísticas, políticas e sociais da Grécia Antiga são a Era do ferro (ou era homérica), de 1000–800 A.E.C; o período arcaico, de 800–490 A.E.C; o período clássico, de 490–323 A.E.C; o período helenístico (323–146 A.E.C), e o período da Grécia romana, de 146 A.E.C–324 E.C. Interessam, no presente estudo, o período clássico e o helenístico, com destaque para este último, já que são registradas as possíveis datas de nascimento e morte de Arquimedes em 287 A.E.C. e 212 A.E.C., respectivamente.

Sua cidade natal, Siracusa (Συράκουσαι, em grego ou *Saraùsa*, em siciliano), localiza-se na costa oriental da ilha da Sicília. Distante cerca de 750 km de Atenas, desenvolveu-se, desde sua fundação, por colonizadores coríntios por volta de 730 A.E.C., chegando a tornar-se uma referência com impacto em questões econômicas, culturais e comerciais da região.

Figura 1 – Mapa, indicando a localização de Siracusa, Atenas e outras cidades.

Fonte: Regaliorum (2014).

Como uma curiosidade a respeito do nome da cidade, duas hipóteses são apresentadas: o verbete *Syracuse* no Online Etymology Dictionary diz que é "um nome rastreável até o século VIII A.E.C., de uma palavra pré-helênica, talvez a palavra fenícia *serah* que quer dizer "sentir-se doente" referindo-se à sua localização próxima a um pântano" (Harper, 2025 - tradução livre); por outro lado, o diplomata francês Victor Bérard, escrevendo no início do século XX, diz que a origem seria identificada na palavra, também de origem fenícia, *Sour-ha-Koussi*, que significa *pedra das gaivotas* (Bérard, 1903).

Seja a partir de um pântano ou de um local de pouso de gaivotas, cerca de três séculos depois, Siracusa já se apresentava como uma das cidades mais populosas da região mediterrânea, como afirmam Morris e Scheidel:

> A principal rival de Atenas do século V em termos de população era Siracusa. Tucídides diz que Siracusa não era menor do que Atenas em 413 e que suas muralhas do século V cercavam 120 hectares. No entanto, já na década de 470, os assentamentos se espalharam para além das muralhas, e a população da cidade provavelmente tinha o mesmo tamanho que a de Atenas. A população do território de Siracusa provavelmente era de cerca de 250.000 habitantes em 415, uma densidade de 53-75/km^2 - apenas um terço ou metade da densidade da Ática, mas ainda alta para os padrões pré-industriais. [...] Os siracusanos podem ter constituído cerca de 4% de todos os gregos durante os séculos V e IV, e os gregos sicilianos, como um todo, cerca de 10% no século V e um pouco menos no século IV (Morris; Scheidel, 2009, p. 115 - tradução livre).

Esta concentração populacional foi fruto de dinâmicas sociais iniciadas no período clássico que chegaram até o início do período helenístico. No início do século V A.E.C, o poder estava nas mãos de uma aristocracia cujo poder ficou personalizado na figura de Gélon (Γέλων), tirano que promoveu uma ampla reorganização urbana e cultural, fortalecendo a cidade e ampliando sua influência, sobretudo após a vitória contra os cartagineses.

Com sua morte, o governo passou a seu irmão Hierão, cuja corte foi celebrada por poetas e intelectuais, tais como Píndaro, que a ele se refere como aquele "que detém o cetro da justiça na fecunda Sicília, colhendo os píncaros de todos os êxitos e gloria-se também na fina flor da música, com que nós, varões, folgamos amiúde em sua mesa amiga." (Píndaro, Olímpica 1, 12-17 - tradução de Romero, 2013). Após sua sucessão, uma breve experiência democrática foi instaurada sob o comando de Trasíbulo, mas logo Siracusa voltou a enfrentar conflitos internos e guerras externas, como a invasão ateniense durante a Guerra do Peloponeso.

No século IV A.E.C., Dionísio, o Velho, ascendeu como novo tirano, consolidando um poder centralizado e militarizado, expandindo o território e fortificando a cidade, ao mesmo tempo em que cultivava uma imagem de patrono das artes. Seu governo, embora autoritário, trouxe estabilidade e crescimento.

Após sua morte, seu filho, Dionísio, o Jovem, assumiu, enfrentando forte oposição que levou a sua deposição por Dion. As disputas entre facções e a instabilidade se intensificaram até a chegada de Timoleão, de Corinto, que restaurou brevemente um regime democrático, além de ter derrotado nova ameaça cartaginense. Contudo, após sua morte, novas disputas levaram à ascensão de Agátocles, que retomou o modelo tirânico e manteve a tradição expansionista, chegando a levar a guerra ao solo africano, com vitórias temporárias.

A morte de Agátocles trouxe novamente um período de fragilidade, com os cartagineses tentando influenciar os rumos políticos da cidade. Foi nesse contexto de sucessivas instabilidades que Hierão II assumiu o poder em 275 A.E.C., iniciando um longo período de paz e prosperidade, marcando uma nova fase da cidade já no início do período helenístico. E foi justamente nessa fase, sob o governo de Hierão II, que Arquimedes viveu a grande parte de seus quase setenta anos de existência. Sua morte, narrada por Plutarco, deu-se já sob o governo de Hierônimo, neto de Hierão II, que assumiu muito jovem e teve uma permanência breve no poder, considerando o cerco dos

romanos, sob o comando do cônsul Marcus Claudius Marcellus, em 214 A.E.C., que levou Siracusa à derrota final dois anos depois.

O que e com quem Arquimedes estudou?

Repetindo uma observação feita na Introdução, Arquimedes é amplamente reconhecido como uma das maiores figuras científicas da Antiguidade, cujas contribuições à matemática influenciaram obras da Idade Média e do Renascimento europeu, chegando até os fundamentos do pensamento científico contemporâneo. No entanto, embora seu nome seja amplamente conhecido, as informações confiáveis sobre sua vida são escassas e, muitas vezes, envoltas em tradições lendárias e anedotas. A maioria dos relatos provém de fontes posteriores, como Plutarco, Cícero e Vitruvius, além de biógrafos árabes e bizantinos, o que torna a reconstrução de sua biografia um desafio histórico considerável (Dijksterhuis, 1987, p. 9).

Neste estudo, dois aspectos da biografia do siracusano — na medida do que for possível reconstruí-la, interessam sobremaneira: o que e com quem ele estudou? Essas informações podem permitir a análise, sob a ótica das teses do historiador Reviel Netz, do estilo de escrita praticado não só por Arquimedes, como por uma comunidade dedicada ao estudo das matemáticas.

Segundo a tradição mais aceita, Arquimedes foi filho de Fídias, um astrônomo com relacionamento com o governante Hierão II, o que sugere que pertencia a uma família de certo prestígio, com uma educação científica desde a infância (Netz, 2017).

Em algum momento de sua vida, Arquimedes teria estudado em Alexandria, então o centro intelectual do mundo helenístico. Lá, teria estabelecido relações com figuras como Eratóstenes de Cirene e Dositeus de Pelúsio, a quem dedicaria algumas de suas obras mais importantes. Assim, é provável que tenha se beneficiado da tradição geométrica euclidiana preservada no Museu de Alexandria (Dijksterhuis, 1987, p. 11-12).

Apesar de suas notáveis invenções mecânicas — como parafusos hidráulicos, polias e dispositivos bélicos — Arquimedes via tais realizações como subalternas em relação à matemática pura. Conforme relata Plutarco, ele não deixou escritos sobre suas engenharias, pois as considerava atividades indignas do verdadeiro filósofo (Netz, 2017). No entanto, as anedotas sobre Arquimedes acabam por revelar que, dada sua compreensão da mecânica, não podia esquivar-se de descrever os fenômenos físicos que observava empregando seus conhecimentos matemáticos (Dijksterhuis, 1987, p. 14-17).

Dos textos que foram preservados de sua obra, vários têm uma característica epistolar, com dedicatórias para Eratóstenes e Dositheus, citados anteriormente e a Gélon II, filho de Hierão II, de Siracusa. Isso sugere a existência de uma rede de divulgação das produções intelectuais de pessoas com interesse nas matemáticas, permitindo a proposição de desafios ou a comunicação de soluções obtidas.

REFERENCIAL TEÓRICO

Como principal fonte para tecer as considerações deste trabalho foi adotada a obra *Ludic Proof: Greek Mathematics and the Alexandrian Aesthetic*, do pesquisador e historiador da matemática Reviel Netz, da Universidade de Stanford, publicada em 2009. Tomando as palavras do próprio autor para

indicar seu objetivo com esta obra que completa uma trilogia, iniciada com *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, de 1999, passando por *The Transformation of Mathematics in the Early Mediterranean*, de 2004, sua principal preocupação neste livro é com o estilo da escrita matemática, entendido em termos culturais e estéticos, especialmente em diálogo com a poesia helenística:

> A matemática grega — sempre baseada em mecanismos de diagramas com letras e em uma linguagem repleta de fórmulas — alcançou seus feitos mais notáveis no período helenístico, onde foi caracterizada por um certo estilo 'lúdico', comparável ao da literatura contemporânea (Netz, 2009, p. x).

O autor argumenta que os textos matemáticos helenísticos possuíam uma estética própria, marcada por elementos que identifica como *narrativa surpreendente*, *estrutura em mosaico* e um certo tom *lúdico*, o que reflete uma sensibilidade compartilhada com a literatura da época, especialmente a poesia alexandrina. Ele propõe que entender esse estilo não é apenas uma questão de forma, mas torna-se essencial para compreender como esses textos funcionavam culturalmente e por que eram prazerosos tanto para as pessoas que os produziam como para quem os lia.

Para Netz, a matemática helenística, especialmente a de Arquimedes, emprega uma forma de narrativa que provoca *surpresa* intelectual. Isso ocorre quando a solução de um problema ou a demonstração de um teorema desafia as expectativas do leitor, conduzindo-o por caminhos inesperados. A estrutura da prova é construída de modo a preservar o suspense, criando reviravoltas ou momentos de revelação que geram prazer cognitivo. Assim como na literatura alexandrina, o deleite do leitor não está apenas no conteúdo, mas na maneira como o conteúdo é revelado.

Esse uso da surpresa implica um jogo com o leitor: a matemática é apresentada não como algo linear e previsível, mas como algo que pode intrigar e, por fim, deslumbrar.

A ideia de *estrutura em mosaico* refere-se à maneira como os textos matemáticos helenísticos são organizados em unidades ou blocos relativamente independentes, que se justapõem como peças de um quebra-cabeça. Em vez de um discurso fluido e contínuo, as provas são compostas por segmentos que podem parecer inicialmente desconectados, mas que, ao final, revelam uma coerência e harmonia surpreendentes.

Netz argumenta que essa forma de construção espelha características da estética helenística mais ampla, como a poesia de Calímaco, na qual a erudição e a fragmentação são valorizadas. No contexto matemático, essa abordagem permite que o autor esconda ou revele intenções ao longo do texto, encorajando o leitor a reconstruir o raciocínio como quem monta um mosaico.

O *tom lúdico* é talvez o traço mais distintivo da estética defendida por Netz. Ele não se refere ao jogo no sentido de trivialidade, mas ao prazer intelectual refinado que os textos oferecem ao envolver o leitor em desafios formais, engenhosidade e ironia matemática. Os autores, como Arquimedes, não escrevem apenas para demonstrar teoremas, mas também para entreter mentes cultas, criando um espaço onde a matemática se torna jogo de inteligência — um jogo sério, mas ainda assim, um jogo.

Esse tom se manifesta em estratégias como apresentar um problema aparentemente simples que se revela extremamente sofisticado, ou propor desafios que exigem raciocínio criativo e não apenas domínio técnico.

Netz esclarece, ainda, que o termo *lúdico* não implica que a matemática fosse uma brincadeira, mas que havia uma sofisticação estilística semelhante à da arte literária. Também destaca que, ao analisar a estética dos textos científicos, busca-se compreender como práticas culturais específicas moldam até mesmo campos considerados universais, como a matemática.

Nesta proposta de Netz, se considerarmos que matemática não era tratada apenas como uma prática racional, mas também como uma arte narrativa, os textos matemáticos funcionavam como performances intelectuais que precisavam combinar surpresa, estrutura engenhosa e ludicidade, assemelhando a matemática com a estética do mundo alexandrino.

A respeito dessa *estética alexandrina*, Netz a identifica como um conjunto de estratégias estilísticas e culturais presentes especialmente na literatura, tendo como principais características a *erudição refinada*, *surpresa intelectual*, *fragmentação*, *engenhosidade*, *distanciamento emocional* e *universalismo*.

A *erudição* se faz notar na valorização do conhecimento técnico e especializado, muitas vezes apresentado de forma indireta ou codificada, exigindo do leitor uma formação sofisticada para compreender o texto.

A *surpresa intelectual* emerge de textos construídos com estruturas narrativas que levam o leitor a uma conclusão inesperada, gerando prazer pela descoberta e pelo contraste entre simplicidade aparente e complexidade real.

A *fragmentação* ou *estrutura em mosaico* observa-se pela organização do texto em blocos autônomos, com uma lógica composicional que exige que o leitor reconstrua a totalidade. Isso favorece uma leitura ativa e interpretativa, semelhante à montagem de um quebra-cabeça. Isso leva também à valorização do tom lúdico e da *engenhosidade*, não só de quem escreve, mas de quem lê o texto. O jogo com o leitor é essencial: os autores mostram sua habilidade por meio de desafios criativos e demonstrações engenhosas, encantando enquanto instruem.

Percebe-se também um *distanciamento emocional*, pois a estética alexandrina valoriza o controle, a sobriedade e o rigor formal — seja na poesia ou na matemática. Não há sentimentalismo, mas sim precisão e sutileza, e o *universalismo* ou *cosmopolitismo intelectual*, característica desenvolvida em Alexandria, cidade que havia se tornado capital multicultural do saber helenístico, um ambiente em que os saberes que hoje distinguimos como ciência, arte ou filosofia conviviam e dialogavam.

Netz constrói o conceito de estética alexandrina examinando principalmente as obras de poesia, como as de Calímaco, que são modelos por excelência da literatura alexandrina: erudita, fragmentada, com estrutura refinada e tom intelectual. Para reforçar sua argumentação, vale-se de trabalhos da crítica literária, como as de Richard Hunter, Susan Stephens e Glenn Most, que analisam o papel da surpresa e da erudição na poesia do período.

Encontra-se apoio também nas contribuições da história da matemática e da ciência, especialmente sobre o estilo das demonstrações e a materialidade da escrita científica (como nos diagramas e formulações de Euclides e Arquimedes) e na filologia clássica e teoria narrativa, aplicando aos textos matemáticos categorias normalmente usadas na crítica literária, como estrutura, tom, narrador implícito e estilo e propondo que os textos matemáticos devem ser lidos também como performances culturais.

METODOLOGIA

Esta pesquisa adota uma abordagem qualitativa e exploratória, com base em procedimentos de análise bibliográfica e documental. O objetivo é examinar três obras atribuídas a Arquimedes — Stomákhion, Problema Bovino e Arenário — a partir do referencial teórico desenvolvido por Reviel Netz na obra já mencionada *Ludic Proof: Greek Mathematics and the Alexandrian Aesthetic* propondo que, no período helenístico, as pessoas que escreviam textos matemáticos adotaram um estilo estético e intelectual lúdico, comparável ao da literatura alexandrina, caracterizado pelo uso de dispositivos retóricos, engenhosidade formal e prazer intelectual na execução de cálculos complexos.

O *corpus* principal da pesquisa é composto de traduções comentadas e edições críticas das obras mencionadas. Para o *Stomákhion*, será utilizada a tradução com introdução e notas elaborada por Carvalho et al. (2021). O *Problema Bovino* será analisado a partir do artigo de Carvalho e Oliveira (2023). Já a obra *Arenário* (ou Contador de Areia) será estudada com base na tradução de Marques e Cataneo (2023). Para o conjunto da obra arquimediana, são tomadas como referências Dijksterhuis (1987), Heiberg (2013) e Netz (2017).

A análise será conduzida por meio de uma leitura comparativa dos textos, focando na forma de apresentação dos problemas, nas estratégias argumentativas, nos elementos de engenhosidade ou humor e na presença de jogos intelectuais ou artifícios retóricos — aspectos centrais do estilo lúdico descrito por Netz. Esses elementos serão interpretados como expressões culturais que articulam matemática, estética e retórica no contexto helenístico.

Em seguida, analisam-se as três obras, observando diferenças e semelhanças quanto ao grau de formalização matemática, à intencionalidade estética ou recreativa e à estrutura dos raciocínios propostos. A comparação buscará verificar em que medida cada obra pode ser compreendida como exemplo de uma "prova lúdica" no sentido proposto por Netz.

Por fim, a leitura crítica será complementada por uma contextualização histórica, considerando o ambiente intelectual do período helenístico, especialmente a influência da Escola de Alexandria. A pesquisa visa, assim, contribuir para uma interpretação ampliada das obras de Arquimedes, reconhecendo seu valor não apenas técnico, mas também como manifestações de uma cultura matemática sofisticada e artisticamente engajada.

O STOMÁKHION

O Stomákhion é uma das obras mais enigmáticas e fascinantes de Arquimedes. O título (Στομάχιον) remete a um jogo ou quebra-cabeça geométrico, sendo assemelhado ao Tangram. A versão fragmentária redescoberta no Palimpsesto de Arquimedes[2] revelou um conteúdo matemático substancial, que mostra a preocupação do autor com a contagem combinatória das possíveis disposições das peças.

O texto propõe uma análise matemática de um conjunto de 14 peças geométricas (figura 2) que, em conjunto, formam um quadrado. A proposta de Arquimedes parece ter sido a de calcular o número de maneiras possíveis de reorganizar essas peças de modo que ainda formem o mesmo quadrado. O problema não é apresentado com um enunciado formal como nos tratados clássicos

[2] Indicamos, para maiores detalhes sobre a surpreendente história do Palimpsesto em que foi localizado (mesmo que parcialmente) pela primeira vez o texto Stomákhion, a obra NETZ, Reviel; NOEL, William., Códex Arquimedes. Rio de Janeiro: Record, 2009.

de geometria, mas é explorado de forma investigativa e desafiadora, sem apresentar nem a questão inicial, nem a solução final de maneira direta.

Figura 2 – O stomákhion.

Fonte: Carvalho *et al.* (2021, p. 16).

Do ponto de vista matemático, os objetos centrais são as figuras planas, especialmente triângulos e quadriláteros, conceitos de área, congruência e combinatória. A presença de questões sobre contagem e disposição das peças mostra uma antecipação de raciocínios combinatórios, pouco comuns no contexto da matemática grega tradicional.

A seguir, apresentamos o trecho incompleto que pode ser lido na recuperação do palimpsesto, seguido do diagrama que o acompanha:

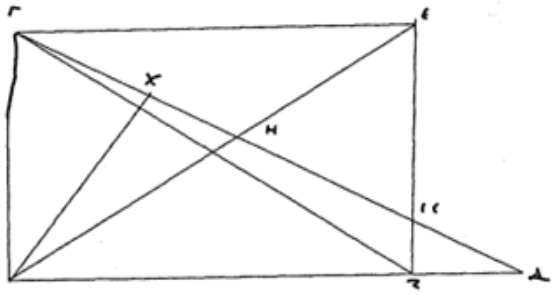
> Uma vez que o chamado stomákhion contém uma teoria da múltipla transposição das figuras de que se compõe, considerei necessário, primeiramente, observando-as em relação à grandeza da figura como um todo, estabelecer aquelas em que ele se divide e como ele é medido por cada uma delas; e, em seguida, estabelecer também quais e como são os ângulos quando tomados conjuntamente. Isso está dito para que se tornem conhecidas as composições surgidas dessas figuras: se os lados nelas surgidos estão sobre uma reta ou se falham por pouco, ainda que isso passe despercebido à observação. Pois tais coisas contêm engenho e arte. E mesmo que as figuras assim compostas tenham uma falha mínima, e isso passe despercebido à observação, não é por causa disso que devem ser descartadas. Pois bem, há uma quantidade não pequena de figuras feitas com essas [figuras menores], por ser possível mover um mesmo lugar para outro, quando uma figura igual [em tamanho] e equiangular é transposta e assume outra posição.
> Além disso, duas figuras combinadas equivalem a uma única figura quando são iguais [em tamanho] e semelhantes a essa única figura; ou ainda, quando duas figuras combinadas são iguais [em tamanho] e semelhantes a duas [outras] figuras combinadas – muitas figuras são compostas a partir de transposições (Carvalho *et al.* 2021, p. 34-35).

Nestes parágrafos introdutórios, já há alguns elementos a serem considerados: "Isso está dito para que se tornem conhecidas as composições surgidas dessas figuras: se os lados nelas surgidos estão sobre uma reta ou se falham por pouco, ainda que isso passe despercebido à observação. Pois tais coisas contêm engenho e arte."; além de "Pois bem, há uma quantidade não pequena de figuras feitas com essas [figuras menores], por ser possível mover um mesmo lugar para outro, quando uma figura igual [em tamanho] e equiangular é transposta e assume outra posição." e "[...] muitas figuras são compostas a partir de transposições." (Carvalho *et al.* 2021, p. 34-35 - grifos do autor)

O texto segue, apresentando um teorema que parece ser auxiliar para as argumentações futuras do texto (que infelizmente não estão disponíveis) e traz uma estrutura bastante reconhecível de uma demonstração euclidiana, em suas etapas identificados por Proclo e reverberado por vários comentadores, a saber:

> a) enunciado (protasis): a enunciação do teorema ou problema propriamente dito;
> b) exposição (ekthesis): descreve a figura particular a ser tratada;
> c) especificação (diorismos): apresenta, para a figura particular, a propriedade ou construção que será demonstrada;
> d) construção (kataskeue): efetua, por meio do que é permitido pelos cinco postulados, as construções necessárias para a demonstração;
> e) prova (apodeixis): por meio geralmente de noções comuns e definições, demonstra que a construção efetuada está de acordo com o que se sustentou na especificação.
> f) conclusão (sumperasma): revisa a construção efetuada (no caso dos problemas) ou simplesmente retoma o enunciado (no caso dos teoremas) (Vaz, 2010, p. 33)

Figura 3 – Fac-símile e reconstrução do diagrama referente à demonstração do teorema proposto no Stomákhion.



Fac-símile do diagrama do códex.

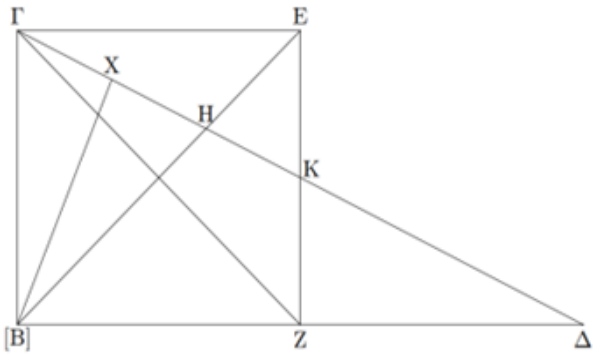


Diagrama reconstruído.

Fonte: Carvalho *et al.* (2021, p. 32).

Primeiro, comecemos delineando um teorema nessa direção.
Seja então um paralelogramo retângulo ZΓ e seja EZ dividido ao meio em K. E sejam traçados, a partir de Γ e E, ΓK e BE. Deve-se demonstrar que ΓB é maior que BH.
Sejam estendidos ΓK e BZ, encontrando-se em Δ, e seja traçado ΓZ. Uma vez que EK é igual a KZ e que ΓE, isto é, BZ, é igual a ZΔ, de modo que ΓZ é maior que ZΔ, por conseguinte, também o ângulo ZΔΓ é maior que ZΓΔ. Mas os ângulos HBΔ e BΓZ são iguais, pois cada um é metade de um reto. Por conseguinte, ΓHB também é maior que HΓB (pois ΓHB é igual aos dois ângulos [somados], internos e opostos, HBΔ e HΔB), de modo que ΓB é maior que BH; portanto, se ΓH for dividido em dois, em X, o ângulo

> ΓΧΒ será obtuso. De fato, uma vez que ΓΧ é igual a ΧΗ e que ΧΒ é comum, dois lados [de um triângulo] são iguais a dois lados [do outro triângulo]; e, sendo a base ΓΒ maior que ΒΗ, o ângulo [de um] também é maior que o ângulo [do outro]. Portanto, o ângulo ΓΧΒ é obtuso, e é agudo o adjacente. E ΓΒΗ é metade de um reto, supondo-se o paralelogramo como [quadrado], e ΒΧΗ é agudo; e tampouco são iguais os ângulos restantes de ΓΒΗ, e este triângulo está composto e dividido pela parte adicionada. Seja uma pequena área retangular de lados dobrados, … tendo ΑΒ como diagonal, tendo a reta ΓΑ como o dobro de ΓΒ, … tendo a espessura … ser possível ajustar como se fossem retas, uma vez que os segmentos têm uma ordem. E seja ΓΑ cortada em dois, em Ε, e ΕΖ traçada [passando] por Ε, paralelamente a ΒΓ; então, [os paralelogramos] ΓΖ e ΖΑ são quadrados. Sejam traçadas ΓΔ, ΒΕ e ΕΔ como diagonais; sejam ΓΗ e ΕΔ cortadas em dois, em Θ e Χ; sejam ligadas ΒΘ e ΧΖ; e sejam traçadas ΚΛ e ΧΞ, passando por Χ e Κ, paralelas a ΒΔ. Portanto, por meio do teorema exposto, o ângulo em Θ do triângulo ΒΓΘ é obtuso, enquanto é evidente que o ângulo restante é agudo. E é evidente que é maior ...

Apesar de incompleto, o texto reflete um caráter lúdico evidente: há um jogo intelectual, um desafio ao leitor, e um prazer implícito na exploração do problema. É um texto que não apenas demonstra, mas que também entretém, surpreende e convida à experimentação.

O PROBLEMA BOVINO

O Problema Bovino (ou Problema dos Bois) é um poema-problema matemático composto por 22 dísticos elegíacos[3], dirigido a Eratóstenes, bibliotecário de Alexandria.

> O poema trabalha com a matéria poética homérica, propondo uma releitura dos versos 127–130 do canto XII da Odisseia, passagem esta que trata da quantidade de vacas e ovelhas do Sol: [...]
> "Depois chegarás à ilha Trinácria, onde pastam
> as muitas vacas e as robustas ovelhas do Sol:
> São sete rebanhos de vacas, e igualmente, sete de belas ovelhas,
> Com cinquenta animais em cada uma." (Carvalho; Oliveira, 2023, p. 2).

Nos versos iniciais do Problema Bovino, um estrangeiro é questionado a calcular a quantidade do gado do Sol, que é dividido em quatro rebanhos, segundo a sua coloração: branco, preto, amarelo e malhado. As suas proporções são dadas por meio de nove condições, sendo as três primeiras referentes aos touros; as quatro seguintes, às vacas, e as duas finais ao rebanho como um todo:

> Em cada rebanho havia uma quantidade de touros sobressaindo-se em número, formando tal proporção: ó estrangeiro, imagine; os de pelo branco eram iguais a metade mais um terço dos pretos, mais todos os amarelos juntos. Já os pretos eram iguais a um quarto mais um quinto dos malhados, mais todos os amarelos juntos. Observe que os touros restantes, os malhados, eram iguais a um sexto mais um sétimo dos brancos, mais todos os amarelos juntos. [...]
> Esta era a proporção das vacas: as brancas eram iguais a um terço mais um quarto de todo o rebanho preto. Já as vacas pretas eram iguais a um quarto mais um quinto das vacas malhadas, quando iam para o pasto com os touros da mesma cor. Já as malhadas eram em número igual a um quinto mais um sexto do rebanho amarelo. As amarelas eram em número igual a metade de um terço mais um sétimo do rebanho branco. [...]
> Mas venha e entenda também todas essas condições que afetam o número do gado do Sol. Quando os touros brancos misturavam seu número com os pretos, se mantinham

[3] Segundo West (1974, p. 2, apud Carvalho; Oliveira, 2023, p. 2) "por elegia denota-se uma tradição poética, em metro elegíaco, na qual o poeta discursa por meio de sua própria pessoa, geralmente para um interlocutor específico e no contexto de uma ocasião ou situação particular".

> todos em formação de igual profundidade e largura, e as planícies da Trinácria enchiam-se com a sua multidão. Além disso, quando os touros amarelos e malhados eram reunidos, permaneciam de um modo que seu número, começando pelo um, crescia lentamente até completar uma figura triangular, não havendo touros de outras cores, nem sobrando nenhum deles (Carvalho; Oliveira, 2023, p. 3-4).

O desafio apresentado originalmente em forma de versos, foi traduzido em prosa para a análise de seu conteúdo matemático, sem, no entanto, perder de vista a peculiaridade de um problema matemática ter sido assim escrito, misturando mitologia e literatura.

Matematicamente, o problema exige habilidades de aritmética e cálculo de raiz quadrada de números muito grandes. A segunda parte do problema leva a uma formulação equivalente àquilo que ficou conhecido como equação de Pell, cuja menor solução envolve números com centenas de milhares de dígitos.

O texto é sofisticado em sua forma: escrito em versos, evoca uma tradição de enigmas literários e jogos intelectuais dirigidos a uma elite culta. A estética lúdica está presente tanto no formato poético quanto na complexidade exagerada da solução, cuja resolução prática se torna praticamente impossível sem ferramentas computacionais modernas.

O ARENÁRIO

Em O Contador de Areia (ou Arenário), Arquimedes propõe um exercício retórico e matemático ambicioso: calcular quantos grãos de areia caberiam no universo. O texto, como já comentado, é endereçado ao rei Gélon II e busca responder à crença comum de que o número de grãos de areia seria incontável.

Arquimedes começa por estabelecer um sistema numérico capaz de lidar com números muito grandes, ultrapassando o sistema numérico grego comum. Introduz, assim, um método de notação exponencial rudimentar, permitindo que se contemplem números da ordem de 10^{63} ou superiores. Em seguida, define os limites do universo conhecidos à época, com base na cosmologia de Aristarco de Samos, e calcula a estimativa de grãos de areia que preencheriam esse espaço.

Os objetos matemáticos envolvidos incluem sistemas de numeração, potências de dez, ordens de grandeza, esfericidade da Terra e do universo, e conceitos de aritmética aplicada à astronomia. A obra também apresenta argumentos geométricos para estimar superfícies e volumes.

No plano estilístico, o texto mescla precisão matemática com um tom leve e provocador, dirigido a um interlocutor real com o objetivo de maravilhá-lo e entretê-lo. A obra tem propósito demonstrativo e retórico, mostrando a força da matemática como instrumento para explorar o impensável.

ANÁLISES E RESULTADOS

A partir da leitura das obras Stomákhion, Problema Bovino e O Contador de Areia, foi realizada uma análise qualitativa, com foco na identificação dos elementos que Reviel Netz define como característicos da "estética alexandrina": a surpresa narrativa, a estrutura em mosaico e o tom lúdico. Essas categorias, presentes na obra *Ludic Proof*, foram tomadas como chave de leitura para compreender a singularidade estilística e intelectual da produção matemática de Arquimedes.

No Stomákhion, a ludicidade é o aspecto mais evidente. O texto propõe um problema de rearranjo geométrico das 14 peças que formam um quadrado, cuja solução exige raciocínio combinatório e visualização espacial. A proposta remete diretamente a um jogo intelectual, não apenas como passatempo, mas como um exercício matemático sofisticado. A estrutura do texto é fragmentária, consistindo em observações analíticas que se somam sem uma progressão linear, compondo uma estrutura em mosaico. A surpresa reside no contraste entre o caráter lúdico do enunciado e a complexidade formal da solução implícita.

O Problema Bovino é, por sua vez, uma manifestação extrema da estetização da dificuldade. Apresentado sob a forma de poesia, o problema combina a linguagem mitológica com relações matemáticas altamente sofisticadas, culminando em uma equação de Pell cuja solução excede qualquer possibilidade de cálculo manual. A surpresa narrativa é central: o leitor inicia o texto com a expectativa de um desafio poético e se depara com um problema de magnitude quase intransponível. A estrutura em mosaico é observada na divisão do texto em duas partes distintas, com um salto considerável de dificuldade entre elas. O tom lúdico está presente na forma de desafio, quase como uma provocação feita a Eratóstenes, incentivando o prazer da resolução como conquista intelectual.

Em O Contador de Areia, a ludicidade se expressa na ousadia conceitual de quantificar o incontável. Arquimedes não apenas propõe calcular quantos grãos de areia caberiam no universo, como também cria um sistema de representação numérica para tornar isso possível. A surpresa está em sua capacidade de transformar uma hipótese aparentemente absurda em um cálculo plausível. A estrutura do texto é composta por partes conceituais e demonstrações intercaladas, formando um mosaico argumentativo. O tom lúdico aparece na forma de desafio retórico dirigido ao rei Gelão, com uma mistura de rigor matemático e humor intelectual.

Nos três casos, nota-se que os textos não apenas transmitem resultados matemáticos, mas também engajam o leitor em uma experiência de inteligência e admiração, característica fundamental da estética alexandrina segundo Netz.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise realizada revela que as obras de Arquimedes selecionadas compartilham traços estilísticos e conceituais que vão além da demonstração matemática em si. Elas se estruturam como performances intelectuais que mobilizam engenhosidade, criatividade e um prazer manifesto pelo desafio. Tal como propõe Reviel Netz, essas obras ilustram a "prova lúdica" não apenas como uma forma de apresentar resultados, mas como uma forma de fazer da matemática uma arte erudita.

A engenhosidade ocupa lugar central nessa construção. Arquimedes não se contenta em apresentar demonstrações elegantes; ele cria situações matemáticas inusitadas, formula problemas sob a forma de enigmas poéticos ou jogos geométricos, e desafia os limites da representação numérica. Ao fazer isso, ele amplia as fronteiras do pensável, inserindo a matemática no campo da invenção e da maravilha.

Nesse sentido, a matemática de Arquimedes é mais do que um conjunto de técnicas: é uma manifestação de cultura e de estilo. Ela se insere na tradição helenística como expressão de uma inteligência que valoriza não apenas o saber, mas o modo engenhoso e refinado de compartilhá-lo. Considerar a ludicidade como aspecto constitutivo dessas obras não diminui seu valor científico,

mas, ao contrário, amplia nossa compreensão sobre o que a matemática podia ser no mundo antigo: uma forma de arte do pensamento.

REFERÊNCIAS

BÉRARD, Victor. **Les phéniciens et l'Odyssée**. Tome II. Paris: Armand Colin, 1903.

CARVALHO, Henrique Marins de; ISKANDAR, Jamil Ibrahim; TRANJAN, Tiago; CORTESE, João F. N. B.; SAMPAIO, Vicente A. de Arruda. O Stomákhion de Arquimedes: tradução com notas e introdução. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 21, n. 42, p. 14–51, 2021. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/356. Acesso em: 23 mar. 2025.

CARVALHO, Henrique Marins de; OLIVEIRA, Rodrigo Lima de. O problema bovino de Arquimedes: tradução com notas, introdução e comentários sobre a resolução. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 23, n. 46, p. 01–22, 2023. DOI: 10.47976/RBHM2023v23n4601-22. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/423. Acesso em: 23 mar. 2025.

CATANEO, Davi Meneses; MARQUES, Ivo de Almeida. Arquimedes: O Contador de Areia. **Sitientibus** Série Ciências Físicas, Feira de Santana, Bahia, Brasil, v. 18, p. 1–14, 2023. DOI: 10.13102/sscf.v18i.8567. Disponível em: https://periodicos.uefs.br/index.php/SSCF/article/view/8567. Acesso em: 23 mar. 2025.

DIJKSTERHUIS, E. J. **Archimedes**. Tradução de A. D. Morrison. Princeton: Princeton University Press, 1987.

HARPER, Douglas. **Etymology of Syracuse**. Online Etymology Dictionary. Disponível em: https://www.etymonline.com/word/Syracuse. Acesso em 23 mar. 2025.

HEIBERG, Johan Ludvig. **Archimedis opera Omnia**: Volume 1. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2013.

MORRIS, Ian; SCHEIDEL, Walter. (Eds.). **The dynamics of ancient empires:** State power from Assyria to Byzantium. Nova Iorque, NY, USA: Oxford University Press, 2009.

NETZ, Reviel. **Ludic Proof:** Greek Mathematics and the Alexandrian Aesthetic. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

NETZ, Reviel (org.). **The Works of Archimedes**: Translation and Commentary. Vol. I: The Two Books On the Sphere and the Cylinder. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

PLUTARCH. ***Plutarch's Lives.*** Vol. 1. CLOUGH, A. H. (Ed.). Philadelphia: John D. Morris & Company, 1860.

ROMERO, Sérgio Luiz Gusmão Gimenes. **Mito e performance na Olímpica I de Píndaro**. 2013. 100f. Dissertação (Mestrado em estudos literários) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências e Letras, campus de Araraquara. Orientador: Fernando Brandão dos Santos. 2013.

VAZ, Bruno Rafaelo Lopes. **O Papel dos Diagramas na Geometria Euclideana**. 2010. 235. Tese (Doutorado em Filosofia). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro PUC-Rio. Orientadores: Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira e Prof. Abel Lassalle Casanave. 2010.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Algumas histórias sobre a história da educação matemática e do ensino de matemática no Brasil

Some stories about the history of mathematics education and mathematics teaching in Brazil

Dulcyene Maria Ribeiro[1]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

RESUMO

Considerando que aspectos da história da educação matemática e do ensino de matemática são importantes de serem discutidos na formação de professores, seja inicial ou continuada, neste texto destaco como o teorema de Pitágoras e sua generalização são ou não apresentados em livros de diferentes períodos. Na palestra também foram discutidos aspectos relativos às frações e aos produtos notáveis. Os livros, especialmente os didáticos, são as principais fontes utilizadas. Como resultados, destaca-se que a generalização do teorema de Pitágoras não figura nos livros didáticos atuais e o desconhecimento dos professores sobre a ela. Além disso, há a necessidade de que os livros didáticos e os professores ao tratarem do teorema de Pitágoras possam associá-lo às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, possibilitando que o teorema volte a ter um sentido geométrico, além do algébrico.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Generalização do Teorema de Pitágoras; Formação de professores de Matemática; História na formação.

ABSTRACT

Considering that aspects of the history of mathematics education and of mathematics teaching are important to discuss in teacher training, initial or continuing, this text highlights how Pythagoras' theorem and its generalization are or are not presented in textbooks from different periods. In the lecture also discussed aspects related to fractions and notable products. Books, especially textbooks, are the main sources used. As a result, it is highlighted that the generalization of Pythagoras' theorem does not appear in current textbooks and that teachers are unfamiliar with it. Further, textbooks and teachers need to associate Pythagorean theorem with the areas of squares constructed on the sides of a right triangle, allowing the theorem to regain a geometric meaning, beyond its algebraic one.

Keywords: Pythagorean theorem; Generalization of the Pythagorean theorem; Mathematics teacher training; History in training.

[1] Doutora, Universidade de São Paulo (USP). Professora na Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Cascavel, Paraná, Brasil. E-mail: dulcyenemr@yahoo.com.br.

INTRODUÇÃO

Quando o Marcos Lübeck me convidou para palestrar no Seminário Nacional de História da Matemática a ser realizado em 2025, me pediu apenas que em minha fala envolvesse alguma história da educação matemática brasileira.

Dentre as várias opções que poderia escolher sobre o assunto, decidi destacar alguns aspectos da história da educação matemática e do ensino de matemática no Brasil, que de alguma forma estão relacionados ou com as minhas pesquisas próprias de doutorado ou pós-doutorado ou com as pesquisas de algum orientando meu, tanto de iniciação científica, como de mestrado e doutorado. Mas também se relacionam com as minhas atividades como professora atuante tanto na formação de professores de matemática, que defende que aspectos da história da educação matemática e do ensino de matemática são importantes de serem discutidos na formação de professores, seja inicial ou continuada.

Então o que discuti teve dois focos:

- Apresentar algumas investigações em história da educação matemática e do ensino de matemática;
- Discutir como a formação de professores pode se beneficiar do conhecimento da história da matemática, da educação matemática e do ensino de matemática;

Desde os meus trabalhos iniciais, quanto os que tenho orientado, temos tomado como fonte os livros didáticos de matemática, e de um ponto de vista histórico, vamos traçando o caminho de como alguns conteúdos vão figurando nos livros didáticos e tomando forma como conteúdos escolares.

Para fazer uma abordagem na palestra escolhi tratar de três conteúdos específicos, frações, produtos notáveis e teorema de Pitágoras e como estão destacados em livros de diferentes períodos do século XX. No entanto, nesse texto, abordarei apenas o que tratei relativo ao teorema de Pitágoras.

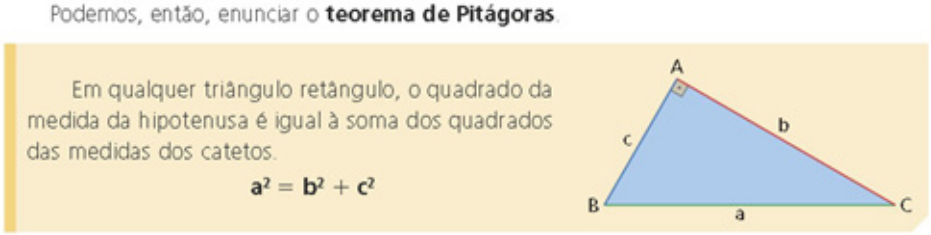
TEOREMA DE PITÁGORAS: O QUE SABEMOS SOBRE?

Considerando que as pessoas que me ouviam eram professores de matemática era esperado que tivessem conhecimentos sobre esse tema. Quando fiz a pergunta que está no título dessa seção, vários presentes recitaram o enunciado: "o quadrado da hipotenusa é igual ao quadrado dos catetos". Algumas lembraram que se tratava de uma proposição que está no livro *Os Elementos*, de Euclides, mas nem todas se lembraram desse fato. A proposição 47 do livro I de *Os Elementos* de Euclides é conhecida por Teorema de Pitágoras. Ele pode ser expresso da seguinte forma:

> "*Nos triângulos retângulos, a soma das áreas dos quadrados tomados sobre os catetos é igual à área do quadrado tomado sobre a hipotenusa*".

Esse enunciado e o anteriormente recitado pelos presentes têm diferenças. Aqui se dá destaque à palavra área. Trata-se das medidas das áreas construídas sobre os lados do triângulo retângulo, mas de modo geral essa ideia não tem sido reforçada nas aulas de matemática, nem nos livros didáticos. Mesmo quando não é tão resumido, quanto na descrição dos presentes, aparece como o quadrado da medida da hipotenusa e dos catetos, como na figura 1:

Figura 1- Teorema de Pitágoras



Fonte: Giovanni Júnior (2022, p. 209)

Na unidade 1 do mesmo livro, quando trata dos números irracionais, Giovanni Júnior (2022)[2] usa um triângulo retângulo isósceles para a construção da $\sqrt{(2)}$ e destaca as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo em uma malha quadriculada. Nesse momento, até enuncia a propriedade de modo diferente e ressalta que será demonstrada na unidade 7. Nesta unidade, retoma, com exemplos, a ideia as áreas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo isósceles, e escreve "A área do quadrado com um dos lados comuns à hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados com um dos lados comuns a cada um dos catetos". Mas o teorema é finalmente apresentado como está enunciado na figura 1, sem o destaque à palavra área e sem qualquer representação de quadrados sobre os lados do triângulo.

Na maioria das vezes, o teorema de Pitágoras decorre da apresentação das relações métricas no triângulo retângulo, como em Iezzi, Dolce e Machado (2022)[3]. O enunciado do teorema foi explicitado da seguinte forma: "Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotensa: $b^2 + c^2 = a^2$. Essa última relação é conhecida como teorema de Pitágoras" (Iezzi, Dolce e Machado, 2022, p. 149). Nesse material não é feita nenhuma associação com áreas das figuras construídas sobre os lados do triângulo, nem apresentada qualquer imagem relacionada a isso. Apenas mencionado que há outras formas de demonstração do teorema que seriam apresentadas na seção *Na história*, ao final do capítulo. Nessa seção, é mencionado sobre a história de Pitágoras, apresentadas as demonstrações do teorema atribuídas aos pitagóricos, a Bhaskara e a James A. Garfield, mas nenhum enunciado diferente do teorema é apresentado.

É como enunciado em Iezzi, Dolce e Machado (2022) que o teorema aparece na maioria dos materiais consultados, que está muito próximo do que foi relatado pelos ouvintes na palestra, que apenas não destacaram a palavra soma.

Verificar como esse enunciado tem sido apresentado em livros didáticos nos ajuda a entender com a maioria dos professores de matemática desconhecem a associação às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo. E, um enunciado tão importante quanto esse, decorrente de uma figura geométrica, um triângulo retângulo, fica sem sentido geométrico.

Voltando à interlocução com os presentes durante a palestra, quando perguntei se o teorema de Pitágoras tinha aplicações, foram unânimes em dizer que sim. Ressaltaram aplicações nas construções, na física, na arquitetura, entre tantas outras.

Agora, quando questionei se esse resultado tinha generalização foi um silêncio só. Nenhum dos presentes mencionou que o teorema de Pitágoras pode ser generalizado para quaisquer figuras

[2] Livro aprovado no PNLD vigente.
[3] Livro aprovado no PNLD vigente.

semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo, muito menos que era um resultado que também figura no livro *Os Elementos* de Euclides.

Considerando a tradução do livro de Euclides realizada por Irineu Bicudo, trazemos, a seguir, a proposição 31, do livro 6, de *Os elementos*, bem como sua demonstração, que apresenta a generalização do teorema de Pitágoras.

> *31. Nos triângulos retângulos, a figura sobre o lado subtendendo o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e também semelhantemente descritas sobre os lados contendo o ângulo reto.*
> Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que a figura sobre a BC é igual às figuras semelhantes e também semelhantemente descritas sobre as BA, AC. Fique traçada a perpendicular AD.
> Como, de fato, no triângulo retângulo ABC, foi traçada a perpendicular AD do ângulo reto junto ao A até a base BC, os triângulos ABD, ADC junto à perpendicular são semelhantes tanto ao todo ABC quanto entre si. E, como o ABC é semelhante ao ABD, portanto, como a CB está para a BA, assim a AB para a BD. E, como três retas estão em proporção, como a primeira está para a terceira, assim a figura sobre a primeira para a semelhante e semelhantemente descrita sobre a segunda. Portanto, como a CB está para a BD, assim a figura sobre a CB para a semelhante e semelhantemente descrita sobre a BA. Pelas mesmas coisas, então, também como a BC para a CD, assim a figura sobre a BC para a sobre a CA. Desse modo, também como a BC para as BD, DC, assim a figura sobre a BC para as semelhantes e semelhantemente descritas sobre as BA, AC. Mas a BC é igual às BD, DC; portanto, também a figura sobre a BC é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre as BA, AC.
> Portanto, nos triângulos retângulos, a figura sobre o lado subtendendo o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e semelhantemente descritas sobre os lados contendo o ângulo reto; o que era preciso provar. (Euclides, 2009, p. 264. Itálico como no original).

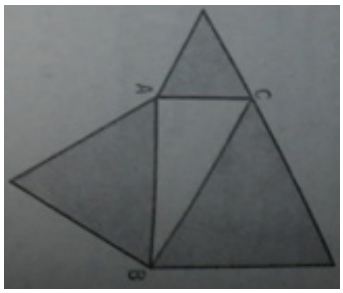
Em uma linguagem mais próxima aos dias de hoje, podemos descrever essa proposição, que estende o teorema de Pitágoras ao caso de figuras semelhantes de qualquer espécie, da seguinte maneira: *Em triângulos retângulos, a medida da área de uma figura qualquer construída sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas das figuras semelhantes à primeira, construídas sobre os catetos*.

Esse resultado, apesar de praticamente desconhecido por hora figurou em livros utilizados no mundo europeu nos séculos XVII e XVIII, como *Cvrsvs sev mvndvs mathematicvs: Complectens Evclidis Libros Octo, Arithmeticam, Theodosij sphærica, Trigonometriam, Geometriam practicam, Mechanicam, Staticam, Geographiam vniuersalem, Tractatum de Magnete, Architecturam Ciuilem, & Artem tignariam*., do francês Claude François Milliet Dechales (1621-1678) e *Cours de Mathematique*, do francês Jaques Ozanam (1640-1718). Os livros de Dechales, tiveram um alcance mais geral, indo além das aulas de formação em escolas militares, que parece ter sido o destino mais comum do livro de Ozanam.

Mas, essa proposição, que estende o teorema de Pitágoras ao caso de figuras semelhantes de qualquer espécie, também esteve presente em livros didáticos brasileiros do princípio do século XX, como no livro *Curso de Mathematica, 4º ano*, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza. Nele há informações de que o teorema de Pitágoras poderia ser generalizado para outros polígonos e que não passa de um caso particular de um teorema mais geral. Como exemplo, utilizando a fórmula do cálculo da área do triângulo equilátero, mostram que o teorema vale também para os triângulos equiláteros.

No triangulo rectangulo ABC os elementos a, b e c são, como sabemos, ligados pela relação (*): $a^2 = b^2 + c^2$

Multiplicando todos os termos dessa igualdade pelo numero $\frac{\sqrt{3}}{4}$, vem:



$$a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = b^2\frac{\sqrt{3}}{4} + c^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

O primeiro membro exprime a área do triangulo equilatero construído sobre a hypothenusa; o segundo membro é a somma das áreas dos triangulos equilateros construídos sobre os catetos.

Podemos, pois, concluir a seguinte propriedade:

O triangulo equilatero construído sobre a hypothenusa é equilavalente à somma dos triangulos equilateros construídos sobre os catetos.

De um modo geral:

O polygono regular construído sobre a hypothenusa é equivalente a somma dos polygonos semelhantes construídos sobre os cathetos (*). (Roxo; Thiré; Mello e Souza, 1938, p. 243-244. Itálico e asteriscos como no original).

O asterisco dessa citação remete à seguinte nota de rodapé: "Do mesmo modo demonstraríamos que para três polygonos semelhantes quaisquer S, P e Q construídos respectivamente sobre a, b e c (lados homólogos dos polygonos), teríamos: S = P + Q" (Roxo; Thiré; Mello e Souza, 1938, p. 244). Esse resultado geral não foi demonstrado, mas foram apresentadas as demonstrações para os casos do círculo e das lúnulas. Apesar dessas demonstrações e das várias notas históricas do livro, não foi mencionado que o resultado já estava na obra de Euclides. Para mais detalhes sobre a história do teorema de Pitágoras em livros didáticos ver Ribeiro e Ciani (2019).

Não encontramos livros didáticos atuais em que esse resultado esteja expresso. É possível encontrar menções a ele em trabalhos específicos desenvolvidos em programas de pós-graduação, como Silva (2014) e Oliveira (2013) ou como em Wagner (2015), que se trata de uma apostila disponibilizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), para preparação dos estudantes para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). No entanto, nenhum dos materiais consultados apresenta que a generalização é a proposição 31 do livro 6 de *Os Elementos* de Euclides, dando a impressão de ser resultado do trabalho de matemáticos atuais.

Não estar nos materiais didáticos é um indicativo do desconhecimento dos professores atuais sobre a generalização do teorema de Pitágoras, manifestada inclusive durante a palestra como já mencionado.

CONSIDERAÇÕES

Para finalizar, o que foi discutido nesse texto reforça a necessidade de que os professores ao tratar do teorema de Pitágoras possam associá-lo às áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, possibilitando aos estudantes compreenderem que a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ está relacionada a áreas e não apenas a letras sem sentido geométrico. E, que os professores tenham familiaridade com a história da matemática e com os fundamentos históricos dos conhecimentos que ensinam. Ainda que não apresentem aos alunos a generalização do teorema, por exemplo, é essencial que a conheçam, saibam da relevância que já teve em diversos materiais didáticos e do fato de não se tratar de um conceito recente.

REFERÊNCIAS

DECHALES, Claude François Milliet. **Complectens Evclidis libros octo, Arithmeticam, Theodosii Spharica, Trigonometriam, Geometriam practicam, Mechanicam, Staticam, Geographiam universalem, Tractatum de Magnete, Architecturam civilem, & Artem tignariam:** Tomus primus. Oficina Anissoniana, 1674.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da Matemática**: 9º ano: ensino fundamental: anos finais. São Paulo: FTD, 2022.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e realidade**: 9º ano. 10 ed. São Paulo: Saraiva Educacional S.A, 2022.

OLIVEIRA, Idalice Maria Santiago. **Geometrização do teorema de Pitágoras e sua generalização como o teorema de Pólya**. 2023. 169 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2023.

OZANAM, Jacques. **Curs de Mathematique: qui comprend toutes les parties de cette science les plus utiles & les plus necessaires à un homme de guerre**... Paris: Impresso por chez Jean Jombert, 1693.

RIBEIRO, Dulcyene Maria: CIANI, Andréia Büttner. O teorema de Pitágoras: um caso particular de algo mais geral. In: Seminário Nacional de História da Matemática - SNHM, 13., 2019, Fortaleza. **Anais eletrônicos** [...]. Fortaleza: SBHMat, 2019, p. 813-827. Disponível em: https://www.sbhmat.org/download/download?ID_DOWNLOAD=7. Acesso em: 12 jul. 2025.

ROXO, Euclides; THIRÉ, Cecil; MELLO e SOUZA, Julio César de. **Curso de Mathematica, 4º anno**. 4 ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1938.

SILVA, João Evangelista Brito da. **Teorema de Pitágoras**: algumas extensões/generalizações e atividades com o Software GeoGebra. 2014. 152p. Dissertação (Mestrado profissional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2014.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e áreas**. Rio de janeiro: IMPA, 2015. 86p.

Mesas Redondas

arte: leandro selister | @lselister

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Transferência cultural entre Portugal e Brasil: primeira aritmética em Pelotas em 1848

Cultural transfer between Portugal and Brazil: first arithmetic in Pelotas in 1848

Circe Mary Silva da Silva Dynnikov[1]
Universidade Federal de Pelotas – UFPEL

Fernando Ripe[2]
Universidade Federal de Pelotas – UFPEL

RESUMO

Com ênfase na história cultural e inserido nas investigações em História da Educação Matemática, o presente estudo analisa o livro do português António Luiz Soares - *Exposição dos elementos d'arithmetica* - tendo em conta o circuito de circulação e a forma como se deu a apropriação, numa perspectiva transnacional. Esta investigação encontra sua justificativa no fato de ser esse livro, cuja publicação se deu em 1848, o primeiro livro didático publicado na cidade de Pelotas. O método utilizado na pesquisa foi o descritivo- analítico, contemplando documentos variados: livro do autor, teses, artigos de jornais periódicos do Brasil e jornais do governo de Portugal, artigos de pesquisadores entre outros. Conclui-se que a Aritmética de Soares representa um exemplo de transferência cultural de Portugal para o Brasil, na primeira metade do século XIX; revela um professor com bastante experiência no ensino da matemática e um autor com preocupações didáticas na escrita de um livro para o ensino primário: foge das teorizações excessivas, aplica a aritmética a situações-problema inclui muitos exemplos, exercícios resolvidos, ilustrações e, por meio do diálogo aproxima o aluno da realidade que o cerca.

Palavras-chave: Antonio Luiz Soares; ensino da matemática; história da educação matemática; livro didático.

ABSTRACT

With an emphasis on cultural history and inserted in the investigations in the history of Mathematics Education, this study analyzes the book by the Portuguese António Luiz Soares - *Exposição dos elementos d'arithmetic*a - taking into account the circulation circuit and the way in which the appropriation took place, in a transnational perspective. This investigation finds its justification in the fact that this book, whose publication took place in 1848, was the first textbook published in the city of Pelotas. The method used in the research was descriptive - analytical, contemplating various documents: author's book, theses, articles from periodicals of Brazil and newspapers of the government of Portugal, articles of researchers among others. It is concluded that the arithmetic of Soares represents an example of cultural transfer from Portugal to Brazil in the first half of the nineteenth century; it reveals a teacher with a lot of experience in teaching mathematics and an author with didactic concerns in writing a book for primary education: he avoids excessive theorizations, applies arithmetic to problem situations includes many examples, solved exercises, illustrations and, through dialogue, brings the student closer to the reality that surrounds him.

Keywords: Antonio Luiz Soares; teaching mathematics; history of mathematical education; textbook.

[1] Doutora em Pedagogia pela Universidade de Bielefeld (UB). Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil.E-mail: cmdynnikov@gmail.com.

[2] Doutor em Educação pela Universidade Federal de Pelotas (UFPel). Professor na Faculdade de Educação da UFPel, atua como Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEMAT) e docente do Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGE), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil.E-mail: fernandoripe@yahoo.com.br.

CONTEXTO

Na província de São Pedro do Rio Grande do Sul, atual estado do Rio Grande do Sul, após a Revolução Farroupilha (1835-1845), o cenário educacional apresentava-se sem uma estrutura organizada (Arriada; Nogueira, 2014). As duas décadas que se seguiram a tal evento marcam um período centrado na regulamentação do ensino, no estabelecimento de regras para sua execução e inspeção, na busca de um método de ensino eficiente, de investimento na formação de professores primários, da organização da carreira docente, entre outras medidas (Silva, 2019). À medida que o ensino ia sendo organizado, o governo assumia sobre ele cada vez mais poder, embora a iniciativa privada continuasse a atuar com relativa liberdade. Algumas escolas particulares foram criadas tanto em Porto Alegre quanto nas vilas e freguesias mais populosas do interior do estado.

No presente estudo, focaremos a atenção no Colégio de Santa Bárbara, localizado na cidade de Pelotas, pois foi para esse estabelecimento de ensino que seu diretor – Antonio Luiz Soares – escreveu, em 1848, o livro de aritmética, o primeiro impresso a ser publicado nessa cidade. A criação desse colégio mereceu destaque nos jornais: em abril de 1848, por exemplo, foi anunciada, no jornal - *O Americano* (RJ), a fundação de um colégio de meninos que funcionaria sob a orientação de Antonio Luiz Soares, com um amplo plano de estudos abrangendo as matérias para a instrução em diferentes profissões assim como habilitando para os exames preparatórios exigidos nas academias e instituições de ensino superior. Além disso, o anúncio incluía alguns dados sobre o diretor – "há pouco chegado de Portugal, que na Academia do Porto foi lente de matemática por espaço de 12 anos" (Anúncio, 1848, p. 2).

Em 22 de maio 1846, a Lei 51 estabelecia a regulamentação do ensino primário, definindo o que ali deveria ser ensinado: "Leitura, as quatro operações aritméticas, frações ordinárias, decimais e proporções; princípios de moral cristã, dogmas da religião do Estado; gramática da língua nacional" (Schneider, 1993, p. 82). Entre os saberes a serem ensinados, havia um destaque para a aritmética. Ler, escrever e contar faziam parte da formação elementar à época. Era um ideal a ser atingido.

Antonio Luiz Soares (1805-1875), autor da obra – *Exposição dos Elementos d'Aritmetica*: para o uso dos estudantes do Colégio de Santa Bárbara na cidade de Pelotas – era um português detentor de formação acadêmica que aportou em terras brasileiras, em 1847. Em seu manual escolar encontram-se indícios de seus saberes matemáticos, assim como de sua concepção pedagógica.

O processo transnacional, que envolve agentes na transferência de saberes de uma região a outra, de diferentes países, tem sido estudado por muitos pesquisadores, entre eles: Mastaci (2016); Rodrigues (2010); Fontaine (2014); Silva (2015), entre outros. Pode-se entender transferências culturais como interações ou contatos culturais numa dinâmica histórica. Espagne (1999, p.1), que inaugurou essa teoria, definiu com mais precisão o termo transferência cultural afirmando que ela: "marca a preocupação de falar simultaneamente de vários espaços nacionais, de seus elementos comuns, sem justaposição das considerações sobre um e outro para confrontá-los, compará-los ou simplesmente acumulá-los". Para Rodrigues (2010), os escritores e professores estão, entre outros, no grupo daqueles que servem como intermediários nos processos de transferências culturais.

A partir de um estudo analítico dos escritos de Soares (1848, 1853), vislumbra-se a existência de contatos culturais expressos em ideias pedagógicas entre três países: Portugal, Brasil e França, nas décadas de 1830 a 1850. Soares, ao chegar ao Brasil, além de sua formação matemática obtida na Escola Politécnica do Porto, trouxe em sua bagagem cultural conhecimentos pedagógicos de auto-

res franceses como Victor Cousin (1792-1867), filósofo, historiador e diretor da Escola Normal de Paris. Fica visível sua intenção de escrever uma aritmética diferenciada, com ideias inovadoras sobre o ensinar e aprender, ideias essas que se propagavam na Europa. Não se trata de mais uma "Aritmética" que ensina a contar e realizar cálculos com as quatro operações aritméticas, mas, sobretudo, de uma aritmética que apresenta indícios de como tais saberes deveriam ser ensinados.

Portugal, no século XIX, assim como outros países europeus, mantinha-se informado sobre a educação na França; esta, por sua vez, também procurava manter-se atualizada sobre o que acontecia na Alemanha, que, à época, possuía um sistema de ensino mais organizado, ditava o que e como conduzir a instrução primária e secundária. No período de 1830 a 1850, encontra-se ampla divulgação, em jornais portugueses, inclusive os oficiais, a respeito da instrução em vários países. Na Crônica Constitucional Portuguesa, em 1833, divulgava-se as decisões que ocorriam na França quanto à educação, por exemplo: "A instrução primária elementar compreende necessariamente a instrução moral e religiosa, a leitura, a escrita, os elementos da língua francesa e aritmética, e o sistema legal dos pesos, e medidas" (Almeida e Almeida, 2024, p. 211). No Diário do Governo de 1838, lê-se:

> A porta por onde se entra no santuário da ciência, é a boa educação primaria. O filósofo Cousin mandado á Prússia pelo governo francês para examinar o estado do ensino publico naquele país, à sua volta declarou, no relatório que fez, que a França estava ainda atrasadíssima neste ramo (Almeida; Almeida, 2024b, p. 378).

O interesse de Victor Cousin pela educação o levou a realizar diversas viagens pela Europa: por exemplo, na Prússia, em 1832, e na Holanda, em 1836; esta última resultou no livro *De l'instruction publique en Hollande*, publicado em 1838 (Cousin, 1838). Na viagem à Holanda, ele constatou que no ensino elementar, em Haia: "Segue-se em geral o método de Pestallozi" (Cousin, 1838, p. 26).

Em 1847, notícias de Paris de 22 de abril reverberavam no Diário do Governo, onde foi dito que o governo deveria intervir num assunto de tanta importância como a instrução, por ser ela elemento da defesa do país e de alívio da miséria; uma boa educação popular incluiria : "a leitura, a escrita, a aritmética, a geografia, o desenho, o canto, uma certa soma de conhecimento industriais e preceitos de moral" (Almeida; Almeida, 2023a, p. 307). Saberes aritméticos eram, pois, considerados importantes para a formação dos indivíduos. Em 1852, novamente, o Diário do Governo se referia à França informando que, pelos modernos programas daquele país, o ensino primário compreenderia: a instrução moral e religiosa, a leitura, a escrita, os elementos da língua nacional, o cálculo e o sistema legal de pesos e medidas" (Almeida; Almeida, 2023b, p. 434-435).Destacava, porém, que outros conhecimentos que poderiam ser acrescentados a esses, a saber: aritmética aplicada às operações práticas, noções de ciências físicas e da história natural aplicáveis aos usos da vida; instruções elementares sobre a agricultura, indústria e higiene. A preocupação de vincular a teoria com a prática já mostra um avanço em relação a década de 1830, com a previsão de conhecimentos mínimos para o ensino primário.

Há fortes indícios de que Antonio Luiz Soares, como intelectual da época, bem informado, lia os jornais, acompanhando as notícias referentes ao ensino. No seu livro de 1848, ao comentar sobre o sistema de medidas proposto pela França, teceu longas considerações a respeito, dizendo que o governo de Portugal teve grandes dificuldades em adotá-lo, citando, a propósito dessa afirmação, o Diário do Governo n. 51 de 1845. Apesar das dificuldades de adoção do sistema métrico dos franceses, ele afirmava sua convicção de que "há bem fundadas esperanças de que o sistema venha a ser adotado em todas as nações [...]" e, ainda, com otimismo, complementava: "Muito também

se pode esperar das escolas fazendo entrar na instrução primária o sistema; é pela educação que se operarão estas grandes reformas, e não contrariando subitamente antigos usos do povo" (Soares, 1848, p. 33). Em junho de 1853, no Jornal da Associação Industrial Portuense, ao escrever sobre aritmética, citava diretamente o filósofo francês Cousin: "O sábio Cousin por sua experiência colhida nos países clássicos da instrução pública, nos diz 'uma instrução vaga e superficial, é um mal que se deve impedir a todo custo, nada tão fecundo como o que bem se sabe: é preciso insistir sobre os elementos" (Soares, 1853, p. 245). A influência das ideias de Cousin aparecem diretamente em sua escrita: "[...] mas se se não deve exigir da infância mais do que ela é capaz, também não se deve exigir de menos" (idem). Cousin, em relatório de 1832, havia se manifestado sobre o ensino infantil dizendo: "Se é necessário pedir a esta idade apenas a atenção de que é capaz, não é menos necessário exigi-la tudo (sic) de que ele é capaz. Devemos ter cuidado para não o fazer acreditar que sabe o que não sabe" (Cousin, 1832, p. 51). Visivelmente, o autor português concordava com Cousin sobre a necessidade de atentar-se para um ensino diferenciado para os jovens alunos.

Antonio Luiz Soares já foi objeto de atenção no campo da Educação Matemática, aqui destacamos um estudo levado à cabo por Pinto (2012, 2015) o qual aparecem alguns dados biográficos do autor e sua atuação na Associação Industriária Portuense. Diante de uma lacuna historiográfica, o objetivo do presente artigo é identificar a proposta metodológica para o ensino da aritmética no livro de aritmética de Soares (1848) como um elemento de transferência pedagógica entre Brasil e Portugal. Entretanto, é preciso antes disso, conhecer um pouco a respeito desse autor.

O AUTOR: DE MILITAR A EDUCADOR

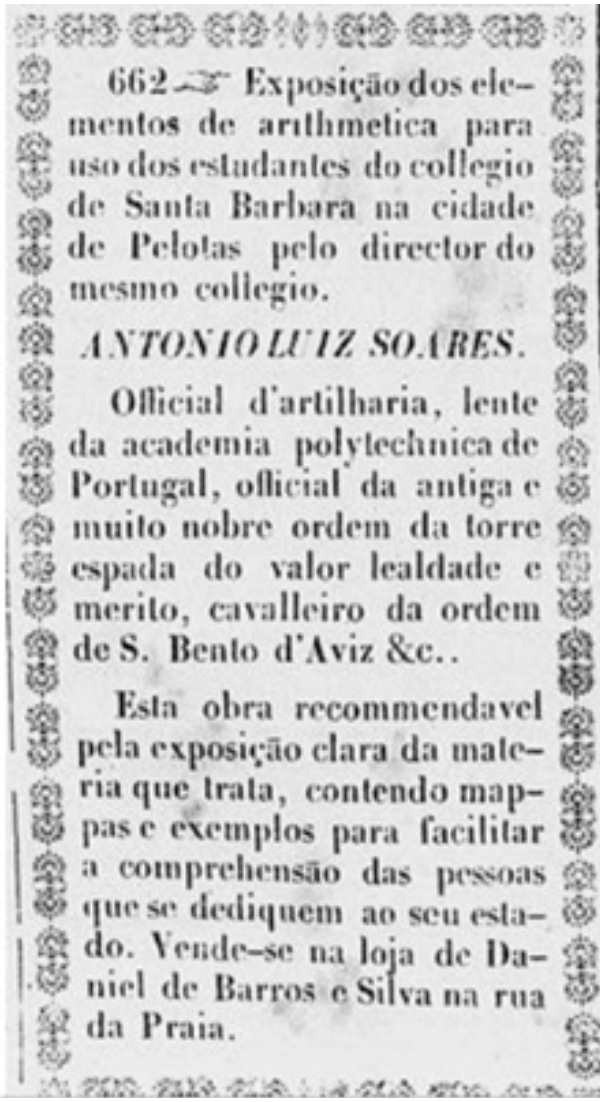
Biografias de professores e autores de livros escolares, principalmente daquelas que exigem dados da primeira metade do século XIX, não são simples de serem escritas. Não é diferente no caso em questão. A partir de alguns indícios, encontrados em documentos na cidade do Porto, como a Memória Histórica da Academia Politécnica do Porto, 1937, do pesquisador Hélder Pinto (2012, 2015), de jornais brasileiros, iremos apresentar um esboço biográfico, ainda que incompleto, desse autor.

Antonio Luiz Soares nasceu na cidade do Porto (Portugal) em 7 de setembro de 1805. Era filho de Caitana Maria de Jesus e Antonio Luiz Soares. Na mesma cidade, realizou estudos em matemática na Academia Politécnica do Porto no período de 1819 a 1822. Além de matemática, estudou inglês. Em 1826, entrou para o exército libertado, onde chegou ao posto de capitão de bateria montada. Recebeu a premiação de Cavaleiro da Torre e Espada por sua atuação na batalha de 5 de setembro de 1833 e pelos serviços prestados nas linhas do Porto à Lisboa. Em 1836, ingressou como docente de matemática da primeira cadeira do curso matemático, na Academia Politécnica do Porto. Lá, o curso matemático estava dividido em três anos e possuía 3 cadeiras, uma em cada ano: a "1ª cadeira incluía: aritmética, geometria, trigonometria plana, seu uso prático e princípios elementares da álgebra até equações do 2º grau; a 2ª cadeira previa: continuação da álgebra, sua aplicação à geometria, cálculo diferencial e integral, princípios fundamentais de estática, dinâmica, hidrostática, hidráulica e ótica; a 3ª cadeira contemplava: trigonometria esférica e arte de navegação teórica e prática, seguida das noções de manobra e do conhecimento e uso prático dos instrumentos astronômicos e marítimos" (Basto, 1947, p. 21-22). Esse detalhamento está sendo feito aqui por trazer indícios da formação matemática de Soares, de sua atuação como docente de matemática, o que é importante para a análise do livro do protagonista deste estudo. Durante 12 anos, Soares

atuou como docente da Academia Politécnica do Porto; em 1846, atuou no exército na convenção do Gramido[3] e em, 1847, viajou para o Brasil.

Ficou no Brasil de 1847 a 1850. Nessa época, viveu em Pelotas, tendo contado com a proteção de seu primo Jose Antonio de Figueiredo Junior (Soares, 1848, s/p), empresário destacado na sociedade local, conforme comprovam registros de jornais da época. Criou uma escola particular – Colégio de Santa Bárbara –, sendo seu diretor. Para essa escola, escreveu *Exposição dos Elementos D'Arithmetica*, que foi publicado na Tipografia de L. J. de Campos. O jornal local, *O Rio-Grandense*, em 30 de outubro de 1849, noticiou sobre a obra escrita para os alunos do colégio de Santa Bárbara.

Figura 1 – Anúncio do livro *Exposição dos elementos de arithmética* no jornal



662 — Exposição dos elementos de arithmetica para uso dos estudantes do collegio de Santa Barbara na cidade de Pelotas pelo director do mesmo collegio.

ANTONIO LUIZ SOARES.

Official d'artilharia, lente da academia polytechnica de Portugal, official da antiga e muito nobre ordem da torre espada do valor lealdade e merito, cavalleiro da ordem de S. Bento d'Aviz &c..

Esta obra recommendavel pela exposição clara da materia que trata, contendo mappas e exemplos para facilitar a comprehensão das pessoas que se dediquem ao seu estado. Vende-se na loja de Daniel de Barros e Silva na rua da Praia.

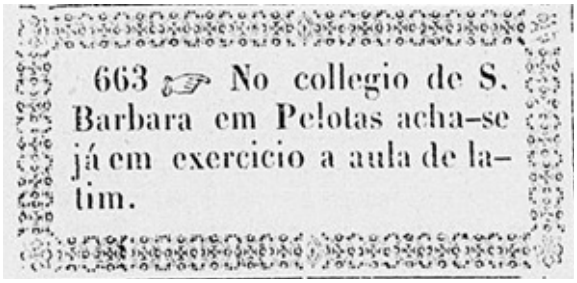
Fonte: *O Rio-Grandense* (30 de outubro de 1849, p. 4)[4].

O mesmo anúncio apareceu no mês seguinte. Além disso, o diretor também ministrava aulas de Latim, conforme se lê no anúncio da figura 2.

[3] A convenção de Gramido teve por objetivo por fim a uma insurreição envolvendo portugueses, espanhóis e ingleses.

[4] https://memoria.bn.gov.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=764892&pesq=%22Antonio%20Luiz%20Soares%22&pasta=ano%20184&hf=memoria.bn.gov.br&pagfis=64

Figura 2 – Anúncio da aula de Latim

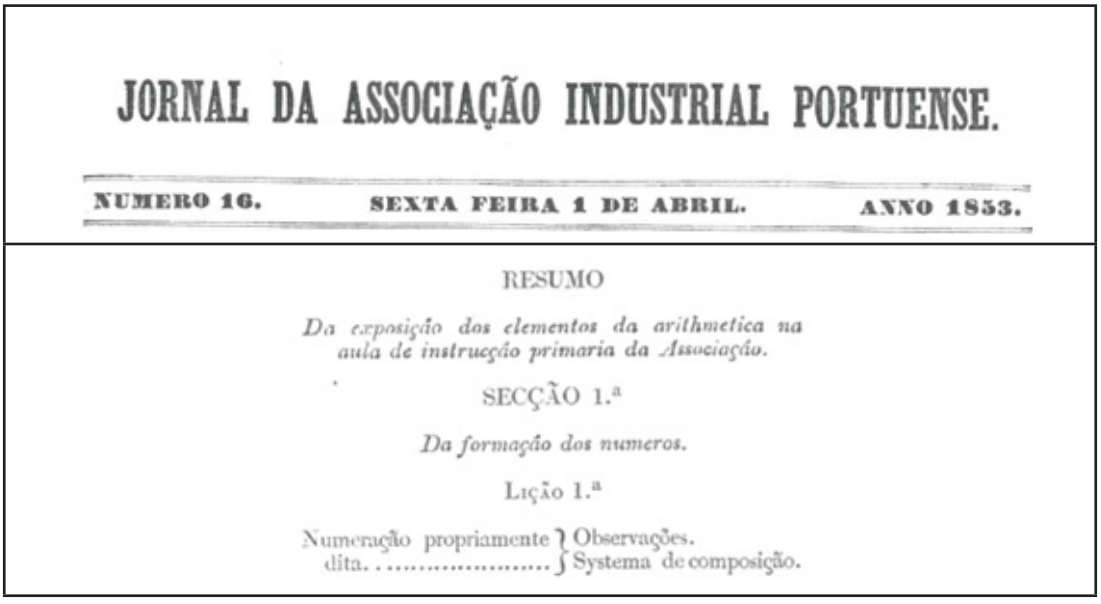

663 ☞ No collegio de S. Barbara em Pelotas acha-se já em exercicio a aula de latim.

Fonte: *O Rio-Grandense* (30 de outubro de 1849, p. 4)[5].

São escassas as informações sobre o tempo de permanência de Soares no Brasil. Ao retornar a Portugal, em 1851, retomou suas funções na docência em matemática na mesma instituição (Basto, 1947, p. 88). Pinto (2012) registrou todos anos em que Soares foi docente na Academia Politécnica do Porto após seu retorno do Brasil (1851- 1875). Em 1875, ele faleceu na cidade do Porto.

Foi também professor do Instituto Industrial do Porto, tendo lá ensinado Aritmética, Álgebra e Geometria (Pinto, 2012, p. 140). Em 1853, seus artigos foram publicados no Jornal da Associação Industrial Portuense; os textos traziam como título – Da exposição dos elementos de aritmética na aula de instrução primária da Associação. Foram localizados por Pinto (2015) sete artigos entre os meses de abril a dezembro. A figura 3 ilustra o jornal de 1 de abril de 1843, com o primeiro artigo de Soares.

Figura 3 – Jornal da Associação Industrial Portuense


JORNAL DA ASSOCIAÇÃO INDUSTRIAL PORTUENSE.

NUMERO 16. SEXTA FEIRA 1 DE ABRIL. ANNO 1853.

RESUMO

Da exposição dos elementos da arithmetica na aula de instrucção primaria da Associação.

SECÇÃO 1.ª

Da formação dos numeros.

Lição 1.ª

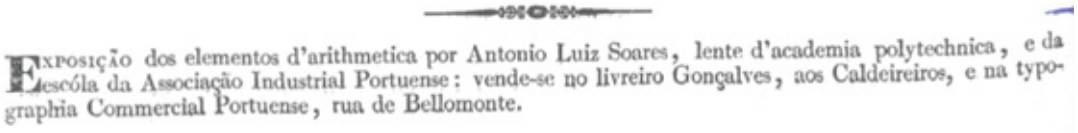
Numeração propriamente dita. ..... } Observações. Systema de composição.

Fonte: Recorte do Jornal da Associação Industrial Portuense (digitalizado e cedido a autora por Helder Pinto)

Nesse mesmo jornal, há uma notícia sobre o livro de Soares publicado no Brasil, conforme Figura 4.

[5] https://memoria.bn.gov.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=764892&pesq=%22Antonio%20Luiz%20Soares%22&pasta=ano%20184&hf=memoria.bn.gov.br&pagfis=64

Figura 4 – Divulgação em Portugal do livro de Aritmética de 1848



Exposição dos elementos d'arithmetica por Antonio Luiz Soares, lente d'academia polytechnica, e da escóla da Associação Industrial Portuense: vende-se no livreiro Gonçalves, aos Caldeireiros, e na typographia Commercial Portuense, rua de Bellomonte.

Fonte: Recorte do Jornal da Associação Industrial Portuense, 1853, p. 256.

A ARITMÉTICA CONFORME SOARES

André Chervel (1990, p. 204) nos diz que "[...] os conteúdos de ensino são impostos como tais à escola pela sociedade que a rodeia e pela cultura na qual ela se banha"; apontamos, entretanto, que ao autor de um livro didático pertencem a extensão e ordenação dada aos conteúdos, a profundidade, a seleção de exemplos e exercícios, enfim, a originalidade da obra. No caso de Soares, temos um exemplo de originalidade na abordagem que se distancia de outras aritméticas publicadas, nesse período, no Brasil, em que os conteúdos são mais teóricos, em que figuras e orientações metodológicas ao professor quase não se fazem presentes, poucos problemas são resolvidos, propostos ou envolvem aplicações a situações do cotidiano. O autor começa explicitando o "objeto do curso" - o mesmo que o objetivo do livro: "Guiar os primeiros passos dos estudantes nos ensaios da sua inteligência, e fazer-lhes adquirir o hábito das investigações, é o que mais cumpre saber na exposição dos princípios científicos" (Soares, 1848, p. 5). Temos indícios de que o autor estava a par das ideias de Pestalozzi que desde o início do século estavam circulando na Europa, pois, para ele, é a partir da observação da natureza que chegamos ao entendimento das quantidades: "somente depois de muitas numerações concretas" é que chegamos à abstração. Diz ainda, que convém ao homem "saber observar e raciocinar para regular sua conduta do melhor modo possível, pela observação distinguirá todas as particularidades da situação [...] se não souber observar bem, as ideias que adquirir serão falsas e incompletas [...] se não souber raciocinar, as ideias podem conduzir a consequências errôneas" (Soares, 1848, p. 8). Como guia, ele sugere o método científico. Conclui dizendo:

> Exercitar os alunos nas observações, e raciocínios até alcançar o grão de aperfeiçoamento possível para as suas faculdades intelectuais [...] ir conduzindo-os aos fins que se destinam os princípios das ciências matemáticas e físicas na instrução primária do colégio (Soares, 1848, p. 8).

Os conteúdos apresentados na Aritmética de Soares, que aparecem na Táboa A do livro, estão sumarizados na tabela 1.

Tabela 1 – Conteúdos do Livro

Conteúdo	Número de páginas
Formação dos números: sistemas de composição; numeração decimal; avaliação das quantidades (medidas de grandezas)	14 páginas
Medidas de grandezas; Múltiplos das unidades métricas	24 páginas
Operações aritméticas: Adição com números inteiros e decimais; multiplicação com números inteiros e decimais; subtração, multiplicação com números inteiros e decimais; divisão	65 páginas
Problemas elementares	9 páginas
Operações de comércio: Juros simples, desconto, tara, comissão e corretagem, seguros e avarias, cambio, especulações, prazo médio	29 páginas
Questões diversas: regra de três, quotas, misturas, juros compostos, anuidades	18 páginas

Teoria para efetuar os cálculos com facilidade, números primos, decomposição em fatores primos	21 páginas
Frações: ordinárias, decimais, frações periódicas, fração contínua, operações com frações	20 páginas
Potências e extração de raízes	22 páginas
Estudo dos logaritmos	21 páginas

Fonte: Soares (1848)

O autor deu destaque ao sistema métrico apresentando-o antes das operações aritméticas. Para orientar seu ensino, acrescentou, nas últimas páginas do livro, 6 estampas com os títulos apresentados na tabela 2.

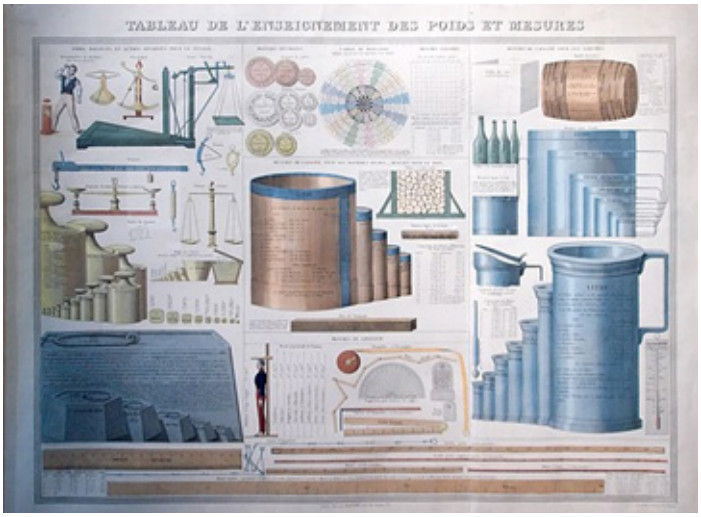
Tabela 2 – Súmula das estampas sobre medidas variadas

Estampa 3	Mapa dos pesos e medidas do sistema métrico com as suas expressões aritméticas e abreviações	Inclui os prefixos para os múltiplos e submúltiplos do metro, suas correspondências em metros quadrados, litros e gramas com abreviações
Estampa 4	Taboa dos pesos e medidas do reino de Portugal e Brasil com a conversão para o sistema métrico (extraído de Bezout, 1836)	Estabelece as conversões de légua, légua marinha, milha geográfica, passo geométrico, passo ordinário, braça, vara, pé, palmo de Craveira, polegada, linha e ponto para o equivalente no sistema métrico. O mesmo para grão, scropulo, oitava, onça, marco, libra, arratel, arroba, quintal e tonelada
Estampa 4 bis	Continuação da taboa dos pesos e medidas	Medidas d'arco para líquidos, secos, pesos boticado, pesos dos diamantes, para o toque da prata, medidas de superfície.
Estampa 5	Várias figuras para o metro, decímetro quadrado, metro cúbico, viga	metro dobrado, medidas para madeiras (comprimento e altura), viga com doze pés, etc.
Estampa 6	Desenhos de pesos (Elaborado pelo aluno Alexandre Eloy Teixeira)	Dimensões dos pesos em ferro fundido cilíndricos e hexagonais, com tabelas
Estampa 7	Desenhos de latas de estanho descobertas; de lata com asa para líquidos, de barris em madeira (Elaborado pelo aluno Catão da Câmara Barcellos)	Medidas para os líquidos, dimensões em milímetros

Fonte: Os autores

Os desenhos originais das últimas estampas chamam a atenção; foram feitos à mão, não apresentam qualidade gráfica, possivelmente devido às limitações que a tipografia tinha à época, naquela cidade. E mais, em relação a elas, surgiram-nos as seguintes questões: qual teria sido a fonte de inspiração das ilustrações? Quem seriam os alunos que elaboraram os desenhos? No que diz respeito à primeira questão, há fortes indícios de que Soares possuía algum modelo de ilustração que teria sido usado pelos alunos. Não foi possível encontrar nenhuma ilustração da década de 1840; a mais antiga foi de 1850, apresentada na figura 5. No site, há uma explicação que, a partir de 1840, as recomendações oficiais eram no sentido de que o professor deveria iniciar o estudo do sistema métrico desde os primeiros anos da escolaridade. Além disso, havia a recomendação de que a aprendizagem deveria ser mais concreta, isto é, de que fossem mostrado às crianças objetos correspondentes às diferentes medidas e capacidades ou, na sua falta destes, que lhes fosse apresentada a representação em tamanho real, de tais objetos; e, por fim, a recomendação de que fossem incluídas as tabelas do sistema métrico.

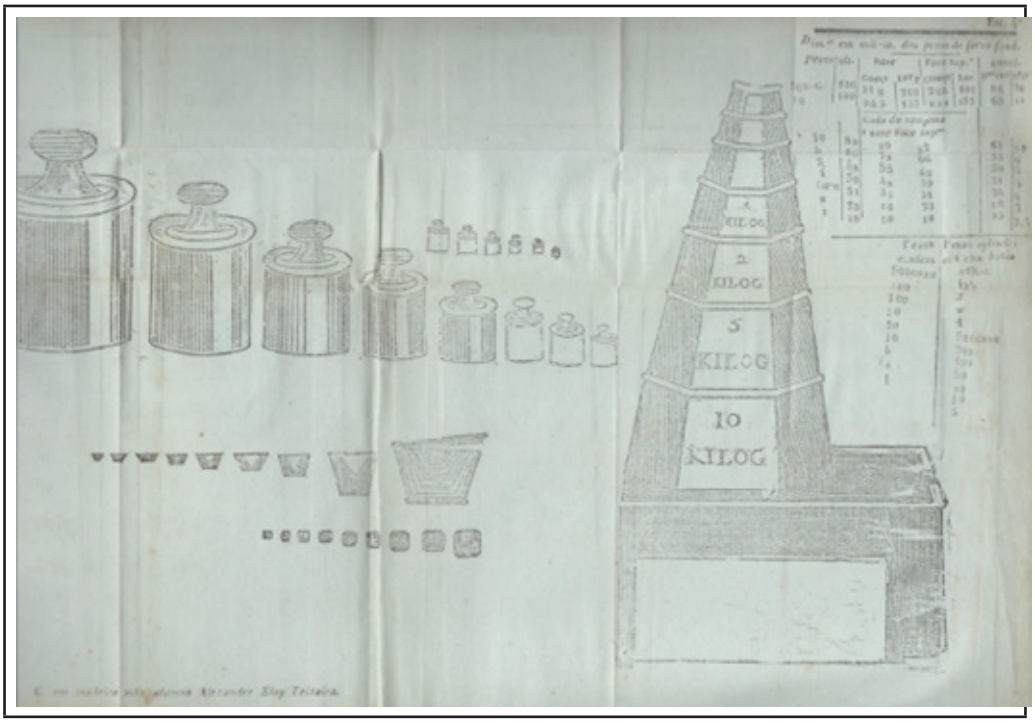
Figura 5 – Tabela de ensino dos pesos e medidas

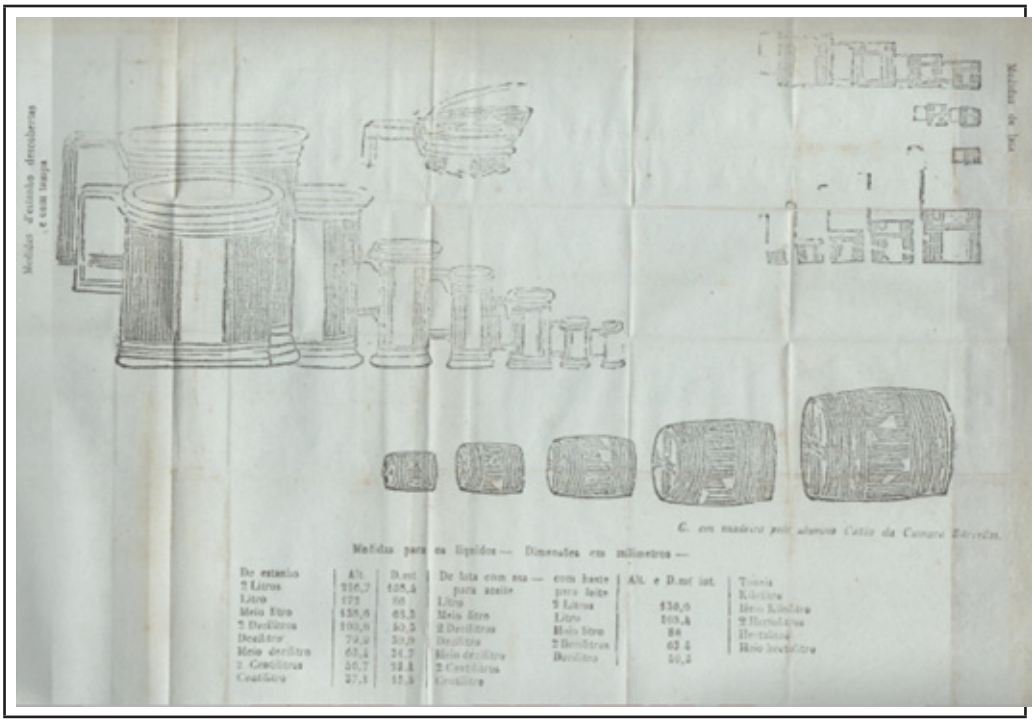


Fonte: https://www.reseau-canope.fr/musee/collections/en/museum/mne/tableau-de-l-enseignement-des-poids-et--mesures/62882e66c07506d9ad940070

A figura 6 mostra as duas estampas incluídas nas páginas finais do livro, em que, diferentemente do que ocorre na figura 5, as medidas de peso e capacidade aparecem separadas, constituindo dois grupos distintos.

Figura 6 – Estampas 6 e 7 do livro de Soares





Fonte: Soares (1848, s/p)

Concordamos com Escolano Benito (2017, p. 227) quando este nos diz que "os restos da escola são, pois, materialidades com memória". O livro escolar – um elemento estruturante da sala de aula (Vidal, 2009) – fornece ao pesquisador muito mais do que dele se espera. É por meio dele, e indiretamente, que ficamos sabendo que os próprios alunos (nomes na tabela 2) foram atuantes na elaboração das figuras. Até a presente data não foram encontradas informações sobre o primeiro aluno, entretanto, no Correio Paulistano de 4 de junho de 1864, aparece a nomeação de Catão da Câmara Barcellos como tesoureiro[6] da Alfândega de Uruguaiana (RS). A dissertação de Mariana Flores (2007) sobre Contrabando e contrabandistas na fronteira oeste do Rio Grande do Sul (1851-1864) faz referência ao nome de Catão Barcellos como administrador das capatazias.

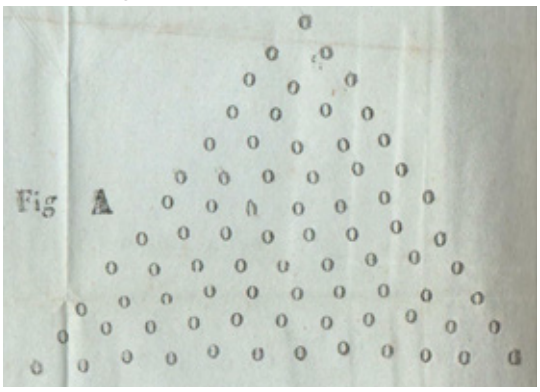
A ênfase nas imagens incluídas no livro de Soares coaduna com a sua proposta metodológica: partir do concreto para o abstrato. No texto, ao abordar o sistema métrico, ele remete o leitor para as estampas, dizendo – observar a figura 1 da estampa 5. Entretanto, apenas observar não basta para chegar ao conhecimento, segundo ele, é preciso raciocinar, aplicar esse conhecimento. Assim, ele aborda a necessidade de um sistema de medidas unificado para ser aplicado no comércio, nas manufaturas, nas medições de terrenos, nas trocas, etc.

Além das estampas, que incluem figuras, o autor faz uso de tabelas. Foram encontradas as seguintes: tabela de adição envolvendo os algarismos de 1 a 10, página 51; tabela de multiplicação (pitagórica) na página 62 e tabela de juros compostos, página 167. O problema de aplicação da soma de uma progressão, em que o autor se apoia numa imagem (figura 7), foi enunciado da seguinte maneira: "Suponhamos que um viveiro de árvores em forma de triângulo (Figura A, estampa 3[7]) dispostas em fileiras a uma certa distância, e a mesma distância de uma a outra árvore em cada linha; teremos $S = \frac{1}{2}(12x13) = 78$ como se vê na figura" (Soares, 1848, p. 242-243).

[6] Disponível em: https://memoria.bn.br/DocReader/docreader.aspx?bib=090972_02&pasta=ano%20186&pesq=%22Cat%-C3%A3o%20da%20C%C3%A2mara%20Barcellos%22&pagfis=9177

[7] Houve um engano do autor, a estampa é a 5.

Figura 7 – Recorte da Estampa 5



Fonte: Soares (1848, s/p)

As quatro operações aritméticas são usadas para resolver os problemas que envolvem as seguintes situações: dinheiro a somar ou subtrair, salário de trabalhador, distâncias, área de campo, construção de muro, queda de corpos, venda de mercadorias etc.

A variedade de problemas resolvidos que o autor inclui em seu livro mostra o amplo conhecimento de que ele era detentor, resultado de sua formação na Academia Politécnica e de sua experiência como docente na mesma instituição. Alguns enunciados podem ser incluídos a título de exemplificação.

Problema envolvendo diferentes unidades de medida: " 27 arrobas, 3 arratéis e 6 onças de chá custarão 437 moedas de ouro, 5 cruzados e 14 vinténs. Qual será o preço da arroba? (Soares, 1848, p. 110).

Sua formação acadêmica, sua atuação como professor e sua experiência como militar, transparecem em alguns enunciados de problemas, como: "A que distância nos achamos d'uma bateria de artilharia, se se ouve o tiro 30 segundos depois de ver a explosão, sabendo que o som corre 337 metros por segundo?" (Soares, 1848, p. 115).

A maneira dialogada mediante a qual o autor conduz o texto deixa entrever, entre os problemas propostos, ocasionalmente, recomendações para os alunos: "É preciso, pois, para entrar na resolução das questões, perfeita inteligência das causas de que procedem os resultados, para verificar se aquele que se procura depende somente dos números dados, ou se existem outras circunstâncias que não possam ser desprezadas" (Soares, 1848, p. 119).

Há enunciados de problemas simples que requerem poucos cálculos como: "qual o capital que a juro de 5% ao ano rende 1800 U em 6 anos?" (Soares, 1848, p. 129).

Ao tratar da temática do câmbio, o autor esclarece que, neste negócio, o cálculo é unicamente de uma multiplicação. Traz, no enunciado de um problema, o contexto local: "Querendo remeter de Pelotas para o Rio de Janeiro a quantia de 360U, vamos procurar um negociante para mandar entregar a dita quantia; quanto devemos dar pela letra de câmbio a 4,5% a favor do Rio de Janeiro?" (Soares, 1848, p. 141).

Os problemas envolvendo a regra de três começam com longo texto dialogado – "Temos visto como se determina um número por meio de três outros, dos quais dois sejam da mesma espécie

entre si, e o terceiro da espécie daquele que se procura" (Soares, 1848, p. 155). O autor enuncia um problema e detalha como resolvê-lo passo a passo. Por exemplo:

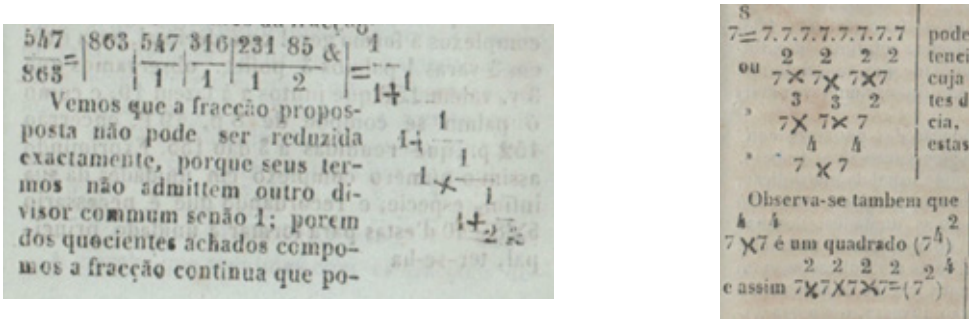
Enunciado: 12 homens fazendo 18 metros de certa obra em 5 dias, que número de metros farão 20 homens em 9 dias?	**Resolução comentada**: "escrevendo sobre duas linhas todos os números propostos, de maneira que correspondam os da mesma espécie, ter-se-á o seguinte" (Soares, 1848, p. 158)
18 metros 12 horas .... 5 dias x..... 20horas.....9 dias	$x = 18 \times \frac{20}{12} \times \frac{9}{5}$ $=30 \times \frac{9}{5}$ = 54 metros

Uma variedade de problemas envolvendo misturas de vinhos, de metais preciosos e cereais estão presentes como aplicações nas negociações.

As frações são introduzidas com a justificativa de serem necessárias aos usos civis e comerciais, entretanto o autor salienta sua importância para outros ramos da matemática, sem os mencionar. Explica a terminologia "avos" e sem dar exatamente uma definição do que seja fração, diz que a fração é um quociente que não se pode exprimir em números inteiros, e sua representação usa um traço, por exemplo 7/5, dois números – "um que enumere as unidades fracionárias, que por isso chamamos numerador e outro que indique a denominação dessas unidades ou seja o denominador" (Soares, 1848, p. 198).

As dificuldades tipográficas são percebidas em todo o livro, particularmente, quando era necessário expressar frações contínuas ou potências. A figura 8 ilustra isso:

Figura 8 – Frações contínuas e potências


Vemos que a fracção proposposta não pode ser reduzida exactamente, porque seus termos não admittem outro divisor commum senão 1; porem dos quocientes achados compomos a fracção continua que po-

Observa-se tambem que

Fonte: Soares (1848, p. 209, 217)

Em geral, o estudo dos logaritmos não pertencia ao ensino primário, mas Soares o introduziu como último tema de seu livro. Abordou, inicialmente, razão e proporção; definiu logaritmo em termos dos expoentes de progressões: "Estes expoentes, que declaram a razão de qualquer dos termos da progressão por quociente a respeito da base como fator invariável, se chamam logaritmos" (Soares, 1848, p. 252). Enunciou vários teoremas comentados sobre logaritmos, tratou aqueles de base dez; explicou a existência da tábua de Callet, como sendo a mais usada, apresentando alguns exemplos do uso da tabela.

REFLEXÕES FINAIS

As aritméticas da primeira metade do século XIX redigidas para o ensino primário diferem em conteúdos abrangidos em abordagem metodológica. Em comum têm a característica de, em geral,

não conterem referências. *A Exposição dos elementos d'aritmetica* de Soares caracteriza-se por iniciar com referências a situações-problema e não por definições; por incluir muitos exemplos que visam a aproximar o aluno da realidade que o cerca; por apresentar ilustrações; por incluir a história da matemática; por extrapolar os conteúdos, em geral, tratados no ensino primário - por exemplo, frações contínuas, diferentes bases, juros compostos e logaritmos; ter preocupações pedagógicas ao sugerir o uso de material concreto e, em sua originalidade, valer-se do auxílio de seus próprios alunos para desenhar – eles estão nomeados nas estampas.

O livro de Soares circulou, timidamente, em Pelotas e no Porto. Não encontramos uma segunda edição, o que não significa que não tenha existido. Rodrigues (2010) considera que a teoria que envolve as transferências culturais abriu muitos espaços para entendermos os intercâmbios, recepções e apropriações de ideias, inclusive no âmbito educacional. Matasci (2016) amplia essas ideias dizendo que o processo reformador no sistema escolar se caracteriza por intercâmbios, circulações e contatos entre os povos. Os fios deixados pelo nosso personagem, captados nas fontes documentais, permitem entendermos a história da educação matemática não como algo enraizado e estático, mas como uma dinâmica rede de contatos culturais diretos e indiretos que, como as ondas do mar, trazem águas que se renovam e se misturam.

AGRADECIMENTOS

Especialmente, merecem agradecimentos os pesquisadores João Caramalho Domingues, que gentilmente nos cedeu uma cópia digitalizada do exemplar de sua biblioteca particular do livro de Soares, e Hélder Pinto, que digitalizou o Jornal da Associação Industrial Portuense do ano de 1853.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. C.; ALMEIDA, A. J. **Ecos de um passado**: Uma listagem cronológica de documentação educativa em Portugal (1830-1834). Coleção História e Memória do Ensino da Matemática. APM: Lisboa, 2024a. http://hdl.handle.net/10362/153201.

ALMEIDA, M. C.; ALMEIDA, A. J. **Ecos de um passado**: Uma listagem cronológica de documentação educativa em Portugal (1835-1839). Coleção História e Memória do Ensino da Matemática. APM: Lisboa, 2024b.

ALMEIDA, M. C.; ALMEIDA, A. J. **Ecos de um passado**: Uma listagem cronológica de documentação educativa em Portugal (1845-1849). Coleção História e Memória do Ensino da Matemática. APM: Lisboa, 2023a.

ALMEIDA, M. C.; ALMEIDA, A. J. **Ecos de um passado**: Uma listagem cronológica de documentação educativa em Portugal (1850-1854). Coleção História e Memória do Ensino da Matemática. APM: Lisboa, (2023b).

Anuncio (1848). **O Americano** (RJ), 22 de abril, p. 2. Disponível em https///memoria.bn.gov.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=709549&pesq=%22Antonio%20Luiz%20Soares%22&pasta=ano%20184&hf=memoria.bn.gov.br&pagfis=171. Acesso em 20 dez. 2024.

Anuncio (1853). **Jornal da Associação Industrial Portuense**, abril de 1853, n. 16, p. 256.

ARRIADA, Eduardo; MEDEIROS Nogueira, Produção, circulação e uso de textos escolares e livros de leitura na escola elementar gaúcha. **Historia de la educación - anuario**, *15*(2), 168-187, 2024.

BASTO, Artur de Magalhães. **Memória Histórica da Academia Politécnica do Porto.** Porto: Imprensa Portuguesa, 1947.

CHERVEL, Andre. **História das disciplinas escolares**: reflexões sobre um campo de pesquisa. Teoria e Educação. N. 2, p. 177-229, 1990.

COUSIN, Victor. **Rapport sur l'état de l'instruction publique dans quelques pays de l'Allemagne, et particulièrement en Prusse**. Paris: Imprimerie Royal, 1832. https://nubis.univ-paris1.fr/ark:/15733/3b6c.

COUSIN, Victor. **De l'instruction publique en Hollande**. Bruxelas: Société Belge de Librairie, 1838.

ESCOLANO BENITO, Augustin. **A escola como cultura**: experiências, memórias e arqueologia. Campinas: Alínea, 2017.

ESPAGNE, Michel. **Les Transferts culturels franco-allemands**. Paris: PUF, 1999.

FLORES, M. F. C. T. **Contrabando e contrabandistas na fronteira oeste do Rio Grande do Sul (1851-1864).** 2007. 2001f.Dissertação (Programa de Pós-Graduação em História) -Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

FONTAINE, Alexandre. Pedagogia como transferência cultural no espaço franco-suíço: mediadores e reinterpretações de conhecimento (1850-1900). **História da Educação**, Porto Alegre, v. 18, n. 42, 187-207, 2014.

MATASCI, Damiano. (A França, a Escola Republicana e o Exterior: perspectivas para uma história internacional da educação no século 19. **História da Educação**, Porto Alegre, v. 20, n. 50, p. 139-155, set./dez, 2016.

PINTO, Hélder Bruno. **A matemática na Academia Politécnica do Porto**. 2012. 536p.Tese (Doutorado em História e Filosofia das Ciências). Universidade de Lisboa. Lisboa, 2012.

PINTO, Hélder Bruno. (2015). Lições de matemática num jornal da cidade do Porto (Portugal) em 1853: um episódio peculiar na formação de professores. In: Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática, 2015, Belém. **Anais** [...]. Belém:2015, p. 316-331.

RODRIGUES, Helenice. Transferência de saberes: modalidades e possibilidades. **História:** Questões & Debates, Curitiba, n. 53, p. 203-255, 2010.

SCHNEIDER, Regina Portela. **A instrução pública no Rio Grande do Sul**. Porto Alegre: Ed. Universidade UFRGS e EST Edições, 1993.

SILVA, Circe Mary. Transferências e apropriações de saberes: Friedrich Bieri e a matemática para o ensino primário. **História da Educação**, Porto Alegre, v. 19, n. 45, p. 43-66, 2015.

SILVA, Circe Mary. (Noções de geometria prática de Vasco de Araujo Silva. **Vidya***,* v. 39, n. 2, p. 477-493, 2019.

SOARES, Antonio Luiz. **A Exposição dos elementos d'aritmetica**. Pelotas: Typografia de L. J. de Campos, 1848. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/251545.

SOARES, Antonio Luiz. Da exposição dos elementos da arithmetica na aula de instrucção primaria da Associação em vários números do **Jornal da Associação Industrial Portuense, 1853.**

VIDAL, Diana. No interior da sala de aula: ensaio sobre cultura e práticas escolares. **Currículo sem Fronteiras**, v. 9, n. 1, p. 25-41, Jan/Jun., 2009.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Literatura como fonte histórica: vestígios de um Lewis Carroll educador

Literature as a historical source: traces of a Lewis Carroll educator

Rafael Montoito[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandese – IFSul

RESUMO

Este artigo apresenta uma das discussões realizadas durante a Mesa-redonda 2, cuja temática era "Pesquisa da História em Diferentes Fontes". Nesse, apresenta-se a literatura como fonte histórica, com o objetivo de ampliar a discussão das obras de Lewis Carroll na comunidade acadêmica brasileira e resgatar seu papel enquanto educador (matemático). Utilizando-se do paradigma indiciário e de algumas categorias de análise previamente estabelecidas, toma-se *Alimentar a mente*, um sermão escrito por Lewis Carroll, como fonte a ser estudada, visando responder à seguinte pergunta: A partir de quais vestígios dos textos de Carroll seria possível esboçar seu papel como educador (matemático)? Destacando-se trechos do respectivo sermão, mostra-se como é possível se identificar, neles, conselhos para que o estudante/leitor desenvolva hábitos sadios de estudo e, entrecruzando esses com outros escritos carrollianos que evidenciam críticas ao sistema educacional ou apresentam suas obras matemáticas, é possível se esboçar um panorama inicial de Carroll enquanto educador (matemático).

Palavras-chave: Literatura como fonte histórica; Lewis Carroll; *Alimentar a mente*; Educador.

ABSTRACT

This article presents one of the discussions held during Roundtable 2, whose theme was "History Research in Different Sources". In it, literature is presented as a historical source, with the aim of broadening the discussion of Lewis Carroll's works in the Brazilian academic community and rescuing his role as a (mathematical) educator. Using the evidential paradigm and some previously established categories of analysis, *Feeding the mind*, a sermon written by Lewis Carroll, is taken as the source to be studied, with the aim of answering the following question: From what traces of Carroll's texts would it be possible to outline his role as a (mathematical) educator? By highlighting excerpts from the sermon, it is shown how it is possible to identify in them advice for the student/reader to develop healthy study habits and, by intertwining these with other Carrollian writings that show criticism of the educational system or present his mathematical works, it is possible to sketch an initial panorama of Carroll as a (mathematical) educator.

Keywords: Literature as a historical source; Lewis Carroll; *Feeding the mind*; Educator.

[1] Doutor em Educação para a Ciência (UNESP) e Pós-doutor pelo Department of English Literature (University of Birmingham, Inglaterra). Professor na Coordenadoria de Matemática e no Programa de Pós-graduação em Educação no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSul), Pelotas, RS, Brasil. E-mail: xmontoito@gmail.com.

INTRODUÇÃO

O texto aqui apresentado pode ser entendido como a "textualização" da fala que integrou a Mesa-redonda 2 do XVI Seminário Nacional de História da Matemática, a qual ocorreu no dia 15 de abril. Para discutir a temática "Pesquisa da História em Diferentes Fontes", estavam presentes, à mesa, a Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira (UECE), a Profa. Dra. Elmha Coelho Martins Moura (UNILA) e eu, Prof. Dr. Rafael Montoito (IFSul), autor deste texto. A professora Carolina apresentou algumas de suas pesquisas sobre instrumentos matemáticos, a professora Elmha abordou questões sobre documentos e monumentos e, a mim, coube trazer elementos que propiciassem reflexões, para os campos da História da Matemática e História da Educação Matemática, sobre a literatura como fonte histórica.

Se esboço a breve descrição deste momento é para avisar ao leitor de algumas particularidades do texto que lerá agora, sobretudo um tom de escrita mais pessoal e menos "técnico" e a adoção da narrativa em primeira pessoa que, a meu ver, são escolhas mais indicadas para se escrever sobre ideias que foram, anteriormente, construídas e articuladas para uma intervenção oral; isso também justificará, penso, a quantidade e o tamanho de alguns extratos trazidos nesta escrita – todavia, tais escolhas não podem ser confundidas com falta de rigor no fazer da pesquisa e na comunicação das resultados obtidos, ainda que esses sejam parciais até este momento.

Comecei minha fala dizendo que, desde meu mestrado, defendido na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) em 2007, tenho trabalhado – não exclusiva, mas majoritariamente – com aproximações entre a literatura e a matemática. O catalisador disso foi meu encontro com a obra de Lewis Carroll (1832-1898), célebre escritor inglês, que tem *Alice no País das Maravilhas* como sua obra mais famosa. Para além desse livro, Carroll deixou uma vasta e memorável produção: escreveu outras histórias infantis e poemas, inventou diversos desafios (lógicos, matemáticos e gráficos), dedicou-se à fotografia, era diácono e escreveu vários panfletos, livretos e até mesmo obras mais volumosas sobre conteúdos de matemática, tendo se dedicado mais ardorosamente à lógica simbólica e à geometria euclidiana. Não é por acaso, portanto, que seu trabalho e suas vivências como professor de matemática na Christ Church, *college* da Universidade de Oxford (Inglaterra), tenha "contaminado" suas produções não-matemáticas com elementos que podem ser lidos e compreendidos como fazendo alusão aos conteúdos dessa disciplina. Sobretudo o raciocínio lógico, no sentido da construção do pensamento na forma de encadeamentos lógicos, foi assunto bastante estimulado e tratado por ele, a partir da construção de narrativas repletas de humor e nonsense – daí eu ter apontado, em estudos anteriores, que suas obras literárias são embasadas numa "lógica do nonsense" (Montoito, 2019) que não esfacela a lógica formal, mas amplia seus modos de pensar para o universo da fantasia.

Não tenho condições de afirmar, dada a vasta e diversificada produção de Carroll e as muitas camadas interpretativas que cada uma pode suscitar a um pesquisador, que esgotei o estudo de suas obras, sob o ponto de vista das pesquisas no campo da História da Matemática ou da História da Educação Matemática. Por outro lado posso, sem receio algum, dizer que já produzi uma quantidade interessante de estudos e artigos que consideraram produções literárias carrollianas como fontes históricas e que, nesses, construí argumentos por meio de uma escrita de oscilação pendular: tanto a obra literária, ao ser analisada, me permite pensar a literatura como um fonte histórica, quanto partir do estudo de diversos autores (Calvino, 2006; Ferreira, 2017; Neves, 2004), que reconhecem a literatura como uma fonte história, me baliza para estudar as obras de Carroll.

Em síntese, o que apresentei no começo da minha fala – uma fala pensada considerando que era provável ter na plateia pessoas que já tivessem lido trabalhos anteriores meus ou me visto apresentar algumas pesquisas feitas sobre as obras de Carroll em outros eventos – foi a intenção de *não* fazer uma defesa sobre a literatura como fonte histórica, por entender que este ponto, se ainda não é passivo para todos, ao menos já foi amplamente abordado por mim em momentos anteriores (Minks; Montoito, 2018; Minks; Montoito; Peraça, 2019), inclusive com o minicurso *Aproximações entre Matemática, Literatura e História: reflexões sobre o ensino e a pesquisa* (Montoito; Dalcin; Rios, 2021), ministrado no SNHM de 2021.

Minha fala, por conseguinte, que fora elaborada considerando a temática "literatura como fonte histórica", partia da premissa de apresentar uma pesquisa nova, inédita, ainda que com resultados, até o momento, tímidos e parciais. Com o objetivo principal de *ampliar a discussão das obras carrollianas na comunidade acadêmica brasileira e resgatar seu papel enquanto educador (matemático)*, a pesquisa se propunha a responder a seguinte questão: *A partir de quais vestígios dos textos de Carroll seria possível esboçar seu papel como educador (matemático)?* Como objeto de análise, a pesquisa considerou um de seus panfletos, publicado no Brasil no livro *Alimentar a Mente e Outros Textos de Lewis Carroll (tradução)*, por mim organizado em 2021, cuja apresentação será feita na seção seguinte.

Penso ser relevante destacar que o exercício de pesquisa que aqui será apresentado pode ser – obviamente, considerando-se variações e adaptações – realizado com outros autores e outras obras literárias, quando o pesquisador assumir essas como fontes históricas. Essa não é uma prerrogativa ou exclusividade de Carroll, e prova disso que é que tenho, individualmente ou com outros colegas de trabalho, desenvolvidos pesquisas semelhantes que investigam diferentes obras, tais como a peça *O Mercador de Veneza*, de Shakespeare[2] e os poemas de Fernando Pessoa (Montoito, 2025).

O LIVRO *ALIMENTAR A MENTE* – UMA APRESENTAÇÃO

Como anunciei antes, o objetivo principal da minha fala era, fazendo uso da literatura como fonte histórica, ampliar a discussão das obras carrollianas na comunidade acadêmica brasileira e resgatar seu papel enquanto educador (matemático). Este objetivo volta e meia permeia alguns movimentos meus enquanto orientador e pesquisador, e sinto que nele avanço, às vezes mais às vezes menos, realizando atividades distintas. Uma destas atividades foi a organização que fiz, em 2021, do livro *Alimentar a Mente e Outros Textos de Lewis Carroll (tradução)* (Carroll, 2021), o qual veio a ser publicado pela Editora IFSul.

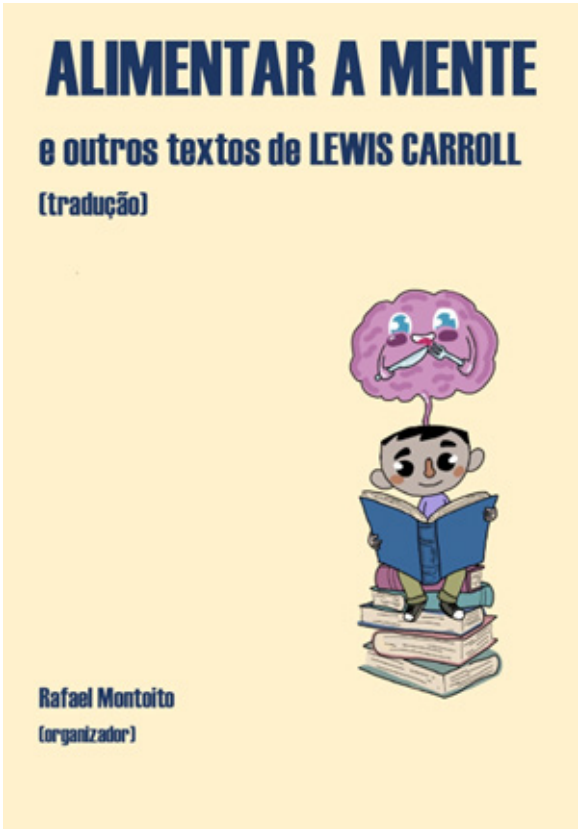
Este livro reúne oito textos diversos de Carroll, traduzidos pela primeira vez para a língua portuguesa. O material inédito, que mescla panfletos satírico-científicos, desafios lógicos, contos e sermões religiosos – alguns textos misturam mais de um desses estilos – foi selecionado e traduzido por seis professores/pesquisadores brasileiros. A proposta desta edição não era apresentar estudos referentes a estes textos, e sim disponibilizá-los para os leitores e estudiosos brasileiros. Deste modo, considerando-se uma Topologia da Tradução[3] (Montoito; Dalcin, 2022), a cada texto foram acres-

[2] Este artigo, escrito por mim e pela Profa. Dra. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov, encontra-se, até o momento, em com a avaliação pendente num periódico da área de Educação Matemática.

[3] Esta metáfora da topologia foi, por Montoito e Dalcin (2022), transformada em conceito. Os pesquisadores nomeiam "Topologia da Tradução" o ato tradutório de textos de interesse do campo da Educação Matemática, cuja tradução é realizada com extremoso cuidado aos aspectos matemáticos presentes no texto original. Em seu artigo, os autores investigam potencialidades e limites da Topologia da Tradução tomando, como objeto de estudo, dois escritos carrollianos: o longo poema nonsense *A Caça ao Turpente* e o romance *Sylvie and Bruno* (que só teve algumas partes traduzidas para a língua portuguesa).

cidas uma curta apresentação e notas de rodapé que os tradutores julgaram indispensáveis para explicar algum termo ou contexto atinente à escrita. A edição, que foi organizada por mim como uma celebração ao tempo que eu já dedicava aos estudos carrollianos – 15 anos, do começo do meu mestrado até 2021 – tem sua capa reproduzida na Figura 1.

Figura 1 – Capa da edição brasileira de *Alimentar a mente*



Fonte: Coleção particular do autor

No Quadro 1, a seguir, organizei uma síntese do livro, trazendo informações relevantes sobre cada "capítulo". O livro foi publicado em PDF e está disponível para download gratuito no site da Editora IFSul[4].

Quadro 1 – Obras de Carroll contidas em *Alimentar a mente*

Texto de apresentação ***Autor e Tradutor (Instituição)***	**Texto carrolliano**	**Tipo de texto e Ano da publicação**
Processos fotográficos do século XIX *Adriel Oliveira (UFRN)*	Dia de folga de um fotógrafo	Conto 1860
Sobre eleições e Euclides *Rafael Montoito (IFSul)*	A dinâmica da partícula	Panfleto 1865
Servir-se da lógica em qualquer assunto *Roger Minks; Rafael Montoito (IFSul)*	Algumas falácias populares sobre vivissecção	Panfleto 1875
Prefácio/Posfácio do tradutor *John Lennon Lindemann*	Parelhas: um desafio lógico com palavras	Jogo 1879

[4] http://omp.ifsul.edu.br/index.php/portaleditoraifsul/catalog/book/242

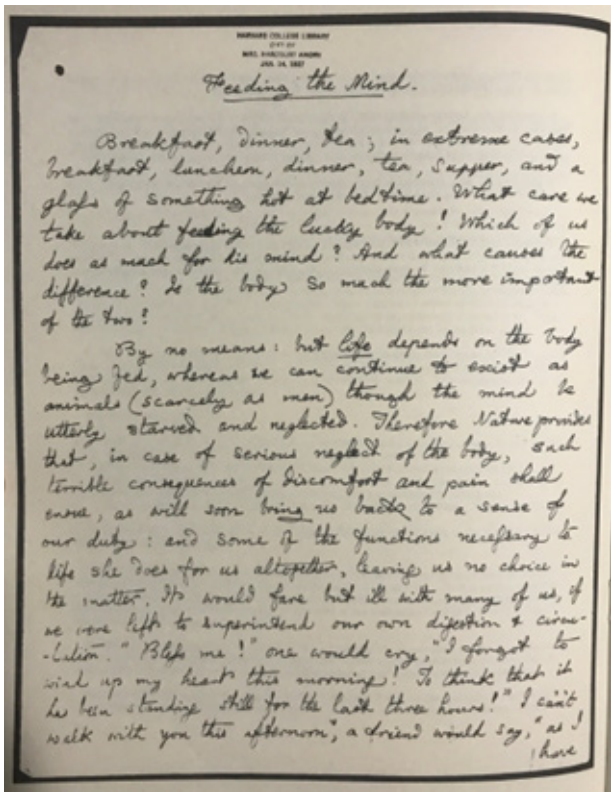
Como estudar eficazmente: dicas carrollianas / *Rafael Montoito (IFSul)*	Alimentar a mente	Sermão 1884
A história e a atualidade de um paradoxo lógico / *John Lennon Lindemann*	Um paradoxo lógico	Conto 1894
O paradoxo da inferência *Alexandre N. Machado (UFPR)*	O que o jabuti disse a Aquiles	Conto 1895
Introdução à "Punição eterna" *Frank Sautter (UFSM)*	Punição eterna	Sermão *circa* 1895

Fonte: Elaboração pelo autor

Observando-se o Quadro 1, o leitor poderá perceber que quase todos os pesquisadores/tradutores envolvidos neste projeto são professores universitários, à exceção de *John Lennon Lindemann*, que se titulou Doutor em Filosofia (UFSM) com uma tese sobre a lógica de Lewis Carroll, e *Roger Minks*, à época bolsista de projetos de iniciação científica (IFSul) que, por alguns anos consecutivos, dedicou-se ao estudo do panfleto *Algumas falácias populares sobre vivissecção*. O livro também apresenta o prefácio *Lewis Carroll: um breve (auto)retrato*, escrito pela professora Andréia Dalcin (UFRGS), e a apresentação *Ainda na toca do coelho: uma apresentação*, escrita por mim.

Destaco, para o leitor um pouco desatento, que o título do livro foi inspirado em um dos textos que ele contém, o sermão *Alimentar a mente*. Na Figura 2, trago a reprodução de uma página dele, a fim de mostrar para o leitor uma parte do texto que foi traduzido. A reprodução trata-se de uma edição comemorativa, organizada por Goodacre (1984), que replicava o documento original, escrito por Carroll de próprio punho, e sua respectiva textualização, além de outras informações sobre o local onde o sermão foi lido e de outros textos curtos do autor.

Figura 2 – Extrato de *Alimentar a mente* (Carroll, 1884), em seu idioma original



Feeding the Mind.

Breakfast, dinner, tea; in extreme cases, breakfast, luncheon, dinner, tea, supper, and a glass of something hot at bedtime. What care we take about feeding the lucky body! Which of us does as much for his mind? And what causes the difference? Is the body so much the more important of the two?

By no means: but life depends on the body being fed, whereas we can continue to exist as animals (scarcely as men) though the mind be utterly starved and neglected. Therefore Nature provides that, in case of serious neglect of the body, such terrible consequences of discomfort and pain shall ensue, as will soon bring us back to a sense of our duty: and some of the functions necessary to life she does for us altogether, leaving us no choice in the matter. It would fare but ill with many of us, if we were left to superintend our own digestion & circulation. "Bless me!" one would cry, "I forgot to wind up my heart this morning! To think that it has been standing still for the last three hours!" "I can't walk with you this afternoon", a friend would say, "as I have

Fonte: Goodacre (1984)

O sermão *Alimentar a mente* foi proferido por Carroll, em 22 de setembro de 1884, a uma pequena assembleia organizada por W. H. Draper, Vicário de Alfreton, em Debyshire (Inglaterra), a quem Carroll fora visitar. Após o sermão, Carroll presenteou-o com suas notas manuscritas – como não fora organizado para virar uma publicação, aconteceu de ele só ser editado e posto à venda após a morte de seu autor.

O sermão é todo construído a partir da ideia de que é possível se alimentar, de forma sadia, a mente, tal qual se busca uma alimentação sadia para o corpo. Conjecturo que Carroll inspirou-se em um provérbio até hoje bastante conhecido – *Mens sana in corpore sano* ("mente sã em corpo são"), citação latina oriunda da *Sátira X* do poeta romano Juvenal. Ainda que não tenha, até este momento, encontrado anotações de Carroll em seus diários sobre esta "inspiração", ela me parece possível porque sei que ele conhecia as obras do renomado poeta, seja porque tinha um bom conhecimento dos clássicos (Cohen, 1998) quanto porque, em outras de suas obras – por exemplo *Euclides e seus rivais modernos* –, utiliza trechos de Juvenal como citações.

É de *Alimentar a mente* que trarei alguns extratos para analisar e tentar, assim, responde à questão *A partir de quais vestígios dos textos de Carroll seria possível esboçar seu papel como educador (matemático)?*

O PANFLETO *ALIMENTAR A MENTE* – ALGUNS EXTRATOS E ANÁLISES

Antes de trazer elementos para elaborar esta análise, me sinto compelido a pontuar algumas questões: olhando em retrospecto, percebo que a construção da minha tese foi feita a partir da ideia de que a literatura é uma fonte histórica, embora à época eu ainda não estivesse tão fortemente apropriado destas discussões. Além da tradução comentada de um livro de Carroll inédito à época, a tese apresenta dois capítulos que tecem estudos sobre tal obra e tentam entender quais eram as intenções e motivações de Carroll ao escrever a obra *Euclides e seus rivais modernos*, num período em que discussões acaloradas dividiam a sociedade acadêmica entre aqueles que defendiam o abandono de Euclides e a elaboração de novos manuais "modernos" para o ensino da geometria nas escolas e universidades inglesas, e os que eram a favor de sua manutenção.

Neste estudo, em que considerei tanto aspectos próprios do livro (estrutura de escrita na forma de uma peça de teatro, epígrafes para os capítulos, citações de provérbios ou de autores reconhecidos que entranham a narrativa etc.) quanto sua existência no mundo (relação com demais obras do autor, quantidade de edições, circulação, críticas em periódicos etc.), estava dando os primeiros passos que, futuramente, me ajudariam a pensar modos mais sistemáticos/metodológicos de se aproximar de uma obra literária como fonte para pesquisas em História da Matemática e em História da Educação Matemática. Dizendo de outro modo, muitos dos movimentos de pesquisa que empreendi na realização da tese foram instintivos, porém ajudaram-me a pensar uma abordagem melhor estruturada para trabalhos futuros, a qual foi lapidada em estudos, conversas e teorizações posteriores com outros alunos e colegas pesquisadores. O arcabouço construído até aqui ajuda-me a, hoje, não precisar recomeçar do zero quando leio o panfleto *Alimentar a mente*.

Sendo assim, tomo como pontos de partida, quando na atualidade me debruço sobre uma literatura como fonte histórica, dois balizadores: o paradigma indiciário, de Ginzburg (1989), e as categorias de análise criadas por Montoito, Dalcin e Rios (2021).

Ginzburg (1989) comenta a centralidade do paradigma indiciário ao descrever o pesquisador como alguém que encontra e agrupa uma coleção de indícios – de pistas –; um indício leva a outro e, após achar uma variedade deles, o pesquisador, ao colocá-los um em proximidade do outro, se vê apto a produzir uma explicação crível para o fato investigado. Tal processo investigativo é comparado à tecitura de um tapete: "Poderíamos comparar os fios que compõem esta pesquisa aos fios de um tapete. Chegados a este ponto, vemo-los a compor-se numa trama densa e homogênea. A coerência do desenho é verificável percorrendo o tapete com os olhos em várias direções" (Ginzburg, 1989, p. 170).

Esta metáfora com os fios do tapete me agrada sobremaneira, e me parece muito clara. Entretanto, há vezes em que penso em "desfiar o tapete", puxar fio a fio para ir, numa metáfora equivalente, ver o que ele, separado do restante do desenho, vai me mostrando: com relação às suas cores, textura, material etc. E é neste ponto que retorno às categorias que sinalizei anteriormente, como se cada uma delas fosse um fio – ou um conjunto de fios – que eu posso "arrancar" do tapete e estudar, tanto tomando-o individualmente quanto aproximado de seu conjunto.

Figura 3 – Subcategorias para a análise das macrocategorias *Autor* e *Obra*

Fonte: Montoito, Dalcin e Rios (2021, p. 24; 38)

Ao apresentarem e comentarem as macrocategorias *Autor* e *Obra* e suas subcategorias, os pesquisadores deixam claro que não se deve esperar que qualquer literatura apresente evidências que possibilite a análise de todas elas; outrossim, ressaltam que elas não são disjuntas, e que indícios podem ser encontrados no entrecruzamento delas (por exemplo, as *cartas* do autor podem revelar por que ele decidiu escrever sua obra com determinada *estrutura* narrativa, ao invés de outra).

Apropriado deste olhar teórico, que converge na direção dos demais pesquisadores que validam a literatura como fonte histórica, e apoiado no paradigma indiciário e em algumas das categorias da Figura 3, trago, a seguir, uma pequena coleção de extratos do panfleto *Alimentar a mente*. Minha opção em trazê-los numa forma expandida – ou seja, não os reduzindo ou editando como se fossem citações – foi pensada para representar os momentos de leitura dos trechos, feitos durante a exposição da minha fala, e também para propiciar ao leitor uma aproximação, ainda que sutil, à literatura carrolliana. Nos extratos, as palavras e expressões que aparecem em itálico estão tal qual aparecem no texto original; já o que aparecer sublinhado o está por minha interferência, destacando partes do texto que me auxiliarão a efetuar os comentários subsequentes.

Extrato 1

Café da manhã, almoço, chá; em alguns casos extremos, café da manhã, lanche, almoço, chá, jantar e um copo com algo quentinho na hora de ir deitar. Quantos cuidados tomamos para alimentar nosso corpo! Quem de nós faz tanto assim por sua mente? E qual é a diferença? É o corpo o mais importante dentre os dois?

Fonte: Carroll (2021, p. 95)

Extrato 2

Primeira: devemos nos empenhar para providenciar o tipo adequado de comida para a mente. Desde cedo aprendemos qual será, e qual não será, boa para o corpo, e temos pouca dificuldade em recusar um pedaço tentador de pudim ou torta que está associado, em nossa memória, àquele terrível ataque de indigestão, cujo nome forçosamente evoca o ruibarbo e a magnésia; não obstante, são necessárias muitas lições para nos convencermos do quão indigestas são algumas de nossas leituras, e repetidamente nos alimentamos de romances prejudiciais à nossa saúde, a que seguramente se seguirão desânimo, indisposição para trabalhar, fadiga existencial – na verdade, um pesadelo mental.

Fonte: Carroll (2021, p. 96-97)

Extrato 3

Depois, precisamos ser cuidadosos para providenciar quantidades adequadas do alimento saudável. Glutonaria mental, ou ler em demasia, é uma propensão perigosa que conduz à fraqueza da capacidade digestiva e, em alguns casos, à perda de apetite.

Fonte: Carroll (2021, p. 97)

Extrato 4

Ainda, mesmo a comida sendo saudável e em quantidade adequada, sabemos que não devemos consumir muitos tipos diversos de uma só vez. Dê ao sedento um quarto de cerveja, ou um quarto de cidra, ou um quarto de chá gelado, e ele provavelmente lhe agradecerá (embora não tão animadamente, no último caso!). Todavia, quais você pensa que seriam seus sentimentos se lhe oferecesse uma bandeja com uma pequena caneca de cerveja, uma pequena caneca de cidra, outra de chá gelado, uma de chá quente, uma de café, uma de chocolate quente, e os correspondentes copos de leite, água, conhaque com água, e leitelho? A quantidade total poderia ser a de um quarto, mas o resultado seria o mesmo para o fazendeiro?

Fonte: Carroll (2021, p. 98-99)

Extrato 5

Tendo estabelecido o tipo adequado, bem como a quantidade e a variedade de nossa alimentação mental, devemos ter o cuidado de fazer intervalos adequados entre as refeições, e não engolir a comida apressadamente sem mastigá-la, para que seja completamente digerida; essas duas regras corporais são igualmente aplicáveis à mente.
Primeiro, com relação aos intervalos: esses são tão necessários à mente quanto o são para o corpo, com a diferença que, enquanto o corpo requer três ou quatro horas de repouso para se preparar para outra refeição, a mente, muitas vezes, necessita de três ou quatro minutos. Acredito que este intervalo requerido é bem menor que o usualmente suposto e, pela minha experiência pessoal, recomendaria, àquele que precisa dedicar várias horas consecutivas a um tópico, que provasse o efeito desta pausa; digamos que, a cada hora, parasse por cinco minutos, mas tendo o cuidado de deixar a mente absolutamente 'fora de controle' por estes cinco minutos, e voltá-la inteiramente a outros assuntos. É espantosa a quantidade de ímpeto e elasticidade que a mente recupera durante tais pequenos períodos de repouso.

Fonte: Carroll (2021, p. 99)

Extrato 6

E então, o processo mental correspondente à mastigação do alimento é o simples pensar sobre o que lemos. Este é um esforço muito maior para a mente do que a tomada mera e passiva de conteúdos do nosso Autor. [...] Uma hora de constante pensamento sobre um assunto (uma caminhada solitária é uma oportunidade tão boa para o processo quanto qualquer outra) equivale a duas ou três de apenas leitura. E consideremos outro efeito desta digestão completa dos livros que lemos: refiro-me à organização e 'etiquetação', por assim dizer, dos assuntos em nossas mentes, a partir de que estamos prontos a nos referirmos a eles quando necessitamos.

Fonte: Carroll (2021, p. 99-100)

Extrato 7

Para averiguar a salubridade do apetite mental de alguém, coloque em suas mãos um tratado curto e bem escrito, mas não empolgante, sobre algum assunto popular – um pão mental, na verdade. Se for lido com ardente interesse e profunda atenção, e se o leitor conseguir responder questões sobre o tópico mais tarde, a mente está em bom estado de funcionamento. Se polidamente o deixa de lado [...] você pode ter certeza que há algo errado com sua digestão mental.

Fonte: Carroll (2021, p. 103)

Parece-me claro que, em cada trecho que selecionei, Carroll se utiliza de metáforas alimentares para aconselhar o leitor a organizar sua rotina de estudos. Primeiramente (Extrato 1), começa com uma indagação provocativa para que o leitor pense se, de fato, está fazendo tanto assim por sua mente, ou seja, investindo nela, no sentido de construir um arcabouço com informações válidas e úteis, ou se tem se dedicado apenas a bobagens.

Em seguida, Carroll pontua (Extrato 2) que, para alimentar-se bem, é preciso que se providencie o tipo adequado de comida, bem como quantidades adequadas do alimento saudável (Extrato 3). Aqui há dois pontos claros que podemos pensar sobre o hábito de estudar: saber selecionar bons materiais e referenciais, e não em uma quantidade tão volumosa que não se consiga dar conta, pois não é indicado que se leve a mente à exaustão.

Mas apenas esses cuidados não bastam: não devemos consumir muitos tipos diversos de uma só vez (Extrato 4). Tal anotação me faz pensar na postura multitarefas que temos desenvolvido atualmente, devido à captação do tempo pela produtividade incrementada pelo neoliberalismo (Han, 2017), que conduz ao cansaço. Carroll está sinalizando que o estudo deve ser feito em "blocos", que algo deve ser acabado antes que outro seja começado; e, mesmo que o foco seja dado a um único conteúdo ou tarefa, deve-se ter o cuidado de fazer intervalos adequados (Extrato 5) nos momentos de estudo, sobretudo quando se "trava" em algum ponto – relaxar a mente com uma caminhada, por exemplo, como o autor sugere, pode ser extremamente benéfico.

Por fim, selecionar o material adequado e em doses corretas, não misturar conteúdos e fazer pausas durante o estudo são atitudes ineficientes se a esses hábitos não se juntar a atitude de pensar sobre o que lemos, o que pode compreender atividades de organização e 'etiquetação' (Extrato 6). Este é o momento da "digestão" na alegoria carrolliana, isto é, o momento da reflexão, da síntese, de se construir o conhecimento novo a partir do que foi "ingerido".

Acabado este processo, é possível saber se o leitor/estudante se apropriou do novo conhecimento se ele conseguir responder questões sobre o tópico mais tarde (Extrato 7), quando lhe forem feitas perguntas sobre o tema, ao invés de divagar e mudar de assunto.

Nesses e em outros trechos, o sermão de Carroll não traz elementos que possibilitem associá-lo diretamente ao ensino de tal ou tal disciplina, de tal ou tal conteúdo. Todavia, fica claro que o texto é sobre *instrução*, sobre como estudar e aprender melhor qualquer tópico – o que, dada a prolífera produção de Carroll, pode compreender desde assuntos teológicos até científicos. *Alimentar a mente*, portanto, traz alguns indícios de um Carroll educador, que elaborou suas próprias estratégias de estudo e aprendizagem e as compartilha com seu leitor.

Creio que seja adequado, após os extratos e estes breves comentários por mim esboçados, organizar uma síntese dos conselhos que emergem do texto de Carroll para o leitor/estudante:

- Escolher boas referências;

- Estudar a "quantidade" adequada, sem exageros;
- Estudar um assunto por vez;
- Fazer intervalos adequados;
- Pensar sobre o que se está estudando;
- Separar e classificar as informações.

E agora retorno às categorias da Figura 3 porque, como comentei anteriormente, olhar tão somente uma produção textual do Carroll, sem colocá-la em diálogo com outras obras suas, me possibilitaria traçar um esboço deste "Carroll educador", a quem procuro, um tanto quanto frágil. Também considerando o já referido paradigma indiciário, preciso encontrar outros indícios que, juntos com estes extratos, deem mais robustez às minhas interpretações desta fonte literária.

Debruçando-me sobre outros livros de Carroll, encontro outros trechos que fazem alusão aos processos de ensinar e de aprender. Há uma quantidade considerável deles, sobretudo se olho para suas cartas e diários, mas optei por trazer extratos de outros livros seus, os quais estão postos a seguir.

Extrato 8

[o ensino é uma aula de] "de culinária na qual a mente humana é uma salsicha, e tudo o que nos perguntamos é quanto recheio indigesto pode ser enfiado nela" (*Sylvie and Bruno Concluded*, tradução minha).

Fonte: Carroll (2005, p. 206)

Extrato 9

Eu reivindico, para a lógica simbólica, um lugar muito alto entre recreações que têm a natureza de jogos e quebra-cabeças [...]. O lógico abalizado [é] detentor de um "Abre-te, Sésamo!" que lhe dá acesso inesgotável e polivalente a uma caverna de tesouros. (*Symbolic Logic*, tradução minha).

Fonte: Carroll (1977, p. 45-46)

Extrato 10

Admito que ensinar Euclides exige paciência para ambos, tutor e aluno; mas posso afirmar que conheci muitos professores que têm se saído admiravelmente bem, e têm enviado à Universidade um grande número de alunos bastante hábeis em fazer deduções e outros exercícios; nunca conheci um professor realmente capaz e zeloso que tenha fracassado (*Euclides e seus rivais modernos*).

Fonte: Carroll (2014, p. 255)

Há algumas particularidades sobre os livros dos quais foram extraídas as passagens 8, 9 e 10. O primeiro, *Sylvie and Bruno Concluded*, foi publicado originalmente em 1893 e permanece sem tradução completa para a língua portuguesa. Este livro conta uma história que se passa em dois mundos paralelos, que volta e meia se entrecruzam: a Inglaterra da época de Carroll e um reino da fantasia, sendo que é nesse último que habitam os irmãos Sílvia e Bruno. Em alguns capítulos, os irmãos têm aulas com um preceptor, e é conversando sobre aulas que ele enuncia a fala que aqui trouxe, visivelmente uma crítica de Carroll ao sistema de ensino – não podemos esquecer que ele também atuava como professor.

O segundo livro, também sem tradução para a língua portuguesa até hoje, é o *Symbolic logic*[5], a obra carrolliana mais ambiciosa, falando do ponto de vista acadêmico, e inconclusa. Carroll de-

[5] Carroll pretendia escrever *Symbolic Logic* em três volumes, todavia só concluiu em vida o primeiro volume (*Elementary*). As anotações que dariam origem ao segundo volume (*Advanced*) foram organizadas e, reunidas com o material do primeiro, foram

fendia que aprender lógica seria, para além das formalidades da disciplina, uma ferramenta que ajudaria o indivíduo a identificar e não ser refém de falácias do cotidiano, como as que aparecem em reportagens de jornais ou enunciados científicos. Ele dedicou algum tempo de sua vida na elaboração de *The game of logic*, o qual foi publicado em 1885, que é um livro-jogo criado para ensinar lógica silogística, a fim de que o jogador conseguisse ter acesso a essa "caverna de tesouros" do pensamento bem estruturado.

Já *Euclides e seus rivais modernos*, disponível em língua portuguesa porque sua tradução compôs a elaboração da minha tese, é uma obra escrita na forma de uma peça de teatro, em que um professor analisa diversos manuais que surgiam à época de Carroll e que desejavam substituir *Elementos* de Euclides como livro-texto nas escolas e universidades. Carroll, um euclidiano convicto, que tantos outros panfletos e tratados já havia escrito sobre a obra de Euclides, defendeu seu livro veementemente, apontando que todos os candidatos a suplantá-lo apresentavam erros nas demonstrações ou na ordem de apresentação do conteúdo. Embasado em sua prática, Carroll não achava necessário que o ensino de geometria fosse "reinventado", mas sim que tutor e estudante tivessem paciência para avançar no estudo de Euclides.

Os dez extratos que trouxe neste texto me dão indícios para começar a construir a imagem de Carroll – para além de literato, fotógrafo, diácono etc. – como educador. Isso para mim não é um ponto óbvio, não posso tomar como posto de antemão apenas por saber que ele foi professor. Não cabe aqui esta discussão, mas imagino que os leitores compreendam que há algumas sutilezas que diferenciam os vocábulos "professor" e "educador", ainda que, por vezes, possa um estar contido no outro, ou até mesmo serem sinônimos.

Vejo Carroll como educador quando encontro vestígios de suas preocupações para ajudar os estudantes a aprenderem melhor, quando reconhece e critica falhas no sistema educacional, quando escreve obras que visam ensinar melhor determinado conteúdo. E o vejo como educador matemático em função destas mesmas obras, que se preocupam em divulgar conteúdos matemáticos, ensiná-los com nova roupagem e, até mesmo, estimular o estudante para que entenda a importância do estudo e perca o medo do conteúdo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar de já ter me debruçado sobre diversas obras de Carroll e as estudado considerando-as como objetos de pesquisa para a História da Matemática e História da Educação Matemática, esta apresentação surge de uma abordagem nova: a identificação/reconstrução – se possível – da identidade de Carroll enquanto educador (matemático). E se escrevo "matemático" assim, entre parênteses, é porque vislumbro a possibilidade de encontrar indícios que o apontem como educador, no geral, e para a matemática, de modo particular, uma vez que lecionava disciplinas dessa área.

A literatura que ele produziu, tomada como fonte histórica, me traz alguns indícios de que é possível seguir a pesquisa neste caminho. Falta-me, contudo, examinar melhor suas obras, entrecruzando-as com diversas outras fontes.

publicadas postumamente, acrescidas de anotações e introdução elaboradas pelo lógico William Warren Bartley III, em 1986. Com relação às anotações que originariam o terceiro volume, Cohen (1998) relata que foram postas fora pelos familiares de Carroll, em meio a outros papéis, depois da morte do autor.

REFERÊNCIAS

CALVINO, Italo. **Assunto encerrado**: discursos sobre literatura e sociedade. São Paulo: Companhia das Letras, 2006.

CARROLL, Lewis. **Euclides e seus rivais modernos**. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

CARROLL, Lewis. **Symbolic Logic.** Nova Iorque: Clarkson N. Potter Inc. Publishers, 1977.

CARROLL, Lewis. **The complete stories and poems of Lewis Carroll**. New Lanark: Geddes & Grosset, 2005.

COHEN, Morton N. **Lewis Carroll**: uma biografia. Rio de Janeiro: Record, 1998.

FERREIRA, Antonio Celso. A fonte fecunda. In: PINSKY, Carla Bassanezi; LUCA, Tania Regina (org.). **O historiador e suas fontes**. São Paulo: Contexto, 2017, p. 61-91.

GINZBURG, Carlo. **Mitos, emblemas, sinais**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

GOODACRE, Selwyn H. **Feeding the mind**: a centenary celebration of Lewis Carroll's visit to Alfreton in 1884. Burton upon Trent: Parker & Son, 1984.

HAN, Byun-Chul. **Sociedade do cansaço**. Petrópolis: Vozes, 2017.

MINKS, Roger; MONTOITO, Rafael. Edwin A. Abbott e sua obra *Planolândia*: a atualidade social de um universo matemático-literário. In: Encontro Luso-brasileiro de História da Matemática, 8, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais** [...]. Foz do Iguaçu: Unioeste, 2021, p. 185-200.

MINKS, Roger; MONTOITO, Rafael; PERAÇA, Graça. Literatura como fonte histórica: as escolas de Planolândia e o ensino de geometria na Inglaterra vitoriana. In: Seminário Nacional de História da Matemática, 13, 2019, Fortaleza. **Anais** [...]. Fortaleza: SBHMat, 2019, p. 1465-1475.

MONTOITO, Rafael. **Lógica e nonsense nas obras de Lewis Carroll**: silogismos e tontogismos como exercícios para o pensamento. Pelotas: Editora IFSul, 2019.

MONTOITO, Rafael. Poemas como cuidado de si: Fernando Pessoa e a matemática. In: Encontro Luso-brasileiro de História da Matemática, 9, 2022. **Anais** [...]. [no prelo.]

MONTOITO, Rafael; DALCIN, Andréia; RIOS, Diogo Franco. **Aproximações entre Matemática, Literatura e História**: reflexões sobre o ensino e a pesquisa. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

MONTOITO, Rafael; DALCIN, Andréia. Quase a mesma coisa: pensando uma topologia da tradução e/em pesquisas em educação matemática à luz de Wittgenstein. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 24, n. 2, p. 180-218, 2022. https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/57259

NEVES, Margarida de Souza. Literatura: prelúdio e fuga do real. **Tempo**, v. 17, p. 79-104, 2004. https://www2.historia.uff.br/tempo/wp-content/uploads/2024/11/artg17-5.pdf

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Caminhos Percorridos: a história da matemática na minha prática de formadora de professores

Journeys Taken: the history of mathematics in my practice as a teacher educator

Bruna Moustapha Corrêa[1]
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro – UNIRIO

RESUMO

Neste texto, compartilho como venho utilizando a história da matemática na minha prática de formadora de professores. Para situar, descrevo brevemente a minha trajetória acadêmica e a proposta de formação de professores em serviço que desenvolvi no doutorado – as atividades problematizadoras – e mergulho na abordagem ZIZO, uma proposta para o estudo da história da matemática utilizando fontes primárias com vistas à problematização do que é matemática e do modo que é ensinada. As atividades problematizadoras trazem à tona a experiência dos professores participantes e proporcionam uma experiência histórica a eles. Já a abordagem ZIZO combina momentos de aproximação e afastamento das fontes históricas. Compartilho também alguns caminhos traçados e percorridos com o término do doutorado e as publicações decorrentes. Além disso, apresento o Coletivo de História no Ensino de Matemática (CHEMat), grupo de pesquisa interessado na integração entre a história e o ensino de matemática. Apresento a pesquisa sobre inserções históricas em livros didáticos do PNLD que temos trabalhado e como ela se transformou em ações de formação, especificamente, o minicurso Três Teoremas de Pitágoras e culminou numa disciplina optativa para a Licenciatura em Matemática da UNIRIO. Meu objetivo é mostrar como a história, particularmente o estudo com fontes originais, pode permitir problematizar o que é matemática e consequentemente o seu ensino. Destaco a necessidade de adaptação e enfatizo a importância da colaboração, afinal, as iniciativas descritas só foram/são bem-sucedidas devida à parceria com colegas com diferentes expertises, buscando descentralizar o conhecimento e associando ensino, pesquisa e extensão.

Palavras-chave: Abordagem ZIZO; Historiografia Atualizada; Colaboração; CHEMat.

ABSTRACT

In this text, I share how I have been using the history of mathematics in my practice as a teacher educator. To provide context, I briefly describe my academic trajectory and the in-service teacher education proposal I developed in my doctorate – the problematizing activities – and I delve into the ZIZO approach, a proposal for studying the history of mathematics using primary sources with a view to be problematizing what mathematics is and how it is taught. The problematizing activities bring the experience of the participating teachers to the surface and provide them with a historical experience. The ZIZO approach combines moments of zoom in and zoom out from historical sources. I also share some journeys outlined and taken since the end of the doctorate and the resulting publications. Furthermore, I present the History in Mathematics Teaching Collective (CHEMat), a research group interested in the integration between history and mathematics teaching. I present the research on historical insertions in PNLD textbooks that we have been working on and how it has transformed into educational actions, specifically, the minicourse Three Pythagorean Theorems, and culminated in an elective course for the Mathematics Degree at UNIRIO. My objective is to show how history, particularly the study with original sources, can allow us to problematize what mathematics is and consequently its teaching. I highlight the need for adaptation and emphasize the importance of collaboration, after all, the initiatives described were/are only successful due to the partnership with colleagues with different expertise, seeking to decentralize knowledge and associating teaching, research, and outreach.

Keywords: ZIZO Approach; Updated Historiography; Collaboration; CHEMat.

[1] Doutora em Ensino e História da Matemática e da Física pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professora na Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: bruna.correa@uniriotec.br.

QUEM SOU EU E UM POUCO SOBRE A MINHA TRAJETÓRIA ACADÊMICA

O Seminário Nacional de História da Matemática completa 30 anos da sua primeira edição e esta é a primeira que eu participo. Vale a pena, então, me apresentar. Faço isso para que a leitora e o leitor possam saber de onde vem essas palavras e essas ideias. Ainda que eu seja muito mais do que sou capaz de descrever sobre mim, sigo atendendo ao meu chamado de compartilhar um pouco sobre quem sou.

Sou professora e formadora de professores de matemática. Atualmente atuo na Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO) e estou vice coordenadora deste curso. Já atuei como professora da Educação Básica, majoritariamente na rede estadual do Rio de Janeiro. E desde a minha graduação encantei-me com a história da Matemática.

Depois de ter me formado bacharel e licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense, a história da matemática e a formação de professores estiveram presentes, seja na minha atuação, seja na minha formação acadêmica. Ainda que os caminhos proporcionados pela minha graduação me levassem para a pós-graduação em Matemática, pura ou aplicada, consegui seguir o meu próprio caminho, no início, orientado mais pelo meu encantamento pela história da matemática. Em dezembro de 2008, defendi a minha dissertação de mestrado sobre a Introdução à Arte Analítica de François Viète (Corrêa, 2008), no Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (Pemat), da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Em seguida, comecei a atuar em projetos envolvendo a formação de professores.

Em 2015 voltei para o Pemat para cursar o doutorado. Defendi a minha tese (Moustapha-Corrêa, 2020) em junho de 2020. A tese está na interseção da formação de professores e da história da matemática, apresentando uma contribuição teórica, a postura problematizadora, e uma contribuição empírica, as atividades problematizadoras, e, mais particularmente, a abordagem ZIZO, uma proposta para o estudo da história da matemática utilizando fontes primárias com vistas à problematização do que é matemática e do modo como é ensinada.

No contexto do doutorado, realizei um período de sanduíche[2] com o professor Arhtur Powell na Rutgers University (New Jersey, EUA), que foi determinante para o desenho metodológico do estudo empírico realizado, e, consequente, das atividades problematizadoras. Outro caminho proporcionado pelo doutorado refere-se à parceria estabelecida com as professoras Elena Nardi e Irene Biza, da University of East Anglia (Norwich, GB) no contexto do Programa MathTASK[3]. Com elas, além de ter me apropriado do tipo particular de tarefas empregadas no MathTASK (Biza; Kayali; Moustapha-Corrêa; Nardi *et al.*, 2021), as quais me refiro por *mathtasks*, também pude me aprofundar mais na Teoria da *Commognition* (Sfard, 2008).

No que se refere à minha atuação na UNIRIO, alguns caminhos que venho traçando se refletem nos dois projetos de extensão que estou coordenando: "Narrativas e tarefas matemáticas na formação de professores: a matemática como acontecimento em sala de aula" e "Que história é essa? Caminhos para uma integração entre matemática, história e educação". O segundo deles se insere no contexto do Coletivo de História no Ensino de Matemática (CHEMat), caminho pro-

[2] Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior - 88881.133350/2016-01 da CAPES.

[3] No sítio <https://www.uea.ac.uk/groups-and-centres/a-z/mathtask> é possível conhecer o Programa MathTASK e em (Biza; Kayali; Moustapha-Corrêa; Nardi et al., 2021) descrevemos um pouco sobre algumas ações realizadas no seu contexto.

porcionado pelo meu engajamento com a história da matemática a partir do Pemat e sobre o qual aprofundo-me neste texto.

(DES)CAMINHOS DO DOUTORADO

Como este texto se refere à minha participação na Mesa Redonda "Pesquisas em História da Matemática, por Recém Doutores", discorro um pouco sobre os (des)caminhos que precisei percorrer durante o doutorado. Ao terminar o mestrado, comecei a me aventurar com a formação de professores, que acabou culminando com o meu ingresso como professora na UNIRIO. Eu estava andando por caminhos um tanto distantes da história da matemática. Porém, ela sempre esteve presente de alguma maneira, mesmo que no horizonte.

Ao ingressar no doutorado, ainda que o projeto apresentado não tivesse a história da matemática como protagonista, eu esperava incorporá-la de alguma maneira. Não foi possível. E o que eu achei que era um caminho, tornou-se um descaminho. Foi preciso, então, construir um novo projeto. O lado bom deste novo caminho é que eu pude me colocar mais. Foi o que eu fiz tentando articular as duas áreas que me interessam: a formação de professores e a história da matemática.

Para a construção deste caminho, o papel da colaboração tem destaque. Primeiro no que se refere à orientação e às parcerias estabelecidas: ter um orientador da formação de professores – Victor Giraldo – e uma orientadora da história – Aline Bernardes – foi muito determinante. O modo colaborativo com que a orientação foi conduzida, permitindo que eu me colocasse e trouxesse os meus conhecimentos e as minhas crenças é um pressuposto da proposta das atividades problematizadoras que apresentamos. Além disso, poder contar com a expertise de diferentes parceiros – como mencionado anteriormente – também compõe o coquetel que forma a proposta teórica e empírica que a tese apresenta. Ter participado de eventos acadêmicos (Moustapha-Corrêa; Bernardes; Giraldo, 2019) também foi preponderante para perceber o potencial da proposta que desenvolvemos.

ATIVIDADES PROBLEMATIZADORAS: UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO DOCENTE

As atividades problematizadoras são organizadas em rodadas e são compostas por tipos especiais de tarefas. Elas constituem uma proposta de formação para professores em serviço que busca articular práticas históricas e práticas da sala de aula. A nossa ideia foi apresentar as práticas históricas mais próximas de como foram elaboradas em seus contextos e incorporar, efetivamente, nas discussões, a experiência docente dos professores participantes. Essa ideia fundamenta-se no nosso objetivo de desenvolver nos professores participantes o que chamamos de *postura problematizadora*.

A Postura Problematizadora

A postura problematizadora, construto teórico que apresentamos na tese, é fundamentada na *educação problematizadora* de Paulo Freire (2016) e na *investigação como postura* de Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle (1999). Com o seu desenvolvimento, almejamos que os professores problematizem não apenas o modo como interagem com as produções de seus estudantes, mas, sobretudo, como entendem o que é a própria matemática. Esperamos que se distanciem de uma visão tradicional da matemática como um corpo de verdades imutáveis, muitas vezes desenvolvidas por gênios e, portanto, apenas para pessoas geniais. Também sustentam a postura problematizado-

ra a afirmação da docência como uma profissão (Nóvoa, 2009), com práticas e saberes próprios; o reconhecimento do professor como autor e protagonista da própria formação (Tardif, 2013); e o entendimento de saberes docentes como sendo dinâmicos e emergentes da própria prática, não podendo ser contidos em categorias fixadas a priori (Davis; Renert, 2013).

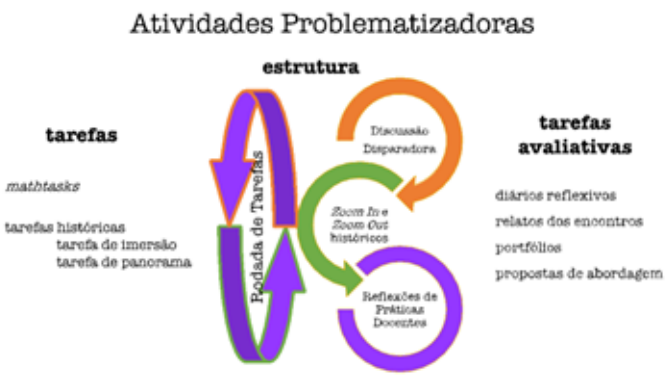
Ao assumir a postura problematizadora, somos impelidos a repensar saberes considerados consolidados e a aprimorar nossa capacidade de escuta perante a diversidade de discursos matemáticos, sejam eles provenientes de momentos históricos distintos ou dos próprios estudantes. É nesse sentido que entendemos que o estudo da história da matemática, sob uma perspectiva historiográfica atualizada e não presentista, e a análise das produções dos estudantes se tornam ferramentas essenciais para a reflexão crítica e para a desmistificação de visões lineares e elitistas sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático. Por fim, enfatizo que a postura problematizadora vai além da mera substituição de uma opinião, posição, ou concepção por outra. A partir do seu desenvolvimento, esperamos que o professor assuma uma posição de autonomia, autoridade e autoria em relação a suas próprias ações docentes.

As Atividades Problematizadoras

A estrutura em rodadas das atividades problematizadoras visa à articulação de práticas históricas e de sala de aula, a partir do engajamento com tarefas que utilizam fontes históricas originais e que promovam discussões coletivas em que os professores participantes se sintam instigados a investigar suas próprias práticas (Cochran-Smith; Lytle, 1999) e, quem sabe, reconstruí-las (Davis; Renert, 2013). O seu objetivo geral é incentivar os participantes a discutir e refletir sobre: (i) as rotinas relacionadas às suas práticas de ensino ou matemática; (ii) como eles entendem matemática; e (iii) os critérios que aplicam ao avaliar os raciocínios e produções dos estudantes.

Para tanto, cada rodada começa com uma discussão disparadora, seguida de um *zoom in* e *zoom out* históricos e culmina com reflexões de práticas docentes (Figura 1). Em cada rodada, combinamos tarefas históricas, *mathtasks* e trabalhos reflexivos, nos quais os professores devem escrever sobre o que aconteceu, e compartilhar seus pensamentos com o grupo. Essa estrutura se baseia em nossos referenciais teóricos da formação de professores, segundo os quais a formação em serviço deve privilegiar comunidades de professores que investigam juntos suas próprias práticas e conhecimentos (Cochran-Smith; Lytle, 1999; Davis; Renert, 2013).

Figura 1 – A atividade problematizadoras



Fonte: A autora

ABORDAGEM ZIZO

A abordagem ZIZO está estruturada em momentos de *zoom in* (ZI) e *zoom out* (ZO) e lança mão de dois tipos de tarefas históricas – tarefas de imersão e tarefas de panorama. Ela se organiza em três momentos intrincados: começamos com a imersão na fonte histórica, passamos por uma contextualização panorâmica que aborda questões sociais, históricas e, sobretudo, matemáticas, e voltamos para a fonte ser desvelada. Para entender as três etapas que compõem a abordagem ZIZO (Figura 2), passeemos um pouco pelos caminhos teóricos que a fundamentam.

Figura 2 – A abordagem ZIZO

Fonte: A autora

A abordagem ZIZO foi desenvolvida para promover *commognitive conflicts* (SFARD, 2008), a partir da exploração de fontes históricas e também do engajamento com discussões coletivas. De acordo com a teoria da *Commognition*[4], a matemática é um discurso que possui suas próprias regras. Tais regras definem padrões na atividade de produzir e legitimar as ações discursivas. Esta teoria participacionista sobre o ensino e a aprendizagem considera que aprender é participar de um discurso. Portanto, é preciso estar atento às mudanças nos padrões de comunicação. Quando há diferença nas regras usadas e endossadas e/ou quando há diferença nos modos de se referir a um objeto, o conflito pode acontecer. Esses são alguns exemplos do que Sfard chama de *commognitive conflicts*. Para a pesquisadoras eles não se configuram apenas como conflitos na comunicação ou no pensamento, mas, sobretudo, meios para a aprendizagem.

A pesquisadora dinamarquesa Tinne Hoff Kjeldsen e seus colaboradores perceberam o potencial de tais conflitos no contexto dos estudos históricos, particularmente com fontes originais. Para esses pesquisadores, ao se engajar no estudo de fontes históricas invariavelmente vai se contrastar as regras já sabidas com as regras que emergem da fonte: "a história pode ser usada na Educação Matemática para revelar regras metadiscursivas e torná-las objetos explícitos de reflexão e – por fim – para provocar commognitive conflicts" (Kjeldsen; Blomhøj, 2012, p. 330, tradução nossa). O contraste pode ser entendido como um *commognitive conflict*.

Os *commognitive conflicts* na abordagem ZIZO, particularmente e nas atividades problematizadoras, mais geralmente, são maneiras de se desafiar a zona de conforto dos participantes. Fazemos isso a partir do estudo de conteúdos conhecidos dos participantes, mas apresentados de um modo nunca visto. No caso da utilização de fontes originais, o participante se depara com um conteúdo que ele achava conhecer – por exemplo, resolver equação linear –, mas através de um método

[4] A teoria da *Commognition* é complexa. Por não ser objeto aqui deste texto, sugiro a leitura do livro em que Anna Sfard a apresenta (Sfard, 2008). Para uma leitura mais abreviada, o Capítulo 3 da minha tese (Moustapha-Corrêa, 2020) esclarece alguns aspectos dessa teoria fundamentais para o desenho da abordagem ZIZO.

aparentemente estranho – em que a notação e o argumento utilizados diferem muito do que estão acostumados.

A promoção de *commognitive conflicts* evidencia um uso de fontes históricas na minha prática de formadora de professores: o confronto entre práticas governadas por diferentes metarregras pode levar a um aprendizado em metanível, ou seja, uma mudança discursiva, em que o sujeito passa a entender suas próprias rotinas de modo diferente. Por outro lado, o estudo de práticas históricas pode desenvolver uma escuta intencional nos professores: o esforço pelo entendimento de uma fonte, pode implicar na busca pelo entendimento de outras produções (Arcavi; Isoda, 2007). Esses autores assumem que o estudo da história da matemática é um estudo essencialmente hermenêutico. Neste sentido, ao se tentar desvendar os enigmas dos textos históricos, é preciso desenvolver uma maneira de dar sentido a eles. Para eles, "aprender a ler e compreender certas fontes primárias pode resultar na aprendizagem das competências e das ferramentas necessárias para aprender a ouvir os alunos" (Arcavi; Isoda, 2007, p. 116).

A atividade proposta por Arcavi e Isoda (2007) convida os participantes a perceberem como os números eram representados no contexto egípcio, como multiplicavam e a entender a solução do problema 24[5] do papiro de Ahmes. Ao aplicá-la percebemos que era preciso contextualizar as práticas que eram apresentadas (sistema de numeração e modos de operar). Acabamos nos aproximando e nos afastando da fonte. Como essa combinação se mostrou muito vantajosa para os nossos objetivos, tentamos adaptá-la para os outros temas que desejávamos abordar no estudo empírico. E foi assim, afastando-se e aproximando-se da fonte, que a abordagem ZIZO despontou.

A abordagem ZIZO também é fundamentada pela perspectiva historiográfica atualizada, apresentada por Saito (Saito, 2018) em oposição à perspectiva tradicional e pela interpretação de história discutida por (Grattan-Guinness, 2004) em oposição à interpretação herança. Valorizamos, portanto, os "contextos de elaboração, transformação, transmissão e disseminação do conhecimento matemático em diferentes épocas e culturas" (Saito, 2018, p. 608) e não nos interessamos apenas pelos heróis que levaram o triunfo da matemática moderna, mas também pelos personagens periféricos e pelas práticas que não deram (tão) certo (Grattan-Guinness, 2004).

Essas nossas escolhas e concepções também se ancoram na matemática problematizada de Roque e Giraldo (2021). Esses autores destacam que o conhecimento matemático é socialmente produzido e historicamente situado, em vez de corresponder a um conjunto fixo de verdades. Nesse sentido, o trabalho sobre problemas socialmente situados não é visto como um caminho temporário para o conhecimento, mas como o *próprio* conhecimento. Essa visão problematizada se fundamenta na concepção de que as práticas históricas devem ser situadas em seus próprios contextos culturais. Em relação ao ensino de matemática, em uma concepção problematizada, devemos promover a construção de sentidos tanto individuais quanto coletivos, considerando as diversas maneiras pelas quais os estudantes ressignificam as ideias matemáticas e incorporar e integrar abordagens pedagógicas construídas com base nessa diversidade.

Cuidamos também com as narrativas históricas que escolhemos utilizar e contar, afinal, como Saito (Saito, 2018) nos chama atenção, as narrativas históricas não são neutras, guardando as concepções de ciência tanto das épocas relatadas, quanto das épocas em que foram escritas. Baseando-nos na premissa de que explorar possíveis descontinuidades e dificuldades no desenvolvimento de

[5] Uma quantidade, cuja sétima parte é somada a ela se torna 19.

práticas do passado abre possibilidades para criar cenários de aprendizagem que revelam uma face mais humana, inclusiva e democrática da matemática, buscamos desenvolver uma abordagem que vai de encontro à visão linear, cumulativa e progressista do desenvolvimento das matemáticas.

Uma pesquisa que usa a história da matemática

Para terminar os comentários sobre a minha tese, gostaria de enfatizar que a minha pesquisa de doutorado não é uma pesquisa de história da matemática *tout court*, a minha pesquisa *usa* a história da matemática. Considerando o texto de Arcavi e Isoda (2007), é possível perceber o uso que faço das pesquisas em história da matemática. Esse texto traz, a nosso ver, um exemplo de tarefa histórica com um grande potencial para a formação de professores. Como descrevem a tarefa inteiramente no texto, aproveitamo-la na abordagem ZIZO da nossa primeira rodada. Nas outras rodadas, também andamos por caminhamos já traçados. Esse, inclusive, foi um dos requisitos considerados na escolha dos temas de cada uma das três rodadas: precisávamos ter acesso às fontes históricas originais e também era preciso que algum conhecimento já tivesse sido estudado e desenvolvido sobre elas. No caso da rodada 1, estudamos um problema de Aha do Papiro de Ahmes (Arcavi; Isoda, 2007); na rodada 2, as proposições II.14 e I.47 dos *Elementos* de Euclides (Euclides, 2009); e na rodada 3, uma proposição sobre movimento uniformemente acelerado de Galilei (Galilei, 1638), duas definições de função apresentadas por Euler (Euler, 1748; 1755) e uma apresentada por Dirichlet (Lejeune-Dirichlet, 1837). Além das fontes originais supracitadas – que eventualmente traduzimos para o português – que compõem as tarefas de imersão –, utilizamos (Carvalho; Roque, 2012; Roque, 2012) como referências para as tarefas de panorama. Essas referências também guiaram as nossas escolhas das fontes.

Busquei descrever brevemente a estrutura da abordagem ZIZO e os tipos de tarefas utilizadas. Compartilhei um pouco os caminhos teóricos percorridos para a sua apresentação. Na tese (Moustapha-Corrêa, 2020), bem como nos artigos (Moustapha-Corrêa; Bernardes; Giraldo, 2022; Moustapha-Corrêa; Bernardes; Giraldo; Biza *et al.*, 2021) é possível passear um pouco mais detalhadamente pelos caminhos do estudo empírico em que a abordagem ZIZO foi desenvolvida e aplicada. Na sequência, compartilho um pouco dos caminhos propiciados pela minha pesquisa de doutorado e seguidos após a sua defesa.

DESDOBRAMENTOS

Tentativas de pós-doc e publicações

Ao concluir um doutorado é de se esperar que portas estejam abertas para percorrer caminhos naturalmente traçados pela pesquisa e pelas parcerias estabelecidas ao longo da jornada ou até mesmo nem tão óbvias assim. Mas, de qualquer maneira, em geral, o curso leva para a continuação e aprofundamento na pesquisa. Comigo não foi diferente: tinha muitas expectativas para me estabelecer como pesquisadora.

A participação no programa MathTASK fez com que eu concorresse, em parceria com a professora Elena Nardi, à prestigiosa bolsa oferecida no contexto de *Marie Skłodowska-Curie Actions*. O primeiro projeto era um desdobramento das atividades problematizadoras em que professores do Reino Unido e da Grécia desenvolveriam atividades com seus estudantes na educação básica. As tarefas históricas proporcionariam a observação de como a matemática se transforma ao longo

do tempo e em diferentes contextos sociais e culturais. Na segunda tentativa incorporamos mais explicitamente questões relacionadas à decolonialidade e a gênero. Infelizmente não conseguimos o fomento e o caminho do pós-doc ficou adiado.

Essa parceria, contudo, não deixou de gerar frutos. Publicamos um artigo sobre a terceira rodada do estudo empírico numa edição especial sobre *Commognition* no *Journal of Mathematical Behavior* (Moustapha-Corrêa; Bernardes; Giraldo; Biza *et al.*, 2021). O caminho da publicação não teve esse único resultado. Também publicamos um artigo sobre a abordagem ZIZO, exemplificado pela segunda rodada, numa edição especial da ZDM que relaciona a história da matemática e a educação matemática (Moustapha-Corrêa; Bernardes; Giraldo, 2022).

CHEMat: um coletivo que inspira

Um outro caminho de parcerias e colaboração que começou a ser traçado ainda durante o doutorado é o Coletivo de História no Ensino de Matemática, o CHEMat. Este coletivo é um grupo de pesquisa e extensão interessado na integração entre a história e o ensino de matemática. Fundado em 2017, reúne professores da educação básica e do ensino superior, além de estudantes de graduação e pós-graduação, provenientes de instituições da região metropolitana do Rio de Janeiro, a saber, UNIRIO, IFRJ – Nilópolis, UFRJ, SEMED – Belford Roxo, SME – Rio de Janeiro, CEDERJ e escolas da rede privada.

Investigando a história da matemática em livros didáticos

No CHEMat temos trabalhado no projeto de pesquisa "Análise das inserções de história da matemática em livros didáticos brasileiros", em que analisamos todas as coleções (um total de 24 livros) de livros didáticos do ensino médio aprovadas pelo PNLD 2018 (Amadeo; Haubrichs; Bernardes; Moustapha-Corrêa, prelo; Bernardes; Haubrichs; Amadeo, 2022; Haubrichs; Bernardes, 2020). Neste projeto nossa questão central é: investigar que história da matemática os estudantes da educação básica das escolas públicas têm tido acesso por meio dos livros didáticos de matemática aprovados no PNLD? O projeto está organizado em três etapas: mapeamento; análise e crítica; produção e testagem de propostas de ensino. Ainda no contexto do coletivo, também temos uma pesquisa de mestrado concluída sobre os livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental – PNLD 2020 (Teixeira, 2023; Amadeo; Bernardes; Teixeira, 2023; Teixeira; Bernardes, 2021).

Ambas as pesquisas procuraram por inserções históricas nos livros didáticos. Por inserções entendemos "qualquer tipo de informação que remeta ao passado, a qual pode abordar momentos do desenvolvimento histórico de conceitos, informações biográficas de matemáticos, livros ou outra publicação importante, datas de acontecimentos" (Haubrichs; Amadeo, 2021, p. 198).

A análise das inserções nos mostra que, de modo geral, elas são mais motivacionais, não situando os fatos apresentados em seus contextos, nem tampouco aprofundando aspectos matemáticos, como a historiografia atualizada recomenda. Isso nos incentivou mais ainda para a terceira etapa do projeto. Mas este não é um caminho tão fácil de ser desbravado. Ao observarmos as inserções percebemos que elas, em geral, enfocam um único aspecto. Por exemplo, descrevem a vida do personagem; ou mostram um mapa, tentando localizar geograficamente a prática matemática. De acordo com as orientações historiográficas mais atualizadas, a história da matemática deve contextualizar

tanto histórica, quanto social e matematicamente a prática em questão. Mas será possível abordar tantos aspectos em uma inserção de um livro didático da educação básica?

Este questionamento nos leva para o caminho que temos seguido: a formação de professores. Acreditamos que se o professor tem uma boa formação sobre os temas históricos, ao se deparar com uma inserção histórica no livro didático, ele será capaz de desenvolver o assunto trazendo para a discussão com seus estudantes outros aspectos históricos. Por exemplo, ao trazer um mapa, a inserção permite mostrar como era a disposição geográfica, propiciando discutir sobre como os meios de comunicação não eram imediatos tal como hoje em dia. Isso ajuda a problematizar aquela visão de que a matemática é cheia de lacunas que vão sendo preenchidas ao longo do tempo. Mas se a inserção traz só isso, ou isso e algumas informações biográficas, ela carece de informações sobre as práticas matemáticas realizadas.

Para dar conta dessas carências, defendemos as atividades que temos desenvolvido no contexto da formação de professores. Nossas atividades visam que os professores incrementem seus repositórios de referências, de modo que se sintam seguros para fazer uma contextualização matemática. Uma tal contextualização considera que, ainda que hoje nos referimos ao teorema de Pitágoras como se ele fosse único, em diferentes momentos históricos o que se fazia pode parecer muito diferente do modo como lidamos com ele.

O minicurso Três Teoremas de Pitágoras

Conscientes de que as práticas pitagóricas estariam mais próximas de uma aritmética figurada, bem como de que a prática euclidiana é uma prática geométrica que constrói axiomaticamente com régua e compasso as figuras a serem exploradas, desenvolvemos um conjunto de atividades para problematizar o que é o teorema de Pitágoras. Para tanto, utilizamos tampinhas para poder observar os padrões à la pitagóricos e régua e compasso para ter uma experiência efetivamente geométrica. Neste caso, não conseguimos – por falta de referências originais – utilizar as fontes primárias. Dizemos, então, que nos *inspiramos* nas fontes para tentar oferecer ao participante uma experiência mais próxima do original possível.

Começamos o minicurso (Bernardes; Moustapha-Corrêa; Amadeo, 2025) apresentando algumas inserções sobre o teorema de Pitágoras. A ideia é que se perceba como a história da matemática costuma ser apresentada – em geral, reduzindo-a a referências biográficas, muitas vezes anedóticas, sem se aprofundar na prática matemática; isto é, uma história presentista que busca no passado o que fazemos hoje em dia. Além disso, esse passeio por alguns livros didáticos nos permite destacar que, em geral, na educação básica, o teorema de Pitágoras é reduzido a uma relação algébrica, em que se determina um dos lados de um triângulo retângulo conhecendo-se os outros dois.

Passamos, então, a identificar padrões e relações a partir da manipulação de formas – temos utilizado tampinhas de garrafas pet. Uma tal manipulação é essencial para a experiência histórica que defendemos, de modo que o participante não seja induzido para um pensamento essencialmente aritmético. Isso pode acontecer pois as práticas matemáticas pitagóricas consistiam em observar relações entre figuras poligonais formadas possivelmente com pedrinhas. É o que hoje chamamos de números figurados. No minicurso, fazemos tarefas sobre números triangulares e quadrados e também exploramos um pouco das triplas pitagóricas.[6] Para um público mais atento esperamos que se

[6] No livro, encontram-se as atividades, bem como comentários sobre elas.

pergunte: “onde está o triângulo retângulo?”. Ainda que seja possível, dispor os quadrados formados pelas triplas pitagóricas de modo a formar um triângulo retângulo, discutimos que é muito pouco provável que os pitagóricos tenham feito isso: os pitagóricos não relacionavam as triplas a um triângulo retângulo. É nesse espírito que defendemos que para os pitagóricos o teorema era aritmético.

Na segunda etapa do nosso minicurso, exploramos a prática euclidiana a partir de construções com régua e compasso. A utilização dessas ferramentas é essencial para a experiência, que se baseia na noção de equivalência de áreas. Propomos que a área seja determinada através de procedimentos geométricos sem que seja necessário atribuir valores numéricos ou fazer cálculos com fórmulas. Nas atividades, convidamos os participantes a sugerirem seus próprios modos para se chegar na construção esperada. No caso de não saberem ou terem alguma dificuldade, oferecemos sugestões de construções a serem discutidas e justificadas. O teorema de Pitágoras aparece nas construções como uma estratégia para somar geometricamente dois quadrados. Oferecer uma experiência como essa para professores (em formação inicial ou continuada) pode ajudá-los a encarar o estudo da geometria de modo menos algébrico.

É assim que temos contraposto práticas históricas com vistas à desconstrução de mitos relacionados às práticas pitagóricas e euclidianas, desenvolvendo, uma visão mais crítica nos professores – tanto com relação à história, quanto com relação ao próprio modo de ensinar temas corriqueiros nas aulas de matemática. A nossa abordagem ancora-se na noção de *commognitive conflicts*, ou seja, geramos desconforto, pois trazemos modos de operar muito diferentes do que os professores estão acostumados a fazer e a lidar em sua rotina docente. Como fiz na proposta das atividades problematizadoras, aqui também esperamos que, na medida em que experienciam dificuldades em realizar uma tarefa que lhes parece familiar, ao lidarem com as dificuldades dos seus estudantes, passem a ser mais empáticos, considerando raciocínios diferentes dos previstos.

A oferta de uma disciplina que trabalha as perspectivas do CHEMat

Uma outra iniciativa representativa das práticas do CHEMat é a disciplina optativa “Integração entre História e Ensino de Matemática”. Ela está organizada em três unidades: 1) O que os livros didáticos nos dizem sobre a história da matemática; 2) Discussões teóricas de por que e como integrar a história no ensino (dificuldades, limitações e benefícios); e 3) Experiências com o uso da história por meio de oficinas.

Esta disciplina busca levar para a formação inicial de professores as reflexões e abordagens desenvolvidas no contexto do CHEMat. Ela também representa um importante caminho traçado no curso de Licenciatura em Matemática da nossa instituição: ver as nossas perspectivas teóricas e práticas sendo aplicadas em uma disciplina, de certa forma, as materializa e nos move para seguir não somente a pesquisa, mas, sobretudo, a colocar em prática o que estudamos, pesquisamos e defendemos.

As ações do CHEMat, particularmente, o minicurso e a disciplina, mostram a relevância da pesquisa em História da Matemática para além de pesquisas como a da minha tese, impactando, efetivamente, a formação de professores, a análise crítica de materiais didáticos e a produção de novos conhecimentos e propostas para a educação matemática.

RUMO À PERMANÊNCIA DA COLABORAÇÃO

A colaboração tem sido um elemento fundamental nos meus caminhos e especialmente na minha trajetória de pesquisa, desde as parcerias estabelecidas durante o doutorado (MathTASK) até a atuação no CHEMat. Para mim, a colaboração foi essencial para a realização da minha pesquisa e a conclusão do doutorado. Enfatizo que o caminho da colaboração permite o aproveitamento de diferentes expertises, a descentralização do conhecimento, levando a mais possibilidades de difusão dos conhecimentos produzidos. No contexto da atuação na universidade, a colaboração, a meu ver, é muito frutífera na associação de pesquisa, ensino e extensão, demandas inerentes para quem atua nessa área.

Não estou dizendo que a colaboração simplifica as coisas. Pelo contrário, muitas vezes ela "dá mais trabalho". Mas, em geral, percebo que as possibilidades propiciadas pelas trocas entre pares são interessantes e mais diversas. Os meus caminhos têm me mostrado que é desafiante integrar a história da matemática no ensino. O tempo tem sido cada vez mais caro, talvez por conta das demandas mais imediatistas que tem emergido em eras tecnológicas e imbuídas das dinâmicas das redes sociais. Além disso, o contexto educacional tem caminhado para rumos que cerceiam a liberdade e autoria dos professores. O que torna mais desafiador ainda conseguir incorporar na prática docente fatores não previstos – como pode ser a história da matemática. Para mim, os desafios reforçam a necessidade de colaboração na criação e disseminação de atividades inspiradas na história que sejam viáveis e impactantes. Explorar o potencial de combinar ferramentas manuais e tecnológicas, como régua e compasso com Geogebra, parece ser um caminho promissor.

A pesquisa em História da Matemática no ensino é um campo vasto e desafiador, mas com um potencial enorme para desenvolvimento do pensamento crítico em estudantes e professores. As atividades problematizadoras e, particularmente, a abordagem ZIZO, bem como as iniciativas implementadas pelo CHEMat são uma tentativa de concretizar esses ideais, e a colaboração é a chave para que essas ideias se difundam e se fortaleçam. Agradeço a oportunidade de compartilhar esta jornada e espero que este relato possa inspirar outros recém-doutores e pesquisadores a explorar os ricos e promissores caminhos que a história da matemática oferece para a educação matemática.

REFERÊNCIAS

AMADEO, Marcello; HAUBRICHS, Cleber; BERNARDES, Aline; MOUSTAPHA-CORREA, Bruna. History of Mathematics in Brazilian Secondary School Textbooks. In BARBIN, Evelyne; FRIED, Michael N.; MENGHINI, Marta; TORTORIELLO, Francesco Saverio (org.). **History and Epistemology in Mathematics Education – Trends, practices, future developments**. (no prelo). Springer.

AMADEO, Marcello; BERNARDES, Aline; TEIXEIRA, Wilza. M. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS: uma análise de coleções do PNLD 2018 e 2020. **Anais-Seminário Nacional de História da Matemática**, 15, 2023.

ARCAVI, Abraham; ISODA, Masami. Learning to listen: From historical sources to classroom practice. **Educational Studies in Mathematics**, 66, n. 2, p. 111-129, 2007.

BERNARDES, Aline; HAUBRICHS, Cleber; AMADEO, Marcello. Narrativas e Usos de História da Matemática nos Livros Didáticos do PNLD 2018. In: Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia – SNHCT, 18, São Paulo. **Anais eletrônicos** [...]. São Paulo: Sociedade

Brasileira de História das Ciências, 2022, pp. 71-83. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1Q1z0OzUWYUwSl5SZ_NFdUS-DtWs5KQx6/view. Acesso em: 27 nov. 2024.

BERNARDES, Aline; MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna. ZIZO: a abordagem de zoom in e zoom out para o estudo de história da matemática na formação de professores. In: Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia - SNHCT, 17, 2020, Rio de Janeiro. **Anais eletrônicos** […] Rio de Janerio: SBHC, 2020. Disponível em: https://www.17snhct.sbhc.org.br/resources/anais/11/snhct2020/1599848754_ARQUIVO_d954730235fa3a2cb15d7c3aca5dc8e1.pdf. Acesso em: 17 de maio 2025.

BIZA, Irene; KAYALI, Lina; MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna; NARDI, Elena; THOMA, Athina. Afinando o foco em matemática: Desenho, implementação e avaliação de atividades MathTASK para a formação de professores de matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, 14, n. 35, p. 1-41, 2021.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de.; ROQUE, Tatiana. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

COCHRAN-SMITH, Marilyn; LYTLE, Susan. Chapter 8: Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *In*: **Review of research in education**, 1999. v. 24, p. 249-305.

CORRÊA, Bruna Moustapha. **A introdução à arte analítica de François Viète**: comentários e tradução. 2008.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, 82, n. 2, p. 245-265, 2013.

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600 p. (Tradução e Introdução de Irineu Bicudo.

EULER, Leonard. **Introductio In Analysin Infinitorum**. Lausanne: MM Bousquet, 1748.

EULER, Leonard. **Institutiones Calculi Differentialis Cum Eius Usu In Analysi Finitorum Ac Doctrina Serierum**. Impensis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, 1755.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 60a edição ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2016. 284 p.

GALILEI, Galileu. **Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze Attenenti alla Mecanica ed i Movimenti Locali**. Leiden: Louis Elsevier, 1638.

GIRALDO, Victor; ROQUE, Tatiana. Por uma matemática problematizada: As ordens de (re) invenção. **Perspectivas da Educação Matemática**, 14, n. 35, p. 1-21, 2021.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. **Historia mathematica**, 31, n. 2, p. 163-185, 2004.

HAUBRICHS, C.; AMADEO, M. História da Matemática nas coleções do PNLD 2018: um estudo preliminar. **Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA)**, 6, n. 2, p. 197-210, 2021.

HAUBRICHS, Cleber; BERNARDES, Aline. Inserções de históriaem livros didáticos de matemática: elaborando um instrumento de coleta de dados. In: Seminário Nacional de História da

Ciência e da Tecnologia – SNHCT, 17, 2020, Rio de Janeiro. **Anais eletrônicos [...]**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de História das Ciências, 2020. Disponível em: https://www.17snhct.sbhc.org.br/resources/anais/11/snhct2020/1599695763_ARQUIVO_9305592694d752e40f9fd060e1153369.pdf. Acesso em: 27 nov. 2024.

KJELDSEN, Tine Hoff; BLOMHØJ, Morten. Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 80, n. 3, p. 327-349, 2012.

Lejeune-Dirichlet, Johann Peter Gustav. (1837). Üeber die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus - und Cosinusreihem. **Repertorium der Physik**, 1, 152–174.

MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna. **Rumo a uma postura problematizadora na formação de professores de matemática**: articulando práticas históricas e práticas de sala de aula. 2020. 362f. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 2020.

MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna; BERNARDES, Aline; GIRALDO, Victor. **Historical Tasks to Foster Problematization**. *In*: Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 2019, Utrecht, the Netherlands. Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME, p. 2149-2157.

MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna; BERNARDES, Aline; GIRALDO, Victor. ZIZO: A history-based approach to mathematics teacher education. **ZDM–Mathematics Education**, 54, n. 7, p. 1537-1552, 2022.

MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna; BERNARDES, Aline; GIRALDO, Victor; BIZA, Irene; NARDI, Elena. Problematizing mathematics and its pedagogy through teacher engagement with history-focused and classroom situation-specific tasks. **The Journal of Mathematical Behavior**, 61, p. 100840, 2021.

NÓVOA, Antonio. Para uma formação de professores construída dentro da profissão. *In*: **Professores: Imagens do Futuro Presente**. Lisboa: EDUCA, 2009.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 507p.

SAITO, Fumikazu. A pesquisa histórica e filosófica na educação matemática. **Eventos Pedagógicos**, 9, n. 2, p. 604-618, 2018.

SFARD, Anna. **Thinking as communicating : human development, the growth of discourses, and mathematizing**. New York: Cambridge University Press, 2008. 324 p.

TARDIF, Maurice. A profissionalização do ensino passados trinta anos: dois passos para a frente, três para trás. **Educação & Sociedade**, 34, n. 123, p. 551-571, 2013.

TEIXEIRA, Wilza. Maria Adão Lopes; BERNARDES, Aline. História da Matemática em livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. **Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA)**, 6, n. 2, p. 259-271, 2021.

TEIXEIRA, Wilza Maria Adão Lopes. **Inserções de história da matemática nos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental aprovados pelo PNLD 2020**. 2023.

149f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 2023.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Fonte de pesquisa: uma reflexão sobre monumentos na perspectiva documento/monumento

Research source: a reflection on monuments from the document/monument perspective

Elmha Coelho Martins Moura[1]
Universidade Federal da Integração Latino-Americana – UNILA

RESUMO

Este artigo refere-se à mesa de discussão sobre fontes de pesquisa, realizada em comemoração aos 30 anos do Seminário Nacional de História da Matemática (XVI SNHM). O texto busca analisar os monumentos como fontes de investigação histórica, fundamentando-se na abordagem documento/monumento proposta por Le Goff. O estudo concentra-se na Estátua da Juventude, localizada no Rio de Janeiro, explorando sua relação com história, memória e poder. A pesquisa destaca a importância desse monumento na construção das narrativas históricas, evidenciando seu papel na preservação e interpretação do passado.

Palavras-chave: História; Educação Matemática; Estátua da Juventude Brasileira; Homem Brasileiro.

ABSTRACT

This article refers to the discussion panel on research sources, held in celebration of the 30th anniversary of the National Seminar on the History of Mathematics (XVI SNHM). The text seeks to analyze monuments as sources of historical investigation, based on the document/monument approach proposed by Le Goff. The study focuses on the Statue of Youth, located in Rio de Janeiro, exploring its relationship with history, memory, and power. The research highlights the importance of this monument in the construction of historical narratives, emphasizing its role in the preservation and interpretation of the past.

Keywords: History; Mathematics Education; Statue of Brazilian Youth; Brazilian Man.

[1] Pós-doutora pela Universidade Nova de Lisboa/PT. Professora de Educação Matemática na Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Foz do Iguaçu, Paraná, Brasil. E-mail: elmhac@yahoo.com.br.

INTRODUÇÃO: UM COMEÇO...

É uma honra participar deste momento especial, comemorando os 30 anos do Seminário de História da Matemática. Ao longo de três décadas, este evento tem sido um espaço de troca e aprendizado, mostrando como a História da matemática e da Educação matemática se entrelaçam com nossas histórias e influenciam nosso futuro. Que este evento, esta nossa conversa continue a nos inspirar a continuar fazendo histórias e valorizando esse legado!

Quero convidá-los/convidá-las a observar a imagem do Colosso de Rodes. Este monumento marcou minha primeira lembrança sobre o tema. Vi sua imensa imagem em um filme, com barcos passando sob seus pés e tripulantes espantados com a grandiosidade da estátua. Perguntei ao meu pai sobre ela, e ele explicou que era uma das sete maravilhas do mundo antigo, mas que há muito tempo havia sido destruída. Curiosa, questionei como se sabia tanto sobre algo que não existia mais, e ele respondeu que há registros -documentos, textos, imagens - que nos permitem reconstruir sua história.

Na minha cidade natal, Cuiabá (MT), não havia monumentos grandiosos como palácios ou obeliscos, mas sempre me chamaram a atenção as casas antigas e casarões. Meu fascínio por monumentos cresceu ao visitar o Rio de Janeiro, onde fontes históricas, jardins, palácios e igrejas contrastavam com a arquitetura moderna. Em Manchester, me impressionei com as construções imponentes, reflexos da industrialização, assim como igrejas e museus que preservavam o passado. Mas foi em Lisboa que percebi a verdadeira riqueza dos monumentos como fonte de pesquisa. O Cristo Rei, a Ponte 25 de Abril, o Padrão dos Descobrimentos, o monumento ao Marquês de Pombal, igrejas, palácios, museus, vinícolas e bibliotecas - cada um desses lugares evocava história e despertava uma necessidade em mim: pesquisar mais sobre os monumentos como fonte de pesquisa acadêmica.

Com isso, este texto tem como objetivo discutir os monumentos como fontes de pesquisa, com base na abordagem de Documentos/Monumentos de Le Goff. A análise será conduzida a partir do estudo da Estátua da Juventude, localizada no Rio de Janeiro. A escolha adequada do monumento como fonte de pesquisa permite uma investigação aprofundada dos aspectos históricos que articulam as relações entre história, memória e poder, evidenciando sua relevância na compreensão do passado e na configuração de narrativas históricas.

FONTE HISTÓRICA: UMA BREVE DISCUSSÃO

A produção historiográfica requer a utilização de documentos históricos. Ao longo do tempo, a concepção de documento foi ampliada, passando de registros escritos, os textos, para uma ampla diversidade de objetos materiais e imateriais, cuja análise depende da habilidade e rigor metodológico do historiador. Para Barros (2019):

> "Fonte histórica" é tudo quilo que, por ter sido produzido pelos seres humanos ou por trazer vestígios de suas ações e interferências, pode nos proporcionar um acesso significativo à compreensão do passado humano e de seus desdobramentos no Presente. A fonte histórica são as marcas da história (Barros, 2019, p. 15).

Para o autor, esse amplo conjunto de evidências representa um universo de possibilidades no qual os historiadores fundamentam a construção de suas fontes históricas. Le Goff (2013), ao abordar a ampliação da noção de documento, dialoga com as ideias de Febvre:

> A história faz-se com documentos escritos, sem dúvida. Quando estes existem. Mas pode fazer-se, deve fazer-se sem documentos escritos, quando não existem. Com tudo o que a habilidade do historiador lhe permite utilizar para fabricar o seu mel, na falta das flores habituais. Logo, com palavras. Signos. Paisagens e telhas. Com as formas do campo e das ervas daninhas. Com os eclipses da lua e a atrelagem dos cavalos de tiro. Com os exames de pedras feitos pelos geólogos e com as análises de metais feitas pelos químicos. Numa palavra, com tudo o que, pertencendo ao homem, depende do homem, serve o homem, exprime o homem, demonstra a presença, a atividade, os gostos e as maneiras de ser do homem (Le Goff, 2013, p. 490).

De acordo com essa perspectiva, também é possível considerar as obras arquitetônicas, as representações pictóricas e o genoma humano como elementos que transformam o corpo e a genética em fontes históricas. Além disso, festas populares, ritos religiosos, gestos e modos de sociabilidade, assim como o patrimônio imaterial reconhecido pelo IPHAN e pela UNESCO - como a Orquestra Sinfônica, o sotaque, o dialeto e a Festa do Divino de Piracicaba/SP - tornam-se referências fundamentais para a compreensão histórica. A diversidade de fontes disponíveis evidencia que "não há praticamente limite para um historiador quanto às suas possibilidades de transformar qualquer coisa em fonte histórica" (Barros, 2019, p. 17).

O trabalho do historiador exige criatividade e habilidade na seleção e interpretação das fontes históricas. Para isso, é fundamental compreender o objeto selecionado como fonte histórica, assegurando uma análise rigorosa e contextualizada.

A crítica documental é fundamental para a pesquisa histórica. Bloch (2001) aponta que o historiador deve duvidar, examinar e questionar os testemunhos históricos, pois estes podem conter embustes, erros ou manipulações. Gadamer (1997), por sua vez, analisa o papel dos preconceitos na interpretação dos textos históricos, classificando-os entre preconceitos de autoridade e aqueles resultantes de precipitação. A precipitação é fonte de equívocos que induzem ao erro no uso da razão. A autoridade é "culpada" de que não façamos uso da própria razão.

O conceito de autoridade é rediscutido, pois este não tem seu fundamento último no ato de submissão e de abdicação, mas no ato de reconhecimento e conhecimento. Seu fundamento é um ato da razão, que concede autoridade porque sabe melhor. O preconceito que se implanta encontra-se legitimado pela pessoa.

É preciso desenvolver, de maneira positiva, o que o autor chama de preconceito legítimo, que supera os demais na razão crítica. O reconhecimento da autoridade está vinculado à ideia de que aquilo que a autoridade diz não é uma arbitrariedade irracional, mas algo que pode ser inspecionado.

Além disso, Le Goff (2013) ressalta que somente a análise do documento enquanto monumento permite à memória coletiva recuperá-lo e ao historiador utilizá-lo cientificamente, isto é, com pleno conhecimento de causa. Nessa perspectiva, Le Goff (2013) dialoga com Michel Foucault que declara que os problemas da história podem se resumir numa palavra: "questionar o documento". Iniciada na Idade Média e refinada pelos historiadores positivistas do século XIX, a crítica do documento tradicional centrou-se na busca pela autenticidade. Seu objetivo principal foi a identificação de falsificações, atribuindo, assim, um papel fundamental à datação.

O estudo das fontes históricas vai além da simples coleta de documentos. O historiador deve analisar criticamente suas escolhas metodológicas e seus preconceitos interpretativos na busca de

compreender o passado e suas implicações no presente por meio das múltiplas manifestações humana.

DOCUMENTOS/MONUMENTOS: O QUESTIONAR DAS FONTES HISTÓRICAS

Todo documento é monumento, afirma Le Goff (2013), visto que resulta do esforço das sociedades históricas para impor ao futuro, voluntária ou involuntariamente, determinada imagem de si próprias. No limite, não existe um documento-verdade, como algo que perdura, ele deve ser analisado desconstruindo seu significado aparente. O documento não é inócuo; é, acima de tudo, um produto construído pela história, pela época e pela sociedade que o gerou. Além disso, ao longo das sucessivas gerações, ele continua a existir - às vezes esquecido, outras vezes reinterpretado ou silenciosamente manipulado. Como registro duradouro, carrega testemunhos e ensinamentos que devem ser, antes de qualquer coisa, analisados de forma crítica, revelando significados que podem não ser evidentes à primeira vista. O documento é, portanto, um monumento, representando a tentativa das sociedades de moldar a memória para o futuro.

Em sua discussão sobre Documentos/Monumentos, Le Goff (2013) aborda as ideias de Marc Bloch e Paul Zumthor. Bloch enfatiza que os documentos históricos não surgem de forma aleatória ou por um "desígnio dos deuses", mas são resultados de processos humanos que determinam sua preservação ou desaparecimento. Sua existência ou ausência em arquivos, bibliotecas ou sítios históricos é determinada por fatores humanos, plenamente acessíveis à análise crítica. Além disso, os desafios relacionados à sua transmissão não são somente aspectos técnicos, mas se conectam profundamente à vida do passado. Afinal, o que está em jogo é, essencialmente, a forma como a memória é preservada e reinterpretada ao longo das gerações. Paul Zumthor, por sua vez, identifica o elemento que transforma o documento em monumento: seu uso pelo poder. Contudo, ele hesita em considerar todo documento como um monumento.

Na crítica dos documentos como monumentos, Le Goff (2013) afirma que a ilusão positivista, promovida por uma sociedade que tinha interesse em validar documentos como provas autênticas, ignorava as manipulações que ocorriam ao longo do tempo. O historiador tem o dever de analisar criticamente o documento enquanto monumento. Ele não é uma simples peça do passado, mas um produto social moldado pelas relações de poder vigentes na época de sua criação.

Vejamos um exemplo, sobre monumentos como fonte de pesquisa, para uma compressão de Documento/Monumento sob a perspectiva de Le Goff (2013).

MONUMENTO: ESTÁTUA DA JUVENTUDE BRASILEIRA

Para compreender o significado da palavra monumento, iniciamos pelo dicionário de latim:

> *MONUMENTUM* (moni-), -i. subs. n. I - Sent. próprio: 1) O que traz à lembrança alguma coisa, lembrança, penhor (Cic. Cat. 3, 26). II - Daí várias acepções particulares: 2) Túmulo, estátua, inscrição, lápide (C. Nep. Dion. 10). 3) Templo, monumento (comemorativo de algo) (Cic. Mil. 17). 4) Obra literária, monumentos escritos (Cic. Phil. 5, 17). 5) Sinal, indício (de reconhecimento) (Ter. Eun. 753) (FARIA, 1962, p. 620).

O termo no latim é definido como um substantivo neutro que se refere à lembrança de alguma coisa, e como penhor de algo que assegura a lembrança. *Monumentum* não se restringe somente às construções arquitetônicas dos túmulos, estátuas, templos e construções comemorativas, mas também aos registros escritos como as inscrições, as lápides e os textos. Refere-se também a sinal, indícios de reconhecimento. Ao refletir sobre os objetos que possuem sinais que são reconhecidos, imaginamos, de imediato, os que são visíveis, porém há também os que são invisíveis. Concordamos com Benjamim (1987, p.238), quando diz "esconder tudo de modo que tudo possa ser descoberto sem que nada tenha de ser removido do lugar", no que se refere a deixar rastos naquilo que se esconde.

No dicionário de Portuguez, de Faytte (1889, p. 808), **Monumento**, s m. obra de architectura ou de esculptura para recordar pessoa ou facto notável: túmulo; qualquer obra que passa à posteridade. Esta definição abrange o significado de monumento para qualquer obra arquitetônica que tenha a função de recordar pessoas e/ou fatos notáveis. Entretanto, não considera mais nenhum objeto como os textos escritos e as inscrições como na citação anterior.

No dicionário Michaelis On-line (2025), difere de Faria (1962) ao mencionar no item 4. Obra intelectual digna de passar à posteridade por sua contribuição às artes ou ciências. Essa definição contemporânea é mais ampla ao considerar a obra intelectual como monumento. De acordo com a Biblioteca Nacional, a doutrina do direito autoral qualifica como obra intelectual toda aquela criação intelectual que é resultante de uma criação do espírito humano (leia-se intelecto), revestindo-se de originalidade, inventividade e caráter único e plasmada sobre um suporte material qualquer.

Para discutir sobre monumento como fonte de pesquisa, sob a perspectiva de Documento/Monumento de Le Goff (2013), foi escolhido os estudos de Moura (2016) a respeito do monumento à Juventude Brasileira, localizado na cidade do Rio de Janeiro, no Brasil.

Figura 1 – Edifício do antigo MÊS e Estátua da Juventude Brasileira

Fonte: Arquivo Central do IPHAN/RJ, cx. 0047-P.0162- Personalidades, foto 48.673. Última foto atual, de Elmha Coelho (2014)

O Monumento à Juventude Brasileira foi construído, segundo Lissovsky e Sá (1996), pela iniciativa da mocidade escolar no desejo de demonstrar a sua gratidão e confiança no presidente da

República Getúlio Vargas: pelas realizações em benefício da pátria e pela juventude estudiosa do Brasil. No monumento, deveria constar a sua célebre frase: "É na juventude que deposito a minha esperança e é para ela que apelo".

Para tal feito, os estudantes do Rio de Janeiro solicitaram uma orientação do presidente do Sindicato dos Educadores, Ernani Cardoso e este, em concordância com o Ministro Gustavo Capanema, criou uma Comissão Executiva de Construção do Monumento cujo próprio nome indica sua finalidade.

Realizou-se uma verdadeira mobilização nacional para arrecadar fundos com o propósito de erigir a estátua. De acordo com Lissovsky e Sá (1996), houve um grande envolvimento da sociedade civil, o que transformou a construção do símbolo da juventude brasileira em um movimento pela unidade nacional, unificador da pátria.

Em apoio à construção do monumento nacional, Lúcia Magalhães, locutora da Rádio Nacional, solicitou auxílio aos ouvintes de seu programa "Hora da Juventude":

> [...]. Os cofres públicos, que sufragaram a construção do novo edifício, bem poderiam rematar o monumento que vai assinalar a esperança e o futuro de nossa raça. Então a cidade do Rio de Janeiro contaria com um monumento a mais, mas faltaria a esse bronze todo o valor espiritual e unitário que poderá ter e que será a sua característica mais preciosa. [...] Eu muitas vezes disse, através deste microfone, que a atual geração da juventude brasileira era predestinada. Confirmando essa intuição, é preciso ver mais um signo de predestinação nesse monumento que perpetuando no bronze toda a juventude da nossa terra, a que passou a cumprir o seu dever, a que hoje labuta por servir, a que amanhã surgirá para tomar das mãos dos seus maiores o facho da civilização [...] (Magalhães apud Lissovsky e Sá, 1996, p. 298-299).

As palavras pronunciadas pela locutora evidenciaram uma finalidade pouco comum para um monumento normalmente construído para lembrar algum marco do passado; no entanto, aquele fora planejado para firmar o presente em uma projeção e esperança no futuro da nação. Foi construído para ambicionar o que estava por vir, o destino da pátria que estaria sob a tutela da mocidade brasileira do presente, e ela deveria ocupar com a força de seu trabalho o seu devido lugar no futuro.

A Comissão Executiva do Monumento da Juventude Brasileira abriu uma concorrência pública para o projeto. Segundo Lissovsky e Sá (1996), seria permitido participar somente artistas residentes no país e cuja proposta atendesse à condição de a estátua ser representada na sua expressão humana. Poderia tomar a forma de dois adolescentes (homem e mulher) em marcha, ou outra que melhor parecesse ao artista.

O ministro Gustavo Capanema esboçou os traços gerais da estátua, formada por dois jovens a marchar, como uma sugestão aos artistas que confeccionaram suas maquetes com base nesse desenho. Mário de Andrade visitou as esculturas e, dos grupos inscritos para a concorrência do monumento, um ganhou a sua preferência: a equipe de Bruno Giorgi. O entusiasmo foi tamanho que Andrade não resistiu e escreveu uma carta ao seu amigo ministro:

> [...] Mas observe, meu ministro, o grupo nu. É uma pureza linda, é uma dignidade nobilíssima de corpos moços e da pedra. [...] O grupo de Giorgi pede, exige, tem saudade da pedra. Palavra de honra que não estou ganhando nada com este pleiteio. É questão de entusiasmo. Lhe peço com toda fidelidade de amigo que observe bem esse grupo de

> Giorgi e não faça desejos simbólicos. Essa mocidade que ele imaginou é escultura da boa, é pedra e é a mocidade em tudo o que ela possa ser de dignidade e pureza. É meu modo de pensar (Andrade *apud* Lissovsky e Sá, 1996, p. 300-301).

As palavras de Mário de Andrade ao Ministro Capanema foram claras quanto ao seu contentamento com a representação simbólica da juventude feita por Giorgi. O escritor considerava a obra de uma eficácia a ser conservada pela beleza, dignidade e nobreza, simbolizada na pureza dos corpos nus.

Nas qualidades representativas da juventude, consideradas por Andrade, é possível perceber, em uma análise mais apurada, as ideias vigentes do poder executivo e da elite cultural, sobre a postura da mocidade brasileira no projeto político social que se esboçava durante o Estado Novo varguista.

A juventude idealizada pelo Estado Novo era, segundo Lissovsky e Sá (1996), uma mocidade com ideias nacionalistas que levasse às ruas suas canções, bandeiras e marchas organizadas, em um pensamento dinâmico de fé e participação social que representasse a força e a promessa do regime político que os formava e os apoiava. Para Alzira Vargas (1914-1992), o Estado Novo deveria homogeneizar a massa heterogênea da mocidade brasileira, em um programa intenso de propaganda que difundisse a significação do novo regime. E mais, ela não era favorável à orientação paramilitar dos juvenis e justificava que o regime não tinha a intenção de fabricar soldados, mas de formar cidadãos.

Na estátua de Giorgi, com a sugestão geral do esboço de Capanema, o lugar da menina – logo atrás do rapaz, parece disposta a segui-lo, como deveria de ser, e com um gesto que aparentava impulsioná-lo a avançar, em uma espécie de apoio – contempla simbolicamente as propostas para a educação feminina do Ministro: a mulher deveria proteger a família e ter uma educação adequada à função familiar.

Para esses fins, foram organizados programas de ensino com conveniência educativa destinada a cada sexo, sendo alguns idênticos para ambos, outros exclusivos para os rapazes e outros próprios para as meninas. Presentes no Decreto-Lei n. 4.254, de 9 de abril de 1942, conhecido com Lei Orgânica do Ensino Secundário e no Decreto-Lei n. 4.073, de 30 de janeiro de 1942, conhecido como a Lei Orgânica do Ensino Industrial.

Na Lei Orgânica do Ensino Secundário, foram prescritas condições especiais para a educação feminina e implantada a disciplina de Economia Doméstica, conforme tratava o art.25:

1) É recomendável que a educação secundária das mulheres se dê em estabelecimento de ensino de exclusiva frequência feminina;

2) Nos estabelecimentos mistos, a educação será ministrada em classes exclusivamente femininas, salvo por motivo relevante e com autorização do Ministério da Educação;

3) Incluir-se-á no curso ginasial, nos cursos clássicos e científicos, a disciplina de Economia Doméstica;

4) A orientação metodológica dos programas terá em mira a natureza da personalidade feminina e bem assim a missão da mulher dentro do lar.

Na Lei Orgânica do Ensino Industrial, foram implantados cursos específicos para as meninas e havia também cursos considerados compatíveis com a sua capacidade física, conforme prescreve o art.5º e item 5, "O direito de ingressar nos cursos industriais é igual para homens e mulheres. A

estas, porém, não se permitirá, nos estabelecimentos de ensino industrial, trabalho que sob o ponto de vista da saúde, não lhe seja adequado".

A educação feminina, mencionada nas leis supracitadas para os tipos distintos de ensino, apresenta distinções para a jovem que optasse por um dos ensinos, um direcionado para o ensino humanístico outro para o ensino técnico. Mas, ambos os ensinos não deveriam descaracterizar a missão da mulher da década de 1940, contemplando o que ela deveria preservar e fortalecer: a família.

Toda essa carga simbólica à qual a estátua fora destinada se esvaziou quando foi, enfim, construída em 1947. Isso decorreu do fim do regime ditatorial com a deposição de Getúlio Vargas, em 1945. A nova presidência da República (1946-1951) com Eurico Gaspar Dutra cuidou de esquecer o monumento e seu conteúdo que não era de interesse do novo regime.

Em 1944, tinha havido um ato comemorativo pela construção da estátua, o lançamento de sua pedra fundamental, no jardim do Ministério da Educação e Saúde (MES). O edifício do Ministério da Educação e Saúde (MES) representava as ideias modernistas da época, no que havia de mais atual nas construções de arquitetura, característica que lhe rendeu reconhecimento internacional, como a primeira obra arquitetônica de porte monumental, a consolidar um projeto fiel aos princípios básicos da arquitetura moderna.

O prédio e o monumento não foram as únicas preocupações do Ministro Capanema. A integração com as artes plásticas foi fundamental para a elaboração e conclusão de todo o espaço ministerial. Na exposição permanente, no Palácio Capanema, há a seguinte frase sem autoria "Capanema imaginava a sede do Ministério, a um só tempo, como um local de trabalho e uma casa de arte. Assim, o prédio só foi considerado concluído após a incorporação das artes plásticas".

Uma visita à antiga sede do MES possibilita a percepção de que se trata de um espaço repleto de obras de arte. Os documentos do Ministério da Cultura, da Série Inventário, descrevem todo o local artístico, com seus objetos, cômodos e estrutura física. Vejamos algumas dessas obras:

- Cândido Portinari, as pinturas: Escola de Canto, Coro, Ciclos Econômicos, Jogos Infantis, Ar, Água, Terra, Fogo. Os painéis em azulejos: Motivos Marinhos, Estrelas do Mar e Peixes, Conchas e Hipocampos;
- Oscar Niemeyer, a tapeçaria em lã: Tapete;
- Celso Antônio as esculturas: Busto do Presidente Getúlio Vargas, Cabeça de Gustavo Capanema, Mulher Reclinada;
- Bruno Giorgi, as esculturas: Monumento à Juventude Brasileira, Moça de Pé;
- Adriana Janacópulos, a escultura Mulher Sentada;
- Jacques Lipschitz, a escultura Prometeu;
- Burle Marx, jardim.

No ato comemorativo pelo lançamento da pedra fundamental da Estátua à Juventude Brasileira, no jardim do Ministério da Educação e Saúde (MES), estiveram presentes, segundo Knauss (1999), estudantes uniformizados de diversas escolas públicas e particulares, onde algumas alunas exibiram seus estandartes: a bandeira nacional ou de sua escola. O ato foi presidido pelo Ministro Gustavo Capanema e toda a solenidade foi acompanhada por um conjunto musical, coro estudan-

til e banda da polícia militar, regidos pelo maestro Villa Lobos (1887-1959), com apresentação de hinos e cantos patrióticos.

Heitor Villa Lobos, maestro e compositor brasileiro, foi um dos grandes edificadores do nacionalismo estadonovista, via educação musical. Em seu livro **A música nacionalista no Govêrno Getulio Vargas**, publicado pelo D.I.P., Lobos (194-) descreve a importância da formação de uma consciência musical brasileira, pelo Canto Orfeônico nas escolas. O projeto de sua autoria considera esse tipo de canto um totalizador de fatores educacionais complexos de civismo, de disciplina coletiva e de constituição de uma unidade da cultura nacional.

A implantação do canto orfeônico nas escolas públicas e privadas foi de responsabilidade de Villa Lobos que, por acreditar no poder de socialização do canto coletivo, tinha a intenção de desenvolver a noção de solidariedade humana, de forma a integrar o indivíduo no patrimônio social da pátria, no hábito de comemorar as grandes datas dos acontecimentos da História do Brasil. Entoando canções e hinos à Pátria, iria impregnando assim, nos jovens, o espírito de brasilidade, em uma consciência musical autenticamente brasileira.

Villa Lobos participou ativa e intensamente na educação musical nacionalista do Estado Novo. Ele regeu diversos coros, bandas, reuniu milhares de estudantes em estádios de futebol, para apresentação de canto orfeônico, compôs hinos e canções patrióticas, como o "Canto do Pajé", uma homenagem à República e a Vargas. Essa música era sempre tocada na presença do Presidente, e contribuiu com a Superintendência de Educação Musical e Artística (SEMA).

Uma equipe de arquitetos foi formada para a elaboração do projeto da sede do MES: Lúcio Costa, Oscar Niemeyer, Affonso Eduardo Reidy e a participação significativa de Le Corbusier, contando, também com a presença do paisagista Roberto Burle Marx. No esboço da fachada do edifício, percebemos a presença da primeira versão da estátua, de um homem sentado, posição que, para Capanema, deveria representar um estado de pensamento, ao contrário da construída na qual as figuras apareciam marchando.

O esboço da primeira versão da Estátua da Juventude Brasileira era o monumento do Homem Brasileiro, que tinha por finalidade representar as características físicas do homem brasileiro no futuro; a sua postura, sentada pensando ou em pé marchando, deveria representar suas qualidades de um homem inteligente, culto ou trabalhador. As diversas discussões e dissensões ocorridas com os idealizadores da estátua não possibilitaram chegar a um consenso a respeito das prováveis futuras características do povo brasileiro. A estátua não foi construída e, posteriormente, em seu lugar foi erguido o monumento à Juventude Brasileira. Vejamos algumas informações e os elementos no processo de idealização desse monumento, não construído.

A estátua Homem Brasileiro, nos projetos de Capanema, como descreve Knauss (1999), deveria ocupar os jardins em frente da sede do Ministério da Educação e Saúde (MES), que estava sendo construído, de forma a se complementarem, jardim e estátua, "de maneira exata e necessária em suas finalidades". O objetivo da estátua era o mesmo objetivo do Ministério, considerado como Ministério do Homem: a formação do homem brasileiro.

A construção do edifício era de responsabilidade de uma equipe liderada pelo arquiteto Lúcio Costa (1902-1998), cuja inspiração provinha da proposta de Le Corbusier (1887-1965), e a estátua foi encomendada ao escultor Celso Antônio (1896-1984).

Em 1937, o Ministro Gustavo Capanema enviou duas espécies de cartas referentes ao projeto da estátua. De acordo com Knauss (1999), uma era de conteúdo científico destinada a alguns intelectuais colaboradores e a outra, de teor artístico, endereçada ao Presidente da República Getúlio Vargas.

Na correspondência endereçada ao Presidente, constava uma ideia pronta do monumento, de concepção grandiosa em suas dimensões: teria 11 metros de altura e desses, 3 ou 4 decímetros de pedestal, em que o homem estaria na postura do *Le Penseur de Rodin*, ou seja, sentado, nu com o aspecto calmo, de domínio e afirmação.

Faltavam as características físicas do monumento. Para esse serviço, o Ministro enviou cartas a alguns intelectuais, aos quais solicitou colaboração. Foram eles, de acordo com Knauss (1999), quatro professores: Oliveira Vianna, Rocha Vaz, Roquette Pinto e Froes da Fonseca. Capanema advertiu-os de que o colosso de um homem sentado não era um simples trabalho de obra de arte, constava nele um lado científico importante, o da figura ideal que fosse lícito imaginar como representativa do futuro homem brasileiro. Como será o corpo do homem brasileiro, do futuro homem brasileiro, não do homem vulgar ou inferior, mas do melhor exemplar da raça? Qual a sua altura? O seu volume? A sua cor? Como será a sua cabeça? A forma do seu rosto? A sua fisionomia? (Capanema apud Knauss, 1999, p.32).

As perguntas do Ministro causaram discussões divergentes entre seus colaboradores intelectuais. Knauss (1999) relata que acabaram por convergir a favor do tipo que consideraram ser o mais frequente no Brasil, o branco moreno com cabelo liso e escuro como a íris.

Com base na antropometria ou na antropologia racial, a opção surgiu como frágil até mesmo para os colaboradores intelectuais, por conhecerem a complexidade das características humanas. Roquette Pinto, em um bilhete pessoal, informou a Capanema que a postura desse homem não deveria nunca ser sentada, mas marchando.

As discussões sobre as características físicas da estátua se intensificaram, de forma que o Ministro aconselhou o escultor Celso Antônio a não fazer o que bem desejasse e, por fim, o substituiu pelo escultor Brecheret que recebeu recomendações de não fazer trabalho estilizado nem decorativo.

Os detalhes desses desentendimentos não foram explicitados por Knauss (1999); o novo escultor nunca chegou a elaborar a proposta do Ministro, e o projeto da estátua foi abandonado. Em seu lugar, em 1943, deu-se início à construção do Monumento à Juventude Brasileira.

A idealização do projeto da estátua o Homem Brasileiro pode ser compreendido melhor, se verificarmos alguns elementos do que seria o representante do homem brasileiro do futuro. Para isso, é necessário observar alguns elementos não explicitados no texto de Knauss (1999): as especialidades dos colaboradores intelectuais, vocábulos do texto e a proposta de Celso Antônio.

A escolha do Ministro Gustavo Capanema por esse grupo de intelectuais, professores responsáveis para elaborar a imagem científica, ou seja, as características físicas do homem brasileiro do futuro, ocorreu por conta de serem eles alguns dos mais bem conceituados estudiosos e pesquisadores sobre o assunto da mestiçagem e, assim, capazes de legitimar a imagem da estátua. Eles eram médicos, antropólogos, sociólogos, etnólogos e escritores de livros e artigos sobre temas relaciona-

dos com a antropometria, o biótipo, a anatomia, as diversas características físicas e intelectuais do homem brasileiro.

Edgar Roquette Pinto graduou-se médico legista, foi professor assistente de antropologia do Museu de História Nacional, etnólogo. Álvaro Froes da Fonseca, livre-docente na cátedra de Anatomia da Faculdade de Medicina do Rio de Janeiro, foi professor de antropologia física no Museu Nacional do Rio de Janeiro. Juvenil da Rocha Vaz, médico, iniciou os estudos de uma ciência nova a biotipologia, professor da Escola de Medicina do Rio de Janeiro. Francisco José de Oliveira Viana, sociólogo brasileiro foi membro do Instituto Internacional de Antropologia, e da Sociedade Portuguesa de Antropologia e Etnologia.

Esses intelectuais fizeram parte, segundo Dávila (2006) e Gonçalves (2010), do movimento eugênico brasileiro, participaram do I Congresso Brasileiro de Eugenia, realizado na cidade do Rio de Janeiro, em 1929, presidido pelo antropólogo e Diretor do Museu Nacional Roquette Pinto, cuja seção de discussão sobre Antropologia foi presidida por Froes da Fonseca. O evento foi marcado por diversas divergências conceituais entre os trabalhos apresentados pelos integrantes do movimento.

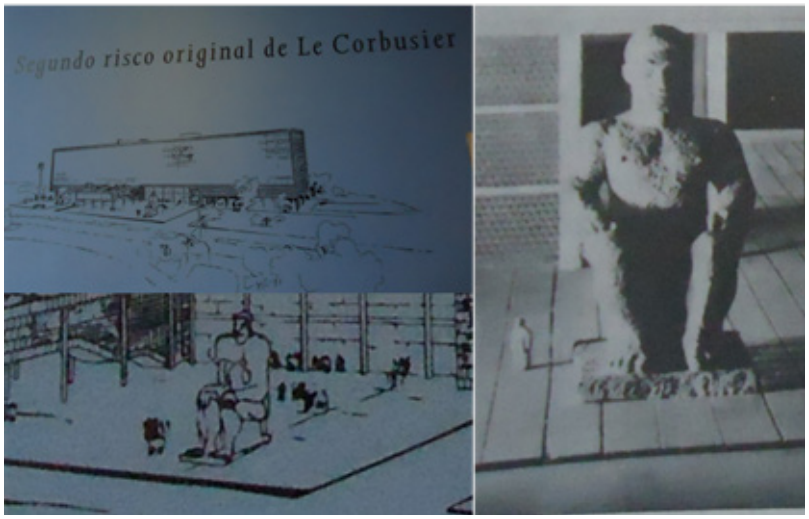
Gonçalves (2010) relata essas diferentes concepções raciais e sociais discutidas. Roquette Pinto argumentava que a mestiçagem era uma questão social e não racial, pois os mestiços não apresentavam nenhum tipo de degeneração, como acreditavam os outros colegas eugenistas.

Essas divergências aconteceram também com outros intelectuais colaboradores, ao buscar uma solução às perguntas supracitadas do ministro Capanema. Dávila (2006) explica que Roquette Pinto era o principal proponente no Brasil da tese antirracista de Franz Boas, em contraste com Oliveira Vianna, crente na plena superioridade biológica ariana, posicionamento compartilhado por Rocha Vaz. Contudo, havia um consenso entre eles: confiavam no futuro branco do país, que representava uma aproximação às supostas virtudes do homem europeu e, para isso, era necessário investir em uma educação e saúde voltadas para a formação do homem brasileiro branco e virtuoso, aos moldes da virtude europeia.

As perguntas do ministro estavam repletas de termos que indicavam qualidades e restrições das características físicas do monumento ao futuro homem brasileiro, que acreditavam ser branco. As expressões utilizadas tais como “o melhor”, “exemplar da raça”, “tipo vulgar” ou “inferior”, indicam essa crença na brancura e eugenia.

Outro elemento a ser observado na intenção de construir a estátua é a proposta do arquiteto Celso Antônio. Dávila (2006) esclarece que era a figura de um caboclo, homem das matas, um mestiço barrigudo (fig. 02). O escultor justificou que era o que via ao olhar para o Brasil, contrariando a proposta do Ministro de evidenciar a finalidade da educação pública de formar brasileiros brancos, fortes, dignos de um futuro brilhante.

Figura 2 – Esboço e maquete da Estátua Homem Brasileiro



Fonte: Lissovsky e Sá (1996)

No processo de discussões e dissensões para formar uma imagem do homem brasileiro branco, grandioso, forte, virtuoso na memória coletiva de um país mestiço, ecoa um aspecto peculiar da eugenia no Brasil, o da condição social, que pode ser revertida com a educação do povo e, também, o aspecto mais tradicional, a crença da brancura, como qualidade de ser superior. Isso também poderia ser revertido com a educação, já que o fenótipo do povo brasileiro do futuro seria branco. Esse desejo da brancura aliado a uma educação para a formação do brasileiro do futuro carrega um significado implícito, as características de um Brasil desenvolvido.

É nessa perspectiva do monumento como instrumento de formação da memória coletiva, que Moura (2016) discutiu alguns aspectos da ditatura e da industrialização em Portugal e no Brasil, para a construção de um contexto do ensino de Matemática em escolas profissionalizantes desses países.

CONSIDERAÇÕES

A investigação da Estátua da Juventude Brasileira como fonte de pesquisa possibilita a desconstrução de seu significado aparente e revela sua utilização pelas forças que detinham o poder, representadas pelo poder executivo da República Federativa do Brasil e pela elite intelectual, configurando-a como um produto da sociedade. Esses agentes, de forma deliberada ou inconsciente, definiram quais elementos deveriam ser preservados na memória coletiva e como deveriam ser registrados, influenciando a representação do homem e da juventude brasileira projetada para o futuro. É nessa perspectiva do uso pelo poder, que o documento se constitui como monumento assim, para Le Goff (2013) todo documento é um monumento. Essa abordagem evidencia a ausência de neutralidade documental, demonstrando que sua construção está intrinsicamente vinculada a interesses sociopolíticos.

Essa questão também, pode ser exemplificada por uma analogia com a dinâmica da indústria da moda, como ilustrado na cena do filme O Diabo Veste Prada. Nela, a protagonista Miranda explica que a escolha da tonalidade azul de um suéter usado por sua assistente não ocorreu ao acaso, mas foi estabelecida por especialistas do setor e posteriormente disseminada para o consumo popular. O episódio evidencia o papel dos grupos de poder na definição e propagação de tendências. Do

mesmo modo, a Estátua da Juventude Brasileira, assim como a figura do Homem Brasileiro, não são meros vestígios do passado, mas sim construções simbólicas que foram instituídas por grupos dominantes para moldar a memória coletiva. Sendo assim, cabe ao historiador não apenas interpretar tais elementos em sua aparência imediata, mas também analisá-los criticamente a partir da relação entre história, memória e poder.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio, de financiamento, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)

REFERÊNCIAS

BLOCH, Marc Leopoldo Benjamim. **Apologia da História, ou, O ofício do historiador**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2001.

DÁVILA, Jerry. **Diploma de Brancura**: política social e racial no Brasil-1917-1945. São Paulo: Editora UNESP, 2006.

FARIA, Ernesto. **Dicionário escolar latino-português**. Ministério da Educação e Cultural, 1962.

FAYETTE, Levindo de la. **Novo vocabulario universal da lingua portugueza**. Paris: Garnier Irmãos, Livreiros-Editores, 1889.

GADAMER, Hans-Georg. **Verdade e método**. Tradução de Flávio P. Meurer. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 1997.

GONÇALVES, Assis da Silva. **Eugenia em debate:** Medicina e Sociedade no I Congresso Brasileiro de Eugenia. In: XIV Encontro Regional da ANPUH-Rio Memória e Monumento, 2010. Disponível em: <http://www.encontro2010.rj.anpuh.org/resources/anais/8/1276697830_ARQUIVO_MedicinaeSociedadenoICongressoBrasileirodeEugenia.pdf >. Acesso em: 10. mai. 2014.

KNAUSS, Paulo. **Cidade Vaidosa**: imagens urbanas do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: Sette Letras, 1999.

LE GOFF, Jacques. **História e Memória**. Tradução Bernardo Leitão et al. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2013.

LISSOVSKY, Maurício; SÁ, Paulo Sérgio Moraes de. **Colunas da educação**: a construção do Ministério da Educação e Saúde (1935-1945). Rio de Janeiro: MINC/IPHAN; Fundação Getúlio Vargas/CPDOC, 1996. Localizado no IPHAN/COPEDOC/ Biblioteca Noronha Santos. Na Série Inventário. Título do Dossiê: histórico, descrição e tombamento do bem. Notação: IRJ-0023.01. Rio de janeiro/Brasil.

LOBOS, Heitor Villa. **A música nacionalista no governo Getúlio Vargas.** Rio de Janeiro D.F.: DIP, [194-]. Rio de Janeiro: Acervo do Arquivo Casa Heitor Villa Lobos.

MOURA, Elmha Coelho Martins. **O Ensino de Matemática em duas escolas profissionalizantes**: Brasil e Portugal, no período de 1942 a 1978. 2016. Tese (Dou torado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2016.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

30 anos dos Seminários Nacionais de História da Matemática – memórias de quem participou de todos e atuou na organização de muitos

30 years of the National Seminars on the History of Mathematics – memories of those who participated in all of them and worked on organizing many of them

Sergio Nobre[1]
Universidade Estadual Paulista – UNESP

RESUMO

Neste texto será apresentada a memória sobre o início dos Seminários Nacionais de História da Matemática no Brasil, sua organização institucional e implementação.

Palavras-Chave: SNHM; SBHMat.

ABSTRACT

This text will present the memory of the beginning of the National Seminars on the History of Mathematics in Brazil, its institutional organization and implementation.

Keywords: SNHM; SBHMat.

PRÉ-HISTÓRIA

Décadas de 80 e 90 de século passado: Ida de Brasileiros ao exterior para fazerem doutorado em História da Matemática ou áreas correlatas produzindo dissertações em assuntos ligados à História da Matemática. Destaca-se que houve forte influência e apoio de Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021). Os brasileiros que retornaram na primeira metade dos anos 90 são: Circe Mary Silva da Silva Dynnikov e Fernando Raul de Assis Neto, que realizaram doutorado em Bielefeld, Alemanha; Seiji Hariki, doutorado na Inglaterra; Sergio Nobre, com doutorado em Leipzig, Alemanha; Carlos Ziller Camenietski, doutorado na França. No Brasil, no Rio Grande do Norte, o Prof. John Fossa, da UFRN, já atuava em assuntos ligados à História e Filosofia da Matemática. Também, no ano de 1989, sob a Orientação do Prof. Shozo Motoyama (1940-2021), Clóvis Pereira da Silva defendeu o doutorado no Programa de Pós-Graduação em História da Ciência, da USP, de título *Uma História do Desenvolvimento da Matemática Superior no Brasil, de 1810 a 1920*.

1993 – 1º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática – Coimbra – Portugal, na semana seguinte ao Congresso Internacional de História da Ciência realizado em Zaragoza, Espanha

1993-1994 – Seminários de História da Matemática – UFPR – organizados por Clóvis Pereira da Silva, com a participação de Ubiratan D'Ambrosio, Circe Mary Silva da Silva Dynnikov, Fernando Raul de Assis Neto e Sergio Nobre

1994 – *"Seminário Sobre Novas Perspectivas da Educação Matemática no Brasil"* – Águas de São Pedro – SP, organizado por Tania Campos, PUC-SP. Neste seminário houve um grupo de discussão

[1] Doutor em História da Matemática pela Universidade de Leipzig, Alemanha. Livre-Docente em História da Matemática pela UNESP. Aposentado como Professor Titular da UNESP, Rio Claro, São Paulo, Brasil. E-mail: sergio.nobre@unesp.br.

em História da Matemática com a participação de Fernado Raul, João Bosco Pitombeira, Sergio Nobre, Seiji Hariki, Circe Silva da Silva. Neste evento fortaleceu-se a ideia de realizarmos um Seminário Nacional.

HISTÓRIA

O início dos Seminários Nacionais de História da Matemática e a fundação da Sociedade Brasileira de História da Matemática

Durante o Seminário Nacional de História da Matemática, realizado na Universidade Federal Rural de Pernambuco no ano de 1995, decidiu-se que aquele evento seria o primeiro de uma série que se iniciava. Decidiu-se também que suas realizações teriam período fixo: Realizados sempre nos anos ímpares, como início no domingo que antecede o domingo de Páscoa, ou seja, no Domingo de Ramos, e término no final da manhã da Quarta-feira da Semana Santa. Também naquele momento ficou decidido que o II Seminário Nacional de História da Matemática (II SNHM) seria realizado na Unesp, campus de Rio Claro, em 1997. Portanto, retornamos de Recife com a incumbência de organizar o II Seminário Nacional de História da Matemática.

A organização de um evento do porte que é o SNHM requer um grupo de apoio, e a criação do Grupo de Pesquisa em História da Matemática na Unesp – Rio Claro, que neste ano também completa 30 anos, foi essencial. No entanto, antes de iniciarmos a organização do II SNHM, uma nova ocorrência fez com que assumíssemos não só este evento, como também o Luso-Brasileiro de História da Matemática. Durante o Encontro Luso-Brasileiro foi realizado em Coimbra em 1993, que passou a ser denominado 1º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, os participantes decidiram que estes encontros deveriam acontecer de forma periódica, sendo uma vez em Portugal e outra no Brasil. A decisão inicial foi que a periodicidade do evento deveria ser de três anos. E foi deliberado durante o evento de Coimbra que o próximo Luso-Brasileiro deveria ocorrer no Brasil no ano de 1996, na cidade de Curitiba, com a organização a cargo de docentes da Universidade Federal do Paraná.

Por infelicidade, o responsável pela organização teve um problema de saúde e, como ele não tinha um grupo de apoio em sua instituição que pudesse organizar o evento, tivemos que realizar mudanças. O Luso-Brasileiro teve que ser realizado em 1997, sob responsabilidade do Grupo de Pesquisa em História da Matemática da Unesp de Rio Claro que já tinha a incumbência de realizar o Seminário Nacional. A opção foi a realização dos dois eventos em um único momento. O 2º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática (ELBHM) foi realizado juntamente com o II Seminário Nacional de História da Matemática na data prevista para este Seminário, ou seja, no início da Semana Santa do ano de 1997. O local, que inicialmente seria o Campus de Rio Claro da Unesp, devido à proporção do evento, foi transferido para um hotel na cidade de Águas de São Pedro.

Ambos os eventos realizados em Águas de São Pedro foram de grande sucesso e a continuidade foi dada com a colega Circe, então docente da Universidade Federal do Espírito Santo. Para a organização deste evento, a Profa. Circe contou com a valiosa colaboração da Profa. Lígia Arantes Sad, que esteve presente em Águas de São Pedro e que havia retornado à Vitória depois de concluir seu doutorado na UNESP de Rio Claro. Paralelamente iniciou-se a discussão para a fundação de uma sociedade científica específica voltada a pesquisadores em História da Matemática. E durante a realização do III SNHM, no dia 30 de março de 1999, foi fundada a Sociedade Brasileira de História

da Matemática – SBHMat. Também durante o evento em Vitória, ficou decidido que o IV SNHM seria realizado em Natal, sob responsabilidade de John Fossa que contou com apoio direto de Iran Abreu Mendes e Bernadete Morey, dentre outros docentes da UFRN.

Com a fundação da SBHMat, a realização dos SNHMs passaria a ser de sua responsabilidade. E algumas decisões foram tomadas:

1) Dar continuidade à realização dos SNHMs nos anos ímpares, com começo no Domingo de Ramos e término na Quarta-Feira da Semana Santa;

2) O local de um novo SNHM será decidido pela diretoria da SBHMat a partir de uma chamada pública e análise dos locais inscritos. Ao final da realização de um Seminário, será anunciado o local do próximo;

3) A partir do IV SNHM, decidiu-se que haveria uma seleção mais qualitativa no que diz respeito à publicação de textos referentes às Comunicações Científicas, nesse sentido, a partir de então, foi criada a norma de que nem todos os trabalhos selecionados para serem apresentados no evento, seriam publicados nos anais. As apresentações de trabalhos foram divididas em quatro modalidades: Relatos de experiências; Resultados de iniciação científica (alunos de graduação); Resultados de pesquisas científicas (pós-graduação e profissionais); Projetos de Pesquisa. Dessa forma, poder-se-ia ter uma melhor visão sobre quais trabalhos são resultados de pesquisas científicas, que serão publicados nos anais, garantindo a qualidade científica dele. E ainda seria dada oportunidade para apresentações de outros tipos de trabalhos, que possuem grande contribuição para o movimento de História da Matemática no país, mas que não possuem caráter científico.

4) A partir do V SNHM haveria um Coordenador Local e um Coordenador Científico. A Coordenação Local ficaria a cargo de um docente que atuasse no local de realização do evento, sendo dele e da comissão local por ele escolhida a responsabilidade pela organização da infraestrutura. O Coordenação Científica ficaria, por indicação da diretoria da SBHMat, a cargo de um pesquisador que possuísse reconhecimento em nível nacional e trâmite junto aos diferentes grupos de pesquisa existentes no país. Caberia a ele, e à comissão científica por ele escolhida em comum acordo com a diretoria da SBHMat, a responsabilidade científica do evento, bem como a sua organização, como a escolha dos minicursos, das mesas-redondas, das conferências e as apresentações de comunicações científicas de forma oral ou em pôsteres;

5) Os Coordenadores do evento serão os editores dos Anais, e estes deverão estar publicados em período não superior a 6 (seis) meses após a realização do Evento e serão considerados como publicação da SBHMat.

6) A conferência de abertura de um SNHM deve ser feita por um pesquisador brasileiro com atividades na área de pesquisa em História da Matemática e/ou áreas afins;

7) O objetivo principal dos Minicursos é propiciar aos professores dos ensinos fundamental, médio e superior, bem como a alunos de graduação e pós-graduação o conhecimento de assuntos específicos da História da Matemática. Havia a ressalva que resultado de pesquisa não deveria ser tema de Minicurso. Também ficou decidido que a pessoa responsável por um Minicurso deverá entregar um texto sobre o tema escolhido. Este texto deveria ser entregue com antecedência para que o material fosse impresso a tempo para ser distribuído aos alunos do minicurso no dia de sua realização. O objetivo principal era de termos material sobre temas específicos da História da Matemática escrito em português. Os coordenadores do SNHM seriam os editores dos livros dos Minicursos.

8) Sempre que possível, contemplar o local onde é realizado o SNHM com um tema relativo à História da Matemática da região

DELIBERAÇÕES DA DIRETORIA DA SBHMAT PARA A ORGANIZAÇÃO DOS SEMINÁRIOS NACIONAIS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Sobre a Organização do Seminário Nacional de História da Matemática

Competências do Coordenador Científico:

1) Escolher os membros da Comissão Científica

2) Coordenar os trabalhos da Comissão Científica na execução das seguintes atividades:

    a) Deliberar sobre a organização científica do evento (em comum acordo com a Coordenação Local)

    b) Escolha da pessoa que fará a conferência de abertura do evento. Ao Coordenador cabe o papel de fazer o convite oficial ao conferencista escolhido. (preferencialmente com antecedência mínima de 12 meses)

    c) Deliberar sobre os assuntos a serem temas dos minicursos, com a indicação dos respectivos objetivos.

    d) Indicar pessoas que possam ministrar os minicursos.

    e) Ao Coordenador cabe a tarefa de fazer os convites às pessoas indicadas, apresentar-lhes os propósitos da Comissão Científica, e em caso de aceitação, solicitar uma proposta do minicurso a ser dado.

    f) A Comissão analisa as propostas encaminhadas e delibera pela aceitação ou não do Minicurso. Em caso de aceitação, o Coordenador encaminha ao responsável pelo Minicurso as normas e prazos para a entrega do Material. **É deliberação da diretoria da SBHMat que o responsável por** Minicurso que não entregar seu texto no período pré-estipulado, terá seu Minicurso cancelado.

3) Com a estrutura organizacional pronta e a composição do grupo de pessoas que farão os minicursos, a Comissão Científica, em comum acordo com a Comissão Local, deve organizar o material de divulgação. (Primeiro anúncio a ser lançado no máximo 10 meses antes do evento). A coordenação científica estabelece os prazos para encaminhamento dos trabalhos.

4) Ao Coordenador Científico cabe a tarefa de solicitar auxílio financeiro às grandes agências: CNPq, Capes etc. (a solicitação deve ser feita em nome da SBHMat). A diretoria da SBHMat deve participar no encaminhamento de solicitações de auxílios.

5) À Comissão Científica cabe o papel de analisar as propostas de Comunicação Científica que serão encaminhados para serem apresentados no evento, em relação a estarem ou não de acordo o tema solicitado e com os objetivos propostos para o evento.

6) O coordenador Científico deve, juntamente com os demais membros da Comissão Científica, estabelecer critérios para a escolha, dentre os textos aceitos para serem apresentados como Comunicação Científica, aqueles que irão ser publicados nos Anais.

7) O Coordenador Científico é o editor dos textos referentes aos Minicursos. A responsabilidade da confecção dos referidos textos é da Coordenação Local.

8) O Coordenador Científico é o Editor dos Anais do Evento. A Confecção dos Anais deve ser feita em comum acordo entre a Coordenação Local do Evento e a Diretoria da SBHMat. A responsabilidade da remessa aos participantes é da Coordenação Local. Por deliberação da Diretoria os Anais devem estar prontos, e serem encaminhados aos participantes do evento, no máximo 5 meses após a realização do evento.

Competências do Coordenador Local:

1) Escolher a equipe local
2) Organizar o cronograma do evento (em comum acordo com a Coordenação Científica)
3) Fazer a divulgação do Evento
4) Angariar recursos financeiros para a organização básica do evento: divulgação, material a ser entregue aos participantes, atividades extras etc. De acordo com as possibilidades, conseguir verbas junto à Instituição no sentido de assegurar a presença no evento de ao menos alguns convidados, e verbas para a publicação dos Anais.
5) Responsabilizar-se pela infraestrutura do evento
6) Deliberar pelos prazos de inscrição e preços
7) Administrar o dinheiro das inscrições e usá-lo, conforme necessidade, para o evento. Ao final do evento, prestar contas à Diretoria da SBHMat. Sobras de caixa deverão ser encaminhadas à Tesouraria da SBHMat.
8) Administrar as viagens dos convidados, bem como suas hospedagens. Se houver recursos, sua distribuição em relação às pessoas que irão trabalhar durante o evento será discutida com o Coordenador Científico e, caso necessário, algum membro da diretoria da Sociedade.
9) Organizar a cerimônia de abertura
10) Organizar atividades culturais
11) Responsabilizar-se pela confecção dos cartazes, folders, livros dos Minicursos, Caderno de Resumos, e, de acordo com entendimento com o Coordenador Científico, os Anais.

Competências de ambos os coordenadores:

Preparar um cronograma referente às principais datas para a organização do evento: Exemplo: previsão de data para a composição da Comissão Científica, previsão de data para se ter a lista dos Minicursos que serão ministrados no evento, previsão de data para a confecção dos cartazes (folders) de divulgação do evento, previsão de data para abertura de inscrições (para apresentação de trabalhos e para o público em geral), etc. Este cronograma deve ser comunicado à Diretoria da SBHMat o mais breve possível.

SINOPSE DOS SEMINÁRIOS NACIONAIS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA-1995-2023

1995 – Seminário Nacional de História da Matemática – Universidade Federal Rural de Pernambuco – Decisão de dar continuidade da realização destes Seminários e a data ficou determinada: realização nos anos ímpares, iniciando no domingo de Ramos (abertura à noite) e término no final da manhã da quarta-feira (Quarta-Feira Santa). Este I Seminário de História da Matemática contou com conferências, minicursos, apresentação de comunicações científicas e mesas-redondas.

1997 – 2º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e II Seminário Nacional de História da Matemática. Grande Hotel – Águas de São Pedro – SP. Este evento funcionou mais como um "Luso-Brasileiro" do que como um "Seminário Nacional". O tema "A Contribuição

de Matemáticos Portugueses para o desenvolvimento da Matemática no Brasil" possibilitou a vinda de pessoas de destaque no mundo matemático Luso-Brasileiro, José Morgado, Pereira Gomes, Luiz Monteiro (filho do António Monteiro) e algumas ilustres personalidades brasileiras como José Leite Lopes, Maria Laura Mousinho Leite Lopes, Elza Gomide, Chaim Hönig, Ubiratan D'Ambrosio e internacionais com destaque a Ivor Grattan-Guinnes (Inglaterra). Certamente, dentre todos os Seminários Nacionais e Luso-Brasileiros, este foi o de maior peso científico.

1999 – III SNHM - UFES – Vitória – ES. O III SNHM foi organizado praticamente nos mesmos moldes do I SNHM, com conferências, minicursos, mesas-redondas, comunicações científicas. Durante a realização deste evento foi fundada a Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), tendo como primeiro presidente o Prof. Ubiratan D'Ambrosio e Sergio Nobre como Secretário-Geral**.** Dentre as personalidades internacionais ligadas à História da Matemática, destaca-se a presença neste evento de Hans Wussing (Alemanha), Eduardo Ortiz (Inglaterra) e Luís Saraiva (Portugal). Por conta da fundação, ficou decidido que a realização dos Seminários Nacionais de História da Matemática, a partir de então, passasse a ser responsabilidade da SBHMat. Como decorrência disto, a sociedade iniciou estudos sobre a forma de como seriam organizados os próximos seminários. A escolha do local do próximo seminário foi, como os anteriores, feita de tal forma que a entidade organizadora contasse com pessoas que já atuavam com pesquisas em História da Matemática. O próximo SNHM foi escolhido para ser realizado em Natal, na UFRN. Duas determinações importantes para a organização dos próximos seminários nacionais ficaram deliberados pela Diretoria da SBHMat: 1) Na sessão de abertura do evento haveria uma conferência plenária e esta seria, necessariamente, ministrada por um pesquisador brasileiro atuante na área da História da Matemática; 2) Os Minicursos seriam a convite da organização do evento e seus temas deveriam abordar assuntos históricos relativos ao conteúdo matemático dos ensinos fundamental, médio e superior. Resultado de pesquisa não deveria ser aceito como tema de Minicurso. O mais importante: Com o objetivo de se ter uma coleção de textos sobre a história de conteúdos elementares da Matemática, o responsável (ou responsáveis) por ministrar um Minicurso no Seminário Nacional obrigatoriamente deveria entregar o texto do minicurso com antecedência para que este material fosse impresso a tempo para ser distribuído aos alunos do minicurso no dia de sua realização.

2001 – IV SNHM – UFRN, Natal – Conferência de Abertura: Circe Mary Silva da Silva. Neste 4º Seminário Nacional as novas diretrizes foram adotadas. A Conferência de Abertura foi realizada por um pesquisador brasileiro, os minicursos tiveram seus textos entregues aos participantes, os minicursos tiveram temática sobre assuntos ligados aos conteúdos dos ensinos fundamental, médio e superior. Este evento contou com a participação internacional de Karen Parshal (Estados Unidos da América) e Peter Damerow (Alemanha). Na reunião da diretoria da SBHMat realizada durante este evento ficou decidido que para os próximos SNHMs seriam designados um Coordenador Científico e um Coordenador Local. Ao Coordenador Científico caberia a tarefa da organização do Programa Científico do evento, contando com isso com o apoio de uma Comissão Científica. Ao Coordenador Local caberia a tarefa da organização física do evento, naturalmente contando com o apoio de sua Comissão Organizadora Local. Que haveria abertura de candidatura de entidades interessadas em sediar os Seminários Nacionais. A Diretoria indicaria o Coordenador Científico e elegeria a melhor proposta para sediar o próximo evento. E o Coordenador Local seria a pessoa responsável pela candidatura vencedora. E ainda que os Anais do evento e a editoria dos Livros dos Minicursos seria de responsabilidade do Coordenador Científico, sendo que este teria a liberdade de convidar o Coordenador Local para ser o coeditor. Também ficou decidido que os Anais deveriam sair em um prazo não superior a seis meses após a realização do evento. Outra decisão da diretoria

diz respeito à participação de convidados estrangeiros nos SNHM. A recomendação foi que os organizadores do evento deveriam privilegiar os pesquisadores brasileiros e que os parcos recursos angariados para o evento deveriam ser gastos com brasileiros. Pesquisadores estrangeiros sempre seriam bem-vindos, mas a organização deveria usar outros meios para trazer estes convidados e não usar a verba do evento para isto. Como a abertura de edital visando inscrição de candidaturas para sediar o próximo SNHM seria implementada apenas para o Seminário de 2005, ficou decidido que o V SNHM seria realizado em Rio Claro, sendo que o Coordenador Local seria o Marcos Vieira Teixeira e o Coordenador Científico o Sergio Nobre.

2003 – V SNHM – UNESP, Rio Claro. Conferência de Abertura: Ubiratan D'Ambrosio. Este evento atendeu praticamente a todas as normas indicadas pela diretoria da SBHMat, visto que o Coordenador Científico era seu Secretário-Geral e o Coordenador Local seu Tesoureiro. Uma novidade neste evento iniciou-se atividades visando o testemunho de pessoas foram protagonistas da História Recente da Matemática no Brasil. No V SNHM foi realizada uma Mesa-Redonda sobre o 1º Colóquio Brasileiro de Matemática. Estiveram presentes nesta Mesa-Redonda alguns dos protagonistas deste 1º Colóquio: Chaim Hönig, Elza Gomide, Ubiratan D'Ambrosio, Lindolpho de Carvalho Dias e Alberto Peixoto de Azevedo. Neste ano, pela primeira vez a SBHMat recebeu propostas para a realização do Próximo SNHM. Foram 4 propostas que, após análise, foi aprovada a proposta da UnB. Lígia Arantes Sad assumiu a Coordenação Científica e Maria Terezinha Gaspar a Coordenação Local.

2005 – VI SNHM – UnB, Brasília. Conferência de abertura: Sergio Nobre. Neste evento foi dada continuidade a proposta iniciada no SNHM anterior, ou seja, ter pelo menos uma atividade que trouxesse pessoas para dar seu testemunho sobre a História da Matemática brasileira, e, aproveitando o fato de estarmos em Brasília, o tema da mesa-redonda foi "A História do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília". Compuseram esta mesa os professores Alberto Azevedo, Djairo Guedes de Figueiredo, Geraldo Ávila e Keti Tenenblat. Novamente a diretoria analisou as propostas de candidaturas para sediar o SNHM seguinte e optou por Guarapuava, PR, Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO. Coordenador Local: Edilson Roberto Pacheco e Coordenador Científico Wagner Rodrigues Valente.

2007 – VII SNHM – UNICENTRO, Guarapuava, PR. Conferência de Abertura: Vincenzo Bongiovanni. Também neste evento houve uma atividade sobre a História regional da Matemática e o tema baseou-se na Sociedade Paranaense de Matemática, com a participação de Ubiratan D'Ambrosio e do colega Clóvis Pereira da Silva. Este evento teve como participante internacional o Prof. Luis Carlos Arboleda, da Universidad del Valle, Colômbia. Durante este evento a diretoria da SBHMat sofreu modificação. O Prof. Ubiratan, que havia ficado no cargo de Presidente por 8 anos deu lugar para Sergio Nobre que assumiu a presidência. A Secretaria Geral passou a ser de responsabilidade do colega John Fossa.

2009 – VIII SNHM – UNAMA, Belém do Pará. Conferência de abertura: John Fossa. Coordenador Científico: Iran Abreu Mendes, Coordenador Local: Miguel Chaquiam.

2011 – IX SNHM – UFS – Aracaju. Conferência de abertura: Lígia Arantes Sad. Coordenador Científico: Carlos Henrique Barbosa Gonçalves, Coordenadora Local: Eva Maria Siqueira Alves. Nova mudança na diretoria da SBHMat. A Secretaria Geral passou para a responsabilidade do Prof. Iran Abreu Mendes.

2013 – X SNHM – UNICAMP, Campinas. Conferência de abertura: Tatiana Roque. Coordenadora Científico: Ítala D'Ottaviano, Coordenador Local: Fábio Maia Bertato. Este Seminário aconteceu em seguida ao 1st CLE Colloquium for Philosophy and History of Formal Sciences que contou com a presença de personalidades internacionais ligados à História e Filosofia da Ciência, sendo que alguns participaram do SNHM.

2015 – XI SNHM – UFRN, Natal-RN. Conferência de Abertura: Wagner Valente. Coordenador Científico: Iran Abreu Mendes. Coordenadora Local: Bernadete Morey. Mudança de diretoria. Presidência: Iran Abreu Mendes. Vice-presidência: Marcos Vieira Teixeira e Carlos Roberto de Moraes na Secretaria-Geral.

2017 – XII – UNFEI, Itajubá, MG. Conferência de Abertura: Bernadete Morey. Coordenador Científico: Marcos Vieira Teixeira. Coordenadora Local: Mariana Feiteiro Cavalari.

2019 – XIII SNHM – UECE – Fortaleza, CE. Painel de Abertura– 20 Anos da SBHMat. Ubiratan D'Ambrosio; Sergio R. Nobre (Coordenador do Painel); Iran Abreu Mendes e Angélica R. Calabria. Coordenador Científico: Miguel Chaquiam, Coordenadora Local: Ana Carolina Costa Pereira. Mudança na diretoria da SBHMat - Presidência: Marcos Vieira Teixeira. Vice-presidência: Ligia Arantes Sad e Secretaria Geral: Carlos Roberto de Moraes.

2021- XIV SNHM – UFTM, Uberaba, MG (virtual) Conferência de Abertura: Sergio Nobre. Coordenadora Científico: Cristiana Coppe de Oliveira, Coordenadora Local: Mônica de Cássia Siqueira.

2023 - XV SNHM – UFAL, Maceió, AL. Conferência de Abertura: Marcos Vieira Teixeira. Coordenadora Científico: Mariana Feiteiro Cavalari, Coordenadora Local: Viviane de Oliveira Santos. Mudança de diretoria. Presidência: Mariana Feiteiro Cavalari. Vice-presidência: Marcos Lübeck e Secretaria Geral: Ana Carolina Costa Pereira.

CONCLUSÃO: ALGUMAS PALAVRAS VISUALIZANDO O FUTURO DOS SNHMS

O que foi apresentado neste texto foram os caminhos institucionais para a organização e implementação dos Seminários Nacionais de História da Matemática, realizados com muita dedicação por pessoas que estiveram presentes desde o início tanto dos Seminários como da Sociedade Brasileira de História da Matemática. Nestes 30 anos de existência dos SNHMs, a comunidade de historiadores da matemática brasileira teve um canal de divulgação de resultados de investigações científicas na área, além de um momento de troca de experiências e informações. A estrutura dos Seminários foi aperfeiçoada a partir da realização de cada edição e, num processo dinâmico, continuará assim. As lideranças que atuam junto à diretoria da Sociedade Brasileira de História da Matemática e aqueles que assumirão a organização de futuros Seminários Nacionais, certamente estarão atentas à história da organização destes Seminários preservando atividades durante o evento que deram certo nestes 30 anos e propondo novas atividades no sentido aprimorar e modernizar sua realização.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Uma visão histórica sobre a produção em educação matemática no RS

A historical view on the production of mathematics education in RS

José Carlos Pinto Leivas[1]
Universidade Franciscana – UFN

RESUMO

O artigo apresenta uma síntese de uma apresentação de mesa redonda ocorrida durante o XVI Seminário Nacional de História da Matemática, realizado na cidade de Pelotas, em que foi apresentada uma trajetória de minha atuação no estado do Rio Grande do Sul em particular. Inicialmente, com uma atuação em disciplinas como o Cálculo, realizo um mestrado em Geometria Diferencial, abordando as geodésicas de superfícies e retorno à universidade de origem quando faço uma passagem histórica ao atuar no curso de formação de professores de Ciências e Matemática. Neste sentido, ocorre a preocupação com o perfil de professor de Matemática, com objetivos bem diferentes daqueles em que atuava, tanto na Universidade Católica de Pelotas quanto na Universidade do Rio Grande. A partir desse momento, começo a me envolver com atividades para além da sala de aula, como oficinas rotineiras e um curso de especialização dirigidos a professores da região. Para além disso, o envolvimento em escrita de artigos, palestras e participação junto a SBEM regional e Nacional proporcionaram maior envolvimento com a Educação Matemática e culminaram na realização de um doutorado em Educação (Matemática). Na mesa, é apresentada uma síntese de minha participação nesta área.

Palavras-chave: Quintas com Matemática; EGEM; Educação Matemática em Revista-RS; Geometria.

ABSTRACT

This paper is a summary of a round table presentation that took place during the XVI National Seminar on the History of Mathematics, held in Pelotas, in which I presented a trajectory of my work in the state of Rio Grande do Sul, in particular. Initially, working in subjects such as Calculus, I did a master's degree in Differential Geometry, dealing with the geodesics of surfaces, and returned to my university of origin when I made a historical transition by working on Science and Mathematics pre-service teacher education. In this perspective, there was a concern with the profile of a mathematics teacher, with very different objectives from those in which I have already worked, both at the Catholic University of Pelotas and at the University of Rio Grande. From then on, I began to get involved in activities beyond the classroom, such as routine workshops and a specialization course aimed at teachers in the region. In addition, involvement in writing articles, lectures and participation in regional and national SBEM provided greater involvement with Mathematics Education and culminated in the completion of a doctorate in Education (Mathematics). The table presents a summary of my participation in this area.

Keywords: Thursdays with Mathematics; EGEM; Mathematical Education in RS; Geometry.

[1] Doutor em Educação Matemática (UFPR). Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN), Santa Maria, RS, Brasil. E-mail: leivasj@gmail.com.

INICIANDO UMA CAMINHADA

Na década de 1970, praticamente não se escutava, no Rio Grande do Sul, a expressão "Educação Matemática", bem como o termo "educador matemático". Nos cursos de Licenciatura em Matemática, havia uma preocupação com o conteúdo matemático. Inclusive, professores que atuavam nesta formação eram, em maioria, engenheiros, os quais não tinham preocupação com o ensino, mas, sim, com a transmissão de conhecimentos, o que era fortemente constatado pelo alto índice de reprovação desde o início do curso de quatro anos. Quando ingressei no curso, havia aproximadamente 60 alunos nos cursos de Física e Matemática, e somente quatro destes concluíram o quarto ano no tempo mínimo. Alguns abandonaram o desejo de serem professores de Matemática e outros levaram mais do que o tempo mínimo para se formarem. Sinto-me lisonjeado por ter concluído o curso no tempo mínimo, embora todas as intempéries como a necessidade de começar a trabalhar para poder manter o curso em uma universidade privada.

Como no primeiro ano estava prestando serviço militar, comecei a lecionar em uma segunda série do antigo ginásio no Colégio Gonzaga, em Pelotas, por indicação de uma colega mais velha que já lecionava nesta escola durante o segundo ano. Foi uma experiência incrível, pois não conhecia praticamente nada de didática e precisava acompanhar a disciplina de Cálculo II, cujo professor era um dos engenheiros que atuava no curso.

Neste mesmo ano, 1972, fui contratado temporariamente para o ensino público estadual, porém na cidade vizinha de São Lourenço do Sul (Boa Vista). As dificuldades foram grandes, pois o transporte era bastante complicado e o estado só começaria a pagar no final daquele ano, o que exigiu um esforço ainda maior. Nessa ocasião, ocupei-me de uma sexta série do Ensino Fundamental, recém implementada naquele ano, em vez do Ginásio, o que ampliou a oferta para o interior, que antes só tinha o Primário. Guardo dessa atuação o primeiro contato com essa realidade, quando os alunos não entendiam a minha letra no quadro, sendo o primeiro problema didático a ser resolvido. Tomei uma decisão: dividir as linhas do caderno e enquadrar a escrita nessas linhas reduzidas, pois, à época, não havia recursos e nem conhecia tal material, que hoje é frequente. Assim, venci o primeiro entrave educacional e, posteriormente, passei a receber elogios pela minha organização no quadro, sendo que, até hoje, encontro ex-alunos que tecem elogios.

No terceiro ano da graduação, meu contrato no estado do Rio Grande do Sul teve carga horária ampliada, ainda na cidade de São Lourenço do Sul, porém o lugar ficava a cerca de 30 km de distância de onde eu atuava, no Segundo Grau da Escola Normal. Mesmo com esta diversidade de lugares para atuar, continuei o curso na UCPEL e o concluí no ano seguinte, no tempo mínimo de quatro anos, com mais três colegas dos que começaram juntos.

Essa narrativa inicial da trajetória formativa e profissional indica que as dificuldades enfrentadas não esmorecem o desejo de uma realização. Obviamente que há fatores que possibilitam essa realização, como o incentivo do pai que nunca entrou em uma escola e da mãe que só estudou até o segundo ano, apenas alfabetizando-se. Eles nunca deixaram de apoiar e incentivar o estudo, na busca de uma profissão. No Grupo Escolar Dr. Armando Fagundes, na Vila Gotuzzo, no Bairro Fragata em Pelotas, cursei o Primário (Anos Iniciais, atualmente) e lá tive a oportunidade de ser aluno da profa. Maria Adelina, que me estimulou a participar de um concurso de Melhor Companheiro, o qual acontecia na Faculdade de Direito (centro de Pelotas, que não conhecia). Ela me levou de ônibus até sua casa para almoçar e, à tarde, ao concurso. Este, talvez, tenha sido um dos motivos de sonhar em alcançar um novo patamar na vida.

Ao passar para o Ginásio (Ensino Fundamental), tive outra pessoa que me motivou a continuar durante os quatro anos: a profa. Maria Alzira. O incentivo se deu por meio de um desafio, já na primeira série ginasial, com a proposta de que, ela presentearia, com o livro da série subsequente, quem obtivesse nota dez durante todo o ano. À época, não havia o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) e a distribuição gratuita do livro, tendo de ser adquirido por conta própria. Como era pobre e tinha dificuldades, esse foi um belo desafio e somente não alcancei a conquista na segunda série, o que não me fez desanimar. Esse fato é narrado para indicar que, possivelmente, tenha sido um dos que levaram escolha futura da Licenciatura em Matemática, muito embora no Científico (atual Ensino Médio) não tive bons professores, inclusive, não recordo o nome de nenhum deles.

Em 1976, agora, atuando somente na cidade de Pelotas, em escolas da rede pública do RS, fui chamado para atuar na UCPEL e, como professor ingressante, foi-me atribuída a Geometria Diferencial (entre outras), a qual não existia na formação inicial, o que me demandou um estudo muito grande, mas que me levou a novas buscas, como participar em um curso de extensão no IMPA. Um colega que gostava da História da Matemática me forneceu os anais desses eventos. Além disso, fui em busca de cursos de verão na USP e na UNICAMP. O anseio por novas abordagens e o desempenho na UCPEL me proporcionaram um convite para ser professor na FURG, cujo ingresso, à época, não era por concurso e sim por convite. Atuei com carga reduzida no público estadual, pois havia prestado um concurso para 20h semanais como professor, também na UCPEL, até 1981, quando ingressei no mestrado na UFSC e passei a atuar com dedicação exclusiva na FURG, deixando as outras instituições em que atuava.

O mestrado me fez seguir a linha 'fisgada' pela Geometria, permitindo-me, em 1983, concluir uma dissertação intitulada Geodésicas em Superfícies, focando, ainda, na Matemática mais formal. Ao retornar à FURG, foram-me designadas disciplinas voltadas para a Geometria no Curso de Matemática, o que me fez voltar ao objetivo do curso. A saber: a formação de professores para a escola básica. Buscar novas direções nesta linha foi o que me introduziu na Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM. Na sequência, descreverei atuações neste campo.

Já aposentado na FURG, em 2004, mudo de residência para a região metropolitana e atuo na ULBRA, em uma disciplina de Geometria na graduação e em orientação de estágios em Matemática, o que me fez aprofundar o meu conhecimento sobre formação de professores. Tal trajetória me levou ao doutorado em Educação (Matemática) na UFPR em 2009, em um vai-e-vem de Porto Alegre a Curitiba. Concluí-o em 2009, com a tese Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura em Matemática, a qual tem produzido frutos até o presente momento. Atualmente, exerço funções na Universidade Franciscana – UFN em um programa de pós-graduação, lecionando disciplinas, especialmente, da área de Geometria e orientando mestrandos e doutorandos.

Na sequência, passo a descrever algumas passagens profissionais, especificamente, realizadas no RS.

PRIMEIRAS ATIVIDADES

Ao concluir o mestrado, novas possibilidades se abriram, uma vez que geodésicas era um tema ainda pouco divulgado na região sul do Brasil. O que levou o professor Dr. Jaime Ripoll da UFRGS, especialista na área, a me convidar para um projeto de pesquisa que envolvia um professor da insti-

tuição Nubem Medeiros, o prof. Sílvio Brauch, da UFPEL, o prof. Getúlio Retamoso, da UFSM, e eu, professor da FURG. As reuniões ocorriam mensalmente em Porto Alegre, em que levávamos um orientando cada um. Enquanto os estudantes se reuniam para desenvolver trabalhos, nos reuníamos para debater sobre Geometria.

A partir desse trabalho, fui convidado para proferir uma conferência sobre a temática de minha dissertação em um evento, realizado semanalmente por um mesmo doutor na instituição, cujo nome não me lembro. Fui o primeiro professor, mesmo sem doutorado, a proferir palestra na UFRGS, atuando no interior do RS.

Como era um evento produtivo, criei na FURG algo similar, o qual denominei Quintas com Matemática (Figura 1, 2000) e que envolveu alunos de graduação, professores atuantes na escola básica de Rio Grande e outros interessados.

Figura 1 – Capa do folder de divulgação

Fonte: Autoria própria

Esta imagem foi visualizada recentemente nas mídias por ser indicada pelo atual coordenador do curso de graduação da FURG, no desejo de resgatar o evento. No acervo que disponho, localizei trabalhos publicados, dos quais destaco: (1) A variabilidade e os escores reduzidos da minha aluna, e atualmente professora da FURG, Suzi Samá Pinto; (2) Construção da reta real com régua e compasso, da profa. da FURG Alice Terezinha Pacheco; (3) Geometria das transformações, do autor deste trabalho; (4) Sistemas de numeração, da profa. da Furg Ivane Almeida Duvoisin; (5) Geometria e Percepção, da acadêmica Suzana Pereira Pinto e José Carlos Pinto Leivas; e (6) A teoria da escolha e a autoavaliação, do Prof. Eng. Tabajara Lucas de Almeida, da FURG. Nota-se, desta sequência, que todos são pertencentes à FURG, porém já trazem o ensino em foco e, metade deles, envolve Geometria.

A situação evolui com a presença da profa. Dra. Ocsana Danyluk, que atuou junto a UPF. Naquela época, não havia *meet* e tantas tecnologias, havia muita dificuldade em obter recursos para levar convidados até o Rio Grande. Ela foi uma das primeiras doutoras de Rio Claro e a primeira

externa a nos visitar. Após nosso encontro e saber do meu trabalho, convidou-me para uma banca em Passo Fundo e para oferecer um minicurso. As portas se abriram mais um pouco, pois, sendo ela uma das fundadoras da SBEM, chamou-me para atuar nesta frente, já que foi criada a regional da sociedade no RS.

O interesse pela área de ensino cresceu e criei um curso de especialização em Matemática na FURG, o qual posteriormente também foi aplicado em Santa Vitória do Palmar, cuja distância aproximada de Rio Grande é de 200 km. Além disso, novas alternativas foram surgindo. Uma delas descrevo a seguir.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO RS[2]

Ao conhecer a SBEM-RS, o meu envolvimento foi inevitável e, com isso, minha participação envolveu a direção desta regional, tendo sido organizador de Encontros Gaúchos de Educação Matemática (EGEM), em Rio Grande (o 4º) e em Pelotas. A regional, então, envolveu-se com a Educação Matemática em Revista – RS, tendo sua primeira publicação em 1999, a qual é organizada até os dias de hoje, totalmente pela diretoria, da qual já participei como membro do Conselho Fiscal e do Conselho Editorial e como autor e avaliador. No ano de 2001, em seu terceiro volume, tive uma experiência como autor com a publicação intitulada *Construindo o Conjunto Z por Classes de Equivalência*, em que aspectos geométricos já eram introduzidos.

Na edição n. 5, de 2003, publico o artigo intitulado *Existem Bolas Quadradas?*. Na edição n. 6, de 2004, novamente, a Geometria se faz presente no artigo *Desenhar ou Representar Geometricamente?*, composto de pesquisa realizada com pressupostos de Piaget. Com o título *Estimulando Cultura Geométrica para a Escola Básica*, compareci na edição n. 7, de 2005/2006, e, também, em outras edições.

OUTRAS PUBLICAÇÕES NO RS

Retomando a temática do mestrado, uma das primeiras publicações teve o título Geometrias não-euclidianas 1ª parte[3] , na qual se abordou o conceito de geodésica na revista Vetor (1988, p. 103): "A curva g: I → M é dita uma GEODÉSICA de M se, ∀∈M, g" é ortogonal à M em g(t), isto é, g" //N, onde N é o vetor normal a M em g(t)". A 2ª parte, que apresenta um modelo de Geometria Hiperbólica, foi publicada em 1993 na mesma revista, no terceiro volume. Esses artigos ilustram a Matemática formal, como pode ser observado na definição citada.

A sequência da temática é publicada no v.5 (1995) da revista, com o título *Alguns aspectos geométricos da multiplicação*, que trazia o emprego de conceitos geométricos a outras áreas da Matemática. Depois, no v. 6 (1996), os aspectos priorizados nas duas edições envolvendo as Não-Euclidianas são amenizados de forma didática e atrativa, pois um dos autores era meu aluno de graduação e bolsista participante daquele projeto interinstitucional. Destaca-se as conclusões deste artigo intitulado *Geodésicas e Cia: um paralelo entre Geometria Diferencial e Geometria Euclidiana*:

> Pelo exposto, podemos concluir que, na maioria das vezes, a analogia entre as retas da geometria de Euclides e as geodésicas de uma superfície qualquer foi plenamente obtida. Em alguns casos, a utilização de alguns conceitos modificados deve-se principalmente à

[2] Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS.
[3] Revista Vetor, n.2, p. 99-106, 1988.

> necessidade de generalizar propriedades importantes das retas que não puderam ser "Diretamente transferidas" para as geodésicas (Dutra; Leivas, 1996, p. 84).

A importância desta publicação se dá devido à participação de um aluno oriundo daquele projeto inicial que se torna, posteriormente, doutor na Educação Matemática.

As Geometrias Não-Euclidianas estiveram e estão presentes no que diz respeito a minhas orientações em nível de mestrado e doutorado, através de temas como geometria esférica, hiperbólica, do táxi e fractal, das quais resultam artigos no âmbito nacional e internacional.

E VÊM OS ENCONTROS GAÚCHOS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EGEM

Aos 27 de janeiro de 1988, é fundada a Sociedade Brasileira de Educação Matemática-SBEM, tendo, como uma das fundadoras, a já citada Dra. Ocsana Danyluk. Em 1989, a SBEM realizou o I Encontro Gaúcho de Educação Matemática, que aconteceu entre 20 e 22 de setembro, o qual ocorreu na UNISINOS, quando foi instituída a regional SBEM-RS. A partir deste primeiro encontro, os demais foram promovidos e ocorreram em diversas regiões do estado, o que permitiu uma divulgação maior da Educação Matemática no RS. No Quadro 1, indica-se uma síntese desses encontros até o ano de 2024, quando ocorreu o XVI na cidade de Bagé. Constata-se a variedade de regiões abrangidas pelo evento nos diversos anos.

Quadro I – Encontros Gaúchos de Educação Matemática

Encontro	Ano	Instituição
I	1989	UNISSINOS
II	1993	PUC-RS
III	1994	UNIJUI
IV	1995	FURG
V	1997	NOVO HAMBURGO
VI	1999	FACOS
VII	2001	UNISC
VIII	2003	UCPEL
IX	2006	UCS
X	2009	UNIJUI
XI	2012	UNIVATES
XII	2015	PUC-RS
XIII	2018	UFSM
XIV	2021	UFPEL
XV	2024	UNIPAMPA – Bagé

Fonte: Autoria própria

Tenho participado efetivamente destes encontros em diversas frentes, dentre as quais destaco trabalhos científicos apresentados e/ou publicados, que ilustram minha evolução na caminhada pela Educação Matemática (Geométrica) no RS. Inicio com o trabalho apresentado no III EGEM (1994), *Algumas estruturas algébricas*, o qual teve, por objetivo, desenvolver habilidades que favorecessem o trabalho do professor e a aprendizagem do aluno em termos de propriedades como fechamento, comutatividade, associatividade e outras, não se limitando apenas à memorização de nomes de propriedades, mas, sim, em seu emprego. Em seguida, as simetrias no triângulo, no quadrado,

rotações e reflexões, além de congruências módulo *m,* também fizeram parte do trabalho. Em suma, buscou-se associar Geometria à Álgebra, o que mostra uma sintonia com a temática do evento: *Ensino e Pesquisa em busca de Sintonia*.

Por sua vez, o minicurso apresentado durante o VII EGEM (2001) foi: *A formação do pensamento geométrico*. Nele, foram abordadas duas questões que expunham os professores à dificuldade de trabalhar a Geometria e os alunos à dificuldade em compreendê-la, o que apontou para uma falta no currículo relativo a Geometria ao longo da escolaridade até a formação de professores. No minicurso, são desenvolvidas atividades concretas e dinâmicas que proporcionam o desenvolvimento de pensamento geométrico, como a teoria de Van Hiele, os *softwares Cabri* e o *Maple*, existentes em uma época anterior ao *GeoGebra*. A temática do minicurso vai ao encontro da proposta para o evento.

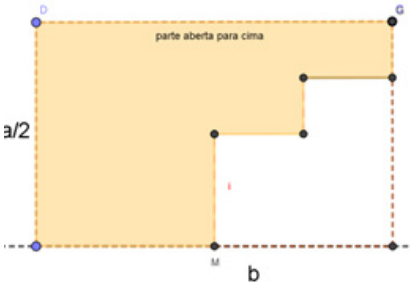
No último evento, ainda como diretor regional em meu último mandato, no XIV EGEM (2024), foram apresentados trabalhos que ilustram minha satisfação, ao passo que vários deles eram pesquisas em Geometria da autoria de meus ex-orientandos de mestrado, doutorado e pós-doutorado. Apresentei o minicurso Geometria Como Didática para o Ensino nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, no eixo Formação de Professores que ensinam Matemática, o que explicita como, de fato, objetivava ser um educador matemático especializado em Geometria. Esta pequena síntese contextualiza minha atuação no cenário regional, uma vez que seus desdobramentos vão além.

CONCLUINDO A FALA NA MESA

Para concluir minha apresentação nesta mesa, ao lado da renomada pesquisadora Circe, deixo, aqui, alguns resultados de pesquisa e trabalhos que me levaram a incorporar quem, hoje, aos 74 anos, sou e pretendo continuar sendo: um educador matemático, mais precisamente geométrico, por ter passagem pelos diversos níveis de ensino. Hoje, sou privilegiado em trabalhar na educação matemática e orientar mestrandos e doutorandos.

Um aspecto a relatar é a experiência realizada com mestrandos em Ensino de Ciências e Matemática em uma disciplina dirigida a professores com formação inicial em Pedagogia, em que trabalhei princípios da Geometria Fractal, para introduzir os números fracionários e decimais. Nesta realização, utilizei a construção de um cartão fractal, na qual explorei recursos e materiais didáticos e que despertaram o interesse dos alunos na obtenção de medidas a partir do concreto. A Figura 2 ilustra uma tal construção.

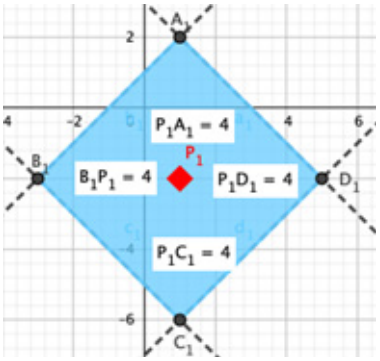
Figura 2 – Cartão Fractal



Fonte: Autoria própria

É frequente, na Geometria Euclidiana, falar em caminho mais curto entre dois pontos. Assim, penso no caminho mais curto que um táxi realiza para se deslocar entre dois pontos distintos de uma cidade urbanizada. A ideia leva a pensar em outro tipo de Geometria, a chamada Geometria do Táxi, na qual os deslocamentos não ocorrem convencionalmente em um sistema cartesiano ortogonal e, sim, ao longo dos dois catetos. Na Figura 3, é ilustrada uma circunferência e/ou um círculo nesta geometria, o que indico anteriormente como uma bola quadrada em um artigo publicado.

Figura 3 – Uma bola quadrada na Geometria do Táxi



Fonte: Autoria própria

Observa-se um ponto central P_1 e os vértices A_1, B_1, C_1, D_1 e que as distâncias são similares ao que ocorre na Euclidiana. Porém, para chegar aos pontos dos lados, é necessário percorrer um triângulo retângulo e a distância é a soma das medidas dos catetos e, não, a da hipotenusa, como na Euclidiana.

É comum ouvir dizer que a Geometria está em toda parte, no entanto, ela é só demonstrada a partir de embalagens de produtos utilizados cotidianamente. Uma possibilidade de ilustrar essa constatação é encontrada em Leivas (2024), em que desenvolvi habilidades na *Visualização geométrica em lixeiras*. O uso do recurso proporcionado pelo *GeoGebra* possibilita registros que facilitaram o processo de compreensão e formalização de certos conceitos envolvidos. Na Figura 4 é exemplificado o que é encontrado em lixeiras, que podem ser aproveitadas para a exploração de relações geométricas.

Figura 4 – Geometria em lixeiras urbanas

(a) (b)

Fonte: Autoria própria

Na Figura 4(a), observa-se a parte frontal da lixeira, na qual se percebem duas imagens repetidas, o que poderia ser associado a um movimento de translação. Em (b), uma delas foi isolada e recebeu uma linha em cor vermelha, que funciona como um 'espelho', associado a um eixo de reflexão, pois a parte da esquerda é refletida na da direita.

Outra pesquisa que gostaria de deixar, aqui, registrada, para ilustrar minha percepção da visualização como elemento norteador para o ensino e aprendizagem de Geometria de forma contextualizada é Leivas (2022), resultado de uma pesquisa realizada com professores, alunos de graduação, de especialização, de mestrado e doutorado, separados em dois grupos distintos. Na Figura 5, apresento uma fotografia de minha autoria, capturada em calçadas e jardins urbanos, a qual mostra arbustos ornamentados por alguém que não é um professor de Geometria.

Figura 5 – Imagem de arbusto em formato geométrico

Fonte: Autoria própria

O *GeoGebra*, novamente, auxilia nas comprovações necessárias para identificar objetos geométricos visualizados. A temática, em geral, é abordada em geometria espacial, geometria analítica e cálculo diferencial. Em geral, nessas disciplinas o professor tem limitações na exemplificação de objetos do mundo real. Na Figura 4, visualiza-se um parabolóide. Observa-se um recorte que, no *GeoGebra*, é assemelhado a uma parábola e isso pode ser observado na janela algébrica do *software*. Outras aproximações também podem ser associadas.

Entendo que os exemplos apresentam uma visão geral de onde um indivíduo como eu, de origem humilde e com poucos recursos pode chegar a se tornar um educador matemático/geométrico, inclusive seguindo as propostas definidas nas ementas dos EGEMs. Espero continuar contribuindo cada vez mais com nosso estado, o Brasil e o mundo.

REFERÊNCIAS

DUTRA, Ítalo Modesto; LEIVAS, José Carlos Pinto Leivas. Geodésicas e Cia: um paralelo entre Geometria Diferencial e Geometria Euclidiana. **Revista Vetor**, n. 6, pp. 77-84, 1996.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Geometrias Não-Euclidianas: 1ª Parte – Uma classificação. **Vetor Revista de Ciências Exatas e de Engenharia, FURG**, v. 2, 1988, pp- 99-107.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Geometrias Não-Euclidianas: 2ª Parte – Um modelo de Geometria Hiperbólica. **Vetor Revista de Ciências Exatas e de Engenharia, FURG**, v. 3, 1993, pp- 57-64.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Alguns aspectos geométricos da multiplicação. **Vetor Revista de Ciências Exatas e de Engenharia, FURG**, v.5, 1995, pp- 63-74.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Visualizando formas geométricas em arbustos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia-RBECT**, Ponta Grossa, Edição especial v. 22, n. 45, p. 82-105, 2022. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect. Acesso em 10 ago. 2024:

LEIVAS, José Carlos Pinto. Visualização geométrica em lixeiras. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 13, n. 3, p. 065-084, 2024. Disponível em:https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/issue/view/66608. Acesso em: 12 ago. 2024/

Comunicações Científicas

arte: leandro selister | @lselister

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Riemann ou Riemann-Dini? Qual o nome do teorema sobre séries condicionalmente convergentes?

Riemann or Riemann-Dini? What is the name of the theorem on conditionally convergent series?

Mateus Bernardes[1]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

RESUMO

As séries numéricas convergentes podem ser divididas em duas categorias: aquelas que são absolutamente convergentes, isto é, que convergem mesmo quando seus termos são tomados em módulo; e aquelas que são condicionalmente convergentes, isto é, aquelas que quando seus termos são tomados em módulo, se tornam divergentes. Esta divisão não é apenas retórica, estes dois tipos de séries têm propriedades bastante distintas, entre elas aquela sobre a validade da propriedade comutativa da soma: ela vale para séries absolutamente convergentes e não vale para as condicionalmente convergentes. Este resultado é conhecido desde a primeira metade do século XIX, tendo sido citada por Dirichlet, que não a demonstrou. A primeira demonstração do resultado é devida a Riemann, e posteriormente por Dini, que teria acrescentado uma pequena contribuição àquela demonstração de Riemann. Tanto na bibliografia clássica de Análise Matemática quanto na científica, em geral, o resultado aparece citado ora como teorema de Riemann, ora como teorema de Riemann-Dini. No Brasil, parece haver uma distinção temporal: enquanto as primeiras referências da primeira metade do século XX nomeiam o resultado como Riemann-Dini, as referências modernas parecem preferir a versão que credita o resultado apenas a Riemann. Neste trabalho investigamos a trajetória deste resultado surgido em meados do século XIX, passando pelos matemáticos alemães e italianos e a forma como o resultado chega ao Brasil no início do século XX, permitindo discutir a forma como resultados clássicos são nomeados.

Palavras-chave: Séries numéricas; Convergência Absoluta; Comutatividade; Teorema de Riemann; Teorema de Riemann-Dini.

ABSTRACT

Convergent numerical series can be divided into two categories: those that are absolutely convergent, meaning they converge even when their terms are taken in absolute value; and those that are conditionally convergent, meaning that when their terms are taken in absolute value, they become divergent. This division is not merely rhetorical—these two types of series have distinct properties, including the validity of the commutative property of addition. This property holds for absolutely convergent series but fails for conditionally convergent ones. This result has been known since the first half of the 19th century, having been cited by Dirichlet, who did not prove it. The first proof is attributed to Riemann, and later refined by Dini, who reportedly added a minor contribution to Riemann's original demonstration. In both classical mathematical analysis literature and broader scientific works, the result is alternately referred to as Riemann's theorem or the Riemann-Dini theorem. In Brazil, a chronological distinction appears: early 20th-century references label it the Riemann-Dini theorem, while modern sources tend to credit Riemann alone. This work investigates the trajectory of this result, which emerged in the mid-19th century through the contributions of German and Italian mathematicians and explores how it reached Brazil in the early 20th century. This historical analysis provides a basis for discussing the naming conventions of classical mathematical results and the evolution of academic attribution.

Keywords: Numerical Series; Absolute Convergence; Commutativity; Riemann's Theorem; Riemann-Dini Theorem.

INTRODUÇÃO

Um resultado clássico em análise matemática estabelecido na segunda metade do século XIX, lida com o comportamento de séries infinitas de números reais que são condicionalmente convergentes. Afirma que um reordenamento nas parcelas da série pode mudar o valor da soma e que, com

[1] Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia (UFPR). Professor Associado (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: mbernardes@utfpr.edu.br.

o reordenamento adequado destes termos, a série pode convergir para qualquer valor previamente fixado. Já para as séries que são absolutamente convergentes qualquer permutação na ordem em que são somadas as parcelas mantém a soma inalterada.

Na bibliografia de análise o resultado é geralmente citado como teorema de Riemann ou então teorema de Riemann-Dini. Aparentemente a escolha por uma das formas de referenciar o resultado depende, *grosso modo*, da origem geográfica do autor: em geral as referências anglo-saxônicas atribuem o resultado exclusivamente a Riemann, enquanto que as italianas preferem Riemann-Dini, ainda que possa ser considerada a hipótese de que Dini tenha incluído uma pequena contribuição ao resultado de Riemann. Cabe também ressaltar que o resultado era certamente conhecido antes desses dois matemáticos, pois havia sido enunciado antes por Dirichlet. Quando se trata das referências brasileiras em análise, as duas formas ocorrem e parecem depender mais da época em que foram escritas do que de outros fatores.

O nome Riemann associado ao teorema deve-se, naturalmente, a Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemão de grande proeminência por suas contribuições sobretudo na teoria da integração e geometria diferencial. Já o nome Dini refere-se a Ulisse Dini (1845-1918), matemático italiano de obra relevante em diversas áreas, entre elas a análise matemática.

Neste trabalho pretendemos discutir e compreender as circunstâncias envolvidas numa e noutra nomeação, e mesmo que não aponte para uma conclusão clara e definitiva – mesmo porque talvez a tarefa seja irrealizável – veremos que a investigação parece sugerir a maneira sinuosa como alguns resultados importantes circularam durante a era de ouro da análise, época de sua Aritmetização na segunda metade do século XIX.

Este trabalho está baseado em ampla pesquisa bibliográfica que fornece elementos para uma comparação e análise qualitativa dos textos e obras, tanto as originais de Riemann e Dini, quanto as de caráter didático – livros-texto de análise matemática dedicados ao ensino da disciplina. Também faremos referências a artigos científicos que citam o teorema, ainda que seu objetivo não seja especificamente discuti-lo, mas dentro dos quais este aparece como resultado auxiliar. Esta análise tem por objetivo abrir uma discussão sobre a autoria de determinados resultados em matemática e a forma como ela é, em muitos casos, designada.

UMA CLASSIFICAÇÃO PARA AS SÉRIES NUMÉRICAS

Uma série numérica é uma soma com infinitos termos como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots,$$

onde cada a_i na expressão acima é um número real.

Uma série pode ser convergente, quando esta soma resulta num número real ou divergente, caso contrário. Dizer que a soma resulta num número real significa entender a soma como um processo limite, isto é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N)$$

de tal forma que a convergência depende da existência deste limite.

Dentre aquelas que convergem ainda podemos fazer uma distinção entre as que são absolutamente convergentes e as que são condicionalmente convergentes.

Uma série como a acima é absolutamente convergente quando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| + \cdots$$

é convergente, isto é, quando a convergência da série ocorre mesmo com as parcelas sendo tomadas em valor absoluto. Um exemplo é a série:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots,$$

que converge para 1. Sabe-se da teoria de séries que, toda série que converge absolutamente, também converge. Portanto a série

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \cdots,$$

é absolutamente convergente pois, com os valores absolutos a série é exatamente a anterior. Entretanto a recíproca não é válida, isto é, existem séries convergentes que não são absolutamente convergentes como atesta o contraexemplo clássico, a série harmônica alternada:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots,$$

que converge para *ln* 2, entretanto não converge em módulo, pois a série tomada com os módulos dos termos,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots,$$

trata-se da série harmônica, que é reconhecidamente divergente.

Entretanto, a distinção que mais nos interessa neste trabalho diz respeito à validade ou não da propriedade comutativa para estas somas. Veremos ao longo deste texto como se chegou **à** conclusão de que, enquanto para a séries absolutamente convergentes a propriedade é válida, para as condicionalmente convergentes pode não ser. Sendo $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação da ordem dos números naturais, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)} + a_{\varphi(4)} + a_{\varphi(5)} + \cdots$$

será considerada um reordenamento da série original, com a ordem dos termos trocada. Assim, por exemplo:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\cdots$$

é um reordenamento da série harmônica alternada apresentada acima, que converge para 3/2 *ln* 2. Fato é que, para uma série que não seja absolutamente convergente, a permutação na ordem dos termos da série pode resultar numa outra soma que não a original, ou seja, a propriedade comutativa típica das somas finitas deixa de valer aqui.

O TEOREMA SOBRE REORDENAMENTO DE SÉRIES POR DIRICHLET

Segundo Laugwitz (2008) a convergência das séries acima para *ln* 2 e 3/2 *ln* 2, já era conhecido desde os tempos de Euler. Entretanto não eram consideradas como tendo sido obtidas uma da outra por permutação de seus termos, mas como objetos completamente distintos, derivados da expansão em série de Taylor de diferentes funções. De tal sorte que essa discussão sobre comutatividade estava fora de cogitação na época.

Foi só em 1837 que Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) citou de maneira um tanto marginal este importante resultado, afirmando que para séries absolutamente convergentes a propriedade comutativa da soma estava garantida (Hairer; Wanner, 1995). Neste trabalho ele mostra que é possível encontrar infinitos números primos em progressão aritmética que tenham o primeiro termo e a razão, primos entre si (Dirichlet, 1837). Em tradução livre temos:

> [...] a diferença essencial que existe entre dois tipos de séries infinitas. Se considerarmos cada valor [absoluto] em vez de cada termo ou, sendo imaginário, seu módulo, então dois casos podem acontecer. Ou é possível fornecer um valor finito que seja maior que a soma de qualquer um de muitos desses valores ou módulos, ou esta condição não pode ser satisfeita por qualquer número finito. No primeiro caso, a série sempre converge e tem uma soma completamente definida, independentemente de como os termos da série são ordenados [...]. No segundo caso, a série também pode convergir, mas a convergência depende essencialmente do tipo de ordem dos termos. Estando a convergência mantida para uma ordem específica, então ela pode parar [de convergir] quando esta ordem for alterada, ou, se isso não acontecer, então a soma das séries pode vir a ser completamente diferente. Assim, por exemplo, das duas séries formadas a partir dos mesmos termos:
>
> $$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$$
> $$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$
>
> apenas a primeira converge, enquanto para as seguintes:
>
> $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$
> $$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$
>
> ambas convergem, mas com somas diferentes (Dirichlet, 1837, p. 48-49).

O texto original exibimos nas Figuras 1 e 2 adiante, extraídas diretamente do trabalho de Dirichlet (1837). Um comentário aqui é fundamental: Dirichlet reconhece as somas como diferentes e as entende como uma sendo obtida da outra através de um reordenamento de seus termos. Entretanto, apesar de saber que o fato estava associado à característica de a série ser ou não absolutamente convergente, Dirichlet não provê uma demonstração do resultado, e tampouco justifica sua supressão.

Figura 1 – Texto original de Dirichlet (1837, p. 48).

Ehe wir weiter gehen, ist es nöthig, den Grund der oben gemachten Voraussetzung anzugeben, nach welcher $s>1$ sein sollte. Man überzeugt sich von der Nothwendigkeit dieser Beschränkung, wenn man auf den wesentlichen Unterschied Rücksicht nimmt, welcher zwischen zwei Arten von unendlichen Reihen Statt findet. Betrachtet man statt jedes Gliedes seinen Zahlenwerth oder wenn es imaginär ist, seinen Modul, so können zwei Fälle eintreten. Es läfst sich nämlich entweder eine endliche Gröfse angeben, welche die Summe von irgend welchen und noch so vielen dieser Zahlenwerthe oder Moduln stets übertrifft, oder diese Bedingung wird von keiner noch so grofsen aber endlichen Zahl erfüllt. Im ersteren Falle ist die Reihe immer convergirend und hat eine völlig bestimmte Summe, welche von der Anordnung der Glieder ganz unabhängig ist, sei es nun, dafs diese nur nach einer Dimension, sei es, dafs sie nach zwei oder mehr Dimensionen fortschreiten, und eine sogenannte Doppel- oder vielfache Reihe bilden. Im zweiten der eben unterschiedenen Fälle kann zwar die Reihe auch noch convergiren, aber diese Eigenschaft, so wie die Summe der Reihe, werden wesentlich durch die Art der Aufeinanderfolge der Glieder bedingt sein. Findet die Convergenz für eine gewisse Ordnung Statt, so kann sie durch Änderung

Fonte: Foto do autor, da obra (Dirichlet, 1837, p. 48).

Figura 2 – Texto original de Dirichlet (1837, p.49).

dieser Ordnung aufhören, oder es kann, wenn dies nicht der Fall ist, die Summe der Reihe eine ganz andere werden. So ist z. B. von den beiden aus denselben Gliedern gebildeten Reihen

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

nur die erste convergirend, während die folgenden

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

zwar beide convergiren, aber keinesweges dieselbe Summe haben.

Fonte: Foto do autor, da obra (Dirichlet, 1837, p. 49).

O TEOREMA SOBRE REORDENAMENTO DE SÉRIES POR RIEMANN

Foi só no ano de 1868 que a primeira prova deste resultado foi publicada. Seu autor, Riemann, havia falecido dois anos antes de ver o resultado publicado e aparentemente não tinha a intenção de fazê-lo. Ele o obtivera em 1854 quando apresentava sua habilitação para professor em Göttingen (Laugwitz, 2008; Gray, 2015). Na ocasião Riemann apresenta um trabalho sobre representação

de funções em séries de Fourier, fortemente influenciado por Dirichlet (Gray, 2015), de quem era admirador e que havia conhecido na passagem deste último por Göttingen.

Quem publica o resultado é Richard Dedekind, também professor em Göttingen e com quem Riemann mantinha uma longa relação de amizade. O texto aparece no anuário de pesquisa da universidade referente aos anos de 1866-67, e na apresentação Dedekind escreve:

> Este tratado foi apresentado em 1854 pelo autor para sua habilitação na Universidade de Göttingen na Faculdade de Filosofia. Embora o autor aparentemente não pretendesse publicá-lo, a publicação aqui na sua forma completamente inalterada é suficiente tanto pelo grande interesse do próprio assunto como pela forma como trata os princípios mais importantes da análise infinitesimal, parece justificada[2] (Riemann, 1868, p. 87).

Mais uma vez, o resultado aparece no texto de maneira relativamente marginal, uma vez que o objetivo do trabalho incluía resultados mais robustos que este. Em relação ao que Dirichlet havia proposto anos antes, a diferença é que Riemann agrega ao comentário uma demonstração. Inicialmente Riemann repete o comentário de Dirichlet a respeito da classificação das séries em duas categorias:

> [...] as séries infinitas se enquadram em duas classes essencialmente diferentes, dependendo se permanecem convergentes ou não quando todos os elementos se tornam positivos. Na primeira, os membros podem ser posicionados conforme desejado, mas o valor [da soma] na segunda depende da ordem dos membros (Riemann, 1868, p. 97).

Em seguida, insere um resultado preliminar:

> Na verdade, numa série da segunda classe, denotamos os termos positivos, por sua vez, por
>
> $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
>
> os negativos por
>
> $$-b_1, -b_2, -b_3, \ldots$$
>
> Portanto, é claro que tanto $\sum a$ como $\sum b$ devem ser infinitos, porque se ambas fossem finitas, a série convergiria depois de os sinais serem equalizados; mas, se uma delas fosse infinita, a série divergiria (Riemann, 1868, p. 97).

Em seguida Riemann enuncia e demonstra o resultado sobre a não-comutatividade de séries alternadas, que exibimos integralmente na Figura 3, podendo ser livremente traduzido por:

> Aparentemente a série pode agora assumir qualquer valor C através de um arranjo adequado dos membros. Se você pegar alternadamente esses grandes membros positivos da série até que seu valor seja maior que C, e esses grandes membros negativos até que seu valor se torne menor que C, então o desvio em relação a C nunca será maior que o valor anterior ao da última mudança do membro do elemento. Uma vez que tanto as quantidades a como as quantidades b eventualmente se tornam infinitamente pequenas à medida

[2] Diese Abhandlung ist im Jahre 1854 von dem Verfasser behuf seine Habilitation an der Universität zu Göttingen der philosophischeb Facultät eingereicht. Wiewohl der Verfasser ihre Veröffentlichung, wie es scheint, nicht beabsichtigthat, so wird doch die hiermit erfolgnede Herausgabe derselben in gänzlich ungeänderter Form sowohl durch das hohe Interesse des Gegenstandes an sich als durch die in ihr niedergelegte Behandlungsweise der wichtigsten Principien der Infinitesimal-Analysis wohl hinlänglich gerechtfertig erscheiden.

que o índice aumenta, os desvios em relação à C também se tornarão arbitrariamente pequenos se avançarmos suficientemente na série, ou seja, a série convergirá para C (Riemann, 1868, p. 97)

Figura 3 – Texto original de Riemann.

ÜB. D. DARSTELLBARK. E. FUNCTION DURCH E. TRIGONOMETR. REIHE. 97

Die Erkenntniss des zur Lösung dieser Aufgabe einzuschlagenden Weges ergab sich ihm aus der Einsicht, dass die unendlichen Reihen in zwei wesentlich verschiedene Klassen zerfallen, je nachdem sie, wenn man sämmtliche Glieder positiv macht, convergent bleiben oder nicht. In den ersteren können die Glieder beliebig versetzt werden, der Werth der letzteren dagegen ist von der Ordnung der Glieder abhängig. In der That, bezeichnet man in einer Reihe zweiter Klasse die positiven Glieder der Reihe nach durch

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

die negativen durch

$$-b_1, -b_2, -b_3, \ldots,$$

so ist klar, dass sowohl Σa, als Σb unendlich sein müssen; denn wären beide endlich, so würde die Reihe auch nach Gleichmachung der Zeichen convergiren; wäre aber eine unendlich, so würde die Reihe divergiren. Offenbar kann nun die Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder einen beliebig gegebenen Werth C erhalten. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Werth grösser als C wird, und so lange negative, bis ihr Werth kleiner als C wird, so wird die Abweichung von C nie mehr betragen, als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes. Da nun sowohl die Grössen a, als die Grössen b mit wachsendem Index zuletzt unendlich klein werden, so werden auch die Abweichungen von C, wenn man in der Reihe nur hinreichend weit fortgeht, beliebig klein werden, d. h. die Reihe wird gegen C convergiren.

Fonte: Foto do autor, da obra (Riemann, 1868, p. 97)

Este resultado é auxiliar na construção daqueles que seriam o *core* da apresentação de Riemann e possivelmente seja por isso que ele não lhe tenha dedicado excessiva atenção. Também não cita diretamente o comentário de Dirichlet a este respeito no artigo de 1837, que dificilmente ele desconheceria.

O TEOREMA SOBRE REORDENAMENTO DE SÉRIES POR DINI

A próxima referência a este mesmo resultado devemos a Ulisse Dini, matemático italiano da segunda metade do século XIX, a quem devemos resultados importantes da análise, principalmente na teoria da integração (Baroni; Otero-Garcia, 2014). Sua carreira como matemático e professor inicia-se na universidade de Pisa, no ano de 1866, o ano da morte de Riemann.

Dini era "o pupilo favorito" de Enrico Betti (Ford, 1920), que não por acaso estivera na Alemanha com Riemann anos antes e o recebera na Itália quando este veio cuidar da sua saúde. Segundo (Laugwitz, 2008) Betti era, na Itália, a pessoa com quem Riemann tinha maior proximidade. Em 1877 Dini publica um famoso tratado chamado Fundamentos para a teoria das funções de variável real (*Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*) (Dini, 1878). Segundo Walter Ford, que escreveu o obituário de Dini para a Sociedade Matemática Americana, este trabalho "era totalmente original consigo e desde então passou a ser encarado como basal na teoria de funções de variável real" (Ford, 1920, p. 174).

> Neste primeiro período de sua vida, entretanto, Dini ainda não havia iniciado as pesquisas que o fariam famoso nem havia entrado ainda neste vasto campo chamado análise pura, em cujo desenvolvimento estaria destinado a desempenhar um papel atuante. A transição dos seus interesses e trabalhos neste campo aconteceram por volta de 1870. Nesta data comparativamente prematura deve ser recordado que esta nova e mais rigorosa análise (assim chamada "análise moderna" hoje em dia) era pouco conhecida no mundo como um todo, estando o espírito dos seus métodos confinado a uma limitada escola de pupilos em torno de Weierstrass na Alemanha[3] (Ford, 1920, p. 174).

É neste trabalho de 1877 onde consta o resultado sobre séries condicionalmente convergentes que discutimos no presente texto. O capítulo sobre séries inicia com a definição de séries de números reais ou complexos passando pela sua convergência e divergência. É neste que se comenta que "se demonstra que para que uma série real ou complexa seja convergente independente da ordem dos termos é necessário e suficiente que a série formada com os valores absolutos ou com os módulos dos mesmos termos seja convergente"[4] (Dini, 1878, p. 95).

Em seguida, ele enuncia o resultado sobre a não comutatividade de séries que não são absolutamente convergentes, aquilo que seria o teorema de Riemann. O trecho original incluímos nas Figuras 4 e 5, e a tradução livre exibimos abaixo.

> Sendo dada uma série real:
>
> $$(5)\ u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$
>
> cujos termos são em parte positivos e em parte negativos e tendem a zero com o crescimento infinito de n, e sendo:
>
> $$(6)\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

[3] At this early period of his life, however, Dini had not yet begun the researches for which he is to be regarded as famous nor had he in fact even entered seriously into that broad field, namely pure analysis, in whose development he was destined soon to play an active part. The transition of his interest and labors to this latter field took place about 1870. At this comparatively early date it will be recalled that the newer and more rigorous analysis (the so-called "modern analysis" of to-day) was but little known to the world at large, At this comparatively early date it will be recalled that the newer and more rigorous analysis (the so-called "modern analysis" of to-day) was but little known to the world at large, the spirit of its methods being virtually confined to the limited school of pupils immediately surrounding Weierstrass in Germany

[4] Si demostra che onde una serie reale o complessa sai convergente independentemente dall'ordine dei termini è necessário e suficiente che la serie formata coi valori assoluti o coi moduli degli stessi termini sia convergente.

> (7) $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + \ldots$
> as séries de termos positivos e dos valores absolutos dos termos negativos:
> 1º. Se estas duas séries (6) e (7) são ambas convergentes, a série dada (5) é convergente independentemente da ordem se seus termos:
> 2º. Se só uma das séries (6) e (7) é divergente, a série dada (5) é divergente em qualquer ordem que se tomem os seus termos:
> 3º. Se as séries (6) e (7) são ambas divergentes, poder-se-á sempre mudar a ordem dos termos na série (5) de modo a fazer com que essa se torne convergente e tenha como soma uma quantidade qualquer dada, ou se torne divergente ou se torne indeterminada; e isso poderá ser feito de um número infinito de formas (Dini, 1878, p. 98).

Na sua versão, Dini generaliza o resultado de Riemann incluindo a possibilidade de que, permutando-se os termos da série condicionalmente convergente, ela seja divergente, algo que não aparecia na versão original de Riemann. Além disso, a demonstração é mais algébrica, mais formal do que aquela apresentada pelo alemão. Ressalte-se também que Dini não cita não Dirichlet, tampouco Riemann. É bastante improvável que ele desconhecesse os resultados, principalmente o de Riemann, pela relação que ambos tinham com Enrico Betti. Tanto que, num outro artigo de 1873 sobre unicidade do desenvolvimento de funções em série (Dini, 1875), ele cita o artigo de Riemann onde aparece o resultado sobre não-comutatividade de séries condicionalmente convergentes.

Os motivos pelos quais os resultados originais não são citados por Dini estão inacessíveis, e só podemos especular a respeito. A impressão que fica é que, dada a marginalidade dos resultados tanto em Dirichlet (1839) quanto em Riemann (1868), Dini não tenha achado necessária a citação. É até mesmo possível que esta comutatividade de séries condicionalmente convergentes fosse de domínio comum mesmo antes de Dirichlet.

Figura 4 – Texto original de Dini.

(5) $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

i cui termini sono in parte positivi e in parte negativi e tendono a zero col crescere indefinitamente di n, e essendo:

(6) $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$

(7) $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n+\cdots$

le serie dei termini positivi e dei valori assoluti dei termini negativi:

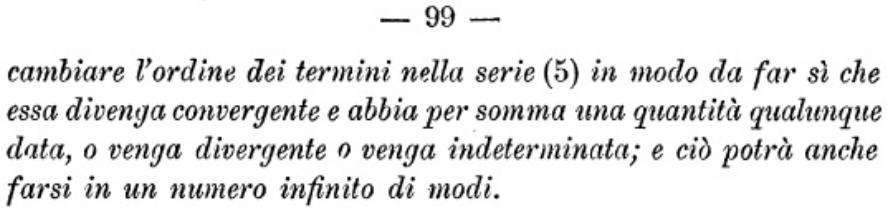
1.° *Se queste due serie* (6) *e* (7) *sono ambedue convergenti, la serie data* (5) *è convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini:*

2.° *Se una sola delle serie* (6) *e* (7) *è divergente, la serie data* (5) *è divergente in qualunque ordine si prendano i suoi termini:*

3.° *Se le serie* (6) *e* (7) *sono ambedue divergenti, si potrà sempre*

Fonte: Foto do autor, da obra (Dini, 1878, p. 98)

Figura 5 – Texto original de Dini.



— 99 —

cambiare l'ordine dei termini nella serie (5) *in modo da far sì che essa divenga convergente e abbia per somma una quantità qualunque data, o venga divergente o venga indeterminata; e ciò potrà anche farsi in un numero infinito di modi.*

Fonte: Foto do autor, da obra (Dini, 1878, p. 99)

O TEOREMA SOBRE REORDENAMENTO DE SÉRIES: UM RESUMO

Esta última hipótese mereceria uma investigação mais detalhada. Por exemplo, um trabalho menos conhecido chamado Sobre Séries Infinitas e sua Convergência (*Über unendliche Reihen und deren Convergenz*) de Wilhelm Scheibner (1826-1908), lançado em 1860, traz o teorema de Riemann e uma demonstração. Scheibner parece ter sido um matemático de carreira discreta, de quem se tem pouca informação. Foi professor em Leipzig e doutorou-se em Halle sob a orientação de Carl Gustav Jakob Jacobi (1805-1851). Talvez por ter este perfil, seu nome não tenha sido historicamente associado ao resultado.

Fato é que, de tudo que foi visto até agora, a não comutatividade de uma série condicionalmente convergente foi estabelecida em três etapas, ao longo do terço médio do século XIX. Dirichlet enunciou o resultado, em seguida Riemann e Scheibner (1860) o demonstraram. Finalmente, Dini generalizou o mesmo, incluindo o caso divergente.

Na literatura científica encontramos variedade de citações do resultado. Investigamos seis textos, dos quais quatro citam o resultado como teorema de Riemann e dois deles como de Riemann--Dini. Desses dois, um é de autores italianos e outro de autor brasileiro.

Por exemplo: em Smith (1975); Cowen, Davidson e Kaufman (1980); Stout (1986) e Gilula (2021) encontramos uma discussão sobre a classe de permutações na ordem dos termos de uma série condicionalmente convergente. São resultados que partem do fato que este tipo de soma não goza da propriedade comutativa, e em todos estes, cita-se o resultado como teorema de Riemann. Tratam-se de autores norte-americanos ou radicados nos Estados Unidos.

Em Rao e Tulone (2007) o objetivo é apresentar um análogo ao resultado discutido neste texto para integrais que não são absolutamente convergentes. Botelho (2001) descreve as séries incondicionalmente convergentes no contexto da Análise Funcional, para séries formadas por elementos de um espaço normado. Nestes trabalhos a referência é feita a Riemann e Dini quando o resultado é citado.

O TEOREMA DE RIEMANN-DINI NO BRASIL

É interessante notar como a oposição entre as séries absolutamente e condicionalmente convergentes quanto à comutatividade de seus termos aparece na bibliografia brasileira de análise matemática.

Tendo a criação da USP e a instituição da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras em 1934 como ponto de partida para a modernização da matemática e do seu ensino, a influência da ma-

temática italiana parece ter sido inevitável, principalmente pela chegada de professores vindos da Itália, notadamente Fantappié (Silva, 2006) (Lima; Dias, 2010a e 2010b).

Fantappiè veio para colaborar na implantação deste projeto moderno de ensino, ciências e matemática e era, de acordo com Táboas (2005), discípulo de Vito Volterra (1860-1940). Volterra, um eminente matemático italiano que por sua vez, era discípulo de Dini (Biacino, 2019). Silva (2006) e Otero-Garcia (2011) trazem em sua seção de anexos o programa de Análise Matemática proposto para o primeiro ano do curso de matemática, em 1935. Nestes anexos encontramos o teorema citado como de Riemann-Dini. Provavelmente foi inserido no programa por Fantappiè no contexto do estudo das séries absolutamente convergentes, como parte da reestruturação do ensino de análise, uma vez que "percebe-se uma atenção destacada para a disciplina: Análise Matemática, que parece ser o eixo condutor do curso de Ciências Matemáticas" (Silva, 2006; p. 58).

> Começa-se a trabalhar a Análise Matemática, na FFCL da USP, de uma maneira mais rigorosa. Influência direta de Luigi Fantappiè, conforme citado por Catunda no prefácio do 1º. Volume do seu Curso de Análise Matemática, bem como pode-se ver na 1ª. página do "livro" Curso de Catunda Análise Matemática de Fantappiè por Catunda (Silva; 2006, p. 60).

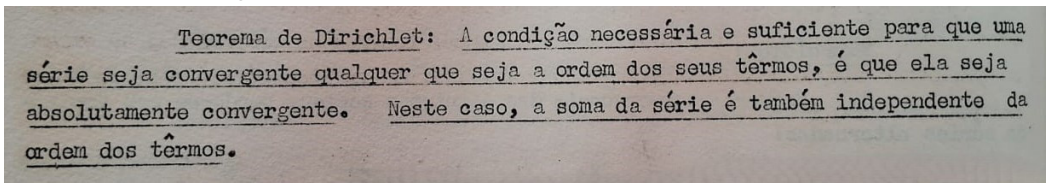
Nos programas da disciplina para os anos seguintes este teorema, em qualquer uma das suas nomenclaturas, não aparecer mais explicitamente no restante da documentação incluída nos anexos dos trabalhos citados acima.

Ele **só** vai aparecer no curso de análise de Omar Catunda.

> Existem alguns motivos para destacar Omar Catunda (1906-1986) como um importante personagem da história da matemática no Brasil [...]. Ele foi um dos principais representantes e divulgadores da escola matemática implantada na Universidade de São Paulo (USP) pelo italiano Luigi Fantappiè [...] de quem foi o primeiro assistente e com quem colaborou intensamente na implantação do Departamento de Matemática. Catunda sucedeu a Fantappiè na cátedra de análise matemática do Departamento, como interino em 1939 e como efetivo em 1945, sendo também seu diretor durante muitos anos. Aposentou-se na USP em 1962 e transferiu-se para a Universidade da Bahia (UBa) em janeiro de 1963, onde tornou-se diretor do Instituto de Matemática e Física (IMF), que ajudara a fundar em 1960 (Lima; Dias, 2010a).

No Curso de Análise volume 1 de Omar Catunda, editado em 1962 pela Universidade de São Paulo, encontramos o teorema de Dirichlet e o de Riemann-Dini sobre a comutatividade de séries absolutamente convergentes. Algo que parece muito natural dada a relação de Catunda com Fantappiè, além do fato de que a primeira versão do texto de Catunda baseava-se em notas de aula do mestre italiano (Lima Dias, 2010a e 2010b). Nas figuras 6 e 7 exibimos os teoremas de Dirichlet e de Riemann-Dini, respectivamente, como aparecem em Catunda (1962).

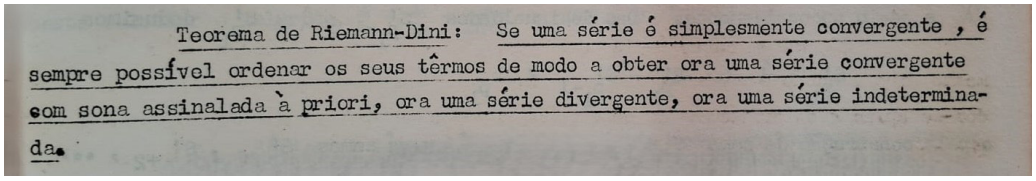
Figura 6 – Teorema de Dirichlet no texto de Omar Catunda



Teorema de Dirichlet: A condição necessária e suficiente para que uma série seja convergente qualquer que seja a ordem dos seus têrmos, é que ela seja absolutamente convergente. Neste caso, a soma da série é também independente da ordem dos têrmos.

Fonte: Foto do autor, da obra Catunda (1962).

Figura 7 – Teorema de Riemann-Dini no texto de Omar Catunda



Teorema de Riemann-Dini: Se uma série é simplesmente convergente , é sempre possível ordenar os seus têrmos de modo a obter ora uma série convergente com sona assinalada à priori, ora uma série divergente, ora uma série indeterminada.

Fonte: Foto do autor, da obra Catunda (1962).

Obras de autores contemporâneos a Catunda, como Abdelhay (1955) e Cossi (1960) também trazem a versão de Riemann e Dini para o teorema. José Abdelhay era professor na Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil (RJ), enquanto Ernesto Bruno Cossi era professor do Instituto de Pesquisas Físicas da Universidade do Rio Grande do Sul. Os três estiveram no Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática, ocorrido em Poços de Caldas-MG no ano de 1957 (Calabria; Nobre, 2013).

Outra influência italiana pode ter sido o texto de Francesco Severi (1879-1961), *Lezioni di Analisi*, de 1933, que recebeu uma análise extensa em Oliveira (2004). Severi teria indicado Fantappiè a Teodoro Ramos por ocasião da criação da USP (Táboas, 2005). O livro de Severi seria o livro texto adotado por Fantappiè na USP (Otero-Garcia, 2011), e que foi usado apenas no primeiro ano do curso, segundo Oliveira (2004). Neste texto o resultado faz referência tanto a Riemann quanto a Dini (Oliveira, 2004).

Fato é que na próxima geração de textos didáticos de análise matemática, ou não aparece mais a que seria a versão estendida do teorema, devida a Dini, ou, quando aparece, seu nome é suprimido. Nos referimos aqui aos livros de Lima (1976), Figueiredo (1996) – cuja primeira edição é de 1975 – e Ávila (1999). Curiosamente, apenas em Figueiredo (1996) o resultado sobre a não comutatividade das séries condicionalmente convergentes é nomeado como teorema de Riemann, ainda que nos três textos o resultado seja creditado a Riemann.

> O seguinte resultado, devido a Riemann, contém a recíproca do teorema anterior.
> Teorema 23: Seja Σa_n uma série condicionalmente convergente. Dado qualquer número real c, existe uma reordenação (b_n) dos termos de Σa_n,, tal que $\Sigma b_n = c$ (Lima, 1976, p. 120).

Adiante, ao final da página, Elon Lima ainda insere uma observação que estabelece: "Um raciocínio análogo (mais simples) mostra que uma conveniente mudança na ordem dos termos de uma série condicionalmente convergente pode fazer com que suas reduzidas tendam a $+\infty$ ou a $-\infty$". (Lima, 1976, p. 120).

O enunciado incluído por Djairo Figueiredo no seu texto segue um exemplo sobre a reordenação da série harmônica alternada, similar à exibida aqui.

> Teorema de Riemann: Seja Σa_n uma série condicionalmente convergente e seja *c,* um real qualquer. Então existe uma reordenação da série que converge para *c*. Além disso, existem reordenações da série que divergem para $-\infty$ e para $+\infty$ (Figueiredo, 1996, p. 214).

A versão do teorema que aparece no livro de Geraldo Ávila talvez seja a mais econômica, por assim dizer. Ele também parte da série harmônica alternada como exemplo para exibir o resultado e faz referência ao original de Riemann (1868):

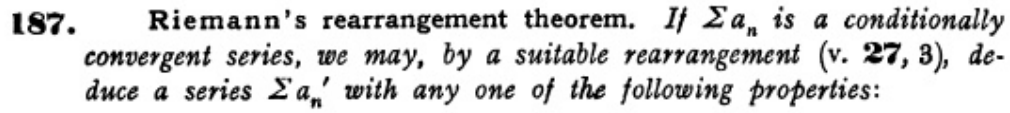
> Esse surpreendente resultado, que discutiremos a seguir, é descrito e demonstrado por Riemann [...] em seus comentários sobre o trabalho de Dirichlet.
> 3.29. Teorema: Se uma dada série Σa_n é condicionalmente convergente, seus termos podem ser reordenados de maneira que a série convirja para qualquer número *S* que se prescreva (Ávila, 1999, p. 67).

Dessa geração, sabemos que Geraldo Ávila estudou na USP, tendo usado o livro de Catunda (1962) no curso de análise como mostram Lima e Dias (2010a). Quanto aos outros dois não temos notícia sobre sua relação com esse texto. Os três tiveram passagem pelos Estados Unidos na pós-graduação entre o final da década de 50 e início dos anos 60, e certamente essa passagem influenciou a forma como conceberam seus cursos de análise.

Uma das referências que é comum aos três textos é o Princípios de Análise Matemática de Walter Rudin, cuja primeira edição é de 1953. Curiosamente, neste texto o resultado é creditado a Riemann, ainda que a versão nele apresentada seja mais parecida com a de Dini, incluindo a possibilidade de que a reordenação dos termos leve a série à divergência (Rudin, 1976). O teorema enunciado aqui faz-se em termos de limites superiores e inferiores, que é o mesmo caminho adotado por Apostol (1974). Uma possibilidade para que esta escolha tenha sido feita desta maneira encontramos na lista de referência de ambos os textos: trata-se do livro de Konrad Knopp (1882-1957), matemático alemão que foi professor em Berlim e Tübingen. Teoria e Aplicações das Séries Infinitas é citado na sua versão inglesa (Knopp, 1947), baseada na primeira edição alemã de 1921. Knopp enuncia o resultado que exibimos na versão original em inglês nas Figuras 8 e 9, como:

> Teorema do rearranjo de Riemann: Se Σa_n é uma série condicionalmente convergente, nós podemos, através de um reordenamento adequado, obter a série Σa'n com qualquer uma das seguintes propriedades:
> Convergindo para uma soma prescrita arbitrariamente, s';
> Divergindo para $+\infty$ ou para $-\infty$;
> Exibindo como limites superior e inferior de suas somas parciais, dois números arbitrários μ e χ, com $\mu \geq \chi$ (Knopp, 1947, p. 318-319).

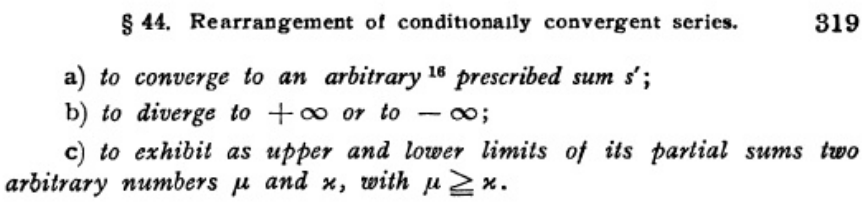
Figura 8 – Teorema do rearranjo de Riemann, enunciado por Konrad Knopp



187. **Riemann's rearrangement theorem.** *If Σa_n is a conditionally convergent series, we may, by a suitable rearrangement* (v. **27, 3**), *deduce a series $\Sigma a_n'$ with any one of the following properties:*

Fonte: Foto do autor, da obra Knopp (1947, p. 318).

Figura 9 – Teorema do rearranjo de Riemann, enunciado por Konrad Knopp



§ 44. Rearrangement of conditionally convergent series. 319

a) *to converge to an arbitrary* [16] *prescribed sum s'*;

b) *to diverge to* $+\infty$ *or to* $-\infty$;

c) *to exhibit as upper and lower limits of its partial sums two arbitrary numbers* μ *and* $\varkappa$, *with* $\mu \geqq \varkappa$.

Fonte: Foto do autor, da obra Knopp (1947, p. 319).

Na referência numerada com 16 no item a) da Figura 9, Knopp cita o texto original de Riemann (1868), de onde podemos entender que ele interpreta que o resultado original compreendia até este item apenas. Observamos também que, em seguida ao enunciado do teorema de Riemann, Figueiredo (1996) enuncia uma proposição com o mesmo resultado sobre limites superiores e inferiores citados acima, o que nos parece uma clara influência da perspectiva adotada nestes textos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O teorema de Riemann ou de Riemann-Dini estabelece um fato notável a respeito das séries ditas condicionalmente convergentes: é possível reordenar seus termos de forma conveniente de maneira a fazer com a série convirja para qualquer valor previamente fixado, inclusive é possível fazê-la divergir a partir de um reordenamento adequado. Esse resultado é tão forte que estabelece que para uma série desta natureza – que afinal de contas é uma soma – a propriedade comutativa não está garantida.

O resultado estabelecido aos poucos ao longo do terço médio do século XIX teve contribuições de Dirichlet, Riemann e Dini. Não há unanimidade quando se trata de nomear o resultado que geralmente leva o nome de Riemann, eventualmente acompanhado pelo de Dini. A escolha por uma ou outra nomenclatura parece depender de fatores distintos, e seria leviano de nossa parte apontá-los de maneira definitiva, dada a natureza qualitativa de nossa análise. Um indício repousa sobre a origem da citação: parece haver uma preferência pela forma teorema de Riemann por autores anglo-saxões, enquanto os italianos preferem teorema de Riemann-Dini. Uma investigação mais profunda poderia confirmar ou refutar esta hipótese.

Quanto à nomenclatura mais utilizada no Brasil, o fator mais importante parece ser o temporal: o resultado chega na primeira metade do século XX por influência de analistas italianos como teorema de Riemann-Dini, mas ao longo do século essa denominação aos poucos vai sendo abandonada em detrimento da nomeação teorema de Riemann, muito provavelmente devido a maior circulação de analistas brasileiros pelos Estados Unidos e Europa como parte de uma política de qualificação do corpo docente e científico nacional ocorrido a partir da década de 1950, permitindo maior acesso a textos de matemática – em particular de análise – mais modernos e atualizados.

Não consideramos as influências e impactos que diferentes nomenclaturas possam exercer sobre a forma como os resultados são apresentados em cursos de licenciatura e acreditamos que estes possam ser um interessante tema de pesquisa futuro.

REFERÊNCIAS

ABDELHAY, José, **Curso de Análise Matemática, vol. III**. Rio de Janeiro: Editora Científica, 1955.

APOSTOL, Tom. **Mathematical Analysis**. Amsterdam: Addison Wesley: 1974.

ÁVILA, Geraldo. **Introdução à Análise Matemática**. São Paulo: Blucher, 1999.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; OTERO-GARCIA, Sílvio César. **Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

BIACINO, Loredana. Contribution of Italian Mathematicians to Real Analysis in the last Decades of Nineteenth Century. **Transversal**: International Journal for the Historiography of Science. v.7, p. 1-24, 2019. http://dx.doi.org/10.24117/2526-2270.2019.i7.02

BOTELHO, Geraldo. Séries incondicionalmente convergentes: de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers. **Revista Matemática Universitária**, n. 30, p. 103-111, 2001.

CALÁBRIA, Angélica Raiz; NOBRE, Sérgio Roberto. Primero Colóquio Brasileiro de Matemática: Registros e Personagens**. REMATEC**, ano 8, n.12. 2013

CATUNDA, Omar. **Curso de Análise Matemática, vol. I.** São Paulo: Universidade de São Paulo, 1962.

COSSI, Ernesto Bruno. **Análise Matemática, vol. VIII.** Porto Alegre: Universidade do Rio Grande do Sul, 1960.

COWEN, C. C.; DAVIDSON, K. R.; KAUFMAN, R. P. Rearranging the Alternating Harmonic Series. **The American Mathematical Monthly**, v. 87, n. 10, pp. 817-819, 1980.

DINI, Ulisse. Sulla unicità degli sviluppi delle funzioni di una variable in serie di funzioni X_n. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, serie II, tomo VI, p. 216-115. 1875.

DINI, Ulisse. **Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali**. Pisa: T. Nistri, 1878.

DIRICHLET, Gustav Peter Lejeune. Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. **Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1837 – Mathematische Abhandlungen**, p. 45–81, 1839.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

FORD, Walter B. A Brief account of the life and work of the late professor Ulisse Dini. **Bull. Amer. Math. Soc**. 26(4), p.173-177, 1920.

GILULA, M. A Class of Simple Rearrangements of the Alternating Harmonic Series. **The American Mathematical Monthly**, v. 125, n. 3, p. 245–256, 2018. https://doi.org/10.1080/00029890.2017.1409571

GRAY, Jeremy. **The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century**. Heidelberg: Springer, 2015.

HAIRER, Ernst; WANNER, Gerhard. **Analysis by its history**. New York: srpinger, 1995.

KNOPP, Konrad. **Theory and Application of Infinite Series**. London: Blackie and Son Ltd., 1947.

LAUGWITZ, Detlef. **Bernhard Riemann 1826 – 1866: Turning Points in the Conception of Mathematics**. Boston: Birkhauser, 2008.

LIMA, Eliane Barbosa; DIAS, André Luís Mattedi Dias. O Curso de análise matemática de Omar Catunda: uma forma peculiar de apropriação da matemática moderna. **Revista Brasileira de História da Ciência**. Rio de Janeiro, v. 3, n. 2, p. 211-230. 2010a.

LIMA, Eliane Barbosa; DIAS, André Luís Mattedi Dias. A Análise Matemática no Ensino Universitário Brasileiro: a contribuição de Omar Catunda. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35B, p. 453 a 476, 2010b.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise, vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

OLIVEIRA, Antônio Sylvio Vieira de Oliveira. **O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica de São Paulo, no ano de 1904: uma análise documental.** 135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2003.

OTERO-GARCIA, Sílvio César. **Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento sobre seu Ensino – Volume I**. 528f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2011.

RAO, Giuseppe; TULONE, Francesco. Analogue of Dini-Riemann Theorem for Non-Absolutely Convergent Integrals. **Le Matematiche**, vol. LXII, Fasc. 1, p. 129-134, 2007.

RIEMANN, Bernhard. Uber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. **Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen – dreizenter band von den jahren 1866 und 1867**, p. 87–131, 1868.

RUDIN, Walter. **Principles of mahematical analysis**. New York: McGraw-Hill, 1976.

SCHEIBNER, Wilhelm. **Über unendliche Reihen und deren Convergenz**. Leipzig, 1860.

SILVA, Luiz Roberto Rosa. **Prof. J. O. Monteiro e o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise na Universidade de São Paulo**. 233f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2006.

SMITH, John Howard. Rearrangements of Conditionally Convegent Real Series with Preassigned Cycle Type. **Proc. of the American Mathematical Society**, v. 47, n. 1, January 1975.

STOUT, Quentin F. On Levi's Duality Between Permutations and Convergent Series. **J. London Math. Soc.** (2), 34, p.67-80, 1986.

TÁBOAS, Plínio Zornoff. **Luigi Fantappiè: Influências na Matemática Brasileira – Um Estudo de História como Contribuição para a Educação Matemática**. 207f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2005.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Definições e demonstrações segundo a característica geométrica de Leibniz

Definitions and demonstrations according to Leibniz's geometric characteristic

Fernando Antonio de Araujo Carneiro[1]
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

RESUMO

Este trabalho consiste no estudo de alguns textos de Leibniz a respeito da característica geométrica por ele criada e desenvolvida, estudo em andamento com o objetivo de encontrar diferenças e semelhanças entre sua nova geometria e a geometria de Euclides ou da geometria de Descartes e de responder algumas perguntas a seguir: Em que Leibniz se distingue do que veio antes? Que motivação ele apresentou para tentar renovar a Geometria? Havia motivos somente teóricos ou também havia motivos práticas na tentativa de criação da característica de Leibniz? O que ele conseguia definir e provar com sua nova Geometria que não havia sido feito antes? A partir de algumas cartas importantes de Leibniz sobre o assunto e artigos de alguns historiadores que escreveram a respeito deste assunto, podemos nos aproximar da resposta de alguns das perguntas. Também empreendemos a análise e explicação de várias definições e demonstrações novas de Leibniz que tiveram importância fundamental no posterior desenvolvimento axiomático da Geometria.

Palavras-chave: Característica Geométrica; Leibniz; Linguagem Universal; Euclides.

ABSTRACT

This work consists of the study of some texts by Leibniz regarding the Geometrical Characteristic created and developed by him, an ongoing study with the aim of finding differences and similarities between his new Geometry and the Geometry of Euclid or the Geometry of Descartes and to answer some following questions: How does Leibniz differ from what came before? What motivation did he present for trying to renew Geometry? Were there only theoretical reasons or were there also practical reasons in the attempt to create the Leibnizian Characteristic? What could he define and prove with his new Geometry that hadn't been done before? From some important letters by Leibniz on the subject and articles by some historians who wrote about this subject, we can get closer to the answer to some of these questions. We also undertake the analysis and explanation of several new definitions and demonstrations by Leibniz that had fundamental importance in the later axiomatic development of Geometry.

Keywords: Geometrical Characteristic; Leibniz; Universal Language; Euclid.

INTRODUÇÃO

Estudaremos os seguintes textos de Leibniz (1646-1716): a carta a Huygens (1629-1695), seus dois suplementos (Loemker, 1976), e o texto de *Circa Geometrica Generalia et Calculus Situs*, editado por Javier Echeverria (Leibniz, 1991).

O presente trabalho é uma análise bibliográfica destes principais textos de Leibniz a respeito da criação e desenvolvimento da sua característica geométrica e comparação com alguns importantes textos anteriores de Descartes e Euclides, com o objetivo de determinar a originalidade de Leibniz, o que ele toma emprestado dos geômetras anteriores e o que o motivou a iniciar este empreendimento.

Esta criação de Leibniz antecipa muito do que foi feito posteriormente em Lógica e Geometria por autores como Hermann Grassmann (1809-1877), Mario Pieri (1860-1913) e Alfred Tarski (1901-1983), o que mostra a importância do feito pioneiro de Leibniz e mostra também como

[1] Doutor em Matemática. Professor Associado da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Rio de Janeiro, Brasil. Email: carneiro@ime.uerj.br

parte desse empreendimento seguiu vivo na pesquisa em Lógica e Geometria ainda em meados do século passado.

A motivação de Leibniz é em parte a mesma motivação do seu projeto de criação da característica universal e em parte preencher o que ele via como lacunas e imperfeições das geometrias de Euclides e Descartes. A lacuna da geometria dos Elementos de Euclides seria a definição muito vaga de linha, superfície e outros objetos básicos. A imperfeição da de Descartes seria não partir de um conceito geométrico elementar como o ponto, mas partir de um menos elementar, como a magnitude.

Na segunda seção falaremos das motivações de Leibniz, na terceira seção apresentaremos algumas definições e demonstrações de Leibniz utilizando a sua característica geométrica. Na última seção faremos nossas considerações finais.

MOTIVAÇÕES – O QUE É UMA CARACTERÍSTICA E AS MOTIVAÇÕES PARA DESENVOLVÊ-LA

Entre o ano de 1679 e o fim de sua vida Leibniz escreveu a respeito de sua característica geométrica, que consistia numa nova maneira de definir e demonstrar fatos básicos da geometria euclidiana. Entre estes textos estão a Carta a Huygens (Loemker, 1976), dois suplementos (Loemker, 1976) e *Circa Caracteristica Geometrica* (Leibniz 1991). Com base nestes documentos tentamos compreender as novas bases sobre as quais Leibniz tentou fundamentar a geometria euclidiana, e algumas das motivações por ele apresentadas em alguns desses documentos.

O que é essa característica que Leibniz tenta criar, que ele busca construir? Primeiro, Leibniz queria criar uma característica universal, que é uma espécie de linguagem universal, uma linguagem artificial que pudesse ser aprendida e utilizada, em teoria, por qualquer ser humano. Segundo Paolo Rossi (Rossi, p. 339 a 341), o objetivo da característica universal de Leibniz é ser uma linguagem universal, superior a qualquer linguagem internacional (porque ela não é só internacional, ela tem as vantagens das linguagens internacionais e mais algumas); é exprimir diretamente conceitos e pensamentos; ser falada e escrita; poder ser aprendida em tempo breve; ser enciclopédica (uma organização racional de todo conhecimento humano); ser um remédio para a memória fraca; ser tal que a conexão entre seus caracteres corresponde à ordem e ligação que existe entre as coisas. Nas palavras de Leibniz no texto "Característica Geral":

> E apesar de homens letrados tenham há já algum tempo pensado em algum tipo de linguagem ou característica universal por meio da qual todos os conceitos e coisas pudessem ser colocadas em bela ordem, e com cuja ajuda diferentes nações pudessem comunicar seus pensamentos e cada uma ler em sua própria língua o que a outra escreveu em sua própria língua, ninguém até o momento tentou criar uma linguagem ou característica que incluísse ao mesmo tempo as artes da descoberta e do julgamento, isto é, uma cujos signos e caracteres servem ao mesmo propósito que signos aritméticos servem para números e signos algébricos para quantidades tomadas abstratamente (Loemker, p. 222, 1976).

Portanto, os signos servem para resolver problemas teóricos como signos algébricos nos ajudam a resolver problemas algébricos. Nas próximas seções veremos que Leibniz consegue fazer demonstrações com a manipulação dos símbolos de sua característica geométrica.

> Disse que assim como as categorias ou classes de conceitos simples, deveríamos ter uma nova classe de categorias na qual proposições ou termos complexos pudessem ser arranjados em sua ordem natural. Porque eu não tinha ainda sonhado com demonstrações àquela época e não sabia que geômetras fazem exatamente o que eu buscava quando eles ordenavam proposições numa ordem tal em que uma é demonstrada a partir da outra (Loemker, p. 222, 1976).

O que Leibniz está dizendo é algo que caracteriza, por exemplo, o primeiro livro dos Elementos de Euclides, em que quase toda proposição, de quarenta e oito totais, segue da proposição anterior.

Agora, nas palavras de Javier Echeverria (Echeverria, 1991), especialista em Leibniz e seus textos sobre a característica geométrica, a característica geométrica tem os seguintes elementos:

> 1. Um sistema de signos (caracteres) que expressam as relações geométricas que não dependem de magnitudes: posição, sítio, copresença. 2. Axiomas gerais e distintos aos de Euclides, que sejam universalmente válidos e expressos combinatoriamente por meio do novo sistema de signos. 3. A nova característica havia de ser capaz também de expressar, construir e demonstrar a partir dos novos axiomas todos os problemas, figuras e demonstrações dos Elementos de Euclides e das Cônicas de Apolônio 4. A nova característica devia ser capaz de engendrar novos problemas, novos objetos e novos teoremas em Geometria, partindo de noções como posição, congruência, espaço, etc. (Echeverria, 1999).

Portanto, uma característica é um método de expressar conceitos por meio de signos, caracteres, e produzir definições, axiomas e demonstrações de teoremas por meio da manipulação combinatória desta linguagem de caracteres. Os geômetras antigos demonstravam proposições complexas a partir de proposições mais simples e básicas, mas não a partir de conceitos e signos mais básicos. Novamente, nas palavras de Leibniz:

> Eu necessariamente cheguei a este pensamento digno de nota, de que um tipo de alfabeto de pensamentos humanos pudesse ser criado e que tudo pudesse ser descoberto e julgado por comparação entre letras deste alfabeto e uma análise de palavras produzidas por ele (Loemker, p. 222, 1976).

Portanto, tudo poderia ser julgado verdadeiro ou falso por uma análise de signos e caracteres, não somente por uma análise de proposições. Por exemplo, se A, B e C são caracteres que representam pontos, AB, AC e BC representam segmentos e ABC representa um triângulo. Se a congruência de dois triângulos, ABC e DEF, for equivalente à congruência dos lados respectivos, AB congruente a DE, AC a DF, BC a EF, então essas equivalências poderiam ser usadas para demonstrações por manipulação de signos, como veremos nas próximas seções.

Por que Leibniz procurou criar uma característica geométrica? O que o motivou? Em sua carta a Huygens (Loemker, 1976), ele diz que

> Apesar do progresso feito, ainda não estou satisfeito com a Álgebra, pois não fornece os métodos mais econômicos ou as construções mais belas da Geometria. É por isso que acredito que, no que concerne à Geometria, precisamos de uma outra análise que seja especificamente geométrica ou linear e que expresse posição [situs] diretamente como a álgebra expressa a magnitude diretamente (Loemker, 1976, p. 248-249).

O trecho apresenta uma primeira motivação para a criação deste método geométrico: em vez de expressar diretamente magnitudes, expressa diretamente uma qualidade geométrica como a posição. Pelo exemplo anterior, vemos que por meio dos signos dos pontos, que são objetos que se diferenciam somente pela posição, podemos passar a expressar relações entre segmentos, triângulos, e assim podemos tentar construir toda a geometria por meio dessa nova álgebra de signos geométricos. No primeiro suplemento de sua carta (Loemker), Leibniz também diz que

> A Álgebra é a característica somente dos números indeterminados ou magnitudes, mas não expressa a posição, ângulos, e o movimento corretamente. Portanto, costuma ser difícil analisar as propriedades de uma figura por meio dos cálculos, e mais difícil ainda encontrar demonstrações geométricas e construções realmente convenientes, mesmo quando o cálculo algébrico está completo (Loemker, 1976, p. 250).

Leibniz, neste trecho, apresenta outra motivação: que a característica represente diretamente qualidades geométricas e que nos torne capazes de encontrar demonstrações e construções geométricas convenientes diretamente da formulação do problema por meio da característica. A álgebra de magnitudes de Descartes nem sempre torna claras as construções correspondentes às equações manipuladas. Veremos na próxima seção alguns exemplos dessas demonstrações dadas por Leibniz.

Leibniz ainda apresenta mais razões para a criação de tal característica:

> … Seu maior valor se assenta no raciocínio que pode ser feito e nas conclusões que podem ser inferidas por meio das operações com seus caracteres, que não poderiam ser expressas por figuras e menos ainda por modelos, sem que seja necessário multiplicá-los imensamente ou confundi-los com excesso de pontos e linhas no curso de muitas tentativas fúteis que somos obrigados a fazer. … Não tenho esperanças de que podemos ir muito longe na Física até encontrarmos tal método de resumo para aliviar o fardo da imaginação (Loemker, p. 250, grifos do autor).

A terceira motivação seria, portanto, evitar sobrecarregar a imaginação, criar uma característica que nos permitisse evitar o recurso a diagramas e figuras tão comuns às edições dos Elementos de Euclides. Essa motivação está relacionada à motivação da característica geral, a que afirma que esta deve ser uma linguagem que pode ser aprendida facilmente sem sobrecarregar a memória. A criação da característica geométrica faz parte da criação de uma característica universal. Leibniz tentava também criar uma tal linguagem, não só para objetos matemáticos ou, particularmente, geométricos, mas todos os objetos e conceitos existentes, e nisso foi influenciado por Dalgarno e Wilkins, que criaram linguagens universais antes dele.

DEFINIÇÕES E DEMONSTRAÇÕES

Nesta seção estudaremos algumas das definições que Leibniz dá de objetos geométricos como a reta e o círculo, o plano e a esfera, por meio de sua caraterística geométrica.

Carta a Huygens e seus suplementos

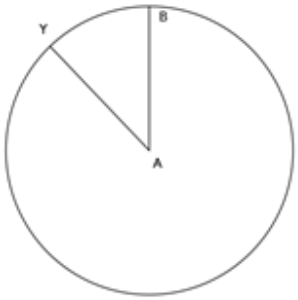
A primeira definição de Leibniz é a de congruência, que ele representa pelo símbolo ŏ. Dois triângulos ABC e DEF são congruentes, ABC ŏ DEF, respeitando a ordem dos pontos, "se eles puderem ocupar exatamente o mesmo lugar, ou se um puder ser colocado sobre o outro sem mudar

nada das duas figuras a não ser suas posições" (Loemker, 1976, p. 251). É o mesmo princípio usado na quarta proposição do primeiro livro dos Elementos de Euclides, que demonstra o critério LAL de congruência de triângulos (Euclides, 2009, p.101).

A segunda definição de Leibniz é a de espaço infinito em todas as direções como o locus dos pontos Y ŏ A (Y congruente a A), dado um ponto A (Loemker, 1976, p. 251). O espaço, portanto, é o lugar dos pontos que são congruentes a um ponto A determinado. Como todos os pontos sempre são congruentes entre si, para Leibniz, a congruência é válida para todos os pontos do espaço.

A terceira é a da esfera: "dados os pontos A e Y dois pontos, e (Y) significando uma variável de pontos do espaço, AY ŏ A(Y) é a esfera de centro A e raio AY" (Loemker, 1976, p. 252). Essa definição é clássica, a esfera é o lugar dos pontos cujo segmento até dado centro A é congruente a outro segmento cujos extremos são A e um determinado ponto Y.

Figura 1 – A definição de esfera

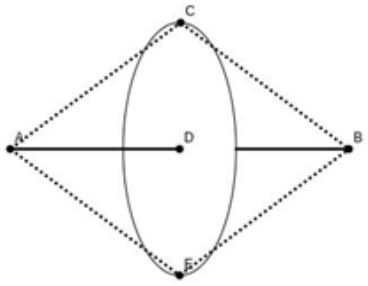


Fonte: O próprio autor (2025).

Para definir planos basta usarmos a mesma congruência de segmentos da definição da esfera: dados A e B dois pontos, "AX ŏ BX é um plano" (Loemker, 1976, p. 252). No espaço tridimensional o lugar dos pontos equidistantes a dois pontos determinados A e B é o plano mediatriz do segmento AB, o plano que passe pelo ponto médio do segmento AB e é ortogonal a AB.

No caso do círculo, ABC ŏ ABY define um círculo de centro D (base da altura relativa à base AB) e raio CD (Loemker, 1976, p. 252). Observe que temos um triângulo determinado ABC e outro de mesma base AB, cujo vértice oposto a esta base é a variável Y, que podemos visualizar girando em torno da base AB mantendo a distância a AB, ou seja, teremos Y girando em torno do ponto base da altura relativa a AB, cujo raio é exatamente esta altura.

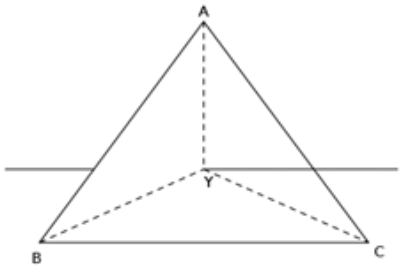
Figura 2 - A definição de círculo



Fonte: O próprio autor (2025).

E uma reta será, dados os pontos A, B e C, o "locus dos pontos Y tais que AY ǒ BY ǒ CY é uma reta" (Loemker, 1976, p. 252). Isto é, a reta é o lugar dos pontos do espaço que são equidistantes a A, B e C, três pontos não-colineares (Leibniz não menciona a condição de não-colinearidade, mas é uma comunicação por carta, com certa informalidade); portanto, é a reta que passa pelo circuncentro de ABC e é ortogonal ao plano do triângulo ABC.

Figura 3 - Definição de reta



Fonte: O próprio autor (2025).

Não basta, para Leibniz, ser capaz de definir planos, esferas, círculos e retas por meio de pontos e da relação de congruência. É preciso que essas definições sejam úteis às demonstrações.

A primeira demonstração da carta a Huygens é a demonstração de que a interseção de duas esferas é um círculo (Loemker, 1976, p. 253): "A expressão do círculo é ABC ǒ ABY; logo, AC ǒ AY e BC ǒ BY. O locus das duas congruências são duas esferas, uma de centro A e raio AC, a outra de centro B e raio BC". No fim das contas ele está mostrando que um círculo pode ser descrito como a interseção de duas esferas e não que a interseção de quaisquer duas esferas é um círculo. Mas observe que a demonstração decorre de uma mera manipulação dos caracteres, dos símbolos do enunciado do problema. A esta demonstração seguem-se as demonstrações de que a interseção entre um plano e uma esfera é um círculo e a de que a interseção de dois planos é uma reta.

Interseção entre plano e esfera é um círculo (Loemker, 1976, p. 253): "A expressão da esfera é AC ǒ AY, a do plano é AY ǒ BY." Leibniz não considera o problema de quando podemos expressar ambos a esfera e o plano dessa forma, ao mesmo tempo. Continuando (Loemker, 1976, p. 253): "Portanto, AC ǒ BC. Agora, como BC ǒ AC e AC ǒ AY, segue que BC ǒ AY; e como AY ǒ BY, temos BC ǒ BY. Juntando as duas congruências, temos ABC ǒ ABY". Novamente, a demonstração decorre da mera manipulação dos caracteres do enunciado do problema.

Interseção entre dois planos (Loemker, 1976, p. 253): "Sejam duas congruências, AY ǒ BY para um plano, AY ǒ CY para o outro. Então teremos AY ǒ BY ǒ CY, cujo locus é uma reta". Aqui, teríamos o problema de verificar quando dois planos podem ser escritos ao mesmo tempo um como o lugar dos pontos equidistantes a A e B, e o outro como o lugar dos pontos equidistantes a A e C. E, novamente, a demonstração segue imediatamente da manipulação dos caracteres do enunciado do problema.

No segundo suplemento da carta a Huygens (Loemker, 1976, p. 254), Leibniz cita o De datis de Euclides (Taisbak, 2003).

> Os antigos tinham outro tipo de análise, diferente da álgebra, que se preocupava com a posição. Ela lida com dados e co posições de entidades desconhecidas ou suas posições. Essa é a tendência do livro de Euclides De datis, a respeito do qual há um comentário feito por Marinus (Leibniz, 1679, Loemker, p. 254, grifos do autor).

Leibniz tentava criar uma característica que usasse a posição em vez da magnitude, opção de Descartes, e definia retas, superfícies e demonstrava fatos básicos a seu respeito melhor do que Euclides nos Elementos. Esta outra obra euclidiana, o De datis, guarda alguma semelhança com a característica geométrica de Leibniz. No De datis, Euclides não tenta criar uma lógica que reduz as demonstrações a meros cálculos, mas nele os objetos geométricos estão determinados pela posição, forma ou magnitude (Taisbak, 1991, 2003). Por exemplo, um segmento está dado em magnitude se está determinado seu comprimento, um triângulo está dado em posição se as posições de seus vértices e lados estão determinados, um triângulo está dado em forma se, como diríamos hoje, sua classe de semelhança está determinada. Uma afirmação típica dos De datis de Euclides é: se um segmento está dado em posição, está dado em magnitude, que hoje em dia poderíamos dizer do seguinte modo: se os extremos de um segmento estão determinados, então o comprimento, que é a distância entre eles, está determinado. Neste tipo de teoria a posição determina as outras informações: forma e magnitude. Do *De datis* de Euclides Leibniz herdou a percepção de que a posição é o elemento mais básico da geometria.

> A verdadeira *análise da situação* deve, portanto, ser suprida. Esta necessidade pode ser mostrada pelo fato de que todos os analistas, se usam álgebra da nova maneira ou lidam com o dado e o desconhecimento segundo o padrão antigo, devem supor muitas coisas de geometria elementar que não são derivadas da consideração da magnitude, mas da figura, e que não foram ainda explicadas de maneira definitiva. Euclides mesmo foi forçado a supor certos axiomas obscuros, sem demonstrá-los, para proceder com o resto. E a demonstração de teoremas e solução de problemas nos *Elementos* às vezes parece ser conseguida por meio de trabalho duro do que por método e engenho. (Leibniz, 1679, Loemker, p. 254, grifos do autor).

CIRCA GEOMETRICA GENERALIA ET CALCULUS SITUS

No *Circa Geometrica Generalia* (Leibniz, 1999) temos um amadurecimento das pesquisas de Leibniz para criar e desenvolver sua característica geométrica. Este documento consiste em oitenta afirmações geométricas. Ele apresenta o que seriam os axiomas da característica geométrica de Leibniz, em contraste com as cartas a Huygens, que apresentam objetos, definições e as soluções de alguns problemas.

Por exemplo, as afirmações (18) e (19) são as seguintes: "(18) Se a.b.c está dado, então a.b está dado. (19) Se a.b, a.c e b.c estão dados, então a.b.c está dado" (Leibniz, 1991, p. 56). O que é significado pelas notações a.b e a.b.c está definido na afirmação anterior às duas: "(17) a.b significa as posições entre os pontos a e b e a.b.c significa as posições entre três pontos a, b e c" (Leibniz, 1991, p. 56). Isto é, a.b representa o segmento que une a e b, a.b.c significa o triângulo cujos vértices são a, b e c. Explicando melhor as afirmações (18) e (19), a primeira significa que, se o triângulo está dado, determinado, então cada lado está determinado; a segunda significa que se cada um dos três lados estão dados, determinados, então o triângulo está determinado. Agora, vejamos as duas seguintes: "(21) Se a.b ≡ l.m, a.c ≡ l.n e b.c ≡ m.n, então a.b.c ≡ l.m.n. (22) Se a.b.c ≡ l.m.n então a.b ≡ l.m e assim por diante, dois a dois correspondentes" (Leibniz, 1991, p. 56-57). A primeira, (21), é o

critério LLL de congruência de triângulos transformado em axioma: se, dados dois triângulos ABC e LMN, AB e LM congruentes, BC e MN congruentes e AC e LN congruentes, então os triângulos são congruentes. A segunda, (22), é a sua recíproca.

No texto do *Circa Geometrica Generalia* Leibniz apresenta um desenvolvimento maior da característica geométrica do que nos anteriores. No *Circa*, ele explicita a relação "ponto" (no sentido de ponto da pontuação, não de ponto como objeto geométrico), a.b, como uma relação que representa as posições entre dois pontos a e b, e, portanto, representa um segmento de reta, e explicita também a relação "ponto" entre três pontos a, b e c, a.b.c, como representante das posições entre os três pontos a, b e c, ou seja, como representante do triângulo de vértices a, b e c.

Essa maneira de apresentar as proposições básicas, ou seja, os axiomas da característica geométrica, confirma a influência do *De datis* de Euclides sobre o empreendimento de Leibniz. E a maneira como Leibniz desenvolve esses axiomas foi seguida por alguns geômetras do começo do século passado, época de várias tentativas de se refundar a geometria euclidiana.

Esse estilo de escrever a teoria não foi seguido por Hilbert (1862-1943), que postulava como objetos básicos da Geometria o ponto, a reta e o plano, e várias relações entre eles. Mas Leibniz foi seguido por Mario Pieri e por Alfred Tarski. Pieri axiomatizou a geometria euclidiana tomando como objetos primitivos somente pontos e uma só relação primitiva, a relação isósceles (Marchisotto, 2007). Tarski axiomatizou a geometria euclidiana tomando como objetos primitivos, além dos pontos, a relação de congruência, envolvendo quatro pontos, e a relação de ordem entre três pontos, quando um está no segmento determinado pelos outros dois) (Givant, 1999; Tarski, 1959).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelo que foi apresentado nas seções anteriores, percebemos que Leibniz é em parte original, em parte herdeiro de algumas concepções dos gregos antigos, as quais ele mesmo cita. Leibniz criou uma álgebra geométrica nova cujo precursor era o Euclides do *De datis*, uma álgebra que tomava o ponto e sua posição como as informações mais básicas, como Euclides fez, mas também algebrizava a relação de congruência e as relações que representam as posições delimitadas por dois ou três pontos, respectivamente, o segmento e o triângulo. Além disso, foi capaz de demonstrar, por meio de sua característica, alguns fatos simples como a natureza das interseções entre planos, entre esferas e entre esfera e plano.

Há muito mais a se explorar e se estudar em relação a este assunto: relações entre a característica geométrica de Leibniz e outras linguagens criadas na época (que foi uma época de criação de muitas linguagens artificiais); as relações entre a característica geométrica e a geometria projetiva da época e anterior.

Outra possibilidade de estudo seria a análise do uso que Leibniz faz da relação de semelhança, que também aparece em alguns dos textos mencionados acima como o segundo suplemento da carta a Huygens e o *Circa Geometrica Generalia*.

REFERÊNCIAS

ECHEVERRIA, Javier. Cálculos Geométricos en Leibniz. **Theoria: Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia** 6 (1-2), p. 29-54, 1991.

GIVANT, Steven; TARSKI, Alfred. Tarski's system of geometry. **Bulletin of Symbolic Logic** 5(2). p. 175-214, 1999. https://doi.org/10.2307/421089

EUCLIDES. **Elementos**. São Paulo: UNESP, 2009.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. Circa geometrica generalia et calculum situs seu picturam characteristicam observationes miscellae constituendae analysi geometricae plane novae praeludentes. **Theoria: Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia** 6(1), p. 55-66, 1991.

LOEMKER, Leroy E. (org.). **Gottfried Wilhelm Leibniz: Philosophical Papers and Letters**. Holland, Boston: D. Reidel Pub. Co., 1976.

MARCHISOTTO, Elena; SMITH, James. **The legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic.** New York/London: Birkhauser, 2007.

ROSSI, Paolo. **A chave universal**. Bauru: EDUSC, 2004.

TAISBAK, Christian Marinus. Elements of Euclid's Data. **Apeiron,** 24 (4), p. 135-171, 1991. https://doi.org/10.1515/APEIRON.1991.24.4.135

TAISBAK, Christian Marinus. **Dedomena: The importance of being given.** London, Museum Tusculanum Press, 2003.

TARSKI, Alfred. What is Elementary Geometry? **Studies in Logic and the Foundations of Mathematics** 27, p. 16-29, 1959.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Leibniz e Huygens: correspondências de 1691 sobre equações diferenciais separáveis

Leibniz and Huygens: correspondences from 1691 about separable differential equations

Anna Karla Silva do Nascimento[1]
Universidade Federal do Cariri – UFCA

Iran Abreu Mendes[2]
Universidade Federal do Pará – UFPA

RESUMO

O artigo trata sobre parte da investigação feita no doutorado, na qual aborda um intercâmbio intelectual entre Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) e Christiaan Huygens (1629-1695), em que se analisou quatro cartas trocadas entre eles no início de 1691. O objetivo é apresentar algumas discussões presentes nas correspondências que influenciaram a resolução de problemas de curvas, a partir de Equações Diferenciais com suas soluções gerais ou particulares. A investigação se concentra na forma como as correspondências contribuíram para o desenvolvimento das Equações Diferenciais, especialmente o método das separáveis. O estudo contextualiza diálogos científicos dentro do cenário sociocultural do século XVII e destaca como a comunicação de ideias por meio de trocas epistolares também contribuiu para o progresso matemático. Além de problemas matemáticos, como curvas e resistência do ar, elas apontam questões filosóficas e científicas, na quais revelava uma dinâmica colaborativa entre os dois estudiosos, embora houvesse divergências interpretativas. A metodologia é baseada em uma abordagem qualitativa, utilizando a técnica da análise de conteúdo para interpretar os documentos, bem como analisar as contribuições das discussões para o desenvolvimento das Equações Diferenciais. Como resultados, foram observadas a importância das soluções gerais e particulares dessas Equações Diferenciais, além de demonstrar como as correspondências entre Leibniz e Huygens ajudaram a consolidar conceitos fundamentais para o cálculo diferencial e a modelagem de fenômenos naturais. Conclui-se que as cartas registraram progressos científicos, assim como ilustraram como o pensamento matemático da época estava associado à filosofia natural e à observação empírica, que fortaleceu a matemática moderna.

Palavras-chave: História da Matemática; Equações Diferenciais; Método das Separáveis; Correspondências científicas; Desenvolvimento matemático.

ABSTRACT

The article addresses part of the research conducted during the doctoral studies, focusing on an intellectual exchange between Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) and Christiaan Huygens (1629–1695). It analyzes four letters exchanged between them at the beginning of 1691. The objective is to present some discussions contained in these correspondences that influenced the resolution of problems related to curves, based on Differential Equations and their general or particular solutions. The investigation focuses on how these correspondences contributed to the development of Differential Equations, particularly the method of separation of variables. The study contextualizes scientific dialogues within the sociocultural framework of the 17th century, highlighting how the exchange of ideas through letters also fostered mathematical progress. In addition to mathematical problems such as curves and air resistance, these letters address philosophical and scientific issues, revealing a collaborative dynamic between the two scholars, despite interpretative differences. The methodology is based on a qualitative approach, employing content analysis techniques to interpret the documents and investigate the contributions of these discussions to the advancement of Differential Equations. The results highlight the importance of general and particular solutions of these equations and demonstrate how the correspondence between Leibniz and Huygens helped consolidate fundamental concepts of differential calculus and the modeling of natural phenomena. It is concluded that the letters not only recorded scientific progress but

[1] Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora Adjunta da Universidade Federal do Cariri (UFCA), Brejo Santo, Ceará, Brasil. E-mail: karla.nascimento@ufca.edu.br.

[2] Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor Titular da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. E-mail: iamendes1@gmail.com.

also illustrated how the mathematical thought of the time was intrinsically linked to natural philosophy and empirical observation, which strengthened the foundations of modern mathematics.

Keywords: History of Mathematics; Differential Equations; Method of Separables; Scientific Correspondence; Mathematical Development.

INTRODUÇÃO

As cartas têm sido utilizadas como meio de comunicação ao longo dos séculos para trocar informações, expressar sentimentos, conduzir negócios, assim como para uma série de outros propósitos, como discussões científicas que contribuíram para o desenvolvimento matemático. Esse episódio aconteceu em diversos momentos da história, dos quais ressaltamos o recorte temporal do final do século XVII quando pesquisadores como Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) e Christiaan Huygens (1629-1695) se correspondiam frequentemente.

As correspondências ocorriam devido à necessidade dos estudiosos de discutirem o conhecimento científico e manterem-se conectados à rede de informações que circulava pela Europa. Pesquisadores da Inglaterra, Prússia, Berlim, Suíça, bem como outras localidades da Europa mantinham-lhes essa comunicação ativa, de modo que houvesse uma interlocução contínua de ideias e descobertas.

Diante das discussões mobilizadas nas cartas, destacamos quatro delas trocadas entre Huygens e Leibniz, datadas entre janeiro e abril de 1691, de modo a interpretar/esclarecer seus pensamentos/ideias referentes ao estudo das Equações Diferenciais, bem como a maneira de resolvê-las e apresentá-las por meio de soluções. O estudo nos permitiu encontrar o método das separáveis utilizado para resolver os problemas da época.

O conteúdo abordado é bastante variado, pois abrange questões sobre marés, exponenciais e longas discussões sobre curvas, que eram observadas em problemas da Filosofia Natural. Este último tema é amplamente discutido neste trabalho, pois as observações enfatizadas dizem respeito a estudos de Equações Diferenciais, que, geometricamente, podem ser representadas por meio de curvas.

Dado que o estudo é protagonizado pelo estudo de curvas que resultavam em Equações Diferenciais, bem como possíveis soluções que Leibniz indicava. Norteamo-nos pela seguinte questão: Qual a relação dessas cartas com a discussão sobre as Equações Diferenciais, sobretudo, o método das separáveis?

O objetivo é apresentar algumas discussões presentes nas correspondências que contribuíram para a resolução de problemas de curvas, a partir de Equações Diferenciais com suas soluções gerais ou particulares. Previamente, informamos que algumas dessas soluções apontavam, por meio de parâmetros, valores pontuais a serem resolvidos.

Para esclarecer sobre a maneira que a pesquisa foi conduzida, apresentamos na próxima seção os procedimentos metodológicos adotados, detalhando o tipo de pesquisa, análise e interpretação, bem como as ferramentas e técnicas utilizadas ao longo do processo investigativo.

METODOLOGIA

Esta pesquisa analisou quatro cartas trocadas entre Leibniz e Huygens durante os primeiros meses de 1691, as quais abordavam assuntos diversos, entre eles questões científicas, enfatizando o estudo de curvas, discussões sobre Equações Diferenciais e suas peculiaridades. Escritas em francês, e disponibilizadas atualmente online, elas fornecem discussões sobre fenômenos que permitiram a observação de curvas gerando Equações Diferenciais.

Optamos pela realização de uma pesquisa de abordagem qualitativa, apropriada para investigar aspectos sociais e históricos, dada a natureza dos documentos do século XVII, que refletem sociedades distintas da atual. Essa escolha metodológica permitiu o aprofundamento da compreensão dos contextos históricos que influenciaram o desenvolvimento dos métodos de resolução das Equações Diferenciais.

A perspectiva mencionada alinha-se ao pensamento de Laville e Dionne (1999, p. 227), pois "[...] essa estratégia supõe a presença de uma teoria sobre a qual o pesquisador apoia-se para imaginar um modelo do fenômeno ou da situação em estudo". Os autores julgam relevante que os estudiosos tenham embasamento conceitual para a elaboração da representação do fenômeno em análise a partir do tipo de pesquisa escolhido.

No que se refere ao objetivo, a pesquisa é classificada como exploratória e descritiva. Segundo Gil (2008), a abordagem exploratória oferece um panorama amplo do tema abordado, o que é, nesse caso, de suma relevância, considerando os poucos trabalhos existentes sobre investigações históricas das Equações Diferenciais. E a pesquisa se caracteriza como descritiva porque o conteúdo das cartas é observado, registrado e analisado, com vistas a identificar nesses documentos Equações Diferenciais, soluções e informações sobre curvas. Além disso, ela ainda assume um caráter documental e bibliográfico, envolvendo o levantamento de fontes primárias para uma análise do desenvolvimento matemático e científico no período em questão.

Diante dessas considerações, a técnica adotada foi a análise de conteúdo, proposta por Bardin (2016), para a averiguar as fontes primárias, uma vez que se torna relevante para compreender o momento histórico em que as cartas foram escritas, assim como o processo de desenvolvimento matemático, alinhando-se ao objetivo da pesquisa.

Na primeira etapa da Análise de Conteúdo — a Pré-análise —, realizou-se, inicialmente, uma leitura flutuante do material para uma compreensão panorâmica do conteúdo. Foram encontradas algumas fontes primárias relacionadas à questão norteadora, incluindo textos sobre Equações Diferenciais e métodos de resolução. Em seguida, foram selecionadas bibliografias que orientaram os objetivos da pesquisa, gerando hipóteses iniciais.

A escolha dos documentos, correspondências, foi realizada mediante sua leitura e tradução. Essas fontes forneceram insights sobre estudiosos do século XVII e seu papel no desenvolvimento das Equações Diferenciais e métodos de resolução. A análise de conteúdo inicial foi concluída a partir da utilização dessas fontes primárias para a categorização e interpretação do conteúdo, contribuindo para o progresso da pesquisa.

A segunda etapa, que compreende a exploração do material, envolve a categorização dos textos, a fim de identificar padrões. Ao longo dela, os documentos foram classificados com vistas a

organizar o conteúdo de forma sistemática, permitindo sua divisão em subtemas. A categorização e a codificação dos elementos dos textos escolhidos como fontes primárias para a pesquisa buscam levantar informações relevantes para responder à questão norteadora.

A análise inicial incluiu a codificação conjunta das correspondências entre Leibniz e Huygens, com a catalogação de elementos relacionados aos problemas que motivaram buscar informações sobre as Equações Diferenciais, assim como o método de resolução das separáveis. A terceira etapa da Análise de Conteúdo, que é o tratamento dos dados, está delineada na tese referenciada Nascimento (2024), acompanhada das discussões acerca da análise epistemológica retratada.

CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DO DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Na tentativa de explanar o desenvolvimento das Equações Diferenciais na Europa, julgamos importante examinar o contexto histórico em que elas estavam inseridas para apontar algumas motivações que provocaram descobertas matemáticas capazes de solucionar problemas do século XVII. Para isso, fizemos uso da História da Matemática para compreender os problemas daquele período que culminaram com a evolução da temática, bem como a formulação de novas ferramentas capazes de solucioná-los. A seguir, a Figura 1 apresenta parte do mapa europeu que explicita lugares em que Leibniz e Huygens viveram.

Figura 1 – Mapa continente europeu

Fonte: Nascimento (2024)

A Figura 1 apresenta o mapa de parte do continente europeu que são os lugares de origem de Leibniz e Huygens, Leipzig e Amsterdã, respectivamente, além de Paris que foi a cidade que eles se conheceram. Ambos transitavam por cidades que permitia a troca de informações acerca do que era pesquisado, assim como fortalecia a rede de contatos.

Ao resgatarmos essa história das Equações Diferenciais, procuramos analisar as circunstâncias em que elas estavam inseridas, dado que, tal como defende Mendes (2015), é importante considerar aspectos históricos a fim de contextualizar o desenvolvimento matemático. Para o autor, "as práticas socioculturais ao longo de toda a nossa história humana, os problemas surgem e os grupos sociais,

em todas as suas formas de organização, tentam responder às questões evidenciadas por tais problemas" (Mendes, 2015, p. 62).

Nessa linha, as práticas socioculturais explicam o pensamento utilizado pelos grupos sociais durante a escolha do caminho a ser seguido, ao justificarem, de maneira contextualizada, a abordagem utilizada para responder aos problemas em aberto. Diante dessa compreensão, reportar-nos-emos à Idade Moderna, que, devido a alguns movimentos, como o Renascentista, segundo Alfonso-Goldfarb (1994, p. 76), foi "[...] um período de redescoberta da cultura clássica e de novas culturas". A autora considera que essa época marcou avanços culturais, no que se inclui a valorização da cultura clássica e a exploração de novas perspectivas culturais. No entanto, podemos enfatizar que o progresso científico também protagonizou o período, sobretudo a busca pelo conhecimento científico.

Vale salientar que havia a necessidade de discutir assuntos do campo acadêmico, como o científico, porém muitos deles não eram permitidos nos ambientes universitários. Diante dessa necessidade, surgiram as academias — como a Royale des Sciences, em Paris (1666) —, que eram locais em que temas como arte, literatura, filosofia, ciência e política eram questionados livremente, pois ofereciam um ambiente intelectual propício à discussão das ideias e à promoção do conhecimento.

Nesse contexto, Burke (2003, p. 37) retrata que "[...] grupos estabelecidos há mais tempo tendiam a ser hostis às novas ideias, numa nova espécie de instituição que criaram para si mesmos, a 'academia'", porém as instituições mais jovens tendiam a ser mais abertas, como a universidade de Leiden. Apesar dos impasses, consideramos que o Humanismo e as academias contribuíram na ascensão do pensamento crítico, na valorização da cultura clássica e na transição de ideais advindos do período medieval para uma mentalidade mais moderna na Europa.

Outros movimentos de comunicação e informação que aconteceram na Idade Moderna são jornais, periódicos e bibliotecas, no século XVII, que proporcionou espaços para a troca e discussão dos conhecimentos produzidos. As cartas também ganharam destaque nesse cenário, pois foi importante como meio de comunicação pessoal entre os eruditos, tal como entre as revistas científicas, que surgiram com a finalidade de divulgar os temas discutidos entre os estudiosos — apresentando artigos que resumiam os processos de investigação em andamento.

Esses meios de comunicação também impactaram as matemáticas, uma vez que os trabalhos publicados e/ou as cartas trocadas entre os estudiosos discutiam e repercutiam problemas que emergiam por meio de observações e questionamentos gerados para compreender o funcionamento do universo. Vale salientar que cartas e periódicos foram fontes que também contribuíram com o desenvolvimento de métodos de resolução de Equações Diferenciais.

As correspondências permitiam que estudiosos divulgassem seu conhecimento, com informações de resultados de pesquisas, propostas de novas teorias, resolução de problemas em conjunto etc. Elas facilitavam o intercâmbio de informações, além da promoção do trabalho colaborativo que contribuía para o avanço do conhecimento matemático e científico.

As discussões que proporcionavam chegar a resultados mostraram que, segundo Rossi (2001, p. 27), a "[...] ciência moderna não nasceu no campo da generalização de observações empíricas, mas no terreno de uma análise capaz de abstrações". Esses conceitos abstratos foram capazes de justificar os fenômenos naturais por meio de conceitos físicos, os quais Rossi (2001, p. 27) denominou "matematização da física".

A matematização da física, conforme mencionado pelo autor, contribuiu com uma compreensão matemática, ao revelar os fatos narrados pela própria natureza, impulsionando, assim, descobertas e avanços. Essa integração foi importante para a ciência, como exemplificado pelos modelos de Equações Diferenciais que explicam os fenômenos naturais. Vale salientar que segundo Rossi (Rossi, 2001),

> [...] a nova matemática que vem consolidando-se entre a primeira metade do século XVII e o começo do XVIII é sem dúvida o mais poderoso instrumento teórico que tenha sido construído pelos seres humanos no decorrer da história" (Rossi, 2001, p. 252).

Para o autor, a matemática formalizada entre os séculos XVII e XVIII foi uma ferramenta muito influente para o desenvolvimento científico, sendo uma realização intelectual da humanidade. Mediante o propósito de compreender a matemática detentora de instrumentos teóricos importantes para aquela época, buscamos assimilar o processo que conduziu Leibniz, em 1684, a explicitar em um artigo — em uma publicação que tratava sobre máximos e mínimos, ou seja, tópico correspondente ao Cálculo Diferencial — uma Equação Diferencial.

Nesse contexto, Nascimento (2024) defende que o desenvolvimento do cálculo infinitesimal deu suporte para que os problemas relativos aos fenômenos da natureza fossem solucionados e os que, até aquele momento, estavam em aberto fossem resolvidos. Por consequência do desenvolvimento científico, novos questionamentos apareciam, gerando mais problemas em aberto, como aqueles voltados para a observação do vento, da luz ou até mesmo do movimento de uma partícula.

Destacamos que Leibniz introduziu o termo Equação Diferencial na comunidade científica, fato que ocorreu no periódico *Acta Eruditorum*, no ano de 1684. À época, ele a descreveu como uma expressão composta por igualdades e letras. Hoje, conforme Zill (2016, p. 2), a Equação Diferencial é definida como uma expressão matemática que "[...] contém derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais funções não conhecidas (ou variáveis dependentes), em relação a uma ou mais variáveis independentes".

A definição apresentada reflete os estudos atuais sobre Equações Diferenciais, considerando o progresso da compreensão desse conceito que proporcionou a construção de uma linguagem mais precisa para descrever modelos matemáticos e nominá-los, bem como estabeleceu as bases para um universo que se formou com o progresso do tema, que era um dos objetivos de Leibniz, a constituição da linguagem universal. Assim, testemunhamos o surgimento de uma disciplina que teve origem na resolução de questões matemáticas e físicas, porém que agora se estende a generalizações abrangentes.

Na próxima seção, daremos continuidade ao relato histórico acerca do desenvolvimento das Equações Diferenciais, dando ênfase às discussões existentes nas correspondências realizadas entre Huygens e Leibniz.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SEPARÁVEIS

As cartas, conforme visto anteriormente, foram importantes meios de comunicação que promoveram a divulgação científica que também contribuíram para o desenvolvimento das Equações

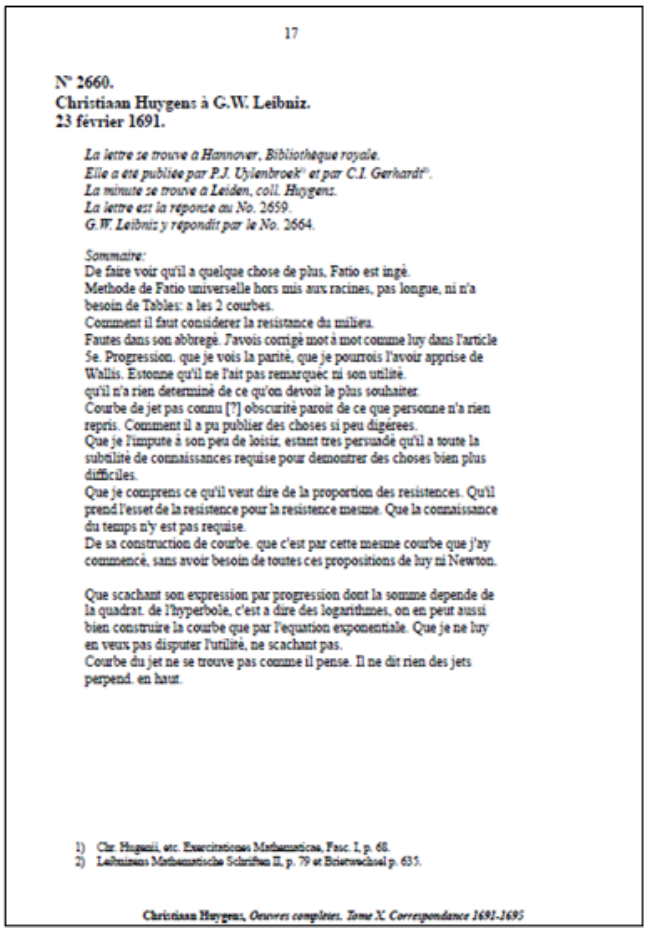
Diferenciais, que se constituíram como ferramentas na modelagem e análise de fenômenos na matemática, ciência e engenharia.

Diante disso, iniciamos as discussões dos correspondentes pela carta enviada por Huygens no dia 23/02/1691, cujo conteúdo foi iniciado com um desabafo no qual expressou descontentamento devido aos desentendimentos recorrentes com Leibniz, principalmente em relação à interpretação das discussões relatadas em cartas anteriores sobre resistência: Huygens a via como perda de velocidade, enquanto Leibniz a considerava como pressão do meio.

No entanto, em seguida, ele reconheceu semelhanças entre seus estudos sobre a quadratura da hipérbole e a solução de Leibniz com logaritmos, ao finalizar a carta expressou o desejo de reencontrar o amigo em breve.

A seguir, na Figura 2, apresentamos um modelo de carta disponibilizado nos sites que armazenam informações acerca da vida e obra de Christiaan Huygens, como o Biblioteca Digital de Literatura Holandesa (DBNL)[3].

Figura 2 – Modelo de página inicial da carta analisada



17

N° 2660.
Christiaan Huygens à G.W. Leibniz.
23 février 1691.

La lettre se trouve à Hannover, Bibliothèque royale.
Elle a été publiée par P.J. Uylenbroek[1] et par C.I. Gerhardt[2].
La minute se trouve à Leiden, coll. Huygens.
La lettre est la réponse au No. 2659.
G.W. Leibniz y répondit par le No. 2664.

Sommaire:
De faire voir qu'il a quelque chose de plus, Fatio est ingé.
Methode de Fatio universelle hors mis aux racines, pas longue, ni n'a besoin de Tables: a les 2 courbes.
Comment il faut considerer la resistance du milieu.
Fautes dans son abbregé. J'avois corrigé mot à mot comme luy dans l'article 5e. Progression. que je vois la parité, que je pourrois l'avoir apprise de Wallis. Estonne qu'il ne l'ait pas remarquée ni son utilité.
qu'il n'a rien determiné de ce qu'on devoit le plus souhaiter.
Courbe de jet pas connu [?] obscurité paroit de ce que personne n'a rien repris. Comment il a pu publier des choses si peu digérees.
Que je l'impute à son peu de loisir, estant tres persuadé qu'il a toute la subtilité de connaissances requise pour demontrer des choses bien plus difficiles.
Que je comprens ce qu'il veut dire de la proportion des resistences. Qu'il prend l'esset de la resistence pour la resistence mesme. Que la connaissance du temps n'y est pas requise.
De sa construction de courbe. que c'est par cette mesme courbe que j'ay commencé, sans avoir besoin de toutes ces propositions de luy ni Newton.

Que scachant son expression par progression dont la somme depende de la quadrat. de l'hyperbole, c'est a dire des logarithmes, on en peut aussi bien construire la courbe que par l'equation exponentiale. Que je ne luy en veux pas disputer l'utilité, ne scachant pas.
Courbe du jet ne se trouve pas comme il pense. Il ne dit rien des jets perpend. en haut.

1) Chr. Hugenii, etc. Exercitationes Mathematicae, Fasc. I, p. 68.
2) Leibnizens Mathematische Schriften II, p. 79 et Briefwechsel p. 635.

Fonte: Huygens (1905, p. 17)

[3] Site que estão armazenadas as cartas que Christiaan Huygens. Disponível em: <https://www.dbnl.org/>. Acesso em: 14 outubro 2024.

O modelo de carta disponibilizada na Figura 2 foi escrita por Christiaan Huygens, datada de 02 de fevereiro de 1691. Nessa página, identificamos discussão sobre conceitos de resistência de materiais e métodos para resolução de equações, além da citação de pesquisadores que Huygens se comunicava. O documento seguinte é uma resposta de Leibniz que veio alguns dias depois, mais precisamente na carta com data de 02/03/1691. Inicialmente, ele, reconheceu o ato falho e expressou arrependimento por ter mencionado que Huygens suspeitava de suas posições, pedindo desculpas pelo equívoco. Essa atitude de Leibniz reforça a afirmação de Martins (2006, p. 22), ao argumentar que,

> A ciência não brota pronta, na cabeça de "grandes gênios". Muitas vezes, as teorias que aceitamos hoje foram propostas de forma confusa, com muitas falhas, sem possuir uma base observacional e experimental. Apenas gradualmente as ideias vão sendo aperfeiçoadas, através de debates e críticas, que muitas vezes transformam totalmente os conceitos iniciais.

O autor compartilhou da ideia de que a ciência não surge pronta para os pesquisadores, mas muitas vezes é proposta de forma confusa, com falhas e sem uma base observacional e experimental sólida. A evolução das ideias acontece gradualmente, por meio de observações, questionamentos, discussões e críticas, capazes de transformar os conceitos iniciais, de modo que essa perspectiva aponte o desenvolvimento dinâmico da natureza e o progresso constante do conhecimento científico.

A carta prosseguiu com a retomada da discussão sobre resistência do ar em relação à velocidade de um corpo. Incluiu também breves comentários sobre assuntos científicos e filosóficos, dos quais destacou a variação da agulha magnética, paralelas, leis da mola, exponenciais, magnetismo, isocronismo, o problema das marés, iniciado por Descartes e continuado por outros pesquisadores.

No que se refere às curvas, Leibniz citou as geradas por meio de Equações Diferenciais e que várias delas satisfazem uma equação. Nesse caso, chamamos atualmente de família de curvas, devido à semelhança das características. Para concluir, ele percebeu que encontrava soluções particulares para uma Equação Diferencial, porque sempre que resolvia os problemas, constituía uma quantidade C, que chamamos de constante real.

Com isso, para todo *C* real, há uma função correspondente que chamamos de solução particular. Para esse caso, Leibniz considerou a Equação Diferencial (1) que está disposta na nota de rodapé da carta, ou seja, não encontramos no corpo do texto. Porém, ao resolvê-la, verificamos que suas soluções coincidem com a descrita na (1) correspondência $ax\ dx = y\sqrt{aa - xx}dy$

No texto original, está na sexta nota de rodapé da seguinte forma,

> De fato, a solução geral do problema, que equivale à integração da equação diferencial $ax\ dx = y\sqrt{aa - xx}dy$, pode ser escrita: $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - Cy^2 + C^2$. Leva, portanto, para $C = a^2$, à segunda das equações mencionadas por Leibniz, e, para C=0 à primeira, após a correção que Leibniz lhe trouxe em sua Carta de 20 de abril de 1691 (Huygens, 1905, p. 50, tradução nossa)[4].

[4] "En effet, la solution générale du problème, qui revient à l'intégration de l'équation différentielle $ax\ dx = y\sqrt{aa - xx}dy$ peut s'écrire: $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - Cy^2 + C^2$. Elle conduit donc, pour $C = a^2$, à la seconde des équations mentionnées par Leibniz, et, pour C=0 à la première, après la correction que Leibniz y apporta dans sa Lettre du 20 avril 1691" (Huygens, 1905, p. 50).

A citação anterior apresenta a Equação Diferencial cuja resolução supomos que foi realizada por meio da utilização do método das separáveis, como denominamos atualmente. Logo, para resolvê-la, basta isolar as variáveis (nomenclatura utilizada atualmente), ou seja, dada uma função $y = f(x)$, a variável *y* será colocada em um membro e a variável *x*, colocada no outro. Após isso, o passo seguinte é o cálculo da integração de ambos os membros para encontrar a solução geral da Equação Diferencial.

Observemos que a notação utilizada por Leibniz difere daquela que usualmente é trabalhada nos livros de Equações Diferenciais Ordinárias; porém, podemos trazer para a forma de escrita aplicada. Vejamos a Equação Diferencial e sua solução, pelo método das separáveis, como tratamos nos dias de hoje:

$$ax\ dx = y\sqrt{a^2 - x^2}dy \text{ (2)}$$

Iniciando a resolução desta Equação Diferencial, utilizaremos o método das separáveis, para isso, isolaremos as variáveis em seus respectivos membros.

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = ydy \text{ (3)}$$

Integrando ambos os membros $\int \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \int ydy$(4)

A integral do primeiro membro pode ser resolvida pela técnica da substituição de variáveis e do segundo, por meio da integral de um polinômio. Verificamos que o resultado é: .

$$-a\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{y^2}{2} + C \text{ (5)}$$

A solução geral, de modo que ambos os membros sejam elevados ao quadrado é: .

$$a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - Cy^2 + C^2 \text{ (6)}$$

A expressão (6) é a representação da solução geral da Equação Diferencial apresentada inicialmente em (1). Como pode ser observado, ela gerou contantes C, conforme discutido por Leibniz para mostrar que, ao atribuir valores distintos a essa contante, obtêm-se curvas distintas, mas que são soluções da equação inicial.

Um elemento proeminente nas correspondências foram as revelações de discussões significativas sobre matemática e filosofia natural com uma consonância interessante na busca comum por soluções matemáticas e geométricas, pois os pesquisadores estavam interessados em resolver problemas matemáticos complexos, como o cálculo de áreas e a identificação das curvas. Essa busca pela resolução de questões matemáticas demonstrou a convergência de seus objetivos intelectuais.

Também foi observado que as cartas refletem a inventividade de Huygens e Leibniz na busca por soluções matemáticas e científicas, bem como sua capacidade de pensar de forma criativa para resolver problemas e colaborar de maneira produtiva, mesmo em meio a divergências conceituais. Isso pode ser percebido quando Huygens reconheceu uma relação entre a quadratura da hipérbole que desenvolveu com a solução logarítmica feita por Leibniz, revelando uma abordagem criativa para compreender e relacionar diferentes conceitos matemáticos.

O diálogo por correspondências continuou e Huygens respondeu a carta em 26/03/1691, na qual iniciou elogiando Leibniz por seus trabalhos e por ter encontrado as curvas, embora tenha colocado em dúvida a existência das curvas que satisfaçam a condição inicial. Também responde que Fatio não cita sequer a colaboração de Leibniz para sua pesquisa, embora Huygens julgue que seria pertinente o trabalho conjunto deles, por considerar que o inglês não conseguiria resolver sozinho seus problemas. Em seguida, sugeriu que Leibniz compartilhasse seus estudos sobre quadratura, conforme Huygens (1905, p. 56), pois:

> Favoreceria o público ao apresentar o seu método de quadratura, do qual você exemplificou elegantemente na curva que propus, ou seja, $2aaxx \propto aayy - y^4$, em que certamente admiro sua habilidade e a excelência de sua regra, embora limitada, assim como a outra, na minha opinião[5].

Nesse caso, Huygens sugeriu que Leibniz compartilhasse seus cálculos sobre as curvas para que a comunidade científica tivesse acesso. Eram soluções de Equações Diferenciais resolvidas pelo método das separáveis. A carta também é complementada com temas sobre marés, agulha magnética, isocronismo de vibrações da mola, refração e dióptrica. As questões matemáticas, mais precisamente o estudo de curvas, teve mais ênfase, visto que o assunto gerava questionamentos e que ambos os pesquisadores não se contentavam com as justificativas do outro.

Como mencionado anteriormente, as correspondências eram escritas com forte periodicidade. Em 20 de abril de 1691, Leibniz respondeu a Huygens e iniciou a escrita expressando sua satisfação pela solução alcançada e, em seguida, procurou esclarecer os questionamentos levantados por Huygens. Esse último havia expressado dúvidas sobre a capacidade de uma Equação Diferencial gerar tanto uma solução geral quanto soluções particulares. Esse questionamento, nos dias de hoje, é um conceito demonstrado e validado pela comunidade científica.

Para sanar as dúvidas de seu correspondente acerca da existência de várias linhas que podem fornecer uma subtangente, Leibniz respondeu o seguinte, conforme Huygens (1905, p. 83, tradução nossa): "o senhor duvida do que eu disse, que existem várias linhas que podem gerar a subtangente $yy\sqrt{aa-xx} : ax$, e isso até lhe parece impossível. No entanto, aqui está uma, cuja equação é $xx = 2yy - \frac{1}{4aa}y^4 - 3aa$" [6]. Como pode ser observado, o autor respondeu a essas dúvidas apresentando um caso específico com uma equação que respaldava sua perspectiva, porque, se considerarmos $c = 2aa$, teremos a expressão mencionada por Leibniz.

Mostramos preliminarmente que a equação (6) representada por $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - Cy^2 + C^2$ apresenta a solução geral da Equação Diferencial $ax\ dx = y\sqrt{aa-xx}dy$. Usaremos um caso particular que, de acordo com Leibniz (Huygens, 1905), considerou $c = 2aa$. Para isso, realizamos uma substituição na solução geral, obtendo a expressão: $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2aay^2 + (2aa)^2$. (7)

[5] "Vous obligeriez aussi le public en produisant vostre methode des quadratures dont vous venez de donner un si joli echantillon dans la courbe que je vous avois proposée, scavoir $2aaxx \propto aayy - y^4$, où j'admire certes vostre adresse et l'excellence de vostre regle, quoique limitée aussi bien que l'autre, comme je crois." (Huygens, 1905, p. 56)

[6] "Ce que j'avais dit, c'est qu'il y a plusieurs lignes qui peuvent donner la tangente $yy\sqrt{aa-xx} : ax$, et même cela vous semble impossible. En voici cependant une, dont l'équation est $xx = 2yy - \frac{1}{4aa}y^4 - 3aa$" (Huygens, 1905, p. 83).

Colocando toda a expressão na notação mais usual, temos:

$a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2a^2y^2 + (2a^2)^2$ (8)

Que é equivalente à expressão: $a^4 - a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2a^2y^2 + 4a^4$ (9)

Operando termos semelhantes, $-a^2x^2 = \frac{1}{4}y^4 - 2a^2y^2 + 3a^4$ (10)

Multiplicando a expressão por $-\frac{1}{a^2}$, $x^2 = 2y^2 - \frac{1}{4a^2}y^4 - 3a^2$ (11)

Como podemos observar, Leibniz estava correto ao apresentar a equação (11) como uma solução particular da Equação Diferencial contestada, pois era mais uma expressão que a satisfazia. Vale lembrar que eles fizeram parte da época em que o Cálculo Diferencial e Integral foi desenvolvido, por isso, as cartas explicitavam tantos questionamentos acerca das demonstrações realizadas, além de refinar os conceitos matemáticos.

Posteriormente, Leibniz fez uma correção pontual referente ao equívoco escrito na carta de 02/03/1691, e afirma que diz respeito a "$aaxx = a^4 - x^4$, que lhe enviei, percebo que nos meus rascunhos está $aaxx = a^4 - \frac{y^4}{4}$; (isto é, $4aaxx = 4a^4 - y^4$), o que não havia notado quando escrevi". Nesse caso, ele enviou uma equação faltando informações, cuja expressão correta foi apresentada na carta de 20/04/1691, na escrita da expressão cuja curva correta é $aaxx = a^4 - \frac{y^4}{4}$ que é uma solução particular da equação

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2(4a^2 - y^2)}{2aax} \text{(12)}$$

Observe que a equação (12) possui um modelo semelhante ao da Equação Diferencial (3). Devido às similaridades, em relação à problemática da carta que se referia às possibilidades de uma equação gerar uma família de curvas, e a maneira pela qual elas eram escritas, podemos separar suas variáveis e escrevê-la da seguinte forma $\frac{dx}{dy} = f(x)g(y)$, cuja solução é por meio de separação de variáveis**.**

Vale salientar que duvidaram da possibilidade de equações desse tipo gerarem famílias de curvas subtangentes (conforme mencionado por Leibniz no decorrer da carta). No momento, ele apresentou possíveis soluções particulares para a equação mencionada; porém, sua solução não está explícita, portanto, a fizemos para apreciação do/da leitor/a.

Trazendo a equação para a notação atual, temos: $\frac{dx}{dy} = \frac{y^2(4a^2 - y^2)}{2a^2x}$ (13)

Agora resolveremos a Equação Diferencial pelo método das separáveis.

Fazendo a separação de variáveis, temos: $2a^2x\ dx = y^2(4a^2 - y^2)dy$ (14).

Para iniciar a resolução da Equação Diferencial, podemos utilizar o método da substituição simples, ou multiplicar y^2 pela expressão para aplicar no segundo membro. Escolhemos a segunda opção, cuja solução é a integração de um polinômio, ficando: $2a^2x\ dx = y^2(4a^2 - y^2)dy$.(15)

Aplicando a integral em ambos os membros da Equação Diferencial:

$$\int 2a^2x\ dx = \int (4a^2y^2 - y^4)dy \quad (16)$$

Integrando, temos: $2a^2\frac{x^2}{2} = 4a^2\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + C$ (17)

Simplificando a expressão: $a^2x^2 = \frac{4}{3}a^2y^3 - \frac{y^5}{5} + C$ (18)

Portanto, a solução geral da Equação Diferencial $\frac{dx}{dy} = \frac{y^2(4a^2 - y^2)}{2a^2x}$ que Leibniz enviou para Huygens com a intenção de justificar as subtangentes geradas é $a^2x^2 = \frac{4}{3}a^2y^3 - \frac{y^5}{5} + C$. Observe que, para resolvê-la, precisamos separar as variáveis e depois integrá-las para ser solucionada. Toda essa discussão foi benéfica ao desenvolvimento matemático do século XVII, porque os questionamentos sobre curvas contribuíram para o pensamento criativo desses estudiosos, pois Leibniz e Huygens estavam envolvidos em discussões matemáticas e científicas.

O processo criativo aconteceu quando eles abordaram a resolução de problemas matemáticos e a exploração de equações para encontrar soluções. Isso envolve a geração de hipóteses, a experimentação com equações e a busca por soluções que atendam aos critérios específicos dos problemas discutidos.

Adicionalmente, a correspondência aborda a problemática da quadratura de curvas, envolvendo a discussão sobre a quadratura do círculo e elipse. Paralelamente, explorou questões científicas, como a declinação do magnetismo, e demonstra a grande valia da exposição de Huygens sobre os princípios da refração. A carta também inclui solicitações pessoais, como a busca de informações históricas sobre alguns conhecidos em comum.

Nas quatro cartas citadas no presente trabalho, observamos um diálogo intelectual colaborativo que abrange temáticas matemáticas, científicas e históricas. Leibniz e Huygens compartilharam problemas, soluções e teorias, demonstrando um compromisso com a exploração do conhecimento e a resolução de problemas. Suas discussões englobam uma variedade de tópicos, desde Equações Diferenciais, quadratura de curvas, até questões científicas, como a refração da luz e a declinação do magnetismo. Essas correspondências revelam apreço pela pesquisa e o pensamento criativo que caracterizaram esses dois pesquisadores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, constatamos que Leibniz e Huygens possuíam uma relação mediada pelo uso de cartas, pois se utilizavam desse tipo de documento para trocarem ideias que favoreceu o desenvolvimento das Equações Diferenciais, bem como o estudo das curvas por eles observadas. Nelas também estavam evidentes as discussões sobre suas soluções gerais, além dos seus significados geométricos feitos pelas análises das curvas.

Para que isso pudesse ser observado, apresentamos quatro correspondências e discutimos alguns pontos do que elas traziam, desde assuntos que eram citados, até conteúdos mais aprofundados como por exemplo, as curvas observadas. Esse intercâmbio intelectual entre os dois pensadores contribuiu para o desenvolvimento das equações diferenciais, sobretudo, o método das separáveis, bem como o estudo das curvas, que eram temas amplamente discutidos na matemática e na filosofia natural.

Tal discussão favoreceu um diálogo colaborativo de modo a promover o desenvolvimento matemático da época, pois, as cartas revelaram que Leibniz e Huygens buscaram entender e formalizar as soluções gerais das equações diferenciais, destacando ainda os significados geométricos dessas soluções, que frequentemente se relacionavam a curvas observadas em fenômenos naturais.

Esse diálogo foi, portanto, uma importante via de comunicação científica e colaborativa, promovendo a construção de ideias que impactaram o pensamento matemático e a formalização de conceitos da época, nesse caso o método das separáveis e a ampla discussão sobre os tipos de solução que as curvas geravam. Leibniz defendia que essas curvas poderiam ter soluções gerais mas caso necessitasse, poderiam particularizá-las em situações mais específicas, ele o fez quando atribuiu valores constantes ao C.

Dessa forma, as cartas revelaram o avanço do conhecimento sobre equações diferenciais, além disso, ilustrou como a matemática da época estava relacionada com questões filosóficas e à observação dos fenômenos naturais. A análise das correspondências mostra que a colaboração entre Leibniz e Huygens auxiliou a compreensão de problemas que, na época, eram questionamentos em plena discussão, mas que não possuíam resposta.

REFERÊNCIAS

ALFONSO-GOLDFARB, Ana Maria. **O que é história da ciência?** São Paulo: Brasiliense, 1994.

ALMEIDA, Ítalo D'Artagnan. **Metodologia do trabalho científico** / Ítalo D'Artagnan Almeida. – Recife: Ed. UFPE, 2021.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1977.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2008.

HUYGENS, Christiaan. **Oeuvres complètes**: tome x. Correspondance 1691-1695. Den Haag: Martinus Nijhoff, 1905. 916 p. Disponível em: <https://www.dbnl.org/tekst/huyg003oeuv10_01/colofon.php>. Acesso em: 20 maio 2023.

LAVILLE C., DIONNE J. **A construção do saber – manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Belo Horizonte, Editora UFMG , 1999, 340 p.

MARTINS, Roberto de Andrade. Introdução. A história das ciências e seus usos na educação. p. xxi-xxxiv. *In*: SILVA, Cibelle Celestino (ed.). ***Estudos de história e filosofia das ciências: subsídios para aplicação no ensino.*** São Paulo: Livraria da Física, 2006.

MENDES, I. A. **História da Matemática no ensino:** entre trajetórias profissionais, epistemologias e ensino. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em Sala de Aula:** Tecendo Redes Cognitivas na Aprendizagem. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2009.

NASCIMENTO, Anna Karla Silva do. **Um estudo histórico acerca de métodos de resolução de equações diferenciais: método das separáveis e método das lineares** / Anna Karla Silva do Nascimento. – 2024. 282 f.: il. Tese (doutorado)–Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Natal, RN, 2024.

ROSSI, Paolo. **O nascimento da ciência moderna na Europa /** Paolo Rossi ; tradução de Antonio Angonese. – Bauru; SP: EDUSC, 2001.

STRUIK, D. J. (editor), **A Source Book in Mathematics (1200-1800).** Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1969.

ZILL, Denis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Paleoevidência do Conceito de Número–Ponta de Machado Acheuleana, com quatro incisões–Zarqa, Jordânia, c. 500 Ka

Paleoevidence of the Concept of Number–Acheulean Hand Ax Point, with four incisions–Zarqa, Jordan, c. 500 Ka

Manoel de Campos Almeida[1]
UFPR-PUCPR

RESUMO

Debate-se sobre as origens do conceito de número, bem como sobre as origens dos processos de contagem. Essas discussões estão intrincadas com as investigações sobre origens do pensamento simbólico, bem com qual espécie do gênero Homo foi pioneiro em pensar simbolicamente. A descoberta recente de uma ponta de machado acheuleana, por arqueólogos brasileiros, gravada com quatro incisões em Zarqa, Jordânia, datada de c. 500 mil anos atrás (Ka), sugere evidência do emprego do conceito de número em processo primitivo de contagem. Além de possivelmente ser um dos mais antigos exemplos de talhas numéricas até o presente encontrados, possivelmente constitui uma das mais arcaicas evidências de pensamento simbólico. Escrutina-se o rol de talhas numéricas publicadas e as circunstâncias de suas descobertas**.** Enfatiza-se a importância desse achado em vista da extrema raridade de artefatos cronologicamente semelhantes no registro arqueológico. Discute-se a importância desse achado para a História da Matemática, para a História da Ciência e para o estudo das origens do pensamento simbólico.

Palavras-chave: História da Matemática, História da Ciência, Origens do Simbolismo.

ABSTRACT

The origins of the concept of number and the origins of counting processes are debated. These discussions are intertwined with investigations into the origins of symbolic thought, as well as which species of the genus Homo pioneered symbolically thinking. The recent discovery of an Acheulean hand ax point by Brazilian archaeologists, engraved with four incisions in Zarqa, Jordan, dated to c. 500 thousand years ago (Ka), suggests evidence of the use of the concept of number in a primitive counting process. In addition to possibly being one of the oldest examples of numerical carvings found to date, it possibly constitutes one of the most archaic pieces of evidence of symbolic thought. The list of published numerical carvings and the circumstances of their discovery are scrutinized. The importance of this find is emphasized in view of the extreme rarity of chronologically similar artifacts in the archaeological record. The importance of this find for the History of Mathematics, for the History of Science and for the study of the origins of symbolic thought is discussed.

Keywords: History of Mathematics, History of Science, Origins of Symbolism.

INTRODUÇÃO

Talhas numéricas *(tally sticks)* pré-históricas, artefatos onde se associa o objeto a ser contado a uma incisão em uma talha, mediante uma correspondência um-a-um, constituem as mais antigas evidências subsistentes de processos de contagem empregados pelo gênero *Homo.* O emprego de correspondências um-a-um pode ser feito igualmente por meio de associações com seixos, contas, cocos, *calculi* diversos, partes do corpo, etc., contudo, com essas mídias materiais ocorre que: ou seu conjunto é dispersado, ou não podem ser vinculadas com processos de contagem, ou não sobrevivem arqueologicamente. Na pré-história processos de contagem eram necessariamente orais, os numerais somente surgiram no fim do Neolítico, com a invenção da escrita (c.3.400-3.000 a.C.), a qual permitiu registrar concretamente os seus resultados.

[1] UFPR-PUCPR. Emeriti. Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: manoel1748@gmail.com.

Presentemente teoriza-se que os animais podem possuir dois diferentes sistemas não verbais para representa valores numéricos. O primeiro sistema *(OFM–Object-File Model)* representa precisamente números pequenos (até 3 ou 4), sendo cada objeto a ser enumerado em um conjunto representado por um único símbolo. Numerosidades (ou o senso numérico) são explicadas por esse sistema. Numerosidades são multitudes contáveis, enquanto que geralmente é aceito como senso numérico animal são multitudes com até quatro elementos, objeto do OFM. Como a representação da quantidade é exata, animais empregando esse modelo não seguem a lei de Weber ou mostram efeitos de razão Weber (Almeida, 2024; Almeida & Justino 2020).

No segundo sistema, denominado de sistema de números aproximados *(ANS- Approximate Number System),* animais representam aproximadamente números maiores e também possivelmente números menores. Nesse sistema quantidades são representadas como magnitudes mentais, ou seja, não simbólicas, estando sujeitas a efeitos de razão; portanto, quantidades usando este sistema seguem a lei de Weber (Almeida, 2024; Almeida & Justino 2020).

Peter Damerow identificou os seguintes estágios cognitivos da evolução histórica do conceito de número: 0) quantificação pré-aritmética; 1) proto-aritmética; 2) aritmética baseada em símbolos; 2 a) nível de sistemas de símbolos dependentes do contexto; 2 b) nível de sistemas de símbolos abstratos; 3) aritmética teórica; 3 a) nível de dedução em Weber linguagem natural; 3 b) nível de dedução formal (Damerow, 1999, 2001).

Entende como o nível de quantificação pré-aritmética o estágio no qual nenhuma atividade aritmética, exceto *comparações*, pode ser encontrada. No nível pré-aritmético as comparações, bastante primárias, são feitas de um modo consciente e refletido, ao contrário do que ocorre no senso numérico (OFM), onde comparações são feitas instintivamente, em um nível subconsciente. No estágio de quantificação pré-aritmética não há sequências estruturadas de contagem e nem técnicas de contagem como a dos entalhes, contagem corporal, contagem por nós ou por *calculi* (contadores). Um exemplo notável desse estágio é o do povo Pirahã,

Estudos seminais realizados pelo linguista norte estadunidense Daniel l Everett sobre a língua Pirahã, no estado do Amazonas, desde 1977, contribuíram significativamente para o estudo da questão. A língua Pirahã é a última sobrevivente da família de línguas Muran e é falada por aproximadamente 450 pessoas, que habitam ao longo do Rio Maici, no estado do Amazonas (Everett, 2005, 2016, Almeida, 2024).

Os Pirahãs, bem como sua língua, possuem características notáveis que os tornam praticamente únicos, senão vejamos: não dispõem de números ou de qualquer tipo de conceito de contagem ou de quaisquer termos para quantificação; não dispõem de termos para cores; não desenham ou praticam qualquer outra arte, bem como têm uma das mais simples culturas materiais documentadas; não dispõem da recursão; possuem o mais simples sistema de parentesco já documentado; ficção ou mitos de criação estão ausentes; inexiste uma memória coletiva ou individual de mais que duas gerações passadas; dispõem do mais simples inventário de pronomes conhecidos; são monolinguais apesar de mais de 200 anos em contacto com os Tupi-Guarani falantes de Kawahiv (Everett, 2005, 2016).

No segundo estágio, correspondente ao nível proto-aritmético, a representação de quantidades é feita mediante correspondência um-a-um com conjuntos de objetos concretos ou outros símbolos. Neste estágio é que surge a contagem primitiva e a técnica de entalhes. Os demais estágios não serão abordados neste trabalho.

Contagem consiste em, quando se quer precisar a quantidade de objetos de um dado conjunto, estabelecer uma *correspondência um-a-um* entre cada elemento deste conjunto com os elementos de outro conjunto, habitualmente o conjunto de nomes de números, embora este último também possa ser composto de elementos materiais, como seixos, grãos, partes do corpo, entalhes, conchas, etc. Contagem, portanto, é a discriminação de quantidades.

Quando a correspondência um-a-um entre os objetos contados e seus signos é registrada materialmente através de entalhes em ossos, madeiras, pedras, etc., surgem as denominadas talhas numéricas (*tally sticks,* bastões numéricos entalhados), que são os únicos artefatos capazes de sobreviverem arqueologicamente, evidenciando assim processos de contagens.

Seu emprego, mostra a Etnologia, foi e ainda é amplamente difundido entre povos primitivos sendo utilizadas para inúmeras finalidades: registro de transações ou obrigações, cômputo de dias de viagem, registro de períodos de tempo, calendários, repartição de bens, etc.

A importância do estudo das origens das talhas numéricas pré-históricas reside no fato de que documentam materialmente o emprego pelo homem do mais rudimentar conceito de *número* de objetos, visando distinguir entre *um, mais de um e muitos,* provavelmente antes mesmo do surgimento da associação com nomes de números, evidenciando assim a mais antiga concepção simbólica de *quantidade.* Sua concepção, dada a sua simplicidade, pode ser considerada como uma das mais geniais ideias da humanidade, que sobreviveu desde a pré-história até os tempos modernos.

Por exemplo, podemos citar os seus empregos entre as seguintes tribos modernas da África: os Sundi e os Ngala entalham marcas para indicar o número de elefantes e hipopótamos que caçaram; entre os Ndasa e os Songe os dias de viagem são marcados por entalhes; entre os Ngoyi uma talha numérica é empregada como um calendário de festas; entre os Dembo e os Bong, servem para registrar o número de inimigos mortos pelo dono da talha; os Sania, Kikuyu, Embu, Chuka, e Kuku usam-nas para contar dias de trabalho ou de viagem; os chefes Djaga nelas registram o número de seus antecessores.

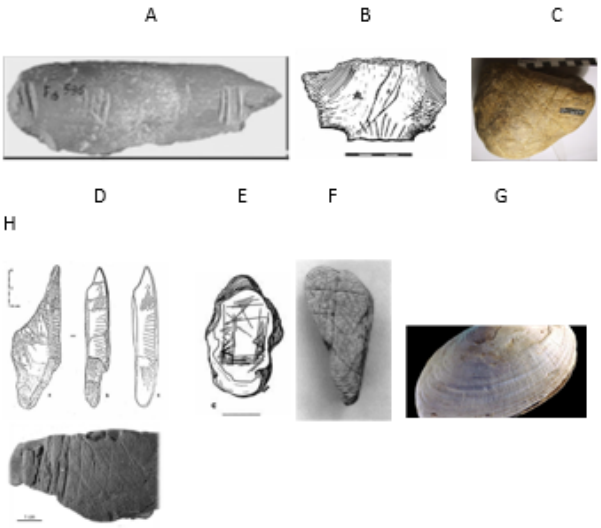
Mesmo sociedades consideradas modernas adotaram-nas: o Tesouro Real Britânico, desde o século XII, manteve o registro de pagamento de taxas e impostos por seus cidadãos em livros e talhas, o que ocorreu até 1820; na França, o emprego das talhas era regular até o século XIX, serviam como meio de garantia juridicamente aceito (Almeida, 2024; Lagerkrantz,1973; Menninger, 1992).

OS MAIS ANTIGOS GRAFISMOS PRODUZIDOS POR HOMINÍDEOS

A academia considera que a introdução dos grafismos é um dos primeiros indícios de pensamento simbólico em Hominídeos. Inicialmente iremos nos deter sobre os mais antigos exemplos de grafismos executados por hominídeos, debruçando-nos particularmente sobre os que se assemelham a talhas numéricas.

De particular relevância são dois ossos encontrados na Caverna Kozarnika, no noroeste da Bulgária. Um osso de bovídeo com 10 incisões paralelas, com cerca de oito centímetros de comprimento (Fig1, A), bem como um osso de cervídeo com 27 entalhes ao longo de uma face. Eles foram encontrados em 2004 em um estrato contendo implementos de pedra, bem com um molar e um fragmento de crânio humano. Datações paleomagnéticas situam esse material entre 1,6 e 1,4 Ma.[2]

Figura 1 - Os Mais antigos grafismos produzidos por hominídeos



A . Kozarnika, c. 1,4 Ma; B. Stranska Scala, c. 700 Ka; C. Gross Pampau, c. 500 Ka; D. e E.: Bilzingsleben, c. 400 Ka; F. Asselt, c. 400 Ka; G. Indonesia, c. 500 Ka; H. Rio Klasies, c. 125 Ka.; I. Oldisleben 1 c. 120 Ka ; J. Oldisleben 3 c. 120 Ka ; K. Caverna Gorham, c. 39 Ka.

Fonte: A, B, C, D, E, D, H.: Almeida, 2017; 2019; I, J: Almeida 2021.

Esta seção tem a função de apresentar o tema da pesquisa, o problema que será uma vértebra de elefante, com sete entalhes divergentes, datando de c. 600-700 Ka, foi descoberta em Stranska Skala, na Tchecoslováquia, perto de Brno (Fig. 1, B), obra do *Homo erectus. (He).* O artefato encontrado no sítio de Gross Pampau (Fig.1, C), na Alemanha, com c. 400-500 Ka, também apresenta incisões, embora não tão nítidas.

Descoberto em 1969, o sítio de Bilzgsleben, na Alemanha, com cerca de 400 Ka é notável por nele terem sido descobertos mais de 200 mil artefatos de pedra, bem com centenas em ossos, madeira e chifre. Entre os entalhes encontrados, há um fragmento de tíbia de elefante que tem um grupo de sete marcas e um segundo grupo, com mais 14 marcas (Fig. 1, I). Podem ser associados ao *Homo erectus (He)*. Embora não lembre talha numérica, é excepcional a inscrição em uma pata de elefante, que parece ser constituída de um retângulo inscrito em outro retângulo (Fig. 1, E). Pode ser considerada uma das mais antigas, senão a mais antiga representação de uma figura geométrica.

Os mais antigos exemplos dessa técnica, produzidos pelos *Hn*, foram encontrados na Alemanha, em Oldisleben, que dista 10 km de Bilzingsleben. O mais refinado, é uma escápula, com 20 entalhes em dois conjuntos paralelos (Fig. 1, I); cuja idade é 120 Ka. O segundo é um osso com 8 entalhes, da mesma idade (Fig. 1, J).

[2] Ma – milhões de anos atrás; Ka – milhares de anos atrás.

Outros padrões geométricos, embora não assemelhados às talhas, também foram encontrados. Um padrão geométrico, com c. 350-400 Ka, foi encontrado em Asselt, em Panheel, Holanda, com c. 350-400 Ka (Fig. 1, F). Nas margens do Rio Solo**,** em Java, Eugene Dubois descobriu (1889) ossos do *He* (H. de Java), bem como uma concha gravada (Fig. 1, J), que somente recentemente (12/2014) foi analisada. Sua idade é estimada entre 540-430 Ka. Um osso de bovídeo, proveniente de uma Caverna do Rio Klasie, na África do Sul, apresenta uma série de linhas aproximadamente paralelas, com c. 70 Ka. Em 08/2014 foi publicada a descoberta da primeira gravura executada por neandertais (Fig. 1, K), encontrada na Caverna Gorham, em Gibraltar, com uma idade de c.39 Ka.

AS MAIS ANTIGAS TALHAS NUMÉRICAS AFRICANAS CONHECIDAS PRODUZIDAS PELO HOMO SAPIENS SAPIENS

A primeira, que recebeu maior atenção do mundo acadêmico, foi a conhecida como o "Osso de Ishango" (Fig. 2, a), descoberta por Jean de Heinzelin de Braucourt em 1950, na área de Ishango, perto do Lago Edwards, no antigo Congo Belga. Sua idade foi inicialmente estimada entre 6,5-9 Ka, contudo, reavaliações recentes da idade deste sítio apontam que pode ter c. 20 Ka (Brooks,1987). Contém um conjunto de entalhes, objeto de interpretações diversas: seis meses de um calendário lunar (Marshack, 1972); um sistema numeral. Um segundo osso (Fig.2, f), igualmente desenterrado em Ishango, permaneceu desconhecido por muito tempo. Foi descoberto em 1959; Heinzelin contou nele 90 entalhes que cobrem seis lados do osso, possivelmente humano.

A segunda, em importância, é conhecida como o "Osso de Lebombo" (Fig.2, b), hoje amplamente denominada como "o mais antigo artefato matemático". É uma fíbula de babuíno com 29 entalhes, descoberta na Border Cave, um abrigo rochoso das montanhas Lebombo, entre a África do Sul e a Swazilândia. Sua idade é estimada em 41-43 Ka. (Almeida, 2017, 2024).

Figura 2 - As Mais Antigas Talhas Numéricas Africanas

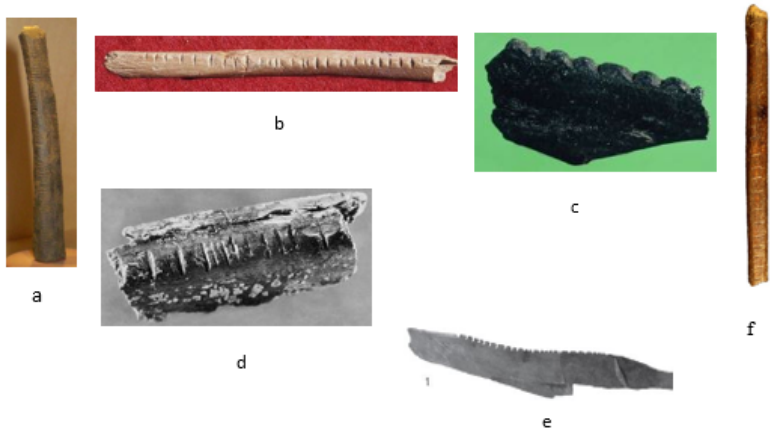


Fig.3: a) Osso de Ishango; b) Osso de Lebombo; c) Border Cave, estrato 1WA; d) Border Cave, estrato 2WA; e) Apolo 11 Cave ; f) Segundo Osso de Ishango.

Fonte: a) Institut Royal des Sciences Naturelles de Belgique, Bruxelles; b,c,d : Beaumont, 2013; e) Vogelsang, 2010; f) http://ishango.naturalsciences.be/Flash/flash_local/Ishango-02-EN.html

No mesmo estrato em que foi encontrada, acharam-se dois fragmentos de ossos (costelas) com entalhes, um com 4,3 cm e outro com 1,2 cm, este último calcinado e com sete entalhes (Fig. 2, c),

com uma idade avaliada em 43 ka (Beaumont, 2013). A coincidência da descoberta no mesmo local de três artefatos de idades próximas portando entalhes nos permite supor existir uma convenção de seu uso, provavelmente de caráter numérico.

Contudo, de maior interesse é a descoberta no mesmo local de um fragmento de costela com 3,8 cm de comprimento gravado com 12 entalhes (Fig.2, d), todos produzidos em uma única sessão mediante a mesma ferramenta, com uma idade de 60 ka (Beaumont, 2013). Como foram produzidos em uma única sessão, se esse artefato realmente contiver um registro numérico, provavelmente não deve ser de tempo, de calendário, mas sim de um rudimento de contagem. Observe-se que, pelo menos na Border Cave, provavelmente ocorreu uma tradição de produção desses artefatos que durou cerca de vinte mil anos.

Outros ossos entalhados foram encontrados na Sibudu Cave, um abrigo rochoso situado em KwaZulu-Natal, África do Sul, com uma idade de ~ 60 ka.

Todavia, ainda mais surpreendentes são as descobertas realizadas no abrigo rochoso Apolo 11, situado perto do Rio Nuob, na Namíbia. Esse abrigo é reputado por nele terem sido descobertas as mais antigas pinturas figurativas da África; todavia, os nossos interesses se concentram nos três artefatos entalhados ali encontrados. (Almeida, 2017, 2024).

O maior deles, um fragmento de costela com 7,2 cm (Fig. 2, e), conta com 23 entalhes regulares finamente executados ao longo de seu eixo longitudinal; outro, com 6,2 cm de comprimento, tem 12 entalhes menos esmerados; existe ainda a possibilidade de que uma terceira peça com entalhes pertença ao mesmo estrato das duas primeiras (Vogelsang, 2010). A idade estimada para esses artefatos, que pertencem ao nível estratigráfico conhecido como Still Bay, é de 71 ± 3 Ka (Vogelsang, 2010).

TALLIES DO PALEOLÍTICO SUPERIOR

A partir do Paleolítico Superior, principalmente na Europa, foram encontrados um significativo número de artefato com entalhes, produzidos pelo *Homo sapiens sapiens (HSS),* que provavelmente podem testemunhar processos de contagens primitivos. De particular interesse é o rádio de lobo de Dolni Vestonice (Fig 3, a; c. 27 Ka), descoberto em 1937 por Karek Absolon, por ele identificado ineditamente como um artefato matemático, não mais como "arte geométrica", como então eram ingenuamente identificados estes artefatos. Absolon pode ser creditado como o precursor dos estudos das talhas numéricas. (Almeida, 2017, 2024, D'Ambrosio, 2017).).

Entre outros, na Europa podemos citar (Fig. 3): o "Adorador"- 35/32 Ka (Astronomia / Calendário ?); Abri Cellier – 24 Ka (Contagem ?); Abri Lartet – 11 meses lunares; Le Placard – 2 x 6 meses lunares; Bastão de Isturitz – 4 e 5 meses lunares. Na Ásia (Fig.4): Mezin: 29/15,5 Ka e na Austrália: Cylcon–20 Ka.

Figura 3 - O Tallies do Paleolítico Superior

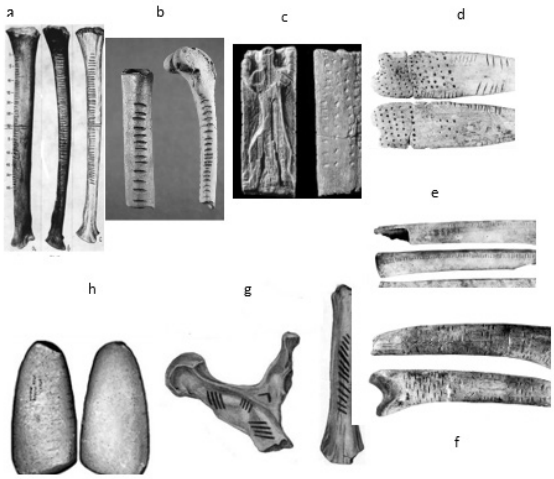


Fig.3 a) rádio de lobo de Dolni Vestonicě; b) ossos, Abri Cellier; c) Adorador; d) placa, Abri Lartet; e) ossos de águia de Le Placard; f) bastão de Isturitz; g) ossos de mamute, Mezin; h) Cylcon.

OUTROS ARTEFATOS DESCOBERTOS

O sítio de Nesher Ramla está localizado nas encostas ocidentais das colinas da Judeia (colinas de Hebron), no centro de Israel. O sítio foi descoberto quando uma fábrica de cimento removeu 12 m de solo e se encontra em uma depressão funda, em forma de funil, resultante do afundamento do solo kárstico, devido à dissolução local de suas rochas e foi escavado em 2010 e 2011. Na sua camada estratigráfica III, datada do Estágio Isotópico Marinho 5 (c. 120 Ka) foi encontrado um fragmento de osso de auroque gravado com seis incisões profundas (Fig.4, A), quase paralelas. Infelizmente, não foram encontrados fósseis humanos que permitam concluir se esse sítio foi ocupado por *Hss* ou *Hn,* embora a relativa abundância de lascas Levallois aponte para uma possível ocupação por *Hn*. Contudo, a coexistência entre essas espécies nessa data impossibilita uma certeza. (Almeida, 2021,2024).

Figura 4 - Outros artefatos

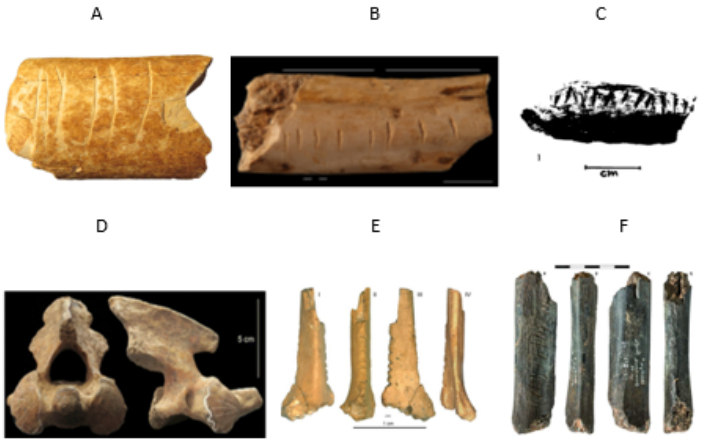


Fig. 4. A) Nesher Ramla, c. 120 Ka; B) Les Pradelles, c.72-60 Ka; C) Caverna Kebara, c. 60-48 Ka; D) Pešturina; Sérvia; 43,5-44,6 Ka; E) Zaskalnaya VI, 43-38; F) Dziadowa Skała Cave, c. 130-115 Ka.

Fontes: Almeida, 2021, 2024; F: Plonka, 2024

Até recentemente, não tinham sido encontrados outros artefatos com entalhes produzidos pelos *Hn.* Todavia, pelo menos cinco importantes achados foram publicados. O primeiro é um fêmur de hiena, encontrado no sítio de Les Pradelles (ou Marillac), França, com uma idade de 72-60 Ka (Fg. 4, E), contudo esta idade é ainda sujeita a debates (D'Errico, 2017). O segundo é uma vértebra cervical com entalhes encontrada na Caverna Pešturina, na Sérvia; com uma idade de 43,5-44,6 Ka (Fig.4, D). O terceiro é osso de rádio de corvo com entalhes, encontrado no sítio de Zaskalnaya VI, na Crimeia, com uma idade de 43-38 Ka. (Fig. 4, E). O quarto é uma escápula de gazela com entalhes (Fig. 4, C), encontrada na Caverna Kebara, em Israel, ocupada entre 60-48 Ka. O quinto é um fragmento de rádio de urso, com dezessete incisões (uma incompleta), que foi escavada em 1950 na Caverna Dziadowa Skała, na Tchecoslováquia, de um depósito do Eumiano, com c. 130-115 Ka. (Almeida, 2021, 2024).

PONTA DE MACHADO ACHEULIANA DE ZARQA, JORDANIA, COM IDADE ≥ 500 KA

Nos anos de 1990 o arqueólogo Fábio Parenti escavou sítios arqueológicos no Vale do Rio Zarqa, na Jordania. Desde então, expedições arqueológicas brasileiras, capitaneadas por Fábio Parenti, Giancarlo Scardia e Walter Neves realizaram campanhas para estudo deste importante sítio. As descobertas dessas expedições provocaram manchetes nas revistas cientificas nacionais e internacionais, bem como nas mídias jornalísticas e televisivas, tais como: "Uma nova Jornada Para o Gênero Homo", posicionando a arqueologia brasileira em relevância na comunidade acadêmica global.

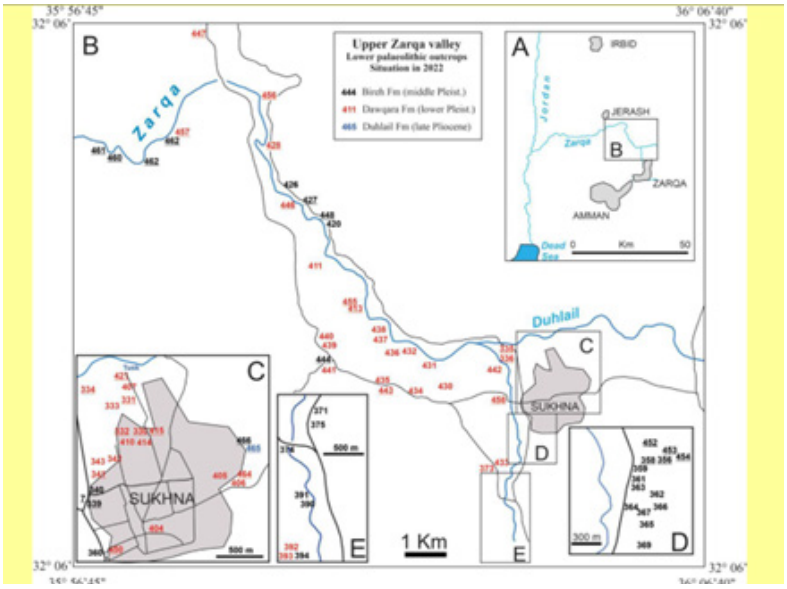
A presença de hominídeos era constatada no Norte da África desde c. 2,4 Ma e na China desde c. 2,1 Ma, contudo, sítios paleolíticos com tal idade não eram conhecidos no Levante, o corredor natural entre a África e a Ásia. As expedições arqueológicas brasileiras se dedicaram à exploração da Formação Dawqara, no Vale de Zarka, na Jordânia, a qual já era conhecida pela presença de artefatos líticos em diferentes níveis estratigráficos de seus sedimentos fluviais. Embora muitos de seus artefatos mostrem sinais de transporte, também demonstram ineludíveis evidências de manufatura humana, testemunhando assim a presença de hominídeos durante a deposição dessa Formação.

Ela é cronologicamente, em seus estratos inferiores, datada entre 2,52 e 1,98 Ma (secção 334 inferior; Parenti, 2024), documentando assim o mais antigo sítio arqueológico da formação e um dos mais arcaicos complexos Olduwaienses fora da África. Essas datações testemunham a mais antiga dispersão de hominídeos fora da África, predatando por c. 300 Ka a ocupação hominídea na China.

O Paleolítico Inferior se estendeu de c. 3 Ma até c. 300 Ka e é subdividido em Lomekwi (c. 3,3–2,6 Ma), Olduwaiense (c. 2,6–1,7 Ma) e Acheuleano (1,76–0,13 Ma), desembocando no Paleolítico Médio (c. 300-50 Ka), no Paleolítico Superior (c. 50-12 Ka), no Mesolítico (c. 20-10 Ka, no oriente Médio e c. 15-5 na Europa) e, finalmente, no Neolítico (c. 10-4,5 Ka).

A indústria lítica olduwaiense recebeu este nome do sítio Olduvai George, na Tanzânia, onde seus primeiros exemplares foram encontrados na década de 1930 pelo arqueólogo Louis Leakey. Essa indústria perdurou por aproximadamente 2 Ma. Para produzir a forma geral de uma ferramenta olduwaiense, um martelo de pedra, aproximadamente esférico, é empregado para percutir na borda, ou plataforma de percussão, de um núcleo de rocha para produzir uma fratura conchoidal com bordas cortantes, que tem várias utilidades.

Figura 5 - Vale de Zarqa e seus afloramentos



Fonte: contribuição de Fábio Parenti.

A indústria lítica acheuliana é caracterizada por machados de pedra *(hand axes)* de formato oval ou de pera, bifaciais, geralmente associados com o *Homo erectus*. Seu nome se origina do sítio arqueológico de Saint-Acheul, na França, e se espalhou pela África, Europa e Ásia. Seus machados de mão bifaciais constituem os mais antigos exemplos do emprego intencional de simetria vertical bifacial em artefatos utilitários hominoide. Em Zarqa, na formação Dawqara, entre os milhares de artefatos líticos ali encontrados, um se destaca, uma ponta quebrada de um machado de pedra bifacial acheuliano, gravada com quatro incisões paralelas. Esse artefato provém do afloramento 334 inferior na cidade de Sukhna, no vale do Zarqa, tendo uma idade mínima estratigráfica ≥ 500 Ka. Essa peça, nº 334-77/2, tem um comprimento máximo de 73 mm, largura de 39,8 mm e espessura de 24,3 mm. (Parenti, 2024 e comunicação pessoal).

Figura 6 - Ponta de machado de pedra. Zarqa.

Fonte: Parenti,comunicação pessoal.

Infelizmente até o momento não foram encontrados fósseis hominídeos nessa formação, o que dificulta discernir qual espécie do gênero Homo confeccionou esse artefato. Achados arqueológicos de artefatos similares a talhas numéricas são particularmente escassos. Escrutinando a documenta-

ção acadêmica existente sobre o assunto, constata-se que tais artefatos com uma idade superior a 400 Ka são excepcionalmente raros. Pouquíssimos exemplos podem ser citados, p. ex. Kozarnika, Stranska Scala e Bilzingsleben. Por isso, novos achados dentro dessa faixa etária devem merecer particular atenção da comunidade acadêmica, sendo este nosso objetivo com o presente trabalho.

Devido à sua recente descoberta e face aos inúmeros artefatos encontrados em Zarqa, ainda não foi possível um estudo exaustivo do mesmo, que comprove ineludivelmente sua idade correta, origem antropomórfica, bem como um estudo microfotográfico pormenorizado das incisões.

O estudo microscópico pode confirmar se elas foram feitas pela mesma ferramenta ou ferramentas diversas, o que permitiria saber se: a) se foram feitas pela mesma ferramentas, possivelmente é um registro de contagem; b) se por várias ferramentas, possivelmente é um cômputo de tempo, as incisões feitas em episódios distintos.

Parenti&Scardia (et al.) estão organizando uma nova campanha de escavações em Zarqa, que deverá se concretizar no final de 2024, enquanto escrevemos o presente trabalho. Certamente seus resultados irão contribuir significativamente para elucidar essas questões.

DISCUSSÕES

As associações podem ser de várias espécies: táteis, sonoras, visuais ou olfativas. Recorrem, portanto, a diferentes circuitos neurais, provavelmente evolutivos. Um percepto é uma forma percebida de estímulos externos ao corpo ou sua ausência, já signos são perceptos materializados.

Quando um hominídeo levantou um primeiro dedo, para indicar algo, uma caça, um inimigo, ou uma fruta, ou seja, *um* percepto, ele estava fazendo pela primeira vez uma associação de um elemento de um conjunto (perceptos) a um elemento de outro (dedos), deste modo fazendo uma correspondência um-a-um, entre dois conjuntos, o princípio básico da contagem. Quando levantou um segundo dedo, associado a outro elemento, pela primeira vez encontramos a noção de sucessor, básica na construção dos números. Esses dedos são signos, que materializam, indicam, os perceptos em sua mente.

Contudo, há um sério problema. Essa informação é volátil, irá desaparecer ao fechar a mão. Como perpetuar essa informação? Uma revolução tecnológica introduziu a confecção de ferramentas, o *hominídeo* se tornou *habilis*, agora ele pode fazer incisões em pedras, osso ou madeiras.

Estava rompida a barreira da comunicação unicamente verbal e contornada a volatilidade dos símbolos orais e gestuais, garantindo assim a perpetuidade da informação. Ao inscrever uma primeira incisão em uma pedra, em um osso, concretizando assim a indicação de *um* percepto, pela primeira vez na história da humanidade, estava materializando o conceito de unidade, básico na contagem. Essa primeira incisão é um signo, um protosímbolo do conceito de unidade, e inaugura uma era de pensamento (proto) simbólico da espécie humana.

CONCLUSÕES

Talhas numéricas são os mais antigos testemunhos materiais arqueologicamente sobreviventes que registram os primórdios do conceito de número, de processos de contagem. Igualmente, apontam importantes pistas sobre quando o gênero Homo principiou a pensar simbolicamente.

O *Homem,* classifica Cassirer (1944), é um ser simbólico por natureza. A Matemática, na sua essência, é a ciência dos Símbolos. Por esse motivo o estudo das mais primitivas talhas numéricas é importante para entendermos tanto a Matemática como o que nos torna *Humanos*.

Talhas numéricas são muito escassas, as com mais de 500 Ka são excepcionalmente raras. Por esse motivo, a apresentada aqui ineditamente dentro da História da Matemática é de singular importância. Aguardemos novos estudos esclarecedores detalhados sobre a mesma.

Registramos que todas as opiniões aqui emitidas são de única responsabilidade do autor.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho seria impossível sem a inestimável colaboração do Prof. Dr. Fabio Parenti, coordenador do Centro de Pesquisas Arqueológicas da UFPR (CEPA), Foi presidente do Istituto Italiano di Paleontologia Umana (Roma) entre 2013 e 2017. Ao compartilhar generosamente informações sobre os milhares de artefatos descobertos por sua equipe na Jordânia, um deles chamou a atenção do autor, o descrito no presente estudo, por sua importância para a História da Matemática. Irá continuar com campanhas de escavações em Zarqa e, dentro do possível, investigar minuciosamente esse artefato. Registramos aqui nossos profundos agradecimentos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Origens dos Numerais.** In: IV Seminário de História da Matemática – Anais. S.P: SBHMat, 2001. p. 119-130.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Talhas Numéricas e o Antigo Testamento**. In: Revista Brasileira de História da Matemática. Vol.2 nº4 (Outubro/2002-Março/2003). S.P.:SBHMat, 2002. p. 119-139.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Um Mito da História da Matemática Revisitado**. In: V Seminário de História da Matemática – Anais. São Paulo: SBHMat-UNESP, 2003. p. 341-351.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Origens da Matemática–A Pré-história da Matemática – O Neolítico e o Alvorecer da História.** Curitiba, Progressiva, 2011.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **O Nascimento da Matemática – A neurofisiologia e a pré-história da Matemática. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2013.**

ALMEIDA, Manoel de Campos. **A Matemática Na Idade da Pedra**. São Paulo: Editora da Livraria da Física, 2017.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Gênese do Número–Os Neandertais sabiam contar?** Curitiba: M.C. Almeida, 2019.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Pré-História da Geometria–Origens, Evolução e Neurociência da Geometria**. Curitiba, Manoel de Campos Almeida, 2020.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Paleoevidência do Emprego do Conceito de Número no Paleolítico Médio Levantino–osso gravado de auroque de Nesher Ramla, Israel**,. 2021.. https://www.researchgate.net/publication/351779869

ALMEIDA, Manoel de Campos. JUSTINO, Edson José Rodrigues. **Como o Cérebro Processa a Matemática ?–Ensinamentos da Neurociência para uma Pedagogia Renovada.** Curitiba: Manoel de C. Almeida, 2020.

ALMEIDA, Manoel de Campos.**A Neurociência e a História das Frações**. In: Revista Brasileira de História da Matemática, 2020.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **A Neurociência e a Introdução da Medida na Geometria**. In: Anais do XIV Seminário Nacional de História da Matemática – XIV SNHM, Uberaba, MG, 2021.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Recursão-Neurociência e História da Matemática- in:** Revista Brasileira de História da Matemática 23(47):42-54. Outubro de 2023.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Dos Rabiscos às Figuras Geométricas: Proto-estética ou Protos-símbolos? Visões da Neurociência. In:** Anais do XV Seminário Nacional de História da Matemática. Maceió, Alagoas. Abril 2023.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Como o Cérebro do Matemático Funciona? Uma Introdução à Neurociência da Matemática Avançada.** In: Anais do XV SNHM, 2023.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Grafismos Hominídeos–Proto-estética ou Protos-símbolos. O Homo Naledi geometrizava ?** In: Revista Brasileira de História da Matemática, setembro 2024. Vol. 24(no 48):155-175. DOI: 10.47976/RBHM2024v24n48130-150

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Arqueomatemática–Arqueologia da Matemática.** Curitiba: Manoel de Campos Almeida, 2024. ISBN: 978-65-00-91789-5. https://www.researchgate.net/publication/377570636_ARQUEOMATEMATICA_-_ARQUEOLOGIA_DA_MATEMATICA-ARCHAEOMATHEMATICS-ARCHAEOLOGY_OF_MATHEMATICS

BEAUMONT, Peter B.; BEDNARIK, Robert G. **Tracing The Emergence of Palaeoart In The Sub-Saharan Africa.** In: Rock Art Research, 2013. Volume 30, Number 1.

CASSIRER, Ernst. **An Essay on Man.** USA: Lois Stern Memorial Fund (1944) & Yale University Press (reprinted).

D'AMBROSIO, Ubiratan; ALMEIDA, Manoel de Campos. **Ethnomathematics and the Emergence of mathematics**. In: The Nature and Development of Mathematics. New York and London, Routledge, 2017

EVERETT Daniel L. **Cultural Constraints on Grammar and Cognition in Pirahã Another Look at the Design Features of Human Language**. In: Current Anthropology, Vol. 46, No. 4 (August/October 2005), pp. 621-646. The University of Chicago Press.

EVERETT Daniel L **Dark Matter Of The Mind. Chicago:** The University of Chicago Press, 2016.

DAMEROW, Peter. **Números – Herança biológica ou invenção humana?.** Conferência pronunciada no IV Seminário Nacional de História da Matemática. Natal, 03/2001.

DAMEROW, Peter **The Material Culture of Calculation.** Berlim, Max Planck Institut Für Wissenschaftsgeschichte, 1999. Preprint.

D'ERRICO, F.; COLAGÈ, I., **Cultural exaptation and cultural neural reuse: a mechanism for the emergence of modern culture and behaviour**. Biol. Theory 13, 213–227. 2018.

HENSHILWOOD, Christopher; SEALY, Judith. **Bone artefacts from the middle stone age at Blombos Cave, South Africa.** Current Anthropology, Dec. 1997, v.38, n.5, p.890(6).

HENSHILWOOD, Christopher S.; NIEKERK, Karen L. van, WURZ, Sarah; et alii**. Klipdrift Shelter, southern Cape, South Africa: preliminary report on the Howiesons Poort layers.** In: Journal of Archaeological Science 45 (2014) 284e303.

HENSHILWOOD, Christopher S.; et.al. **An abstract drawing from the 73,000-year-old levels at Blombos Cave**, South Africa. In: September 2018 Nature 562(7725)

HODGSON, D., **Understanding the origins of Paleoart: the neurovisual resonance theory and brain functioning.** Paleoanthropology 54–67. 2006.

HODGSON, D., **Decoding the Blombos engravings, shell beads and Diepkloof ostrich eggshell patterns.** Cambridge Archaeol. J. 24 (01), 57–69. 2014.

HODGSON, Derek**. Response to the critique by Mellet et al. of Hodgson's Neurovisual Resonance Theory**. December 2019. Journal of Archaeological Science: Reports.

LAGERKRANTZ, S. **Counting by means of tally sticks or cuts on the body in Africa.** In: Anthropus 68:569-58. 1973.

MARSHACK, Alexander. **The roots of civilization.** Nova Iorque: Mac Graw Hill, 1.972.

MELLET, E.; SALAGNON, M.; MAJKI, A.; CREMONA, S.; JOLIOT, M.; JOBARD, G., MAZOYER, B.; TZOURIO-MAZOYER, N.; D'ERRICO, F., **Neuroimaging supports th; representational nature of the earliest human engravings.** R. Soc. Open Sci. 6 (7), 190086. 2019.

MENNINGER, Karl. **Number Words and Number Symbols**. New York: Dover, 1992. 480 p.

TEXIER, Pierre-Jean; PORRAZ, Guillaume; PARKINGTON, John; et alii. **A Howiesons Poort tradition of engraving ostrich eggshell containers dated to 60,000 years ago at Diepkloof Rock Shelter, South Africa.** In: PNAS; April 6, 2010; 6180-6185; vol. 107; no.14.

PARENTI Fabio; VAREJÃO, Filipe Giovanini; SCARDIA, Giancarlo; OKUMURA, Mercedes; ARAUJO Astolfo; GUEDES, Carlos Conforti Ferreira; NEVES, Walter Alves. **The Oldowan of Zarqa Valley, Northern Jordan.** In: Journal of Paleolithic Archaeology (2024) 7:3.

PARENTI, Fabio; AI-SHIYAB, Abdel Halim; SANTUCCI, Ernesto; KAFAFI, Zeidan; PALUMBO, Gaetano. **Early Acheulean Stone Tools and Fossil Faunas From the Dauqara Formation, Upper Zarqa Valley, Jordanian Plateau. In:** H.G.K. GEBEL, Z. KAFAFI, and G.O. ROLLEFSON (eds.), *The Prehistory of Jordan.* n. *Perspectives from* 1997. Studies in Early Near Eastern Production, Subsistence, and Environment 4 (1997). Berlin.

PŁONKA, Tomasz; WISNIEWSKI, Andrzei; MARCISZAK, Adrian **Middle Palaeolithic incised bear bone from Dziadowa Skała Cave, Poland: the oldest marked object north of the Carpathian Mountains.** In: Journal of Archaeological Science, June 2024.

SCARDIA, Giancarlo; PARENTI, Fabio ; MIGGINS, Daniel P.; GERDES Axel; ARAUJO, Astolfo G.M.; NEVES, Walter A. **Chronologic constraints on hominin dispersal outside Africa since 2.48 Ma from the Zarqa Valley, Jordan.** In: Quaternary Science Reviews; Volume 219, 1 September 2019, Pages 1-19.

SCARDIA, Giancarlo; PARENTI, Fabio; ARAUJO, Astolfo G. M. **Uma nova jornada para o gênero Homo.** In: Scientific American · October 2019.

VOGELSANG, Ralf; RICHTER, Jürgen; EICHHORN, Barbara, et alii. **New Excavations of Middle Stone Age Deposits at Apollo 11 Rockshelter, Namibia: Stratigraphy, Archaeology, Chronology and Past Environments.** In: Journal of African Archaeology Vol. 8 (2), 2010.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Pioneiro da Matemática na Colômbia: a vida e obra de Víctor Samuel Albis González (1939-2017)

Pionero de las Matemáticas en Colombia: la vida y obra de Víctor Samuel Albis González (1939-2017)

Pioneer of Mathematics in Colombia: the life and work of Víctor Samuel Albis González (1939-2017)

Diana Carolina Pineda Pérez[1]
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP

RESUMO

Este trabajo forma parte de una investigación doctoral en curso que busca analizar la vida y obra del profesor Víctor Samuel Albis González (1939-2017), uno de los pioneros más influyentes en el desarrollo de las matemáticas en Colombia. La investigación tiene un enfoque cualitativo y se basa en un levantamiento documental de su trayectoria académica y administrativa con el objetivo de destacar sus contribuciones y el impacto de su labor en distintos ámbitos de la disciplina. A lo largo de su carrera, Albis desempeñó un papel clave en la investigación matemática en Colombia. Este estudio examina su formación académica, su labor docente, los premios y reconocimientos que recibió, así como su participación en asociaciones y academias. Además, se analizan las líneas de investigación en las que trabajó y los proyectos que desarrolló. La investigación sobre su vida y legado sigue en curso, aportando nuevos conocimientos sobre su influencia en el campo matemático.

Palavras-chave: Víctor Albis; Matemáticas en Colombia; Historia; Academia; Proyectos de investigación.

ABSTRACT

This work is part of an ongoing doctoral research project that aims to analyze the life and work of Professor Víctor Samuel Albis González (1939–2017), one of the most influential pioneers in the development of mathematics in Colombia. The study follows a qualitative approach and is based on a documentary review of his academic and administrative trajectory, with the objective of highlighting his contributions and the impact of his work in various areas of the discipline. Throughout his career, Albis played a key role in mathematical research in Colombia. This study examines his academic training, teaching career, awards and recognitions, as well as his participation in associations and academies. Additionally, it analyzes the research areas in which he worked and the projects he developed. The investigation into his life and legacy remains ongoing, providing new insights into his influence in the mathematical field.

Keywords: Víctor Albis; Mathematics in Colombia; History; Academy; Research Projects.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo forma parte de una investigación doctoral en curso sobre la vida y obra del profesor Víctor Samuel Albis, uno de los pioneros de las matemáticas en Colombia. A lo largo de esta investigación, se examina su trayectoria académica y profesional con el propósito de destacar sus contribuciones y el impacto de su labor en distintos ámbitos de la disciplina.

El profesor Víctor Albis fue un destacado matemático colombiano que contribuyó significativamente al desarrollo de las matemáticas en el país y promovió la formación e investigación matemática. Víctor actúo principalmente como profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.

[1] Mestra em Educação Matemática, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Doutoranda em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Rio claro, São Paulo, Brasil. E-mail: diana.perez@unesp.br.

Esta investigación es de tipo cualitativo en la medida que es flexible y modificable mientras que se avance en la exploración, además de que la recolección de datos a realizar no va a ser estandarizada, sino que se espera hacer un análisis descriptivo a partir de la observación de los datos obtenidos en el proceso.

El trabajo está basado en un levantamiento documental de la trayectoria académica y administrativa del profesor Víctor a lo largo de su vida. Así, en las próximas secciones se presentarán aspectos sobre la vida de Víctor Albis para conocer un poco el contexto en que se rodeaba. Además se presentará su formación académica, su actuación como docente, su actuación en la academia, y los premios académicos y reconocimientos recibidos. En su actuación en la academia, se mostrarán las asociaciones o academias a las que perteneció, las Líneas de Investigación en qué trabajo, y los Proyectos de Investigación en los que participó.

LA VIDA DE VÍCTOR SAMUEL ALBIS GONZÁLEZ (1939-2017)

Víctor Samuel Albis González nació el 14 de noviembre de 1939 en la ciudad de Sincelejo del Departamento de Sucre en Colombia y falleció el 10 de junio de 2017 en Bogotá, Colombia a la edad de 77 años.

Los padres de Víctor fueron Víctor Hugo Albis Villalba y Julieta González-Tapia Gómez, quienes se casaron en 1937 y eran una familia de educadores.

El padre de Víctor, mejor conocido con el seudónimo de "Gerónimo Osiris" fue un comerciante y escritor sucreño[2] que se destacó en la poesía, el periodismo y la crítica literaria. Fue tan reconocido que por iniciativa de algunos de los fundadores de la Corporación Educativa del Caribe (CECAR) de Sincelejo, la biblioteca de esta corporación recibió el nombre de Biblioteca Gerónimo Osiris[3] (Arabia; Hernández; Visbal, 2018) en honor al padre de Víctor. A Don Víctor Hugo también se le recuerda porque colocaba a disposición su casa para que se llevaran a cabo las primeras reuniones sobre la iniciativa de crear la Corporación.

En una noticia de la red de Universia se publicó un homenaje a Gerónimo Osiris, en el cuál Antonio Mora Vélez destacó lo siguiente:

> Los libros de poesías que don Gerónimo Osiris alcanzó a publicar son una riqueza invaluable [...] Los conocedores de poesía de esa época reconocen que Gerónimo Osiris era uno de los poetas más destacados de la Costa Caribe colombiana ("CECAR, Homenaje a Gerónimo Osiris–Noticias", 2015).

En otra publicación realizada por el periódico El Universal de Cartagena, fue escrita una redacción cultural en la cual se mencionan algunos de los poemas escritos por el padre de Víctor con el seudónimo que tenía.

> Publicó tres poemarios: "Élitros", en 1952, en Bogotá, "Élitros y otros libros", en 1977, también en Bogotá y la antología "Voces y Canciones de la Sierra", en 1978. Gerónimo Osiris figura en la Antología Poética de Sucre de 1981. Su aporte a las letras es significa-

[2] Natural del Departamento de Sucre, Colombia.

[3] Es una biblioteca que brinda los recursos, herramientas y servicios de formación a los estudiantes, docentes e investigadores/as de la Corporación Educativa del Caribe (CECAR) ubicada en Sincelejo, Colombia.

> tivo y trascendental no solo por su obra literaria, sino también por su vocación insaciable por reconstruir la memoria histórica y cultural de su pueblo ("Cartagena, fluye un mar de letras", 2017).

Ahora bien, la madre de Víctor, doña Julieta González-Tapia Gómez era Normalista Superior de la Normal de Cartagena y fundó el Instituto de Cultura Femenina para señoritas. Fue en este Instituto que la Biblioteca de CECAR inició sus actividades en 1987, lo que muestra una de las contribuciones que ambos padres de Víctor Albis realizaron de forma conjunta para la educación en Sincelejo.

En un homenaje que la tribuna del Parlamento Nacional de Escritores de Colombia y el Parlamento de Escritores de Sucre realizaron al padre de Víctor, Joce Daniels reconoce las contribuciones de la madre de Víctor a la educación en Sincelejo con las siguientes palabras:

> Para esos días en la ciudad no se avizoraban los centros educativos de hoy día. Y doña Julieta, una dama llena de juventud y conocimientos, de horizontes ilimitados como el Atlántico sin tierras, protegida de las Musas, con una pluma fácil para las letras, lentamente fue abriendo la senda y las rutas de la poesía, el ensayo, la crítica literaria, la lectura de poetas colombianos y españoles en boga para esos días y tantos elementos que llevaban de la mano al futuro poeta (Daniels, 2015)

Una gran influencia que tuvo doña Julieta se lo debe a su padre Samuel González-Tapia que tenía un colegio para varones en Sincelejo, llamado González Tapia.

Víctor Albis fue el mayor de seis hermanos: Francisco, Óscar, Julieta, Edmundo y Darío. En 1963, se casó con Regina Feliz, con quien formó un hogar y tuvo tres hijos: Rosario, Samuel y María Alejandra. Actualmente, sus tres hijos son profesionales, reflejando así el ejemplo, la dedicación y los valores de esfuerzo y perseverancia que su padre les inculcó a lo largo de su vida.

Los orígenes de Víctor nos muestran un poco el contexto familiar del que se rodeaba él y sin duda se percibe que de alguna manera influyó en la disciplina que él tuvo en su formación académica y de su constante dedicación en cada una de sus facetas.

FORMACIÓN ACADÉMICA DE VÍCTOR ALBIS

Los primeros estudios de Víctor fueron realizados en el Colegio del Presbítero Antonio Prieto, ubicado en Sincelejo, su ciudad natal. Después estuvo estudiando en el Colegio de Santo Tomás, en el Liceo de la Salle en la ciudad de Bogotá.

En 1952 Víctor comenzó sus estudios de bachiller en filosofía y letras en el Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario en Bogotá, los cuales culminó en 1957. Posteriormente, en 1958 sin estudios previos de ingeniería, algo que ningún estudiante había logrado anteriormente (Sánchez, 2017), Víctor inició sus estudios de pregrado en Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia (Bogotá), la cual es una de las facultades más importantes y con mayor porcentaje de investigación en el país, aquí recibió la beca al mejor estudiante de la carrera y obtuvo el diploma No. 5 de matemático en 1963 con su tesis de pregrado titulada "*Potencia exterior topológica de un módulo*".

Cabe destacar, que en cuánto Víctor estaba en su último año de pregrado (1962–1963), al mismo tiempo que culminaba sus estudios de pregrado, también actuó como Instructor Especial [4]de los estudiantes que recién ingresaban al pregrado en Matemáticas, esto debido a la demanda de profesores que tenía este pregrado en aquella época.

Tras completar sus estudios de pregrado como el mejor estudiante de su promoción, Víctor obtuvo una beca y, en 1964, viajó a la Universidad de París IV para continuar su formación a lo largo de dos años. Durante este período, asistió a cursos de álgebra y teoría de números impartidos por destacados matemáticos como Pierre Samuel y Claude Chevalley. Sin embargo, como la beca que recibía era muy precaria y estaba con su esposa y primera hija, la situación económica en París se volvió insostenible, dificultándole concentrarse en sus estudios, por lo que Víctor decidió regresar a Colombia para ser profesor de cálculo avanzado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá (Sánchez, 2007; 2017).

En 1969 Víctor inició sus estudios de Doctorado en la University of Colorado, Boulder en Estados Unidos culminando en 1972 con su tesis Doctoral titulada "*The maximal abelian extension of a local field as Kummerian extension*".

ACTUACIÓN DOCENTE DE VÍCTOR ALBIS: ALGUNOS CURSOS DICTADOS A LO LARGO DE SU VIDA

A lo largo de su trayectoria académica como profesor, Víctor Albis dictó diversos cursos en el pregrado y posgrado de la Universidad Nacional de Colombia siendo instructor especial, profesor asistente, asociado y titular, al igual que en otras universidades nacionales e internacionales como profesor visitante.

Algunos de estos cursos son los siguientes:

- Teoría de los números (a nivel elemental y de posgrado)
- Teoría de álgebras
- Ecuaciones sobre cuerpos finitos
- Teoría de Galois
- Cuerpos de funciones algebraicas
- Álgebra lineal
- Álgebra abstracta
- Estructuras algebraicas
- Variable compleja
- Teoría de polinomios
- Geometría algebraica
- Teoría de números algebraicos

[4] Fue contratado temporalmente para desarrollar actividades de Docente.

- Aritmética de polinomios
- Historia de la Matemática
- Cálculo Avanzado
- Cálculo para economistas
- Cálculo II
- Matemáticas generales

ACTUACIÓN DE VÍCTOR ALBIS EN LA ACADEMIA

Víctor tuvo diferentes cargos como docente y administrativo, fue profesor asistente, asociado, visitante, como se relaciona en la siguiente tabla:

Tabla 1 – Cargos Docentes o Administrativos de Víctor Albis

Cargo	Local	Ciudad	Periodo
Instructor Especial	Universidad Nacional de Colombia	Bogotá, Colombia	1962 – 1963
Profesor Asistente	Universidad Nacional de Colombia	Bogotá, Colombia	1963 – 1964, 1966 – 1969
Profesor Asociado	Universidad Nacional de Colombia	Bogotá, Colombia	1969 – 1974
Profesor Titular	Universidad Nacional de Colombia	Bogotá, Colombia	1974 – 2017
Profesor Asistente	Universidad de los Andes	Bogotá, Colombia	1964
Profesor Visitante	University of Cincinnati	Ohio, Estados Unidos	1974 – 1975
Investigador Visitante	NEPEC – Núcleo de Estudos e Pesquisas sobre Espaço e Cultura. Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)	Rio de Janeiro, Brasil	1973
Rector	Universidad de Sucre	Sucre, Colombia	1978 – 1982
Profesor Visitante	Universidad de Panamá	Panamá, Panamá	1987 – 1988
Profesor Visitante	Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía (Actualmente Facultad)	Cali, Colombia	1999

Fuente: Elaboración basada en CV y CvLAC de Víctor Albis compartidos por la profesora Clara Helena Sánchez y el profesor Luis Carlos Arboleda respectivamente

A partir de esta información se puede identificar el compromiso que tenía el profesor Víctor Albis con la academia desde que estaba en la carrera en Matemáticas hasta el último día de su vida. Víctor Albis mantuvo un fuerte lazo con la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, al mismo tiempo que ejercía otras funciones en otras Universidades nacionales e internacionales.

A nivel nacional, en Bogotá, Víctor Albis apoyó diversos roles en la Universidad Nacional de Colombia, una de las instituciones más prestigiosas del país. Inició como instructor especial, luego fue profesor asistente, posteriormente profesor asociado, hasta alcanzar el nombramiento como profesor titular. Esto ocurrió entre 1962 y 2017. También en Bogotá, pero en la Universidad de los Andes, Víctor actuó como profesor visitante para dos cursos de pregrado en 1964. Las materias que impartió en esta universidad fueron Matemáticas Generales y Calculo II.

En Sucre, Víctor Albis fue nombrado el primer rector de la Universidad de Sucre mediante Decreto 169 de 1978 de la Gobernación de Sucre. Víctor hizo una excelente labor en la Universidad

de Sucre entre 1978 y 1982, alcanzando grandes logros, entre los que se destaca la adquisición del lote de terreno donde hoy funciona la sede principal de la Universidad de Sucre.

En Cali, Víctor fue profesor visitante de la Universidad del Valle en la actual Facultad de Educación y Pedagogía (FEP), específicamente del Doctorado en Educación Matemática, esta visita la realizó en 1999.

A nivel internacional, en Estados Unidos, Víctor Albis fue profesor visitante de la Universidad de Cincinnati de 1974 a 1975. En esta universidad, Víctor realizó sus actividades de docencia en cursos de pregrado y posgrado. En pregrado suministró el curso de *Cálculo para economistas*, y en el posgrado impartió los cursos de *Seminario de funciones algebraicas*, *Algebra Abstracta* y *Algebra lineal*.

En Brasil, Víctor fue un investigador visitante en el Núcleo de Estudos e Pesquisas sobre Espaço e Cultura (NEPEC) de la Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). En este periodo de Julio y Agosto de 1973 que Víctor permaneció en Brasil, de acuerdo con su CvLAC, elaboró dos artículos, uno de ellos titulados "El señor Fermat y sus problemas I" publicado en el Boletín de Matemáticas.

En Panamá, Víctor fue profesor visitante de la Universidad de Panamá en 1987 y 1988. Las actividades de docencia que realizó fueron a nivel de posgrado y los cursos que impartió fueron *Historia de la Matemática* y *Álgebra Lineal*.

Por otra parte, algunos de los otros cargos desempeñados por Víctor también a nivel nacional e internacional, fueron como editor de diferentes revistas, director, secretario, miembro de diferentes comités, algunos de los cuáles se presentan a continuación:

Tabla 2 – Otros Cargos Desempeñados por Víctor Albis

Cargo		Periodo
Editor	Revista de Matemáticas Elementales	1964 – 1967
	Fundador y Editor de la Revista Colombiana de Matemáticas	1967 – 1978
	Editor adjunto de la Revista Colombiana de Matemáticas	1985 – 1994
	Lecturas Matemáticas, Sociedad Colombiana de las Matemáticas	1997 – 2017
Miembro del Comité Editorial	Revista Colombiana de Matemáticas	1978 – 1992
	Lecturas Matemáticas	1978 – 1997
	Mathesis (México)	1992 – 1998, 2005
	Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales	1994 – 2017
	Universitas Scientiarum (Revista de la Facultad de Ciencias de la Universidad Javeriana, Bogotá)	1997

Director	Oficina de Planeación de la Universidad Nacional de Colombia	1983 – 1984
	Seminario de Historia de la Matemática	1974 – 2000
	Departamento de Bibliotecas de la Universidad Nacional de Colombia	1990 – 1996
	Gaceta de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales	1997
	Biblioteca "Luis López de Mesa" de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales	1993 – 2002
	Subdirector de investigación y postgrados, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia	2000 – 2002
Secretario	Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales	1990 – 1992
Presidente	Sociedad Colombiana de Matemáticas	1990 – 1993
Jefe	Unidad de Investigación, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia	1989 – 1990
Miembro del Comité de Posgrado del Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia		1973 – 1975; 2002 – 2005
Miembro de la "International Comission for the History of Mathematics"		1978 – 1991
Miembro de la Comisión para el estudio de propuestas relativas a la propiedad intelectual, Universidad Nacional de Colombia		1994
Miembro de la Comisión para el estudio de propuestas relativas a las publicaciones periódicas de la Universidad Nacional de Colombia		1995
Miembro del Consejo Consultivo de la Revista Uniandrade, Curitiba, Brasil		2002

Fuente: Elaboración basada en CV y CvLAC de Víctor Albis compartidos por la profesora Clara Helena Sánchez y el profesor Luis Carlos Arboleda respectivamente

Víctor como Miembro de Asociaciones o Academias

Víctor fue miembro de diferentes asociaciones y academias reconocidas a nivel nacional e internacional que actúan como pilares fundamentales para el desarrollo y la difusión de la ciencia. En el caso de Víctor fue en las matemáticas.

De acuerdo con el Currículo Vitae de Víctor Samuel, estas asociaciones o academias son las siguientes:

- Sociedad Colombiana de Matemáticas,
- Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
- Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España.

La *Sociedad Colombiana de Matemáticas* (SCM), es una entidad de carácter científico y cultural que promueve el desarrollo de las Matemáticas en Colombia desde 1955. Además de ser miembro, Víctor fungió como presidente de la Sociedad 35 años después de su fundación, esto fue en el periodo comprendido de 1990 a 1993.

La SCM actúa como foro de intercambio y divulgación por medio de los Congresos Colombianos de Matemáticas, las publicaciones *Revista Colombiana de Matemáticas* y *Lecturas Matemáticas*, el reconocimiento del trabajo de diferentes matemáticos con los premios José Celestino Mutis a la

Enseñanza de las Matemáticas, José Fernando Escobar a la Investigación en Matemáticas y Premio Nacional de Matemáticas ("SCM", [s.d.]).

En cuánto Víctor fue miembro de la SCM fue Editor de Lecturas Matemáticas, presidente de la Sociedad, Editor adjunto de la Revista Colombiana de Matemáticas, Miembro de Comité editorial de la Revista Colombiana de Matemáticas, Miembro de Comité editorial de Lecturas Matemáticas, y Editor de la Revista Colombiana de Matemáticas.

Por otra parte, Víctor también fue miembro de la *Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* (ACCEFYN), la cual tiene como objetivo dedicarse al desarrollo de las ciencias exactas, físicas y naturales, sus aplicaciones y su enseñanza. La ACCEFYN se estableció oficialmente en 1936.

Esta academia publica la *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* de forma periódica trimestral con acceso abierto, multidisciplinaria, que tiene como objetivo dar a conocer artículos inéditos de investigación de alta calidad.

Mientras Víctor fue miembro de la ACCEFYN desarrolló diferentes actividades. En la parte administrativa fue Miembro de consejo de centro, y en otras actividades científicas fue Editor de la Gaceta de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Miembro del Comité editorial de la Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Miembro de la junta Directiva, y secretario.

Además, Víctor Samuel fue miembro especial de la *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, España* (RAC). Esta academia es una institución que tiene como objetivo fomentar el estudio, la investigación y la difusión social de las Ciencias Matemáticas, Físicas, Químicas, Geológicas y Biológicas y de sus aplicaciones, así como promover el apoyo a las mismas.

Desde 1847 tiene la tarea de fomentar el estudio y la investigación de las ciencias matemáticas, físicas, químicas, geológicas y biológicas, y de sus aplicaciones, así como de propagar su conocimiento. Además de esto, la academia organiza seminarios sobre estas ciencias, publica en su revista de la RAC, publica memorias científicas, así como otros informes o estudios.

Líneas de Investigación de Víctor

Durante su vida, Víctor Samuel trabajó en diferentes líneas de investigación de las matemáticas donde realizó proyectos y escribió diferentes artículos, entre estas tenemos:

- Historia de la Matemática,
- Etnomatemática,
- Teoría de los números,
- Teoría de funciones algebraicas,
- Teoría de anillos,
- Algebra lineal y representación de estructuras algebraicas.

Proyectos de Investigación en que participó Victor

Otro de los aspectos importantes que se deben destacar en la vida y obra del profesor Víctor Albis son los diferentes proyectos de investigación en los cuáles participó a lo largo de su trayectoria académica. En estos proyectos Víctor actuó como investigador principal y/o coinvestigador.

Estos proyectos de investigación fueron financiados y como resultados fueron publicados diferentes artículos, trabajos de grado, tesis de maestría, tesis doctorales, libros, folletos, base de datos, entre otros.

Algunos de estos proyectos son los siguientes:

Historia de la matemática en Colombia: Este proyecto inició en 1973 y fue "presentado con el apoyo de la Sociedad Colombiana de Matemáticas a Colciencias y aprobado en 1974, uno de los primeros avalados por la recién fundada institución" (Sánchez, 2007, p. 104). Víctor fungió como investigador principal y como coinvestigadores del proyecto actuaron Clara Helena Sánchez y Luis Ignacio Soriano Lleras. El proyecto finalizó oficialmente en 1976, sin embargo se continuaron publicando resultados a lo largo del tiempo.

Teoría aritmética de polinomios y funciones algebraicas: Este proyecto inició en 1985 y Víctor fue el investigador principal. Este proyecto fue financiado por la Universidad Nacional de Colombia y como resultado se obtuvieron diferentes trabajos de grado, un trabajo de grado de especialización, tres tesis de maestría y algunos artículos.

Bibliografía Matemática Colombiana – Fases I y II: Este proyecto tuvo como investigadora principal a la profesora Clara Helena Sánchez y como coinvestigador al profesor Víctor Albis. Fue financiado por la Universidad Nacional de Colombia y como resultado fueron publicados algunos artículos. La primera fase fue entre 1989 y 1991, mientras que la segunda ocurrió entre 1992 y 1997.

Matemáticas y Antropología – Fases I y II: El proyecto fue realizado en conjunto con el profesor Guillermo Paramo Rocha, en el cual Víctor fue investigador principal y Guillermo coinvestigador. También fue financiado por la Universidad Nacional de Colombia. Este proyecto se llevó a cabo en 1988 y1994.

Como fruto de este proyecto surgió el primer trabajo de grado que realizó estudios de Etnomatemática en Colombia y que fue dirigido por el profesor Víctor Albis, y realizado por Evidalia Molina y Luis Ángel Díaz en 1988, para optar al título de Licenciados en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Este trabajo fue titulado como "Los numerales de la familia lingüística macrochibcha" y buscó identificar la existencia de corrientes culturales que en alguna época precolombina se separaron de la gran familia lingüística chibcha, mediante el estudio de los métodos de cuenta y las palabras numerales de sus respectivos dialectos (Blanco, 2006). Además, se publicaron artículos, libros, folletos y la tesis de maestría de José Valencia, titulada "La simetría en la cerámica pintada de la Región Central de Panamá", bajo la dirección de Víctor.

Conservación del patrimonio matemático colombiano: Víctor realizó este proyecto en conjunto con la profesora Clara Helena Sánchez, donde ella fungió como investigadora principal y Víctor como coinvestigador. El proyecto fue financiado por la Universidad Nacional de Colombia y como resultado se obtuvieron algunos trabajos de grado y fueron publicados varios artículos y libros.

Además, se crearon algunas bases de datos con sistemas de información de la producción matemática colombiana para conservar el patrimonio, entre estas bases de datos tenemos: i) La Página WEB *Historia Matemática Colombiana* en la página de la Academia Colombiana de Ciencias; ii) La Página WEB *Patrimonio Matemático Colombiano* en la página de la Academia Colombiana de Ciencias; y, iii) la base de datos Bibliografía Matemática Colombiana, en la página de la Sociedad Colombiana de Matemáticas con aproximadamente 3000 registros.

Funciones zeta locales de Igusa. Racionalidad en característica positiva para ciertos tipos de polinomios: Este proyecto fue realizado en conjunto con Wilson Zuñiga Galindo como coinvestigador y Víctor Albis como investigador principal. Comenzó en 1997 y finalizó en el año 2000. El proyecto fue financiado por la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (ACCEYN), la Universidad Nacional de Colombia y la Universidad Autónoma de Bucaramanga. De este Proyecto fueron publicados varios artículos.

Local zeta functions, Newton polyhedral and non degeneracy conditions: En este proyecto participó Wilson Zuñiga como investigador principal, mientras que Víctor Albis y Marcelo Saia actuaron como coinvestigadores. El proyecto fue financiado por COLCIENCIAS, la Universidad Nacional de Colombia, la Universidad Autónoma de Bucaramanga y la Universidad de Campinas, Brasil. Finalizó en 2002. El resultado de este proyecto se vió reflejado en un trabajo de grado, una tesis de maestría, una tesis doctoral y la publicación de diferentes artículos.

Álgebra lineal y teoría de representaciones: Este proyecto fue desarrollado en colaboración con Aleksandr Zavadskij, con Víctor como coinvestigador y Zavadskij como investigador principal. Iniciado en 2001, contó con el financiamiento de la Universidad Nacional de Colombia. Como resultado, Zavadskij publicó *Tame Equipped Posets* en 2002.

PREMIOS ACADÉMICOS Y RECONOCIMIENTOS RECIBIDOS

Desde que Víctor Albis inició con sus estudios de pregrado recibió diferentes premios y reconocimientos a lo largo de su vida académica.

Beca al mejor estudiante de la carrera, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá (1963): Víctor recibió esta beca cuando terminó sus estudios del pregrado en Matemáticas, como un reconocimiento por tener el mejor promedio de la carrera en comparación con sus compañeros de pregrado. Con esta beca, Víctor fue a estudiar a Paris donde asistió diversos cursos de Matemática como álgebra homológica, teoría de esquemas, representación de grupos y teoría de números algebraicos.

Premio al mejor ejecutivo del año, Cámara Junior de Colombia (1981): Este premio fue otorgado a Víctor como un reconocimiento que se realiza a los ejecutivos destacados por su su excelencia en liderazgo, logros profesionales y contribución al desarrollo de sus comunidades, con el fin de resaltar aquellos lideres que demuestran un compromiso excepcional con la innovación, la ética y el impacto positivo en la sociedad.

Medalla "Alfredo González Rubio", Cámara Junior de Colombia (1982): Víctor Samuel recibió este reconocimiento que muestra los principios fundamentales de la Cámara Junior de Colombia (JCI), los cuales son el liderazgo ético, el compromiso con el progreso social y la ciudad.

Orden "Mariscal Sucre", Gobierno Departamental de Sucre (1984): Es una distinción que el gobierno departamental de Sucre otorgó a Víctor Samuel por los distinguidos servicios prestados a la región, entre ellos cuando fue rector de la Universidad de Sucre (1983-1984).

Maestro Universitario, Universidad Nacional de Colombia (1986): Víctor recibió este reconocimiento debido a sus méritos académicos excepcionales y sus servicios prestados en la UNAL.

Medalla al Mérito Universitario, Universidad Nacional de Colombia (1995): Víctor Samuel recibió este reconocimiento por ser un profesor activo con al menos 15 años de trayectoria en la carrera docente y una destacada producción académica.

Orden Gerardo Molina, Universidad Nacional de Colombia (2004): Es un reconocimiento que se otorga a los docentes de la UNAL que con han contribuido excepcionalmente con el desarrollo de la institución. En reconocimiento a sus méritos académicos la Universidad Nacional le otorgó esta distinción a Víctor.

Premio Nacional de Matemáticas, Sociedad Colombiana de Matemáticas (2007): Este premio es otorgado por la Sociedad Colombiana de Matemáticas a aquellas personas que se han destacado en su quehacer profesional y que por medio del mismo hayan colaborado de manera fundamental al desarrollo de las matemáticas en el país ("Premio Nacional de Matemáticas.pdf", [s.d.]), razón por la cuál Víctor recibió este reconocimiento.

En la siguiente fotografía podemos observar a Carlos Montenegro, Presidente de la Sociedad Colombiana de Matemáticas en el periodo de 2003 a 2017, quien hace entrega del Premio Nacional de Matemáticas al profesor Víctor Samuel Albis el 18 de julio de 2007 en la ciudad de Medellín.

Figura 1 – *Entrega del* Premio Nacional de Matemáticas *a Víctor Albis* en 2007

Fuente: Archivo personal de Julieta Albis (Hermana de Víctor)

Miembro Honorario, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (2013): Víctor recibió esta exaltación el 18 de noviembre de 2013 por haber realizado diversas contribuciones en el campo de las ciencias exactas, específicamente en matemáticas con avances significativos que han dejado un legado perdurable en su área. Este nombramiento se concede a personas de gran prestigio internacional.

CONSIDERACIONES FINALES

La vida y obra del profesor Víctor Samuel Albis González, junto con su destacada trayectoria académica, reflejan su invaluable contribución al desarrollo de las matemáticas en Colombia, abarcando diversos campos de investigación y promoviendo avances significativos en el ámbito científico.

La destacada trayectoria académica del profesor Víctor evidencia la sólida red de colaboración que construyó a lo largo de los años con investigadores tanto nacionales como internacionales. Este entramado comenzó a formarse desde sus primeros estudios de pregrado, o quizás incluso antes, ya que su ingreso a la carrera de matemáticas, sin estudios previos en ingeniería, algo que representaba un desafío notable.

Su participación en el desarrollo de las matemáticas en Colombia en cada una de sus facetas como editor, historiador, algebrista, docente, y etnomatemático, fue clave para la realización de diversos proyectos de investigación. Estos proyectos trajeron consigo otros investigadores, diferentes campos de investigación y otros temas de interés que no habían sido estudiados hasta el momento en el país.

El impacto que tuvo Víctor no fue sólo en el campo académico, sino también en sus funciones administrativas en diferentes asociaciones y academias.

Víctor Samuel Albis González siempre se destacó en cada una de las actividades que emprendió. Su esfuerzo, dedicación, compromiso y persistencia son algunas de las cualidades que lo describieron y que se reflejan en su profundo compromiso con el país y la ciudad que lo vio crecer, pues con ayuda de un convenio entre la Universidad Nacional de Colombia y la Universidad de Sucre, regresó a Sucre para asumir el cargo de rector de esta Universidad, reafirmando su compromiso con el desarrollo académico y social de su región. Actualmente, la investigación sobre su vida y obra continúa en proceso.

AGRADECIMENTOS

El presente Trabajo fue realizado con el apoyo de la Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior–Brasil (CAPES)–Código de Financiamento 001. Por esto agradezco a CAPES por financiar mi bolsa de estudios de Doctorado en la Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", al profesor Sergio Roberto Nobre por su orientación en esta investigación, y a los profesores Clara Helena Sánchez y Luis Carlos Arboleda por su apoyo en su desarrollo.

REFERENCIAS

ARABIA, A. P. M.; HERNÁNDEZ, Y. P. V.; VISBAL, N. DEL C. Estrategias de Promoción y Fomento de la Lectura. **Corporación Universitaria del Caribe–CECAR**, 2018.

BLANCO, H. La Etnomatemática en Colombia: un programa en construcción. **Boletim de Educação Matemática–BOLEMA**, v. 19, n. 26, p. 1–19, 2006.

Cartagena, fluye un mar de letras. Disponível em: <https://www.eluniversal.com.co/cultural/2017/08/25/cartagena-fluye-un-mar-de-letras/>. Acesso em: 18 nov. 2024.

CECAR, Homenaje a Gerónimo Osiris–Noticias. Disponível em: <https://orientacion.universia.net.co/infodetail/universidades/noticias/cecar-homenaje-a-geronimo-osiris-3113.html>. Acesso em: 18 nov. 2024.

DANIELS, J. **Parlamento Internacional de Escritores de Cartagena: Gerónimo Osiris: Poeta de Los Élitros**. Disponível em: <https://parlamentodeescritores.blogspot.com/2017/03/geronimo-o-siris-poeta-de-los-elitros_17.html>. Acesso em: 18 nov. 2024.

Premio Nacional de Matemáticas.pdf. , [s.d.]. Disponível em: <https://scm.org.co/wp-content/uploads/2018/11/Premio-Nacional-de-Matema%CC%81ticas.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2024

SÁNCHEZ, C. H. Forjadores del desarrollo de las matemáticas en Colombia Víctor Albis González Premio Nacional de Matemáticas 2007. **Lecturas Matemáticas**, v. 28, n. 2, p. 99–108, 2007.

SÁNCHEZ, C. H. Víctor Albis González 1939-2017. **Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**, v. 41, n. 159, p. 255–257, 30 jun. 2017.

SCM. , [s.d.]. Disponível em: <https://scm.org.co/>. Acesso em: 21 nov. 2024.

VALENCIA, J. **La simetría en la cerámica pintada de la Región Central de Panamá**. 1989. Dissertação (Maestría en Ciencias con Especialización en Matemática) – Universidad de Panamá, Vicerrectoría de Investigación y Postgrado, Panamá, 1989. Disponível em: <http://up-rid.up.ac.pa/id/eprint/4275>. Acesso em: 26 fev. 2025.

ZAVADSKIJ, A. Tame equipped posets. **Linear Algebra and Its Applications**, v. 365, p. 389-465, 2002.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

A trajetória acadêmica de Gilberto Loibel: uma breve descrição do seu processo de doutoramento

Gilberto Loibel's academic career: a brief description of his doctoral process

Ana Paula Brandão Carvalho de Melo[1]
Universidade Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP

RESUMO

O artigo busca descrever de forma categórica, alicerçada através de documentos coletados ao decorrer da pesquisa de doutorado da autora, os acontecimentos que permeiam o processo de doutoramento do professor Gilberto Francisco Loibel. A pesquisa adota uma abordagem qualitativa, baseada no levantamento de fontes históricas consultadas na Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP) e do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC – USP), incluindo documentos institucionais e registros acadêmicos. Os documentos analisados revelam as disciplinas e procedimentos que o professor Gilberto Francisco Loibel transitou durante seu processo de doutoramento, sendo esses, telegramas ou correspondências profissionais trocadas pelo próprio Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel e por personalidades importantes nesse processo, como é o caso do diretor Theodoro Souto da Escola de Engenharia de São Carlos. Além disso, o artigo busca mostrar ao leitor os caminhos e procedimentos burocráticos pelos quais se desenrolavam os concursos de doutoramento na metade do século XX.

Palavras-chave: Topologia; Teoria de Singularidades; Matemática no Brasil; História da Matemática; Universidade de São Paulo–USP.

ABSTRACT

The article seeks to describe in a categorical way, based on documents collected during the author's doctoral research, the events that permeate the doctoral process of Professor Gilberto Francisco Loibel. The research adopts a qualitative approach, based on a survey of historical sources consulted at the São Carlos School of Engineering (EESC-USP) and the Institute of Mathematical and Computer Sciences (ICMC – USP), including institutional documents and academic records. The documents analyzed reveal the disciplines and procedures that Professor Gilberto Francisco Loibel underwent during his doctoral process, these being telegrams or professional correspondence exchanged by the Professor himself. Dr. Gilberto Francisco Loibel and important personalities in this process, such as director Theodoro Souto of the São Carlos School of Engineering. Furthermore, the article seeks to show the reader the bureaucratic paths and procedures through which doctoral competitions took place in the middle of the 20th century.

Keywords: Topology; Singularity Theory; Mathematics in Brazil; History of Mathematics, University of São Paulo–USP.

INTRODUÇÃO

A trajetória acadêmica do Prof. Dr. Gilberto Francisco Loibel (1932-2013) é marcada por sua contribuição significativa ao desenvolvimento da matemática no Brasil. Nomeado em 1956 como instrutor em tempo integral na cadeira de Geometria da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP), por recomendação do Prof. Achille Bassi (1907-1973)[2], Loibel iniciou uma carreira de destaque, lecionando disciplinas como Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Fundamentos de Matemática e Álgebra. Sua dedicação ao ensino e a revisão aprofundada dos temas abordados reforçaram sua relevância na formação de engenheiros e matemáticos na instituição. (NOMEAÇÃO. s.d. Arquivo RUSP, cx. 1027. Doc. base: EP/13156/EESC. Documentos obtidos

[1] Doutoranda em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. E-mail: ana.brandao@unesp.br.

[2] DA SILVA, Aline Leme. A Contribuição de Achille Bassi como Gestor da Matemática no Brasil. Anais do ENAPHEM-Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática, n. 2, p. 1197-1207, 2014.

pelo Instituto de Ciências Matemática e da Computação de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora.)

Durante sua atuação na USP de São Carlos, Loibel consolidou sua carreira acadêmica ao obter o doutorado em 1959, no pós-doutorado na Universidade de Berkeley em 1962, e na Livre-Docência em 1971, além de cargos administrativos importantes. Em 1970, fundou o Grupo de Pesquisa de Teoria de Singularidades em São Carlos, que, com o passar dos anos, tornou-se o maior grupo de pesquisa no mundo nessa área, reconhecido nacional e internacionalmente.

Este artigo, que é um recorte da minha pesquisa de doutorado, adota uma abordagem qualitativa, baseada em levantamento documental realizado na EESC-USP, e se concentra no processo de doutoramento de Loibel. O foco está em retratar o período de doutorado do Prof. Loibel, considerando sua relevância como um dos matemáticos mais importantes na introdução e difusão da Teoria de Singularidades no Brasil.

Embora o Prof. Loibel ainda não tivesse contato direto com a Teoria de Singularidades durante seu doutorado, sua área de pesquisa, na área de Topologia, foi fundamental para direcioná-lo aos estudos no pós-doutorado, no qual conheceu os primeiros conceitos dessa teoria por meio de um minicurso ministrado pelo Prof. René Thom, intitulado *Estabilidade Topológica das Aplicações Diferenciáveis*.

O desenvolvimento da Topologia no Brasil teve início na segunda metade do século XX, tanto como área independente quanto em relação com outras áreas, como sistemas dinâmicos, geometria diferencial e estruturas analíticas complexas, entre outras. Essa teoria emergiu como subárea da Topologia, impulsionada por matemáticos pioneiros inspirados pelos resultados de Hassler Whitney e René Thom. Entre eles, destaca-se o Prof. Loibel, que desempenhou papel essencial na difusão da Teoria de Singularidades no Brasil. Ele fundou o grupo de pesquisa em São Carlos na década de 1970 e foi responsável por trazer manuscritos mimeografados da Europa, contendo os conceitos iniciais da teoria.

Diante disso e dada a importância acadêmica do professor Gilberto Francisco Loibel, este trabalho busca expor ao leitor um recorte da formação de Gilberto, nesse caso, foca no processo de doutoramento do mesmo. Para essa exposição, buscamos reunir documentos processuais existentes nos arquivos da Escola de Engenharia de São Carlos que, de forma minuciosa, relatam o evento por meio de correspondências e telegramas trocados entre personalidade que compuseram esse momento.

PROCESSO DE DOUTORAMENTO (1956–1959)

Gilberto Francisco Loibel iniciou seu processo de doutorado em 1956, mas foi em abril de 1959 que, oficialmente, foi dado início às tratativas de defesa.

Segundo registros oficiais da USP de São Carlos (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora), no dia 13 de abril do ano de 1959, o Prof. Dr. Theodoro de Almeida Souto[3],

[3] Theodoro de Almeida Souto foi diretor do Campus da Escola de Engenharia de São Carlos dos anos de 1952 a 1967, tomando posse no dia 28 de dezembro e finalizando seu mandato no dia 27 de novembro. Tal informação pode ser encontrada acessando a página oficial da EESC por meio do link https://eesc.usp.br/institucional/gestoes.php. Acessado em 24/02/2025.

então diretor da Escola de Engenharia de São Carlos (E.E.S.C.), encaminhou uma carta ao excelentíssimo Prof. Dr. Francisco João Humberto Maffei[4], requerendo que o mesmo desse atenção aos documento que estavam sendo encaminhados.

Os documentos em questão faziam menção ao concurso para professor doutor, no qual o Prof. Gilberto Francisco Loibel participou e obteve o título de doutor no ano de 1962.

> Magnífico reitor,
> Tenho a honra de encaminhar a Vossa Magnificência, apenso a êste, o Processo nº 356/59–E.E.S.C., que contém requerimento e vários documentos apresentados pelo Bel. GILBERTO FRANCISCO LOIBEL, Instrutor da Cadeira nº 12–"Geometria", necessário à introdução do processo de defesa de tese para fins de doutoramento.
> (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

No mesmo dia, outros dois documentos foram protocolados como parte do pedido de inserção no concurso para professor doutor. O primeiro foi uma carta encaminhada pelo Diretor, Prof. Dr. Theodoro de Almeida Souto, ao Prof. Gilberto Francisco Loibel, na qual apresenta um requerimento descrevendo, em detalhes, as providências que já haviam sido tomadas para o início do processo de doutoramento.

Como resposta a correspondência do professor Theodoro, Loibel responde destacando quatro pontos que julga necessários, sendo esses:

> Exmo. Sr.; Prof. Dr. Theodoro de Almeida Souto
> DD. Diretor da Escola de Engenharia de São Carlos.
> GILBERTO FRANCISCO LOIBEL, abaixo assinado, Instrutor, em comissão, padrão "R", em R.T.T, com exercício junto à Cadeira Reunida nº 12–Geometria–da Escola de Engenharia de São Carlos, vem à presença de V. Excia. expor e requerer o seguinte:
> o requerente está regularmente inscrito nos 2 cursos de doutoramento instituídos pelo departamento de Matemática da E.E.S.C., aprovados pelo Colendo Conselho Universitário, versando sôbre "Geometria" e "Análise Matemática" cujos programas anexa ao presente;
> o requerente está elaborando tese intitulada "Sôbre quase-grupos topológicos e espaços com multiplicação";
> nos têrmos do que dispõe os artigos 1º, item "C" e 3º da Portaria nº 2, do Magnífico Reitor, datada de 6, publicada no D.O. de 11/2/58, o requerente indica para orientador da tese acima o Prof. Achille Bassi, Catedrático, contratado, da Cadeira Reunida nº 12–Geometria, dessa Escola;
> isso posto o requerente, respeitosamente, deseja saber se os cursos que está assistindo, mencionados no item 1, satisfazem aos requisitos regulamentares, face ao disposto no § único do artigo 2º, da Portaria acima referida.
> Nestes têrmos
> P. Deferimento
> (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

[4] Nascido no ano de 1899, o então Prof. Dr. Franscisco João Humberto Maffei, foi engenheiro químico, professor e pesquisador. Atuou na USP de São Paulo entre os anos de 1959 e 1962 na posição de vice-reitor. Além disso, atuou fortemente em inovações voltadas ao curso de Engenharia Química e criou o curso de Engenharia Naval, que permaneceu sobre sua direção. Por fim, atuou em conjunto com a prefeitura de São Paulo dando suporte no processo de desenvolvimento e urbanização da cidade. (SOCIEDADE BRASILEIRA PARA O PROGRESSO DA CIÊNCIA (SBPC). Francisco João Maffei (1899-1968). Disponível em: https://portal.sbpcnet.org.br/a-sbpc/historico/presidentes-de-honra/francisco-joao-maffei-1899-1968/. Acesso em: 24 fev. 2025.)

Nessa carta, é possível perceber que o Professor Loibel já apresentava os pontos que sustentavam sua inscrição para o concurso em questão. Além disso, Gilberto expressa, de forma categórica, já estar cumprindo os cursos (disciplinas) de Geometria e Análise Matemática.

Como anexo a esse documento, Gilberto protocola uma cópia de seu *Curriculum Vitae*, no qual explicita sua formação acadêmica, desde o período no Liceu Científico de Jundiaí, sua graduação na USP (1952 à 1955), as bolsas que obteve durante sua graduação, o concurso que o mesmo participou no ano de 1955, sua participação no *1º Colloquium Brasileiro de Matemática*, em Poços de Caldas (1957) e os dois trabalhos intitulados "*Estudo da n-éssima potência de uma soma de r elementos*" (1953) e "*Sôbre duas definições de espaço quociente*" (publicado em 1960).

No documento que apresenta o programa do curso de doutoramento em Matemática, protocolado por Gilberto junto ao pedido do dia 13 de abril, estão detalhados os tópicos abordados nos dois cursos que ele já estava cursando. No curso de Geometria, Loibel descreveu que os tópicos abordados na parte preliminar seriam:

1) Correspondências algébricas sobre os entes racionais simplesmente infinitos;
2) Curvas algébricas planas; Generalidades; Singularidades; Propriedades duais; Teorema de Bezout.
3) Feixes de curvas algébricas, Princípio de Lamé e paradoxo de Kramer.
4) Pontos múltiplos de uma curva irredutível; conceito de gênero.
5) Curvas racionais. Teorema de Lüroth.
6) Teoria da polaridade. Invariância bi-racional do gênero. Fórmulas de Plücker.
7) Curvas de 3ª ordem. Teorema de Salmon. Questões de realidade.
8) Curvas reversar. As fórmulas de Cayley. Curvas de 3ª e 4ª ordem. Superfícies algébricas. Propriedades gerais. Singularidades.
9) Superfície regrada e geral de 3ª ordem.
10) Noções sobre as transformações quadráticas.
11) Noções elementares de geometria da reta.
12) Conceitos de superfícies riemanniana de uma curva algébrica.

Para cumprimento dos tópicos descritos há pouco, o curso foi estruturado em duas partes, denominadas PARTE A e PARTE B. A primeira abordava a "Geometria bi-racional dos entes algébricos simplesmente infinitos" e contava com 16 subtemas. Já a segunda parte tratava dos "Elementos de Geometria do espaço a n dimensões", sendo esta subdividida em 18 partes.

Quanto ao curso de Análise Matemática, este era dividido em quatro partes, intituladas PARTE A, PARTE B, PARTE C e PARTE D.

A PARTE A tinha como temática a "Teoria de integração e medida; teorias abstratas e concretas; relação entre tais teorias", sendo composta por quatro subpartes intituladas "Teorias abstratas–(ponto de vista elementar)", que possuía sete tópicos de discussão, "Teoria abstratas–(ponto de vista funcional)", que possuía seis tópicos de discussão, "Teorias concretas", que possuía oito tópicos de discussão; e "Relações entre teorias abstratas e concretas", compostas por três tópicos de discussão.

A PARTE B discutia "Alguns procedimentos de pesquisa do extremo absoluto no cálculo das variações". Essa parte estava subdividida em quatro seções: a primeira, intitulada "Considerações introdutórias", possuía quatro tópicos de apreciação; a segunda, intitulada "O método direto de Tonelli (caso não paramétrico)", formada por oito tópicos, a terceira parte intitulada "O método direto de Tonelli (Caso paramétrico)", continha sete tópicos; e a quarta, intitulada "Generalização dos estudos dos parágrafos 1 e 2", era composta por cinco tópicos.

A PARTE C abordava "Equações diferenciais lineares de 2ª ordem", sendo organizada em sete seções: "Teoremas de existência e de unicidade", "Transformações da equação linear de 2ª ordem", "Formas quadráticas em y e y'", "Critérios de oscilação", "Equação $(py')'–qy = 0\ (p>0,\ q>0)$" e "Equações $(py')' + qy = 0\ (p>0,\ q>0)$".

Por fim, a PARTE D, tratava dos "Teoremas tauberianos e números primos", sendo dividida em sete temáticas: "Teorema e Abel e de Tauber para as séries de potência", "Transformações de Laplace: regiões de convergência, convergência absoluta, convergência uniforme", "Teoremas abelianos e tauberianos para transformações de Laplace", "Teoremas de Littlewood e Karamata", "Números primos e funções aritméticas correlatas", "Teorema de Hadamard–De la Vallè e Poussin: preliminares", "Função $\zeta(s)$ de Reimann. Propriedades gerais." e "Demonstração de Wiener do teorema (5)".

Os documentos detalhados a pouco, faziam parte de uma exigência institucional estabelecida pela Portaria nº 2, publicada em *Diário Oficial* do dia 11 de fevereiro de 1958. Nessa resolução, o reitor da Universidade de São Paulo descreve os passos burocráticos necessários para abertura e continuidade do processo de doutoramento que o candidato deveria seguir.

> O REITOR DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, usando de suas atribuições legais e dando cumprimento ao deliberado pelo Conselho Universitário em sessão de 9 de dezembro de 1 957,
> RESOLVE:
> Artigo 1º–Para cumprimento do disposto nos artigos 154, 155 e 156 do Regulamento da Escola de Engenharia de São Carlos, baixado pelo Decreto n° 27.239, de 11/1/57, o candidato à defesa de tese deverá, além de outras exigências regulamentares, dirigir requerimento à Diretoria indicando a natureza da tese que pretende apresentar e juntando:
> a) "Curriculum Vitae", compreendendo diplomas e certificados de cursos em que houver sido aprovado, e, especialmente, diploma de curso superior oficial ou reconhecido em que se ministre a matéria concernente ao assunto da tese do interessado;
> b) relação e exemplares de trabalhos originais;
> c) indicação, se assim o desejar, do nome de um orientador do trabalho de tese, de acôrdo com o artigo 3° abaixo:
> a) certificado de que trabalhou ou foi estagiário na Escola de Engenharia de São Carlos, durante um ano, de acôrdo com o parágrafo 2° do artigo 154 do Regulamento.
> Artigo 2º–O requerimento do candidato, devidamente informado, será enviado pela Diretoria ao Conselho Departamental, que no Ceará uma Comissão de 3 (três) professores especialistas para estudar o assunto e sugerir as medidas necessárias ao andamento do processo.

> § único–A Comissão referida deverá examinar os cursos de doutoramento em que o candidato houver sido aprovado e, caso necessário, sugerir outros que lhe pareçam mais indicados, a fim de se dar cumprimento ao item 2 do artigo 154 do Regulamento.
> Artigo 3º–0 candidato terá direito à indicação do nome de um professor da Escola para orientador na confecção da tese, cabendo ao Conselho Departamental aceitar ou não o nome do orientador.
> § único–No caso de aceitação pelo Conselho Departamental da Escola, o orientador fará parte obrigatoriamente da Comissão Especial referida no artigo anterior e da Comissão Julgadora da tese.
> Artigo 4º–Satisfeito o item 2 do artigo 154 do Regulamento, o candidato solicitará à Diretoria, por escrito, a prova da defesa de tese.
> (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

Após o pedido para a abertura do doutoramento, no dia 29 de setembro do mesmo ano, o secretário Manoel Fraguas[5] enviou um requerimento ao excelentíssimo Sr. Dr. Júlio Mario Stamato[6] (Secretário Geral), indicando os professores Dr. José Octavio Monteiro de Camargo[7], Edson Farah e Benedito Castrucci[8] para comporem a comissão responsável por organizar e conduzir o processo do concurso de doutoramento do Professor Gilberto Francisco Loibel.

> Em acordo com a resolução adotada pelo Egrégio Conselho Universitário, as sessões de 24 de setembro, relacionada com o processo de defesa da tese para fins de doutoramento, em que é interessado o Senhor GILBERTO FRANCISCO LOIBEL, Instrutor, em comissão, da Cadeira Reunida nº 12–Geometria–ficou instituída uma comissão de especialistas para estudo do respectivo assunto, dela fazendo parte os Professores: Dr. José Octavio Monteiro de Camargo, Edson Farah e Benedito Castrucci.
> (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

Em carta datada do mesmo dia da enviada pelo primeiro secretário da E.E.S.C., o Secretário Geral Julio Mario Stamato escreveu ao excelentíssimo Sr. Dr. Theodoro de Arruda Souto, informando que os nomes elencados no comunicado anterior foram aprovados e que eles podem dar seguimento às tratativas necessárias:

> Tenho o prazer de comunicar a V. Exª que o Colendo Conselho Universitário, em sessão de 24 de setembro de corrente, aprovou, unanimemente, o parecer da Comissão de

[5] Manoel Fráguas foi o primeiro secretário da Escola de Engenharia de São Carlos. (ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS. Manoel Fráguas. Disponível em: http://repositorio.eesc.usp.br/server/api/core/bitstreams/5b4715a9-c2b8-4f41-a95f-4abc-725c006d/content. Acesso em: 24 fev. 2025.)

[6] Julio Mario Stamato formado em Direito pela Universidade de São Paulo era Secretário Geral da universidade e, como mostram as correspondências trocadas, era a pessoa que formalizava as conversas envolvendo a EESC e USP durante o concurso de doutoramento do Prof. Gilberto Francisco Loibel. (GAZETA DE BEBEDOURO. Julio Mario Stamato. Disponível em: https://gazetadebebedouro.com.br/eleicoes-de-1950-varios-candidatos-bebedourenses-a-deputado-mas-nenhum-eleito/. Acesso em: 24 fev. 2025.)

[7] Dr. José Octavio Monteiro de Camargo foi engenheiro que teve sua formação iniciada no Brasil na Universidade de São Paulo e concluída por experiências internacionais em países europeus como, por exemplo, na Alemanha. Ao voltar ao Brasil trabalhou na área de Saneamento das Obras da capital. Além disso, foi professor na Seção de Matemática da (SILVA, Luiz Roberto Rosa. Prof. José Octavio Monteiro de Camargo e o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise na Universidade de São Paulo. Rio Claro, 2006. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstreams/2597fba7-f41f-49cd-a82a-1b611ad0a350/download. Acesso em: 24 fev. 2025)

[8] Benedito Castrucci foi ex-professor titular da Universidade de São Paulo com dezenas de livros publicados e comercializados. (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE (UFRN). Benedito Castrucci. Disponível em: https://acervo.ufrn.br/Author/Home?author=Castrucci%2C+Benedito%2C. Acesso em: 24 fev. 2025.)

> Ensino e Regimentos, sugerindo a designação de uma Comissão Especial incumbida de elaborar o programa para a defesa de tese de doutoramento do Bel. GILBERTO FRANCISCO LOIBEL, Instrutor da Cadeira n. 12 "Geometria", dessa Escola.
> A referida Comissão ficou assim constituída: Profs.: J. O. Monteiro de Camargo, Edson Farah e Benedicto Castrucci.
> (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

No dia 7 de outubro de 1959, o Diretor da E.E.S.C. Theodoro de Arruda Souto encaminhou para o Prof. Dr. José Octavio Monteiro de Camargo um memorando reconhecendo sua posição na Comissão Especial responsável pelo processo de doutoramento do licenciado Professor Gilberto Francisco Loibel.

O documento destaca que será de grande utilidade para a comissão, tomar conhecimento do processo já iniciado pela diretoria da Escola de Engenharia de São Carlos (nº 356/59 – E.E.S.C.), no qual constam diversos documentos apresentados pelo licenciado, programas dos cursos realizados e exemplares da legislação vigente sobre o assunto.

> São Carlos, 7 de outubro de 1959
> Senhor Conselheiro,
> Conforme as informações obtidas junto à Secretaria Geral da Reitoria, já foram encaminhados a V. Excia., como membro do Colendo Conselho Universitário e da Comissão especialmente organizada para o estudo do processo de defesa de tese para fins de doutoramento, em que é interessado p Licenciado GILBERTO FRANCISCO LOIBEL, exemplar da tese e do Regulamento desta Escola.
> Parece a esta Direção, s.m.j., que será de grande utilidade para essa comissão contar, também, com o processo desta Escola, aberto para o mesmo fim, desde que ele contém diversos documentos apresentados pelos interessado, programas dos cursos feitos e exemplares da legislação em vigor existente para o assunto, razão pela qual remeto a V. Excia, apenso a êste, o processo nº 356/59–EESC.
> Aproveito a oportunidade para apresentar a V. Excia., os meus protestos de distintas considerações.
> Theodoro de Arruda Souto
> Diretor
> (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

Pouco tempo depois, no dia 14 de novembro de 1959, por meio de uma carta datada de 9 de novembro, foi informado que o Conselho Universitário aprovou o parecer da Comissão Especial, no qual estava sendo indicada a composição da banca examinadora do concurso de doutoramento do Licenciado Gilberto Francisco Loibel.

Para essa banca, foram escolhidos e aprovados os professores Dr. Achille Bassi, Dr. Benedito Castrucci, Dr. Candido Lima da Silva Dias, Dr. Kuo Tsai Chen[9], Dr. Christovão Colombo dos Santos[10] e Dr. Jorés Pacifico Cecconi[11].

Ainda na reunião de 9 de novembro de 1959, foi emitido um parecer assinado pelo Secretário Geral Julio Mario Stamato, indicando que os cursos realizados por Gilberto Francisco Loibel eram "inteiramente suficientes para os referidos Doutoramentos[12]" (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

Logo após a decisão do Conselho Universitário de 9 de novembro, no dia 19 de novembro, o Diretor Dr. Theodoro de Arruda Souto encaminha um radiotelegrama para o Prof. Dr. Christovão Colombo dos Santos, pedindo para que participasse das bancas de doutoramento do Prof. Gilberto Francisco Loibel e do Engenheiro Rubens Gouvêa Lintz, previstas para os dias 17 e 18 de dezembro.

No dia 20 de novembro, o pedido acima descrito é oficializado por meio de uma carta assinada pelo próprio diretor, que foi despachada para o Prof. Dr. Christovão Colombo dos Santos.

> São Carlos, 20 de novembro de 1 959
> Senhor Professor,
> Cumprindo resolução do Egrégio Conselho Universitário em sua reunião de 9 de corrente, tenho a honra de convidar V. Excia. a fazer parte da banca examinadora para a defesa de teses de doutoramento do Bel. GILBERTO FRANCISCO LOIBEL e do Eng. RUBENS GOUVEIA LINTZ.
> Como é pensamento desta Escola fazer realizar as defesas de tese acima referidas nos dias 17 e 18 de dezembro p•f., respetivamente, solicito a V. Excia. que, no caso de dar a sua aquiescência, dê comunicação a este Instituto.
> Solicito, aindo, seja indicado o meio de condução preferido por V. Excia., a fim de serem tomadas, em tempo, providências para e reserva de passagens.
> Agradecendo de antemão, aproveito o ensejo para renovar a V. Excia. os protestos de minha alta estima e distinta consideração.
> (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

No mesmo dia, uma carta de cunho similar enviada para o Prof. Dr. Christovão Colombo dos Santos, foi encaminhada para o Prof. Dr. Kuo Tsai Chen, do Instituto de Tecnologia da Aeronáutica de São José dos Campos–São Paulo. Nesse caso, o Diretor Theodoro apenas convidava o professor para a banca de doutoramento do Prof. Gilberto Francisco Loibel.

[9] O Dr. Kuo Tsai Chen foi matemático chinês nascido no ano de 1923 que trabalhou com topologia e análise algébrica. (MACTUTOR. Biografia de Kuo Tsai Chen. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Chen/. Acesso em: 24 fev. 2025.)

[10] O Dr. Christovão Colombo dos Santos foi vice-reitor na Universidade Federal de Minas Gerais entre os anos de 1948 a 1951. (UFMG. Histórico da Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: https://www.eng.ufmg.br/portal/aescola/historico/. Acesso em: 24 fev. 2025.)

[11] O Dr. Jorés Pacifico Cecconi foi matemático italiano que veio ao Brasil por meio e um convite do Prof. Dr. Achille Bassi. No Brasil foi pioneiro no departamento de Matemática da Escola de Engenharia de São Carlos. (CECCONI, Jorés Pacifico. Biografia. Disponível em: https://portal.if.usp.br/imprensa/pt-br/node/1788. Acesso em: 24 fev. 2025.)

[12] No documento original aparece a palavras "Doutoramentos", pois o documento fazia menção aos cursos (disciplinas) efetuadas pelo Prof. Gilberto Francisco Loibel (Geometria e Análise Matemática), bem como pelos Engenheiro Rubens Gouvêa Lintz.

Por meio de um telegrama enviado à Escola de Engenharia de São Carlos, aos cuidados do Diretor Theodoro de Arruda Souto, o Prof. Dr. Cristóvão Colombo dos Santos informou que não poderia participar, pois a data da banca examinadora coincidia com a data da formatura dos alunos do curso de engenharia, do qual seria paraninfo.

Em razão da recusa, no dia 25 de novembro de 1959, o diretor encaminhou um novo radiotelegrama, perguntando ao professor qual seria a data possível para sua participação.

Em resposta ao segundo telegrama, o Prof. Dr. Christovão Colombo dos Santos sugere que a defesa seja realizada no dia 26 de dezembro. Essa sugestão foi levada em consideração pelo professor orientador Dr. Achille Bassi, que por meio de uma carta data de 4 de dezembro, informou ao Prof. Dr. Christovão Colombo dos Santos a mudança da data da defesa para os dias 28 e 29 dezembro, o que oficializou a alteração.

Anterior a essa mudança, no dia 24 de novembro, por meio de uma carta, o Prof. Dr. Candido Lima da Silva Dias confirmou sua presença nas bancas de defesa do Prof. Gilberto Francisco Loibel e do Engenheiro Rubens Gouvêa Lintz. Além disso, no dia 25 de novembro, o Prof. Dr. Jorès Pacifico Cecconi também confirmou sua presença nas referidas bancas, assim como o Prof. Dr. Kuo-Tsai Chen. Por fim, o Prof. Dr. Benedito Castrucci confirmou a presença na banca do Engenheiro Rubens Gouvêa Lintz, mas alegou, por motivos de já ter outras bancas, a impossibilidade de estar presente na banca do Prof. Gilberto Francisco Loibel.

Devido à alteração das datas propostas pelo Prof. Dr. Christovão Colombo dos Santos e apoiada pelo Prof. Dr. Achille Bassi, foi necessário enviar um telegrama ao professor Kuo-Tsai Chen informando sobre a mudança.

Apesar disso, o referido professor concordou com a nova data. Esse aceite foi realizado por meio de um comunicado informal, escrito em inglês e enviado no dia 1º de dezembro, e por meio de um telegrama emitido no dia 2 de dezembro.

O mesmo procedimento foi realizado com o Prof. Dr. Jorès P. Cecconi, que também não encontrou empecilhos para a alteração de data. Esse fato pode ser comprovado em carta enviada pelo Prof. Dr. Theodoro de Arruda Souto ao Prof. Dr. Jorès P. Cecconi no dia 4 de dezembro, na qual o primeiro agradece a disponibilidade quanto à mudança das datas.

> Tenho a honra de vir à presença de V. Excia. para agradecer a gentileza com que aceitou fazer parte das Comissões Julgadoras organizadas para as defesas de teses de doutoramento em que estão inscritos Lic. GILBERTO FRANCISCO LOIBEL e o Engº RUBENS GOUVEA LINTZ.
> As provas serão realizadas nos dias 28 e 29 do corrente mês de dezembro, como já é do conhecimento de V. Excia.
> Na oportunidade junto ao presente cópias dos Editais que serão publicados no Diário Oficial nas quais V. Excia encontrará outros elementos de interesse.
> reitero a V. Excia. meus protestos de estima e consideração.
> (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

Concluída a organização com os membros da banca examinadora e acertado o dia em que seria realizada a defesa de doutoramento do Prof. Gilberto Francisco Loibel, a E.E.S.C., por meio do

Secretário Manoel Fraguas, no dia 3 de dezembro, lançou o edital da defesa de tese para doutoramento.

A partir desse momento, é possível notar uma preocupação com a publicidade que seria dada ao evento do dia 28. Para isso, o departamento da E.E.S.C. responsável pelas publicações ao público em geral, enviou vários requerimentos de notícias a serem publicados nos veículos de informações locais, sendo esses o Rádio Progresso, Rádio São Carlos, O correio de São Carlos, A TARDE e A Cidade.

Fato esse que pode ser observado por meio do ofício do dia 5 de dezembro, no qual o Secretário Manoel Fraguas solicita ao Dr. Rone que tome as devidas providências para "[...] que sejam preparadas algumas notícias, referentes aos Editais em anexo, para serem divulgadas pelos jornais de maior circulação" (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora.)

> São Carlos, 5 de dezembro de 1959
> Prezado Dr. Rone,
> Solicito o especial obséquio de suas determinações no sentido de que sejam preparadas algumas notícias referentes aos Editais anexos, para serem divulgadas pelos jornais de maior circulação.
> Conforme conversamos, renovo o meu pedido de uma cobertura especial para a notícia sôbre o nosso próximo concurso de habilitação. Quanto mais vêzes publicar, tanto melhor.
> Antecipadamente grato, subscrevi-me mui
> Atenciosamente
> (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

Além disso, no mesmo dia o Secretário Fráguas enviou um segundo ofício pedindo ao senhor Wandick Freitas, Diretor da Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, que efetuasse a publicação em Diário Oficial sobre as bancas de defesa de doutorado do Licenciado Prof. Gilberto Francisco Loibel e do Engenheiro Rubens Gouvea Lintz.

No dia 18 de dezembro, uma circular foi enviada a cerca de cinquenta pessoas, informando sobre a data, o local e o horário em que seria realizada a defesa do Licenciado Gilberto Francisco Loibel e do Engenheiro Rubens Gouvea Lintz, convidando essas pessoas a participarem. A circular é datada de 18 de dezembro de 1959 e segue o seguinte texto:

> São Carlos, 18 de dezembro de 1959
> Senhor
> De ordem do Senhos Diretor, Prof. Dr. Theodoreto de Arruda Souto, tenho a honra de convidar V.Excia. para assistir as provas de defesa de teses de doutoramento do Lic. GILBERTO FRANCISCO LOIBEL e do Engº. RUBENS GOUVEA LINTZ, que serão realizadas na Escola de Engenharia de São Carlos, à rua 9 de Julho 1227, respectivamente, nos próximos dias 28 e 29 do corrente, às 8 horas.
> Contando com a honrosa presença de V.Excia. sirvo-me do ensêjo para apresentar as expressões de minha alta estima e distinta consideração.
> (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

Entre as personalidades convidadas, destacam-se algumas que, futuramente, se tornariam grandes pesquisadores em suas áreas de estudo, como é o caso do pesquisador e professor Ubiratan D'Ambrosio.

Além dos nomes que constam na lista, também foram convidados o então Prefeito da cidade de São Carlos, Dr. Alderico Vieira Perdigão, o Promotor Público da Comarca de São Carlos, Dr. Eurico de Andrade Azevedo, o Delegado de Polícia de São Carlos, Antônio Collessi, o Inspetor Federal do Ensino Secundário em São Carlos, Prof. Vicente de Paulo da Rocha Keppe, e a Madre Superior do Colégio de São Carlos, todos convidados a assistir à banca de defesa dos dois doutorandos.

No dia 28 de dezembro de 1959, ocorreu a defesa de doutorado do Licenciado, que a partir daquele momento passou a ser Doutor Francisco Gilberto Loibel. Em ata, ficou registrado que a banca examinadora concedeu o título de DOUTOR ao professor Gilberto, com todos os avaliadores atribuindo nota dez (10), com exceção do Prof. Dr. Kuo-Tsai Chen, que atribuiu 9,5 para o trabalho elaborado, resultando em uma média final de 9,9.

Como conclusão do processo de doutoramento do Prof. Gilberto Francisco Loibel, o Secretário Geral Julio Mario Stamato informou ao Prof. Dr. Theodoro de Arruda Souto que, no dia 15 de fevereiro de 1960, o Conselho Universitário aprovou, de forma unânime, "as Atas da Comissão Julgadora para julgamento da tese de doutoramento do Licenciado Gilberto Francisco Loibel, nesta escola." (Concurso para professor doutor EP/25859/EESC. Documentos obtidos pela Escola de Engenharia de São Carlos que compõe acervo pessoal da pesquisadora).

CONCLUSÕES

Ao longo deste artigo, analisamos o processo de doutoramento do professor Gilberto Francisco Loibel, ocorrido em 1959, e destacamos como sua pesquisa, especificamente a tese intitulada "*Sobre Quase-grupos Topológicos e Espaços com Multiplicação*", reflete as características da matemática desenvolvida naquela época, em especial no campo da Topologia.

Observamos que, durante esse período, Loibel demonstrou um envolvimento profundo com questões teóricas que o tornariam uma referência no desenvolvimento da matemática no Brasil, especialmente com sua posterior introdução à Teoria de Singularidades.

Embora o artigo tenha se concentrado principalmente no relato do processo de doutoramento de Loibel, é importante destacar que esse momento de sua formação acadêmica foi fundamental para as futuras contribuições que ele faria à matemática, principalmente na disseminação de conhecimentos sobre Topologia e Singularidades.

No entanto, como discutido ao longo do texto, não foram realizadas discussões diretas sobre as conexões entre sua formação e o impacto imediato de seu trabalho na matemática brasileira. A análise do processo de doutoramento, com o exame de sua trajetória acadêmica e das interações com outros matemáticos, mostra como as bases teóricas que Loibel desenvolveu nesse período foram fundamentais para sua atuação como educador e mentor, impulsionando sua influência na educação matemática no Brasil.

Este artigo, portanto, não apenas documenta o caminho que levou Loibel à obtenção do doutorado, mas também fornece um vislumbre de como esse processo contribuiu para o desenvolvi-

mento de suas futuras pesquisas e para a formação de uma base sólida para a implementação da Teoria de Singularidades no Brasil. Em futuras pesquisas, seria relevante aprofundar as discussões sobre os impactos imediatos dessa formação na educação matemática e nas inovações que Loibel trouxe ao cenário acadêmico brasileiro.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior–Brasil (CAPES)–Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE (UFRN). **Benedito Castrucci**. Disponível em: https://acervo.ufrn.br/Author/Home?author=Castrucci%2C+Benedito%2C. Acesso em: 14 fev. 2025.

CECCONI, Jorés Pacifico. **Biografia**. Disponível em: https://portal.if.usp.br/imprensa/pt-br/node/1788. Acesso em: 14 fev. 2025.

CONCURSO PARA PROFESSOR DOUTOR. s.d. Doc. base: EP/25859/EESC. **Escola de Engenharia de São Carlos**. Universidade de São Paulo.

DA SILVA, Aline Leme. **A contribuição de Achille Bassi como gestor da matemática no Brasil**. Anais do ENAPHEM – Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática, n. 2, p. 1197-1207, 2014.

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS. **Manoel Fráguas**. Disponível em: http://repositorio.eesc.usp.br/server/api/core/bitstreams/5b4715a9-c2b8-4f41-a95f-4abc725c006d/content. Acesso em: 14 fev. 2025.

GAZETA DE BEBEDOURO. **Julio Mario Stamato**. Disponível em: https://gazetadebebedouro.com.br/eleicoes-de-1950-varios-candidatos-bebedourenses-a-deputado-mas-nenhum-eleito/. Acesso em: 14 fev. 2025.

MACTUTOR. **Biografia de Kuo Tsai Chen**. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Chen/. Acesso em: 14 fev. 2025.

NOMEAÇÃO. s.d. **Arquivo RUSP**, cx. 1027. Doc. base: EP/13156/EESC. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. Universidade de São Paulo.

SOCIEDADE BRASILEIRA PARA O PROGRESSO DA CIÊNCIA (SBPC). **Francisco João Maffei (1899-1968)**. Disponível em: https://portal.sbpcnet.org.br/a-sbpc/historico/presidentes-de-honra/francisco-joao-maffei-1899-1968/. Acesso em: 24 fev. 2025.

SILVA, Luiz Roberto Rosa. **Prof. José Octavio Monteiro de Camargo e o ensino de cálculo diferencial e integral e de análise na Universidade de São Paulo**. Rio Claro, 2006. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstreams/2597fba7-f41f-49cd-a82a-1b611ad0a350/download. Acesso em: 14 fev. 2025.

UFMG. **Histórico da Universidade Federal de Minas Gerais**. Disponível em: https://www.eng.ufmg.br/portal/aescola/historico/. Acesso em: 14 fev. 2025.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS. **Gestões da EESC**. Disponível em: https://eesc.usp.br/institucional/gestoes.php. Acesso em: 14 fev. 2025.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

A Matemática na 2ª Guerra Mundial: o desembarque aliado na Normandia, 06/06/1944

Mathematics in the Second World War: the allied landing in Normandy, 06/06/1944

Luis Saraiva[1]
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa – FCUL

RESUMO

O desembarque aliado na Normandia a 06 de Junho de 1944 foi uma etapa crucial para a derrota da Alemanha nazi e o fim da 2ª Guerra Mundial. Mostraremos como foi fundamental a utilização do conhecimento matemático para o êxito desta operação. Daremos uma perspectiva das dificuldades que os aliados tinham pela frente, nomeadamente a chamada Muralha do Atlântico. Referiremos a importância da previsão das marés e daremos um historial dos desenvolvimentos matemáticos nesta área, referindo alguns dos nomes que deram contributos significativos como Newton, Laplace e William Thompson. Mostraremos como o conhecimento sobre marés foi decisivo na escolha da data e hora para o início do desembarque, contribuindo para o seu consequente êxito. Referiremos igualmente outras ações essenciais feitas no sentido de ocultar aos alemães o local e a data desta ação militar, e que igualmente contribuiram para o seu sucesso, e daremos uma perspetiva global do desembarque realizado a 6 de Junho de 1944.

Palavras-chave: 2º Guerra Mundial; Muralha do Atlântico; Desembarque na Normandia; Estudo das Marés; Operações de desinformação.

ABSTRACT

The Allied landings in Normandy on June 6, 1944, were a crucial step in the defeat of Nazi Germany and the end of World War II. We will show that the use of mathematical knowledge was crucial for the success of this operation. We will give a perspective on the difficulties that the allies faced, namely the so-called Atlantic Wall. We will underline the importance of tide prediction and give a history of mathematical developments in this area, mentioning some of the names that made significant contributions such as Newton, Laplace and William Thompson. We will show how tide prediction was decisive in choosing the date and time to begin the landings, contributing to their success. We will also mention other essential deception actions taken to hide the place and date of this military operation from the Germans, which also contributed to its positive outcome. We will give a global perspective of the landings carried out on June 6, 1944.

Key Words: World War II; Atlantic Wall; Normandy landings; Tide prediction; Deception operations.

INTRODUÇÃO

Desde que passou a haver alguma sofisticação na feitura de armas, os conhecimentos dados pela matemática constituiram um importante fator no seu melhoramento. As contribuições dos vários ramos da matemática aplicada, como a balística, a dinâmica e a mecânica, foram importantes no aperfeiçoamento e criação de novas e mais eficientes armas.

No século XX, principalmente a partir da Segunda Guerra Mundial[2], a importância dos conhecimentos matemáticos tornou-se vital para os conflitos armados. Numa primeira fase, nas suas aplicações diretas, como na criação de armas mais letais, no desenho e feitura de carros blindados, navios e aviões de guerra cada vez mais poderosos e eficazes, na aviação noturna, nos melhoramentos na exatidão dos bombardeamentos. Mas também em toda uma gama de conhecimentos não

[1] Doutorado em Matemática pela University of Sussex, Inglaterra. Investigador do Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia (CIUHCT) e Professor Associado Aposentado do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Universidade de Lisboa (FCUL), Lisboa, Portugal.E-mail: lmsaraiva@fc.ul.pt.

[2] Há inúmeros livros escritos sobre a 2ª Guerra Mundial. Uma das possíveis referências é (Keegan, 1989).

diretamente aplicados nos conflitos armados, mas com importante, senão decisiva, influência neles. Incluem-se neste grupo a elaboração de códigos de transmissão de informação, e paralelamente de processos de descodificação dos códigos utilizados pelas forças adversárias, e os processos de barramento de transmissões de radio. Na 2ª Guerra Mundial os americanos e os ingleses tinham uma grande vantagem sobre os seus adversários, pois durante grande parte do conflito conseguiam decifrar as mensagens codificadas do inimigo. Em Inglaterra, perto de Londres, uma equipa de matemáticos e decifradores de códigos, apoiados por um grupo de mais de 9.000 funcionários, analisaram e traduziram as mensagens codificadas enviadas pelos alemães. Para conseguirem quebrar os seus códigos construiram alguns dos mais complexos aparelhos de computação da sua época, os antepassados dos computadores modernos. Igual sucesso tiveram as equipas de decifradores americanos, conseguindo traduzir as mensagens enviadas em código pelas forças armadas do Japão.

É importante ainda relembrar os conhecimentos que levaram à descoberta da energia atómica. O seu domínio conferiria ao país que primeiro a conseguisse utilizar militarmente um imenso poder. Havia o receio que os nazis pudessem construír a bomba atómica, e a utilizassem com a total falta de escrúpulos que tinham evidenciado ao longo do conflito. Esta ameaça deu origem a que um grupo distinto de cientistas do lado dos aliados pusessem de lado a sua oposição à utilização militar da energia atómica e se reunissem no chamado projeto *Manhattan*, com vista a conseguirem fabricar uma bomba atómica antes dos nazis. Desconheciam que estes, cerca de 1942, tinham desistido de a fabricar. Como resultado do seu trabalho, prepararam-se as primeiras bombas atómicas em 1945, e duas delas foram polemicamente utilizadas militarmente contra o Japão, sobre as cidades de Hiroshima e Nagasaki, causando centenas de milhar de mortos.

Até quase ao fim da guerra os nazis, apesar de uma situação militar catastrófica, estavam esperançados que os seus cientistas criassem novas armas que lhes permitissem inverter o sentido da guerra. Fabricaram as chamadas bombas voadoras V1 e V2[3], com as quais, em desespero, bombardearam a Inglaterra, e mais tarde a Holanda, entre Junho de 1944 e Abril de 1945, causando milhares de mortes, e construiram os primeiros aviões a jato, os ME262. Tudo isso felizmente já veio muito tarde e a guerra na Europa terminou em Maio de 1945 com a rendição incondicional da Alemanha.

Começaremos por dar uma perspetiva da situação na frente ocidental da guerra, em especial sobre a construção da denominada *Muralha do Atlântico*. Faremos uma panorâmica histórica sobre os principais desenvolvimentos no estudo das marés desde Newton até à elaboração da máquina de Doodson. Referiremos as várias componentes que tiveram de ser consideradas antes de se verificar o desembarque na Normandia, e salientaremos como o estudo das marés foi crucial na escolha do dia e da hora desta ação. Mencionaremos igualmente as operações complementares, que tiveram de ser realizadas em apoio ao desembarque naval, do qual daremos uma perspetiva geral.

A MURALHA DO ATLÂNTICO

Nos inícios de 1941 a Alemanha tinha ocupado a França[4], mas não tinha conseguido criar condições para a invasão que tinha planeado da Inglaterra[5]. A sua atenção virou-se para Leste, com

[3] Os antepassados dos mísseis balísticos intercontinentais que os Estados Unidos e a Uniâo Soviética fabricaram nos anos 50 para serem armados com ogivas nucleares.

[4] Sobre a Batalha de França, ver (Warner, 1990).

[5] Os alemães a 30 de Junho de 1940 ocuparam igualmente as ilhas inglesas do Canal da Mancha, das quais as maiores são Jersey e Guernsey. Não houve combates, as forças inglesas tinham abandonado as ilhas antes da chegada dos alemães. As ilhas chegaram a

a invasão da União Soviética a 22 de Junho de 1941. Para sua defesa a oeste, o comando alemão encarregou a *Organização Todt* (OT)[6] de realizar obras de engenharia militar que permitissem uma defesa efetiva do território em caso de tentativa de invasão (Kaufmann e Jurga, 2002). A OT foi uma instituição criada para efetuar projetos de engenharia quase exclusivamente de tipo militar na Alemanha e nos territórios conquistados. Existiu entre 1933 e 1945. Estavam contratados pela OT técnicos e trabalhadores especializados, tais como engenheiros, carpinteiros, canalizadores e electricistas, os quais eram bem pagos. Mas a maioria do seu pessoal era constituída por pessoas sem qualificações, ou ainda por mão de obra compulsivamente obrigada a aí trabalhar incluindo cerca de 600.000 franceses a isso forçados pelo regime de Vichy (Paxton, 1972). Incluiam-se ainda neste número excluídos da sociedade alemã, presos políticos e prisioneiros de guerra. A OT começou por fortificar as ilhas do Canal da Mancha[7]. Também prioritário foi a construção de defesas na Noruega, para dar segurança ao norte da ocupação alemã antes da invasão da União Soviética. Mais tarde, a 23 de Março de 1942 foi dada a ordem formal de construção da denominada *Muralha do Atlântico*, com a indicação que as bases navais e de submarinos deveriam ser grandemente fortificadas. Só em fins de 1943 é que se começaram a estender essas defesas a grandes porções da costa atlântica, do norte da Noruega ao sul de França.

A *Muralha do Atlântico* não era uma linha de defesa contínua. Por exemplo, na Noruega só as entradas dos fiordes, ou as cidades nos fiordes que também tinham portos é que poderiam ser potenciais locais para uma invasão. Consequentemente, devido a esta topografia peculiar, construiram-se defesas em todos os fiordes importantes, mas o resto da linha costeira norueguesa foi deixado praticamente sem proteção.

Uma série de ataques de commandos aliados entre 1940 e 1942 expuseram as fraquezas da *Muralha do Atlântico*. Dois episódios foram marcantes, ambos em 1942: o ataque à base de Saint Nazaire e o desembarque em Dieppe (Botting, 1981, p. 20-43).

A incursão dos aliados ao porto de Saint Nazaire foi feita a 29 de Março de 1942. O objetivo foi destruir a doca seca aí existente. A Alemanha tinha construído o mais moderno e poderoso couraçado então existente, o Tirpitz, e havia o receio que ele viesse para o Oceano Atlântico atacar os comboios de barcos que vinham dos Estados Unidos para Inglaterra com todo o tipo de fornecimentos necessários para continuar a guerra[8]. Com a destruição da única doca seca na costa atlântica suficientemente grande para acolher o Tirpitz, pensou-se, correctamente, que os alemães não se arriscariam a trazer o navio para uma zona onde não havia qualquer local onde o barco pudesse eventualmente ser reparado. As forças alemãs foram surpreendidas, o ataque foi um êxito completo, se bem que com muitas baixas[9]. A doca foi destruída de forma tão completa que só três anos depois do fim da guerra, em 1948, é que voltou a estar operacional.

ter uma guarnição de 40.000 soldados.

[6] O nome vem do seu fundador, Fritz Todt (1891-1942) , engenheiro civil com lugar importante na hierarquia nazi.

[7] Uma ação desnecessária, pois os aliados nunca tiveram intenção de regressar pela força a essas ilhas, que não tinham qualquer valor militar. A guarnição alemã que aí ficou estacionada rendeu-se pacificamente no dia seguinte à rendição alemã, a 9 de Maio de 1945.

[8] Um couraçado da mesma classe que o Tirpitz, o Bismark, tinha saído para o Atlântico quase um ano antes, em Maio de 1941, tendo afundado o couraçado inglês Hood e causado danos grandes noutros barcos de guerra aliados, até que a perseguição que lhe fez grande parte da armada inglesa conseguiu evitar que ele entrasse no porto de Saint Nazaire para reparação e o afundou. Os meios utilizados pelos aliados deixaram desprotegidos alguns dos combois de barcos mercantes que se dirigiam a Inglaterra, os quais ficaram sem defesas, expostos aos ataques dos submarinos alemães.

[9] Dos 611 soldados e tripulantes que tomaram parte no ataque, 401 foram mortos ou feitos prisioneiros.

Figura 1 - A Muralha do Atlântico

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Atlantic_Wall.

Um segundo ataque importante na costa atlântica francesa foi feito em Dieppe, a 19 de Agosto de 1942. A União Soviética pedia repetidamente aos aliados que abrissem uma frente de combate no ocidente, para aliviar a pressão alemã no leste, e obrigar a retirar várias dezenas de divisões para a ameaça que surgiria a oeste. Igualmente era importante para a opinião pública dos países aliados mostrar finalmente, após meses de derrotas e recuos, uma ação ofensiva dos aliados com êxito. Não havia ainda condições para um ataque em grande escala no ocidente, mas foi decidido que se faria uma incursão a Dieppe para testar as defesas alemãs e se tirarem conclusões que viessem a beneficiar um futuro ataque em grande escala[10]. O ataque foi muito mal planeado, não se tiveram em consideração variáveis vitais, e o resultado foi um enorme desastre militar[11]. Os tanques que foram desembarcados para apoiar o ataque não se conseguiram mover bem nas praias de seixos e não tiveram o papel que lhes estava destinado, houve imensas baixas entre as tropas terrestres, entre mortos e prisioneiros. Igualmente se perderam muitos navios e aviões que tinham ido apoiar o desembarque.

Ambos os adversários tiraram ensinamentos importantes: os alemães produziram um guia de procedimentos paraa defesa da costa atlântica, e viram a necessidade de fortalecer e aumentar mais as defesas costeiras, enquanto que os aliados perceberam quais as razões do seu insucesso. Em futuras ações era fundamental: conseguir a ocultação do local de intervenção, para se poder surpreender completamente as forças inimigas; evitar um ataque frontal aos portos fortificados; ter melhor informação sobre as características da área onde iriam actuar, principalmente no que diz respeito a fortificações e armamento; e haver reconhecimento prévio das características geológicas das futuras praias de desembarque, para que não se voltassem a repetir situações como as que ocorreram em Dieppe, onde os tanques não puderam dar o apoio esperado às tropas de ataque.

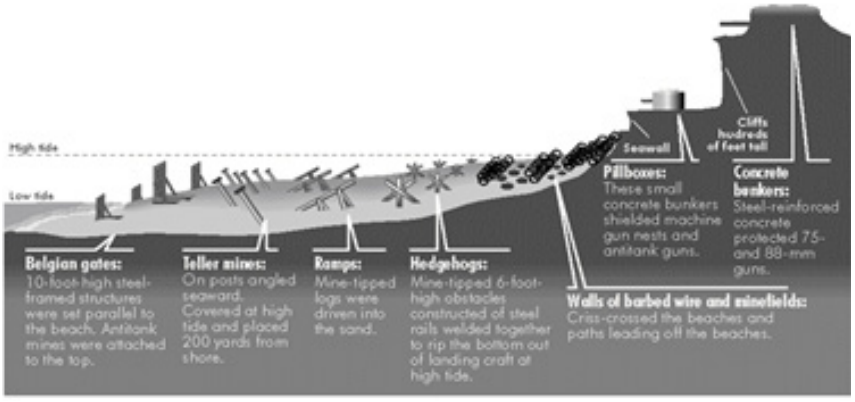
Houve um aumento imenso nas obras da *Muralha do Atlântico*, pudendo-se dizer que a maioria das fortificações costeiras no litoral atlântico foi construída entre a primavera de 1943 e o início de

[10] Há ainda hoje um debate sobre a possibilidade desta ação militar ter tido igualmente com objetivo central oculto capturar máquinas codificadoras Enigma, que eram utilizadas pelos militares alemães para enviar as suas mensagens.

[11] Dos 10.500 militares aliados envolvidos na operação, na maioria canadianos, cerca de 5.500 foram mortos, feridos ou capturados. Os alemães tiveram apenas 311 mortos e 280 feridos.

Junho de 1944. Em Novembro de 1943 o Marechal Erwin Rommel (1891-1944)[12], o mais conceituado militar alemão da segunda guerra mundial, igualmente respeitado pelos compatriotas e adversários, foi encarregado de supervisionar os trabalhos de fortificação da Muralha do Atlântico. Efetuou uma mudança na política de defesa costeira que até então era seguida: o que estava vigente era ter de reserva forças motorizadas e blindadas prontas a intervir, as quais, após o desembarque das forças aliadas, imediatamente ocorreriam ao local e expulsariam as tropas invasoras. Rommel estava consciente que em fins de 1943 as forças aéreas aliadas dominavam os céus, pelo que qualquer tentativa de colunas militares se aproximarem dos locais de desembarque estava condenada ao malogro. Decidiu portanto que todo o esforço deveria ser feito para impedir qualquer progressão inimiga para fora das praias, aí é que se ganharia ou perderia a batalha. Consequentemente ordenou que se colocassem milhões de minas, mais do triplo do que se tinha colocado antes da sua chegada, e se enchessem as praias onde poderiam desembarcar os aliados com todo o tipo de obstáculos, alguns com minas no seu topo que explodiriam ao mínimo contato, barreiras tanto para a infantaria como anti-tanque, obstáculos debaixo da água e minas navais a pouca distância da costa. Construiram-se centenas de bunkers e casamatas de betão reforçado, onde se instalaram metralhadoras, armas anti--tanque, artilharia ligeira e pesada. Paralelamente todos os portos costeiros de alguma importância foram fortificados: em França os melhoramentos tiveram lugar em Dunquerque, Calais, Le Havre, Cherburgo, S. Malo, Brest, Lorient, Saint Nazaire, e La Rochelle-La Pallice. Ao mesmo tempo foram diminuídos os intervalos entre as defesas costeiras. Até Maio de 1944 a OT tinha construído mais de 5000 estruturas defensivas de betão.

Figura 2 - As defesas nas praias de França



Fonte: https://www.tumblr.com/peashooter8Bo5/153842770917.

Prevendo que os aliados escolheriam desembarcar numa maré cheia, pois assim as tropas de assalto teriam menor distância a percorrer até às defesas alemãs, foi decidido colocar vários tipos de obstáculos que ficariam submersos na maré cheia e que poderiam afundar as barcaças de desembarque. Temos alguns desses tipos na figura 2. Sucessivamente da esquerda para a direita, ou seja, do oceano para a praia: *portas belgas*, estruturas emolduradas de aço com cerca de 3 metros de altura, colocadas paralelamente à praia e com minas anti-tanque colocadas no topo; *minas Teller*, colocadas em postes inclinados para o oceano, a cerca de 180 metros da praia; *rampas* armadilhadas espetadas na areia; *ouriços***,** obstáculos armadilhados feitos de barras de aço soldadas entre si, de cerca de 1,80 metros de altura, para rasgarem o fundo das barcaças de desembarque**;** *arame farpado* e *campos de minas*; um *muro*; *casamatas de betão* com ninhos de metralhadoras e armas anti-tanque; *falésia* com

[12] Existem muitos livros sobre Rommel, uma das primeiras biografias é (Young, 1950), com um capítulo sobre a Muralha do Atlântico, p. 187-214.

uma altura que podia chegar a várias dezenas de metros; no topo *bunkers de betão e aço reforçado* com canhões de 75mm e de 88mm.

Nos meses anteriores à invasão os aviões de reconhecimento aliados voaram milhares de horas sobre o norte de França, fotografando tudo o que poderia interessar numa ofensiva aliada. Essas fotos foram analisadas por uma enorme equipa de decifradores, pelo que no dia do desembarque na Normandia havia um conhecimento detalhado das zonas onde os soldados e paraquedistas entrariam em ação. Tendo em conta o que os alemães tinham instalado nas praias, era crucial para os aliados desembarcarem muito perto da maré baixa, para poderem evitar os obstáculos e terem equipas que se encarregassem da sua demolição, criando corredores por onde fosse seguro avançar para terra; e o momento do desembarque teria de se iniciar quando a maré já estava a começar a subir para os barcos não ficarem atolados e poderem voltar para os navios ao largo, e deste modo poderem trazer mais vagas de assalto. Atendendo à velocidade de subida da maré, as equipas de demolição teriam de agir rapidamente, para procederem à eliminação dos obstáculos antes destes ficarem submersos.

O ESTUDO DAS MARÉS[13]

A primeira explicação satisfatória das marés foi dada por Isaac Newton (1642-1727) na sua obra *Philosophae Naturalis Pricipiae Mathematica,* em 1687, afirmando, em consequência da sua teoria da gravitação universal, que eram devidas (principalmente) à força de atração gravitacional entre a Terra e a Lua e à força centrífuga do movimento dos dois na órbita em torno do seu centro de massa comum. A força gravitacional atrai estes astros um para o outro, mas a força centrífuga devido ao seu movimento em torno do centro de massa do sistema Terra-Lua tende a afastá-las. No centro da Terra a atração gravitacional e a ação da força centrífuga anulam-se mutuamente. Mas tal não acontece à superfície da Terra. No lado virado para a Lua a força gravitacional é maior, enquanto que no lado oposto é a força centrífuga que é dominante. Por consequência sendo a Terra maioritariamente coberta pelos oceanos, haverá duas mares cheias, uma no lado virado para a Lua e outra no lado oposto. Atendendo à rotação da Terra, haverá regra geral duas mares cheia por dia (é um pouco mais do que 24 horas, 24 horas e 50 minutos, atendendo a que a Lua também está em movimento). É claro que se trata de uma explicação simplificada, pois não foram tidos em conta fatores importantes como a influência dos continentes e a estrutura dos fundos do mar, que de modo algum é homogénea.

Figura 3 - As marés cheias devidas à atração lunar e à força centrífuga (ou inércia) do sistema Terra-Lua no seu movimento em torno do seu centro de massa

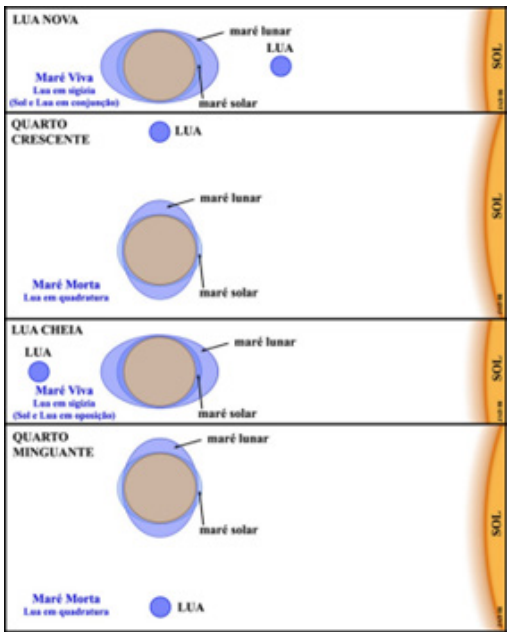
Fonte: https:// oceanservice.noaa.gov/education/tutorial_tides/tides03_gravity.html.

O Sol também intervém, mas apesar da sua massa ser imensamente superior à da Lua, o facto de se encontrar muito mais distante da Terra faz com que a sua influência no fenómeno das marés não seja tão importante. Atendendo que a força de atração entre dois corpos é diretamente propor-

[13] Neste capítulo as nossas referências básicas são (Ekman, 1993), (Cartwright, 1999) e (Parker, 2011).

cional às massas desses corpos e inversamente proporcional ao quadrado da sua distância, vemos que a ação de atração dominante é devido à Lua. Contudo não é negligenciável a influência do Sol, e quando este e a Lua estão alinhados com a Terra (fases de Lua Cheia e Lua Nova) as suas ações adicionam-se e temos as mares vivas. Quando isso não acontece, quando a Lua está ou em Quarto Crescente ou em Quarto Minguante) as suas ações contrariam-se e temos as chamadas marés mortas. É o que se pode ver na Figura 4:

Figura 4 - A influência conjunta do Sol e da Lua nas marés



Fonte: https:// www.astropt.org/2012/01/09/as-mares.

Sendo a teoria básica exposta por Newton correta nos seus princípios, algumas das suas deduções não o são, essencialmente devido a uma interpretação errada dos efeitos das forças verticais na superfície dos oceanos.

Essas imprecisões foram em parte corrigidas aquando de uma competição realizada em 1738 pela *Real Academia das Ciências de Paris* que propôs como tema "*O fluxo e o refluxo do mar".* Dos quatro trabalhos premiados em 1740, três apresentaram ensaios que melhoravam a teoria exposta por Newton. Foram seus autores Colin MacLaurin (1698-1746), Leonhard Euler (1707-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782). Os dois primeiros apresentaram os seus ensaios escritos em latim.

O texto de MacLaurin*, De Causa Physica Fluxus et Refluxus Maris* ("Sobre as causas físicas do fluxo e refluxo do mar"), é um estudo completamente de tipo geométrico que utiliza a teoria das fluxões. Demonstrou uma afirmação feita por Newton, mas que este apenas assumiu: que a forma de um oceano, inicialmente esférica, quando está em equilíbrio estático, com a força de uma maré provocada por um outro corpo fica um esferóide alongado, cujo eixo maior aponta para esse corpo. Foi também o primeiro cientista a dar-se conta do efeito de deflexão causado pela rotação da Terra em objetos que não estão firmemente ligados ao solo, chamado hoje *efeito Coriolis.*

Euler apresentou *Inquisitio Physica in Causam Fluxus et Refluxus Maris* ("Pesquisa Física sobre a causa do fluxo e do refluxo do mar"). A mais importante contribuição neste seu trabalho foi mostrar

que é a componente horizontal do campo de forças, e não a vertical que determina o movimento da maré. A componente vertical é equilibrada pela pressão no fundo do mar.

O texto de Daniel Bernoulli é *Traité sur le flux et le réflux de la mer.* Este ensaio, apesar de algumas falhas, teve aplicação direta na análise e previsão das marés, e por isso ficou mais conhecido que os outros escritos premiados. Bernoulli assumiu que, para efeitos de cálculo das marés na Terra sem perturbações se podia considerar a sua superfície uma esfera perfeita, e que a forma de uma deformação das marés da sua superfície é um esferóide alongado. Fez esta afirmação desconhecendo o trabalho de MacLaurin sobre este tema. Analisou igualmente a estrutura geométrica das marés geradas pela combinação das acções do Sol e da Lua. Calculou tabelas de marés que foram as primeiras tabelas de previsões com alguma qualidade que se publicaram. Newton, analisando as diferenças entre marés cheias observadas na costa inglesa em situações de Lua Cheia ou Lua Nova e as marés vazias nos mesmos locais quando a Lua se encontrava em Quarto Crescente ou Quarto Minguante tinha concluído que a força das marés devidas à Lua era cerca de 4,5 mais forte que a devida ao Sol. Bernoulli, utilisando valores obtidos na costa francesa, corrigiu esse valor para 2,5. Hoje sabe-se que o valor correto é 2,2.

Um avanço decisivo foi conseguido por Pierre Simon Laplace (1749-1827). Ele foi o primeiro a analisar o problema das marés como sendo um problema da água em movimento e não da água em equilíbrio. Até então tinha-se suposto que o oceano se limitava a sofrer as ações das forças atrativas dos astros. Laplace estabeleceu as relações dinâmicas que exprimem a reação dos oceanos a essas forças. A sua principal contribuição encontra-se em duas comunicações apresentadas à Academia das Ciências de Paris. A primeira, em duas partes, tem o título "*Recherches sur plusieurs points du Système du Monde*". Essas partes foram apresentadas respetivamente em 1775 e 1776. A segunda, "*Mémoire sur le flux et reflux de la mer*", foi apresentada em 1790. O essencial destes três textos foi incluído no volume IV do seu "*Traité de Mécanique Céleste*", publicado em 1799. Utilizando o cálculo diferencial, deduziu três equações que descrevem como os oceanos respondem aos efeitos gravitacionais da Lua e do Sol.[14] São equações muito complexas que só se puderam resolver completamente no século XX utilizando computadores digitais. Mas com elas Laplace demonstrou o carácter único das marés no conjunto dos fenómenos oceânicos: toda a sua energia está concentrada num pequeno número de frequências astronómicas, e portanto é possível prever com rigor as marés se se puder calcular a energia de cada uma dessas frequências astronómicas. Na maioria dos locais a maior parte da energia está concentrada em três frequências semi-diurnas[15]. Este conhecimento foi essencial para os desenvolvimentos posteriores.

Em 1831 Henry Robinson Palmer (1795-1844), engenheiro civil inglês da London Dock Company, desenhou um aparelho que permitia mecanicamente registar de forma contínua o nível de uma maré, o *mareógrafo*. Deste modo passou-se de um conhecimento discreto dos níveis da maré, obtido a partir da sua observação direta, a um conhecimento contínuo. Este aparelho (Figura 5) consistia numa haste vertical graduada, colocada na vertical, fixa a um dos muros de um porto. Ligada a essa haste, mas móvel, está uma boia, a flutuar na água, cujas subidas e descidas são comunicadas por um sistema de hastes e rodas a um marcador que vai registando os valores indicados num rolo de papel que vai rodando accionado por um relógio. Assim se consegue obter uma medição contínua da variação da altura da água.

[14] Não vamos aqui analisar essas equações. Sobre este tema consulte-se (Cartwright, 1999, p. 69-81).

[15] Uma devida à Lua (1,93 ciclos por dia), outra devida ao Sol (2,00 ciclos por dia) e a terceira devida à excentricidade da órbita lunar (1,90 ciclos por dia).

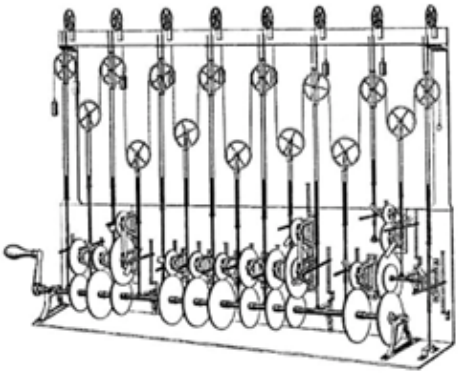
Figura 5 - O mareógrafo de Brest, França

Fonte: https://fr.wikipedia.org/wiki/Marégraphe.

Em 1822 Joseph Fourier (1768-1830) indicou que uma função podia ser escrita com soma de uma série trigonométrica, e em 1829 o matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) demonstrou rigorosamente a convergência desta série em casos que englobavam a função que descrevia a altura das marés.

William Thompson (1824-1907), Lorde Kelvin a partir de 1892, utilizou a técnica da análise de Fourier no estudo das marés, estudando séries temporais de medições do nível da água para determinar quanta energia há em cada frequência da maré. Os movimentos do Sol e da Lua determinam um conjunto de frequências, e cada uma corresponde a uma componente de uma força tendente a provocar o movimento das marés. A porção da altura da maré devida à energia de uma dada frequência pode ser representada por um gráfico de uma função sinusoidal. Cada termo é da forma $A\ cos(wt+p)$. Quando todas as curvas são adicionadas, temos uma boa estimativa da representação da maré. Em 1872 inventou a primeira máquina de previsão de marés. Permitia transformar o movimento giratório em movimento sinusoidal, adicionando as várias componentes, e deste modo permitia obter as alturas das marés a partir dos dados do que se entendia serem as dez mais importantes componentes.

Figura 6 - Esquema da máquina de previsão de marés de Lorde Kelvin



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Tide-predicting_machine.

Arthur Thomas Doodson (1890-1968) foi um matemático e oceanógrafo inglês que desde 1921 se dedicou ao estudo das marés, tendo participado no desenho de máquinas de previsão de marés, sendo uma delas a Doodson-Légé TPM[16].

Em 1942 a máquina que Doodson tinha aperfeiçoado utilizava os dados de 26 componentes importantes da maré, o que permitia uma previsão mais exata. Foram os cálculos de Doodson que permitiram determinar quais os dias mais favoráveis para os desembarques na Normandia.

Temos vários tipos de constituintes das ondas que representam as marés:

a) Principais componentes astronómicas (relativas à interação entre astros)

1) As influências devidas ao Sistema Terra-Lua (designada por M2)

2) As influências devidas ao Sistema Terra-Sol (S2)

3) As influências devidas à Lua descrever uma elipse em torno da Terra (N2 e L2)

4) Influências devidas à órbita da Lua em torno da Terra fazer um ângulo de cerca de 5º com o plano da órbita da Terra (K1 e O1)

5) Influências devido à eclíptica fazer um ângulo de 23º30´com o plano do equador (K1 e P1)

b) Componentes radiacionais (exprimem as alterações devidas aos raios do Sol, à brisa existente entre a terra e o mar, e às variações de pressão atmosférica)

c) Componentes relativas aos tipos de fundos marinhos em águas pouco profundas. As mais importantes são M4, M6, M8 e MS4.

A SITUAÇÃO MILITAR NO INÍCIO DE JUNHO DE 1944

Depois de um início claramente favorável à aliança Alemanha-Itália-Japão (este a partir de 1941), o chamado Eixo, a guerra mudou de sentido. A partir da segunda metade de 1942 no Pacífico, e do fim de 1942, na Europa, a relação de forças inverteu-se.

[16] Um exemplar desta máquina foi vendido em Portugal em 1923 e outro no Brasil em 1927. Só em 1929 a instituição onde trabalhava, o *Liverpool Observatory and Tidal Institute,* comprou uma dessas máquinas.

No Pacífico deu-se a batalha naval de Midway (Lunsdtrom, 1990), (Prange, 1982) de 4 a 7 de Junho, com uma estrondosa vitória americana. Foram afundados os quatro porta-aviões que integravam a força japonesa, e os americanos apenas perderam um dos três porta-aviões da sua frota. Nesse combate foi essencial a contribuição devida aos operadores de radio, que tinha decifrado os códigos japoneses, e assim foi possível saber com antecedência da vinda da força naval japonesa para Midway e portanto preparar atempadamente a estratégia da esquadra americana. A partir dessa data, o Império do Japão passou a estar na defensiva, até à sua rendição final a 2 de Setembro de 1945.

Na Europa, o avanço nazi tinha sido detido perto de Moscovo, tendo sido frustrada a tentativa de entrar na cidade, no que foi conhecida pela batalha de Moscovo, que se desenrolou de Outubro de 1941 a Janeiro de 1942. Mais tarde sofreu uma enorme derrota em Estalinegrado (Erikson, 1975), numa batalha que durou mais de cinco meses, de fins de Agosto de 1942 ao início de Fevereiro de 1943, em que as forças nazis, depois de um longo cerco, se renderam. Nesta batalha o exército alemão perdeu mais de 800.000 soldados, entre soldados capturados, mortos, feridos e desaparecidos. Do lado soviético, apesar de vencedor, houve ainda um maior número de baixas, superior a um milhão. Considera-se esta batalha a mais sangrenta da história, ainda mais do que a batalha de Verdun, na 1ª Guerra Mundial. Foi uma derrota que marcou o destino da guerra na frente oriental. Depois de mais uma tentativa de ataque frustrado em Kursk, de 5 de Julho a 23 de Agosto de 1943, a Alemanha, passou a estar na defensiva[17]. Em Abril de 1944 a União Soviética tinha recuperado a Ucrânia e parte da Bielorússia, aproximando-se da Roménia e da Polónia, numa marcha imparável que só terminou em Berlim em Maio de 1945.

A 10 de Julho de 1943 os aliados (8º Exército inglês de Montgomery e o 7º Exército americano de Patton) desembarcaram no sul da Sicília, e começaram a libertação da Itália. A 25 de Julho o rei Vitor Emanuel III de Itália mandou prender o ditador Benito Mussolini (1883-1945), e a 8 de Setembro foi assinado um armistício com os aliados. A Alemanha então invadiu o Norte e Centro de Itália, o que levou esta, a 13 de Outubro, a declarar guerra à Alemanha. O avanço aliado foi lento, devido à oposição do exército alemão, mas seguro. A 5 de Junho de 1944 os seus exércitos entraram em Roma.

A PREPARAÇÃO E A REALIZAÇÃO DO DESEMBARQUE[18]

Desde 1942 que se pensava realizar uma operação de grande envergadura na costa atlântica francesa, respondendo ao pedido da União Soviética de se criar uma segunda frente de batalha na Europa. Contudo essa realização foi sendo adiada, por causa de outras frentes de batalha, entre as quais a do Norte de África. Esta última campanha terminou nos inícios de Maio de 1943 com a rendição das forças italo-alemãs. Na conferência de Teerão de Novembro de 1943 o presidente dos Estados Unidos e o Primeiro Ministro inglês prometeram à União Soviética que a segunda frente havia tanto prometida tomaria forma em Maio de 1944. Devido à dimensão da operação militar, que implicava a movimentação de imensas forças terrestres, navais e aéreas, e em particular a necessidade de ter um número suficiente de lanchas de desembarque para colocar em terra dezenas de milhar de soldados, esta teve de ser adiada para Junho desse ano. No total 39 divisões aliadas participaram nessa operação: 22 americanas, 12 inglesas, três canadianas, uma polaca e uma francesa. Para o local do desembarque na costa atlântica francesa, escolheu-se a Normandia, numa zona de

[17] Em Kursk desenrolou-se a a maior batalha de tanques da guerra, que se saldou por enormes perdas de soldados e blindados.para as forças nazis.

[18] Sobre o desembarque na Normandia há imensas publicações. Sugiro (Ryan, 1959).

cerca de 100 kms entre os portos do Havre, a oriente, e Cherburgo, a ocidente. O Pas-de-Calais era a zona de França mais perto de Inglaterra, mas os alemães, esperando um ataque aí, tinham fortificado imenso o local, o que desaconselhava por completo uma operação nessa zona. Por outro lado, o desastre de Dieppe tinha mostrado que não se podia fazer o desembarque perto de portos, que estariam naturalmente fortificados.

Era necessário manter os alemães na ignorância total do local do desembarque, pelo que foram levadas a cabo várias operações de desinformação. Os agentes duplos passaram várias pistas falsas ao alto comando alemão, mencionando uns que se daria um ataque na Noruega, outros que o desembarque se faria no Pas-de-Calais[19]. Para este último ser mais credível, em Inglaterra, no condado de Kent, uma zona que inclui Dover, a cidade de Inglaterra mais perto de França, criou-se um falso *Primeiro Exército* americano, tendo-se construído simulacros de tanques, veículos motorizados e aviões, e que se anunciou estar sob as ordens do general George Smith Patton (1885-1945), um dos mais prestigiados generais americanos. Houve relaxamento da vigilância aérea, deixando os aviões de reconhecimento alemão fotografarem o pretenso exército. Igualmente foi mantido um tráfego intenso nas comunicações de rádio nessa zona, pretendendo serem transmissões relativas a essa falsa força militar. Para manter a ilusão que o desembarque seria na zona do Pas-de-Calais, perto da data da invasão os aliados bombardearam-na com mais do dobro das bombas que largaram sobre as zonas escolhidas da Normandia. No próprio dia da invasão, nas zonas do Havre, Boulogne sur Mer e Pas de Calais, foram lançadas por esquadrões da *Royal Air Force* folhas metalizadas que os radares alemães interpretaram como sendo de comboios de barcos aliados.

O segredo foi de tal modo bem escondido que mesmo durante algum tempo após o desembarque na Normandia os alemães acreditaram que se tratava de uma manobra de diversão, e que o desembarque principal viria na zona do Pas-de-Calais. Deste modo mantiveram nessa zona várias divisões de blindados que só tardiamente foram enviadas para a frente de combate.

Para além da força naval, entraram igualmente em ação, horas antes do desembarque, tropas aerotransportadas em planadores, e forças de paraquedistas. A sua missão era apoderarem-se de pontos vitais na retaguarda nazi e controlarem ou destruirem pontes de modo a impossibilitar o envio de reforços alemães para a costa[20].

Houve fatores essenciais a ter em consideração para se decidir qual o dia da invasão, principalmente as marés e o nascer da Lua.

O desembarque tinha de ser feito muito perto da maré baixa mas quando esta já estava a subir, como atrás se disse. Para a frota de ataque não ser detetada, era necessário haver alguma escuridão, mas teria de haver já alguma luz da Lua para as tropas aerotransportadas encontrarem bem os seus alvos. Igualmente teria de haver alguma iluminação uma hora antes do desembarque, para os navios da frota poderem alvejar as defesas costeiras. Portanto a maré baixa teria de coincidir com as primeiras luzes, e o desembarque seria feito cerca de uma hora depois.

[19] O mais famoso desses agentes duplos tinha o nome de código de Garbo. Foi o único agente duplo a ser condecorado simultaneamente com as medalhas mais prestigiadas do exército aliado e do exército alemão! Ver a sua história em, (Harris, 2004).

[20] Houve uma colaboração estreita com a *Resistência Francesa,* que dinamitou linhas férreas, destruiu instalações elétricas, cortou linhas de telefone e de tele-impressoras, provocando a confusão entre os serviços de informação nazis. Contribuiu dessa forma para o isolamento da Normandia. Para se ter uma ideia da amplitude destas ações, indicamos que por ação destes combatentes foram destruídas 52 locomotivas.

Era pois necessário uma previsão precisa das marés, e consequentemente era necessário determinar com exatidão as constantes harmónicas obtidas dos dados das marés muito perto das praias do desembarque. Mas os aliados não tinham esses elementos. Os dados que tinham eram relativos aos dois portos que ladeavam essas praias, Le Havre a este e Cherburgo a oeste. Não era fiável fazer uma interpolação desses valores pois as condições do fundo do mar junto da costa era muito variável. Por isso, durante meses, submarinos miniatura e barcos de pequeno porte realizaram missões noturnas para recolher os dados necessários perto dessas praias. Inclusivamente, lembrando-se do que se tinha passado em Dieppe, trouxeram amostras da areia para se certificarem que não haveria problemas com o movimento dos veículos a utilizar. Em Outubro de 1943 foi enviado a Artur Doodson um relatório que incluía 11 pares de constantes harmónicas[21] relativas a um lugar de nome de código Z (que era a Normandia), e foi-lhe pedido para fazer as previsões das marés hora a hora para o período de Abril a Junho de 1944. As predições de Doodson foram adaptadas para cada uma das praias de desembarque.

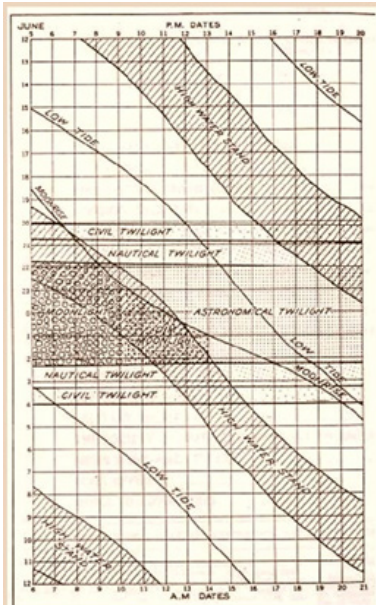
Elaboraram-se diagramas em que se cruzavam as informações relativas às marés, ao nascer da Lua, e aos vários graus de crepúsculo. Vamos definir estes últimos para melhor se poder entender a Figura 7. Podemos distinguir três tipos de crepúsculo:

O **crepúsculo civil**, em que o Sol está até 6º abaixo da linha do horizonte. Há luz suficiente para os objetos serem vistos e não há necessidade de iluminação artificial.

O **crepúsculo náutico**, em que o Sol está entre 6º e 12º abaixo da linha do horizonte. Só se conseguem reconhecer os contornos gerais dos objetos. À noite começa quando se torna impossível reconhecer a linha do horizonte e de manhã acaba quando ela passa a ser avistada

O **crepúsculo astronómico**, em que o Sol está entre 12º e 18º abaixo da linha do horizonte. O céu fica completamente escuro.

Figura 7 - Diagrama das marés e da iluminação para Omaha Beach, de 5 a 21 de Junho de 1944.



Fonte: Diagrama em Parker (2011, p. 39)

[21] Essas constantes foram: M2, S2, N2, K2, K1, O1, P1, M4, MS4, M6, e 2SM6.

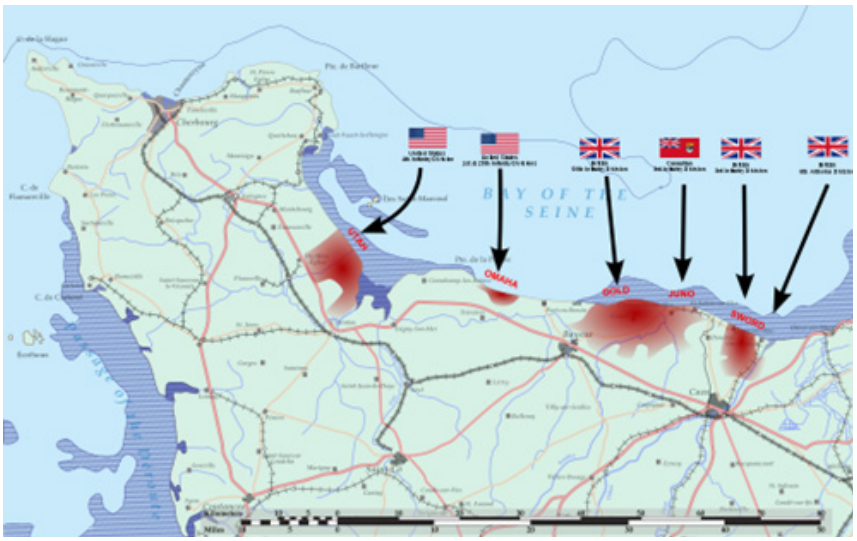
Em Junho só três dias satisfaziam as condições consideradas essenciais: 5, 6 e 7.

O General Dwight D Eisenhower (1890-1969), comandante supremo das forças aliadas na Normandia, resumiu deste modo os elementos fundamentais a considerar para se tomar uma decisão sobre a data do desembarque (Eisenhower, 1949, p. 262-263):

> We wanted to cross the Channel with our convoys at night, so darkness would conceal the strength and direction of our attacks. We wanted a moon for our airborne assaults. We needed approximately forty minutes of daylight preceding the ground assault to complete our bombing and preparatory bombardment. We had to attack on a relatively low tide because of beach obstacles which had to be removed while uncovered. These principal factors dictated the general period; but the selection of the actual day would depend upon weather forecasts.

Pensou-se inicialmente fazer o desembarque no dia 5, mas os metereologistas previram tempestade na Mancha nesse dia, o que impossibilitou essa ação. Mas afirmaram igualmente que tudo indicava que seguidamente haveria uma aberta de 36 horas. A decisão final, depois de muita hesitação e de se pesarem todos os fatores, foi realizar o desembarque no dia 6 de Junho.

Figura 8 - As praias de desembarque na Normandia no dia 6 de Junho de 1944



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Normandy_landings#/media/File:Map_of_the_D-Day_landings.svg.

Definiram-se cinco praias, com os nomes de código Utah e Omaha, a serem tomadas pelo exército americano, Gold e Sword, destinadas aos ingleses, e Juno, para os canadianos. O exército aliado era imenso. Não existe consenso quanto aos seus números exatos. Mas podemos tomar os valores seguintes como pelo menos bem aproximados. Em meios aéreos participaram 2.950 caças, 4.450 bombardeiros, 1.370 aviões para transportes, 670 planadores. A força naval incluía 120 navios de guerra, entre os quais 6 couraçados e 20 cruzadores; 100 contratorpedeiros; 250 caça-minas; e 3.500 transportes de tropas. Quanto ao exército, totalizava quase 130.000 soldados e 23.400 tropas aerotransportadas, que foram apoiadas por 1.500 tanques e 12.500 veículos variados.

A distância entre as duas praias extremas, Utah e Sword, era de cerca de 100 kms, o que fez que os desembarques nas diferentes praias não começassem todos à mesma hora, pois o momento da maré baixa não era o mesmo em todas. A amplitude das marés nessa costa era de cerca de 6 metros,

pelo que, após a maré baixa, em cada hora a maré subia cerca de um metro. Em consequência as equipas de demolição tinham de trabalhar rapidamente para conseguirem criar corredores livres de perigo, destruindo os obstáculos antes que estes ficassem submersos. Em Utah, Gold, Juno e Sword os aliados não encontraram grande resistência, tendo as equipas de demolição alcançado os seus objetivos. Só em Omaha é que isso não foi possível, abrindo apenas cinco dos projetados dezasseis caminhos de passagem para as tropas. Isto foi devido ao intenso fogo alemão, que dizimou aquelas equipas. Este insucesso foi um dos fatores para as imensas baixas sofridas nessa praia pelo exército americano. Só no fim do dia 6 foi possível romper as defesas alemãs em Omaha e avançar para o interior.

NOTAS FINAIS

Contrariamente ao que tinha sido previsto, devido à resistência oferecida pelo exército alemão, só no dia 12 de Junho é que as cinco cabeças de ponte conseguiram unir-se, dominando os aliados um espaço de 97 kms de largura e 24 kms de profundidade, e começando a sua marcha para o interior. Contudo a geografia da Normandia, com as suas densas sebes e estradas estreitas, muito bem aproveitadas pelo exército alemão, dificultaram a progressão dos aliados. Cherburgo foi tomada a 26 de Junho e Caen a 9 de Julho. Apenas a 25 de Julho, com a quebra das linhas defensivas nazis perto de Saint-Lô, se pode considerar concluída a campanha da Normandia.

Aprendeu-se muito com o desastre de Dieppe, e o que se corrigiu foi essencial para o sucesso do desembarque. O trabalho de desinformação levado a cabo pelos aliados resultou em pleno, e o mau tempo contribuiu para um maior relaxamento da vigilância alemã, tendo o seu comandante se ausentado para Berlim, pensando que com tal mau tempo os aliados não fariam qualquer movimento. O domínio aéreo dos aliados impediu os alemães de perceberem os movimentos de tropas em Inglaterra, e os bombardeamentos realizados sistematicamente, bem como a ação da Resistência Francesa danificaram grandemente a infra-estrutura dos transportes em França, tornando difícil aos nazis trazerem reforços para a costa. A boa preparação feita pelos aliados nas suas múltiplas componentes, o estudo rigoroso feito das marés, foram essenciais para a vitória conseguida. A partir daí os aliados progrediram em direção a Paris (libertada a 25 de Agosto) e ao Norte da França. Aproximava-se o fim do pesadelo nazi.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao CIUHCT que subsidiou a minha participação no XVIº Encontro da SBHMat. Estou grato ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, que me proporcionou as condições necessárias para poder realizar a investigação para escrever este artigo. Financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P./MCTES através de fundos nacionais (PIDDAC). UIDB/00286/2025; https://doi.org/10.54499/UIDB/00286/2025

REFERÊNCIAS

BOTTING, Douglas. **The Second Front.** New York: Time-Life Books, 1981

CARTWRIGHT, David Edgar. **Tides. A Scientific History.** Cambridge: Cambridge University Press, 1999

EISENHOWER, Dwight David. **Crusade in Europe**. London: W. Heinemann, 1949

EKMAN, Martin. Concise History of the Theory of Tides. Precession-Nutation and Polar Motion (from Antiquity to 1950), **Surveys in Geophysics**, 14, p. 585-617, 1993

ERIKSON, John. **The Road to Stalingrad**. New York: Harper & Row,1975

HARRIS, Thomas. **Garbo: the spy who saved D-Day**. Bath: Bath Press, 2004

KAUFMANN, J. E. e JURGA, Robert. M. **Fortress Europe. European fortification of World War II.** Cambridge: Da Capo Press, 2002

KEEGAN, John. **The Second World War**. London: Century Hutchinson Ltd, 1989

LUNDSTROM, John B. **The First Team. Pacific Naval Air Combat. From Pearl Harbor to Midway**. Annapolis, Maryland: Naval Institute Press, 1990

PARKER, Bruce. The Tide Predictions for D-Day, **Physics Today** 64, 9, p. 35-40, 2011

PAXTON, Robert O. **Vichy France. Old Guard and New Order 1940-1944**.New York: Columbia University Press, 2001 (1ª edição: New York: Knopf, 1972)

PRANGE, Gordon William. **Miracle at Midway**. New York: Penguin Books, 1982

RYAN, Cornelius. **The Longest Day**. Greenwich, Connecticut: Fawcett Publ., 1959.

WARNER, Philip. **The Battle of France**. London: Simon & Schuster, 1990

YOUNG, Desmond. **Rommel**. London: Collins, 1950

APÊNDICE–O INÍCIO DA 2ª GUERRA MUNDIAL (1939-1941)

A 30 de Janeiro de 1933 Adolf Hitler (1889-1945) tornou-se chanceler da Alemanha. Começou por eliminar os seus adversários internos, ilegalizou os partidos politicos, com exceção do Partido Nazi, criou forças para-militares que asseguraram o domínio sobre toda a sociedade alemã e desenvolveu uma política anti-judaica, anti-comunista e racista. Foi feita a militarização e o rearmamento da Alemanha, desrespeitando as convenções que tinham sido estabelecidas após o fim da 1ª Guerra Mundial. Na sequência de uma política expansionista, Hitler provocou o começo da Segunda Guerra Mundial. A 1 de Setembro de 1939 os exércitos nazis invadiram a Polónia. Dois dias depois, cumprindo os acordos que tinham com o país invadido, a Inglaterra e a França declararam guerra à Alemanha. O exército polaco tinha armamento antiquado e estratégias ultrapassadas, que não se adequaram de modo algum ao tipo de ações desenvolvidas pelos exércitos alemães. Em pouco mais de um mês a vitória nazi foi total. De notar que, devido a acordo estabelecido entre a União Soviética e a Alemanha, a primeira invadiu a Polónia a 17 de Setembro, tendo sido ocupados pelos seus exércitos uma faixa oriental da Polónia. Um período de aparente inação das tropas terrestres, tanto do lado alemão como do lado franco-britânico, durou mais de cinco meses. Foi interrompido a 9 de Abril de 1940 com a invasão da Noruega pelo exército alemão, e um pouco mais tarde, a 10 de Maio, com a invasão da Holanda, seguindo-se rapidamente a Bélgica e a França, onde entraram pela floresta das Ardenas, mal defendida pelos aliados, que a julgavam impenetrável às forças blindadas. O avanço alemão foi imparável, e a 24 de Maio estava perto de Dunquerque. Um pouco inexplicavelmente fez uma pausa e não avançou, o que permitiu a evacuação para Inglaterra de cerca de 340.000 soldados franceses, ingleses e belgas. Mais 220.000 soldados foram evacuados por outros

portos no noroeste de França, pelo que está estimado em cerca de 560.000 o número de soldados aliados que conseguiram abandonar a França.

A Itália fascista, sentindo a derrota da França eminente, e escudando-se ao abrigo do pacto de aliança com a Alemanha nazi que tinha estabelecido em Maio de 1939, declarou guerra à França a 10 de Junho. Pouco efeito teve essa declaração, nada de significativo foi conseguido pelo exército italiano. O exército alemão entrou em Paris a 14 de Junho, e pouco depois deu-se a rendição da França. O armistício foi assinado a 22 de Junho. O goveno republicano foi demitido, e foi substituído por um governo colaboracionista e anti-democrático, presidido pelo Marechal Philippe Pétain (1856-1951). Este regime ficou conhecido por *regime de Vichy*, o nome da localidade francesa onde estabeleceu a sua sede.

Para encarar a possibilidade de invadir a Inglaterra, o alto comando alemão decidiu que a aviação alemã levaria a cabo sistemáticos ataques a alvos selecionados em Inglaterra. Esta nova batalha foi conhecida por *Batalha de Inglaterra* e durou de 10 de Julho a sensivelmente 31 de Outubro. Ficou provada a incapacidade alemã de conseguir vencer a aviação inglesa, pelo que foi abandonado o plano de invasão. Um contributo importante para a vitória inglesa, muito inferior em número à aviação alemã, foi a utilização do radar, que dava então os primeiros passos, e que permitiu determinar com alguma antecedência os trajetos das esquadrilhas alemãs, e assim poder preparar a defesa dos potenciais alvos, estando esquadrilhas de aviões a postos para combater os invasores.

As atenções da Alemanha viraram-se então para leste, tendo sido ordenada a invasão da União Soviética a 22 de Junho de 1941.

O Império do Japão, sem declaração prévia de guerra, enviou uma frota de porta-aviões atacar os navios americanos que estavam estacionados em Pearl Harbour, nas ilhas Hawaii. O objetivo era afundar os porta-aviões americanos que supunham aí estar ancorados, e assim impedir que os Estados Unidos pudessem dar resposta às projetadas ações de conquista do Império do Japão na *Á*sia e no Pacífico. A 7 de Dezembro de 1941 (um domingo) foi realizado esse ataque. A aviação dos porta-aviões japoneses provocou imensos danos nos barcos que se encontravam ancorados em Pearl Harbour, afundando muitos deles. Simplesmente os porta-aviões americanos não estavam lá. Eles foram cruciais na campanha que os Estados Unidos empreenderam na batalha do Pacífico. Em consequência desta ação, os Estados Unidos e a Inglaterra a 8 de Dezembro declararam guerra ao Império do Japão. Como este era aliado da Alemanha[22], esta declarou guerra aos Estados Unidos a 11 de Dezembro. A guerra, começada como europeia a 1 de Setembro de 1939, tornou-se mundial.

[22] O Imperio do Japão tinha assinado com a Alemanha nazi um tratado a 25 de Novembro de 1936 contra a *Internacional Comunista*, chamado *Pacto Anti-Commintern*, ao qual a Itália se juntou em 1937. Este pacto foi renovado a 17 de Setembro de 1940, assinado pelos mesmos três países, com o nome de *Pacto Tripartido*. Era uma aliança militar defensiva, e que identificava os Estados Unidos como o principal perigo para estas potências.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Instrumentos matemáticos multiplicativos nas produções do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática

Multiplicative mathematical instruments in the productions of the Research Group on Education and History of Mathematics

Pedro Henrique Sales Ribeiro[1]
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Ednaldo Nunes da Silva[2]
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Ana Carolina Costa Pereira[3]
Universidade Estadual do Ceará – UECE

RESUMO

As problemáticas em torno da aprendizagem das operações aritméticas, em especial da multiplicação, podem, em grande medida, ser compreendidas pelas lacunas existentes na formação de professores que ensinam matemática. Nesse sentido, é importante que exista, na formação docente, a preocupação com diferentes estratégias e recursos para ensinar esse conteúdo. Dentre eles, destacam-se os instrumentos matemáticos históricos, que são estudados por membros do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Desse modo, tem-se como objetivo descrever as produções desenvolvidas por membros do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM/UECE) que tratam sobre a utilização de instrumentos matemáticos direcionados ao ensino de multiplicação, tanto na Educação Básica, quanto na formação de professores. Para tanto, adota-se uma abordagem qualitativa e procedimentos da pesquisa bibliográfica, sendo considerados artigos, teses e dissertações produzidos por membros desse Grupo. Os trabalhos encontrados revelam que os instrumentos matemáticos estudados, quais sejam, o *Promptuario*, o Tabuleiro de Xadrez de John Napier, as Réguas para Cálculo, o Ábaco de Gerbert e as Barras de Calcular, possuem potenciais didáticos que podem ser incorporados em atividades direcionadas à Educação Básica ou à formação de professores. Em síntese, argumenta-se que as produções do GPEHM se constituem como esforços para minimizar as práticas de ensino embasadas na memorização e na repetição.

Palavras-chave: Ensino de multiplicação; Formação de Professores; Instrumento Matemático.

ABSTRACT

The problems surrounding the learning of arithmetic operations, especially multiplication, can largely be understood through the gaps in the training of teachers who teach mathematics. In this sense, it is important that teacher training includes concern with different strategies and resources to teach this content. Among these, historical mathematical instruments stand out, which are studied by members of the Research Group on Education and History of Mathematics (GPEHM) of the State University of Ceará (UECE). Thus, the objective is to describe the productions developed by members of the Research Group on Education and History of Mathematics (GPEHM/UECE) that deal with the use of mathematical instruments aimed at teaching multiplication, both in Basic Education and in teacher training. To this end, a qualitative approach and bibliographic research procedures are adopted, considering articles, theses and dissertations produced by members of this Group. The works found reveal that the mathematical instruments studied, namely the Promptuary, John Napier's Chessboard, the Calculating Rules, Gerbert's Abacus and the Calculating Bars, have didactic potential that can be incorporated into activities aimed at Basic Education or teacher training. In summary, it

[1] Licenciado em Matemática, Universidade Estadual do Ceará (UECE). Mestrando em Educação, Universidade Estadual do Ceará (UECE), Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: henrique.ribeiro@aluno.uece.br.

[2] Licenciado em Matemática, Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA). Mestrando em Educação, Universidade Estadual do Ceará (UECE), Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: ednaldo.nunes@aluno.uece.br.

[3] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) e Pós-doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professora Associada do curso de Licenciatura em Matemática e do Programa de Pós-graduação em Educação, ambos da Universidade Estadual do Ceará (UECE), e do Programa de Pós-Graduação de Ensino em Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: carolina.pereira@uece.br.

is argued that the GPEHM productions constitute efforts to minimize teaching practices based on memorization and repetition.

Keywords: Teaching multiplication; Teacher Training; Mathematical Instrument.

INTRODUÇÃO

As operações aritméticas fundamentais estão presentes nas mais variadas atividades do cotidiano, motivo pelo qual devem ser ensinadas desde os primeiros anos da escolarização. Contudo, é comum encontrar discentes que possuem dificuldades em aprendê-las e professores que ensinam em uma perspectiva que valoriza apenas a memorização e a repetição (Starepravo, 2010).

Em especial, no que se refere a operação de multiplicação, percebe-se que seu ensino ainda está pautado em grande medida na memorização da tabuada e na repetição mecânica, isso é, sem uma reflexão conceitual, do algoritmo operatório, fato que endossa as dificuldades em desenvolver o pensamento multiplicativo (Lima; Maranhão, 2014).

Visando uma modificação nesse cenário, pesquisas[4] em educação matemática que abordam essa temática têm apontado a necessidade de diferentes recursos didáticos, que podem advir, por exemplo, das tecnologias digitais, das práticas culturais de diferentes povos, em uma perspectiva etnomatemática, ou ainda da história da matemática.

Sobre essa última possibilidade, destacam-se os instrumentos matemáticos histórico que possuem, seja em sua construção, seja em sua utilização, conhecimentos matemáticos, e em especial multiplicativos, que podem ser apropriados para na sala de aula da educação básica ou na formação de professores que ensinam matemática.

Nesse sentido, dentre as pesquisas que exploram tais instrumentos, percebe-se que há um destaque quantitativo nos trabalhos desenvolvidos pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), vinculado à Universidade Estadual do Ceará (UECE), que enfatiza o estudo de aparatos históricos a partir de tratados originais, produzidos e difundidos no período renascentista.

Assim, tem-se como objetivo descrever as produções desenvolvidas por membros do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM/UECE) que tratam sobre a utilização de instrumentos matemáticos direcionados ao ensino de multiplicação, tanto na Educação Básica, quanto na formação de professores.

Desse modo, este texto estrutura-se em seis seções, sendo a primeira esta introdução que delimita o tema abordado. Na seção seguinte, discute-se acerca dos pressupostos metodológicos que embasam esta pesquisa. Já na terceira seção, realiza-se uma discussão acerca da formação docente para o ensino de multiplicação. A quarta seção, por sua vez, destaca os instrumentos matemáticos multiplicativos. Na quinta seção, descrevem-se as produções do GPEHM envoltas nessa temática. Por fim, as considerações finais, presentes na sexta seção, sintetizam o texto e apontam suas contribuições.

[4] Vide, por exemplo, Laranjeira (2019) e Gil (2024).

PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS

Considerada a partir do ponto de vista da sua abordagem, a pesquisa aqui relatada configura-se como qualitativa, uma vez que nessa tipologia de pesquisa "[...] o próprio pesquisador se constitui no *instrumento* principal que, por meio da interação com a realidade, coleta dados sobre ela" (Esteban, 2010, p. 129).

Desse modo, em relação aos procedimentos para a coleta de dados, ampara-se metodologicamente nos pressupostos da pesquisa bibliográfica, que é

> [...] elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de: livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa (Prodanov; Freitas, 2013, p. 54).

Dentre as fontes bibliográficas pesquisadas, foram considerados artigos, dissertações e teses produzidos em coautoria ou a partir da orientação da líder do GPEHM/UECE. Para artigos, a busca foi realizada utilizando o termo "multiplicação" no Google Acadêmico de cada membro cadastrado no Diretório de Grupos de Pesquisa no Brasil[5] da plataforma Lattes, sendo consideradas apenas as produções que tratavam de algum instrumento matemático para multiplicação, independente do periódico em que foi publicado.

Já para teses e dissertações, consultou-se os trabalhos depositados por membros do Grupo nos repositórios institucionais da Universidade Estadual do Ceará (UECE) e do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). Ressalta-se que a escolha do Google Acadêmico se deu por ele ser uma base de dados na qual grande parte dos periódicos científicos estão indexados. Já o repositório das duas instituições mencionadas se justificam por possuírem programas de pós-graduação nos quais a líder do GPEHM/UECE possui vínculo. Considerando-se a especificidade da temática e o baixo número de trabalhos, não foi realizado recorte temporal.

Diante dos dados coletados e devido ao objetivo delimitado para este artigo, adota-se a postura preconizada pela pesquisa descritiva, que "[...] procura classificar, explicar e interpretar fatos" (Prodanov; Freitas, 2013, p. 52), sem que haja uma interferência do pesquisador nos dados. Nesse sentido, na quinta seção estão presentes tanto quadros que sintetizam esses achados, quanto alguns apontamentos acerca das contribuições referentes a articulação da história no ensino de matemática proporcionadas por essas produções.

A FORMAÇÃO DOCENTE PARA O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO

Ao visualizar o que é preconizado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento de caráter normativo que rege o currículo mínimo da educação brasileira, percebe-se a operação de multiplicação está presente a partir do 2º ano dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, devendo ser ensinada, inicialmente, a partir de "[...] problemas envolvendo adição de parcelas iguais" (Brasil, 2018, p. 282).

[5] Pode ser acessado em: https://lattes.cnpq.br/web/dgp.

Em anos posteriores, a Base (Brasil, 2018, p. 286) ressalta a importância de se construir os "fatos fundamentais da [...] multiplicação" bem como de "resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos" (Brasil, 2018, p. 291).

Essa mesma indicação é reafirmada para os Anos Finais do Ensino Fundamental, especialmente para o 6º ano, no qual se enfatiza a necessidade de o discente utilizar estratégias variadas e compreender os processos envolvidos na realização das operações aritméticas, incluindo a multiplicação (Brasil, 2018).

No entanto, ainda que a BNCC demande que os docentes estimulem o raciocínio multiplicativo e possibilitem que os discentes conheçam suas distintas ideias associadas, essa demanda não está em consonância com a formação oferecida aos professores que ensinam matemática, como pode ser constatado ao visualizar as diretrizes curriculares dos cursos de licenciatura em pedagogia e em matemática, que não instituem a obrigatoriedade da oferta de disciplinas relacionadas ao ensino de aritmética nos cursos de graduação (Brasil, 2001; 2005) [6].

Por essa razão, tanto nos cursos de pedagogia, quanto nos cursos de matemática, vigora-se uma lógica de que dada a "simplicidade" conceitual presente nas operações aritméticas, não são necessárias disciplinas específicas para ensiná-las. Portanto, ao final de sua formação inicial, o pedagogo e o licenciado em matemática tendem a repetir, em suas práticas docentes, o mesmo modelo que aprendeu, ou seja, a memorização da tabuada e a repetição sem criticidade do algoritmo simplificado da multiplicação.

Desse fato, percebe-se a importância da realização de pesquisas que busquem inserir, tanto na sala de aula da educação básica quanto na formação docente, diferentes formas de se pensar a operação de multiplicação, de forma a compreendê-la conceitual e historicamente. Assim, nota-se nos instrumentos matemáticos essa possibilidade.

INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA MULTIPLICAÇÃO

Dentre os diferentes objetos históricos que veiculam conhecimentos matemáticos, os trabalhos produzidos pelos membros do GPEHM têm, em geral, sido direcionados ao estudo dos instrumentos matemáticos, compreendidos por Ribeiro e Pereira (2023b, p. 2-3), como

> [...] ferramentas utilizadas para o desenvolvimento de práticas laboratoriais, para fazer observações e/ou realizar experimentos; ou como um aparato para realizar cálculos aritméticos, medição de comprimento, altura, profundidade, peso, entre outros; para o cálculo de distâncias lineares e angulares ou ainda para compreender fenômenos naturais, tais como pressão, temperatura, volume, força etc.

Dessa variedade de possibilidades para os aparatos[7], ressalta-se nesse texto aqueles que foram idealizados em seu período histórico com a finalidade de executar cálculos aritméticos, com ênfase nos que possibilitam a realização da operação de multiplicação.

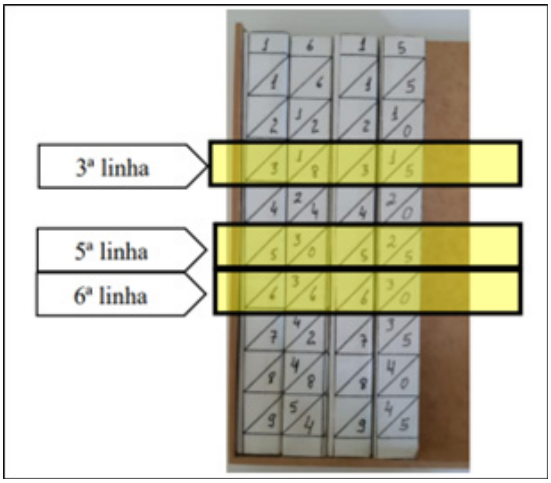
[6] É importante ressaltar que, embora sejam do início do século, essas são as diretrizes vigentes.
[7] Neste texto, o termo "aparato" é usado como sinônimo para "instrumento".

Nesse sentido, apresenta-se nessa seção (i) os três instrumentos concebidos por John Napier (1550 – 1617) no tratado *Rabdologiae*[8], a saber, as Barras de Calcular, o *Promptuario* e o Tabuleiro de Xadrez; (ii) As diferentes réguas para cálculo e (iii) o Ábaco de Gerbert.

OS INSTRUMENTOS DESCRITOS NO *RABDOLOGIAE*

Nesse tratado escrito pelo estudioso escocês das matemáticas John Napier e publicado em 1617 (Napier, 1617), estão presentes a descrição dos procedimentos necessários para a construção e utilização de três instrumentos matemáticos. O primeiro deles, as Barras de Calcular, possibilitam a realização de multiplicações e divisões, bem como a extração de raízes quadradas e cúbicas. O procedimento para multiplicar com esse aparato está ilustrado na Figura 1, na qual visualiza-se que "[...] os múltiplos desejados são, respectivamente, 4845, 8075 e 9690. Para obtermos o produto de 1615 por 365, devemos somar os múltiplos 4845 + 9690 + 8075 obtendo como resultado 589475" (Martins, 2019, p. 43).

Figura 1 – Multiplicação de 1615 x 356

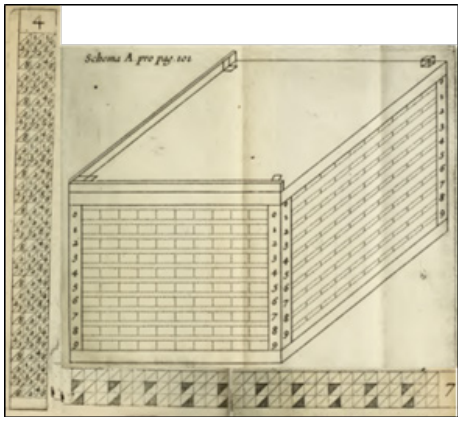


Fonte: Martins (2019, p. 42)

Já o segundo instrumento, o *Promptuario*, é direcionado especialmente para multiplicações, podendo efetuar divisões apenas após a conversão em multiplicações por meio de tabelas trigonométricas. Esse aparato é composto de dois conjuntos de varetas e uma caixa (Figura 2.1) e para realizar a multiplicação com eles, deve-se sobrepor as varetas horizontais, que são perfuradas, sobre as verticais, que possui os múltiplos de 0 a 9 inscritos. A Figura 2.2 ilustra esse procedimento.

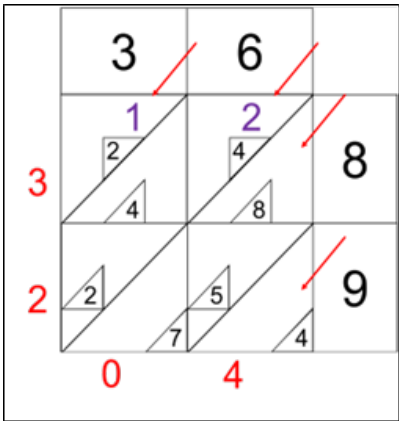
[8] Nome abreviado do tratado "Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo".

Figura 2.1 – O *Promptuario*



Fonte: Adaptado de Napier (1617, p. 94, 95 e 101)

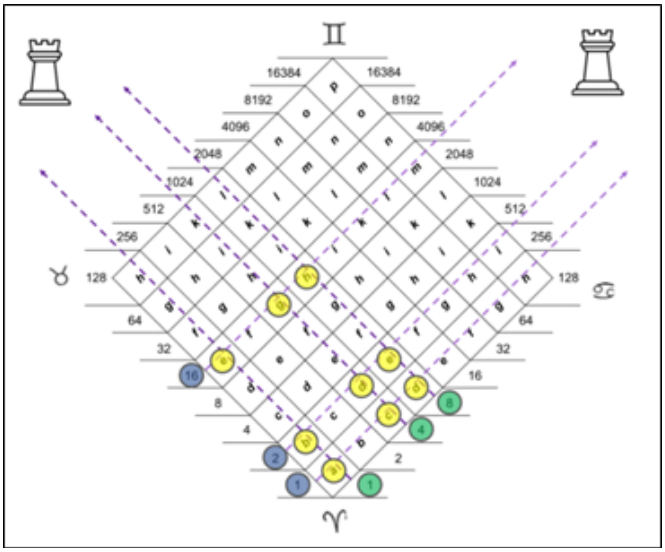
Figura 2.2 – Multiplicação de 36 x 89



Fonte: Elaboração dos autores (2025)

Por fim, o terceiro instrumento, intitulado como Tabuleiro de Xadrez, possibilita a realização das quatro operações aritméticas básicas e a extração de raízes quadradas a partir de um método criado por Napier (1617), nomeado como Aritmética de Localização. A partir desse método, pode-se efetuar multiplicações a partir de movimentos de peças em um tabuleiro. A Figura 3 ilustra o primeiro passo para essa operação após a configuração dos fatores nas margens do tabuleiro (Almeida, 2024).

Figura 3 – Movimento da torre na Multiplicação de 19 x 13

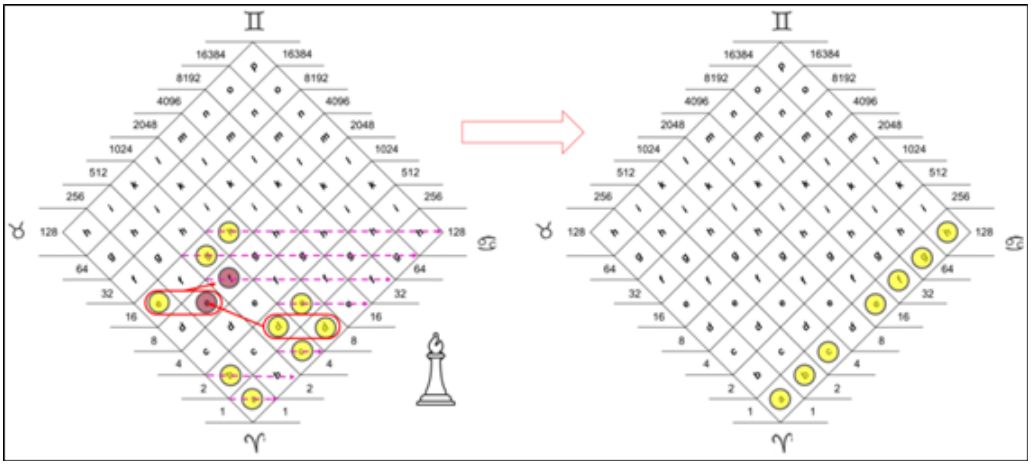


Fonte: Almeida (2024, p. 100)

Após esse movimento, as peças que foram marcadas nas interseções devem ser abreviadas[9], ou seja, duas peças que estiverem na mesma diagonal de letras iguais devem ser removidas e transformadas em uma única peça marcada em uma letra superior. Por fim, deve-se realizar o movimento do bispo para a margem do instrumento. Esses dois processos estão ilustrados na Figura 4.

[9] Sobre os processos presentes no Tabuleiro de Xadrez de John Napier, vide Almeida (2024).

Figura 4 – Movimentos dos bispos e abreviações na multiplicação de 19 x 13



Fonte: Almeida (2024, p. 103)

Desse modo, nota-se que nos três aparatos, concebidos no contexto europeu do século XVII, existem três métodos distintos para a realização da operação de multiplicação, de forma que em nenhum neles é necessário recorrer a memorização da tabuada.

AS RÉGUAS PARA CÁLCULO

Nessa subseção, aborda-se acerca de diferentes instrumentos que receberam, ao longo da história, denominações semelhantes a "réguas de cálculo" ou "réguas de calcular", ou ainda a variante em inglês *Slide Rule*. Neste século XXI, é ainda possível encontrar um aparato comercializado com o nome "régua de cálculo", que possui o mesmo fundamento dos instrumentos históricos aqui discutidos.

Com o desenvolvimento dos logaritmos por Napier (1614; 1619) e o cálculo dos logaritmos de base 10 por Henry Briggs (1516 – 1630), uma série de instrumentos que utilizavam esse princípio matemático passaram a ser idealizados. Dentre eles, destaca-se a escala dos números[10] concebida por Edmund Gunter (1581 – 1626) que era utilizada junto a um compasso para realizar operações aritméticas.

A partir da ideia de Gunter, William Oughtred (1574 – 1660) desenvolveu dispositivos que não necessitavam do compasso para serem utilizados. Dentre eles, destaca-se o Círculo de Proporções[11] e as Duas Réguas para Cálculo. Esse segundo instrumento foi estudado nas produções do GPEHM/UECE sobre duas vertentes.

Em trabalhos mais antigos, como os de Santos, Alves e Pereira (2018) e de Santos e Pereira (2020), ele aparece apenas com o nome Régua de cálculo, tal como é comercializado neste século. Nesses artigos, as autoras adotaram uma postura historiográfica que pinçou no passado o que era conveniente (Saito, 2015) para entender o instrumento dos dias de hoje.

Já em produções mais recentes, como as de Lima, Soares e Pereira (2023a; 2023b), esse instrumento é nomeado como "duas réguas para cálculo", uma tradução direta de *two rulers for calcula-*

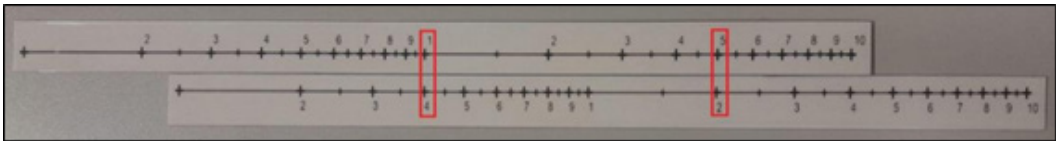
[10] Esse instrumento também pode realizar multiplicações e foi estudado por Santos (2022). Porém, como o seu estudo não foi relacionado especificamente para essa operação, ele não foi considerado neste mapeamento das produções do GPEHM/UECE.

[11] Sobre o círculo de proporções, vide Alves (2019).

tion, como está no tratado de William Oughtred (Oughtred, 1639). Percebe-se que tais trabalhos amparam-se em uma historiografia com mais traços atualizados.

Nestes dispositivos, a operação de multiplicação é realizada com base na propriedade dos logaritmos que permitem transformar uma multiplicação em uma soma. A Figura 5 ilustra o procedimento necessário para efetuar o cálculo.

Figura 5 –Multiplicação de 4 x 5



Fonte: Lima, Soares e Pereira (2023b, p. 13)

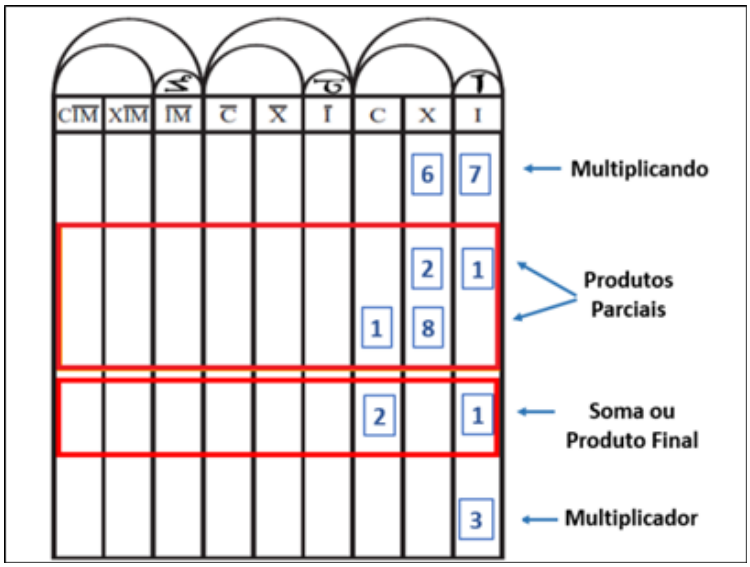
O resultado é encontrado ao alinhar o multiplicando 4 na régua de baixo, nomeada como *Staffe*, com o número 1 na régua de cima, nomeada como *Transversarie*. Após esse alinhamento, deve-se visualizar qual o correspondente na *Staffe* do multiplicador 5, sendo possível visualizar o número 2, que representa o produto 20 que se busca (Lima; Soares e Pereira, 2023b).

O ÁBACO DE GERBERT

Diferente dos instrumentos apresentados até então, o Ábaco de Gerbert insere-se em um contexto distinto. Seu idealizador, Gerbert de Aurilac (946 – 1003), publicou o tratado que aborda o aparato em 976, "[...] contendo regras de multiplicação para o manuseio do ábaco" (Albuquerque, 2019, p. 18).

Nesse instrumento, há a presença de numerais romanos que indicam as ordens do sistema decimal, bem como símbolos concebidos pelo seu autor para identificar as classes do sistema decimal. A multiplicação nesse dispositivo está ilustrada na Figura 6.

Figura 6 –Multiplicação de 67 x 3



Fonte: Albuquerque (2019, p. 57)

A autora ainda explica os procedimentos que devem ser feitos para obter o resultado desejado. De acordo com ela,

> O produto de 67 por 3 pode ser desenvolvido no ábaco iniciando pela multiplicação de 3 unidades por 7 unidades, resultando em 21 unidades. Pela regra de Gerbert, 1 é o dígito e deve ser disposto na coluna das unidades e 2 é o artículo e deve ser inserido na coluna das dezenas. Seguindo o cálculo, tem-se 3 unidades por 6 dezenas, que é igual a 18 dezenas. No entanto, como não é possível colocar mais do que nove dezenas na coluna e dez dezenas formam uma centena, esse resultado parcial culminará em 8 dezenas. Assim, o dígito é 1, e a centena é o artículo (Albuquerque, 2019, p. 57).

Desse modo, percebe-se que esse instrumento possui um algoritmo próprio, que embora guarde semelhanças com o tradicional, possui disposições diferentes que podem auxiliar na compreensão dos procedimentos.

PRODUÇÕES DO GPEHM SOBRE INSTRUMENTOS MULTIPLICATIVOS

Utilizando os procedimentos de buscas explicitados nos pressupostos metodológicos, encontrou-se 14 artigos publicados em periódicos, 3 dissertações de mestrado acadêmico e nenhuma tese de doutorado. Dessa forma, o Quadro 1, ordenado por ano de publicação, sintetiza esses achados apresentando o tipo de produção, a citação no modelo Autor (ano), e o instrumento matemático estudado.

Quadro 1 – Produções do GPEHM/UECE sobre instrumentos de multiplicação

Tipo	Autor (ano)	Instrumento Matemático
Artigo	Santo; Alves; Pereira (2018)	Régua de cálculo
Dissertação	Albuquerque (2019)	Ábaco de Gerbert
Dissertação	Martins (2019)	Barras de Calcular
Artigo	Almeida; Pereira (2020)	Tabuleiro de Xadrez de John Napier
Artigo	Ribeiro; Cavalcante; Pereira (2020)	*Promptuario*
Artigo	Santos; Pereira (2021)	Régua de cálculo
Artigo	Ribeiro; Pereira; Oliveira (2021)	*Promptuario*
Artigo	Ribeiro; Pereira (2021)	*Promptuario*
Artigo	Ribeiro; Oliveira (2022)	*Promptuario*
Artigo	Ribeiro; Pereira (2023a)	*Promptuario*
Artigo	Ribeiro; Pereira (2023b)	*Promptuario*
Artigo	Lima; Soares; Pereira (2023a)	Duas réguas para cálculo
Artigo	Almeida; Ribeiro e Pereira (2023)	Tabuleiro de Xadrez de John Napier
Artigo	Lima; Soares; Pereira (2023b)	Duas réguas para cálculo
Artigo	Almeida; Ribeiro; Silva Filho (2024)	Tabuleiro de Xadrez de John Napier
Dissertação	Almeida (2024)	Tabuleiro de Xadrez de John Napier
Artigo	Ribeiro; Silva; Oliveira (2024)	*Promptuario*

Fonte: Elaboração dos autores (2025)

Como forma de facilitar a compreensão quantitativa dos trabalhos por instrumentos e organizar a descrição das contribuições dessas produções, construiu-se o Quadro 2, que apresenta a

quantidade de trabalhos que foram publicados sobre cada instrumento direcionando o foco para a operação de multiplicação. Ressalta-se que alguns desses instrumentos podem realizar diversas operações, o que pode justificar o baixo número de produções especificamente sobre a multiplicação.

Quadro 2 – Quantidade de produções levantadas por instrumentos

Instrumento	Quantidade de produções
Promptuario	7
Tabuleiro de Xadrez de John Napier	4
Régua de cálculo	2
Duas réguas para cálculo	2
Ábaco de Gerbert	1
Barras de Calcular	1

Fonte: Elaboração dos autores (2025).

Acerca do *Promptuario*, há produções que se direcionam a explicar matematicamente os procedimentos necessários para a construção (Ribeiro; Cavalcante; Pereira 2020) e para a utilização (Ribeiro; Pereira, 2021) do instrumento. Há também uma proposta de atividade orientadora de ensino direcionada à formação de professores (Ribeiro; Pereira, 2023b) e três artigos que retratam experiências de aplicação desse instrumento em cursos de extensão universitária (Ribeiro; Pereira; Oliveira, 2021, Ribeiro; Oliveira, 2022, Ribeiro; Pereira, 2023a). Além disso, há um artigo teórico que apresenta possibilidades para a resolução de problemas do campo conceitual multiplicativo (Ribeiro; Silva; Oliveira, 2024).

Nesse último, há uma síntese das potencialidades desse aparato para promover o ensino de multiplicação. De acordo com os autores, com o *Promptuario*, é possível oferecer uma "[...] ressignificação de nuances do algoritmo simplificado da multiplicação que, em geral, são negligenciadas no processo de ensino dessa operação" (Ribeiro; Silva; Oliveira, 2024, p. 16).

Quanto ao Tabuleiro de Xadrez de John Napier, há publicada uma dissertação de mestrado (Almeida, 2024) que apresenta um estudo mais detalhado do instrumento e de suas potencialidades didáticas para a formação de professores. Já no que se refere aos artigos, tem-se um teórico acerca dos processos necessários para efetuar a multiplicação (Almeida; Pereira, 2020), uma proposta de atividade direcionada à educação básica (Almeida; Ribeiro, Pereira, 2023) e um relato de experiência da aplicação desse aparato em uma turma de 1º ano do ensino médio (Almeida; Ribeiro; Silva Filho, 2024).

Em Almeida (2024), a autora defende que o Tabuleiro de Xadrez de John Napier é potencialmente didático para atribuir um significado ao algoritmo da multiplicação, à propriedade distributiva e à paridade dos produtos. Já em Almeida, Ribeiro e Silva Filho (2024, p. 13), os autores argumentam que a atividade com o instrumento possibilitou aos discentes "[...] o contato com um elemento advindo da história da matemática que não está presente nos livros didáticos e contribuiu para uma compreensão mais significativa da operação de multiplicação, para além de uma repetição mecanizada".

Em relação à régua de cálculo, Santos, Alves e Pereira (2018) apresentam dados de uma aplicação desse instrumento na formação inicial de professores de matemática, destacando que essa

oportunidade propiciou "[...] usar um recurso da história da Matemática para ressignificar alguns conceitos, como a multiplicação e os logaritmos" (Santos; Alves; Pereira, 2018, p. 65)

Já Santos e Pereira (2020), a partir de uma reflexão teórica realizada sobre as particularidades matemática desse aparato, concluíram que eles "[...] pode ser inserido no ensino de Matemática, especificamente, no ensino de multiplicação através da sua construção e do seu manuseio" (Santos; Pereira, 2020, p. 368).

No que tange as Duas Réguas para cálculo, encontra-se em Lima, Soares e Pereira (2023a) uma proposta de atividade direcionada ao 6º ano do Ensino Fundamental na qual os alunos deverão "[...] solucionar um problema matemático ambientalizado no contexto histórico-cultural da cidade de Londres, localizada na Inglaterra, do século XVII, utilizando a escala dos Números das réguas *Staffe* e *Transversarie* de William Oughtred" (Lima; Soares; Pereira, 2023a, p. 6).

Além dessa produção, visualiza-se em Lima, Soares e Pereira (2023b) um estudo teórico sobre os conhecimentos matemáticos que são articulados ao utilizar as Duas Réguas para Cálculo na operação de multiplicação. As autoras ressaltam que essas réguas podem ser utilizadas como "[...] material manipulativo em toda a Educação Básica, a fim de estabelecer desde as primeiras ideias que permeiam a operação de multiplicação, como adição de parcelas, até o estudo das propriedades dos logaritmos no Ensino Médio" (Lima; Soares; Pereira, 2023b, p. 16).

Sobre o Ábaco de Gerbert, há apenas a dissertação de Albuquerque (2019), na qual a autora realiza um estudo sobre a operação de multiplicação a partir do tratado *Traité de Gerbert*, tendo como objetivo "[...] conhecer os elementos potencialmente didáticos que emergem na interface entre história e ensino, por meio uso do Traité de Gerbert (1843), no âmbito da formação do professor de matemática" (Albuquerque, 2019, p. 22).

Como conclusão de sua pesquisa, realizada a partir de um curso de extensão universitária com licenciandos em matemática, Albuquerque (2019, p. 119) destaca que os professores em formação "[...] mobilizaram estratégias que envolveram desde adaptações no instrumento a formas diferenciadas de efetuar a multiplicação, não sendo necessário utilizar sempre o mesmo algoritmo, mas surgindo a possibilidade de criar novos modelos".

Por fim, acerca das Barras de Calcular, somente a dissertação de Martins (2019) a aborda. Nela, o autor estuda os conhecimentos matemáticos que são mobilizados a utilizar esse aparato, tendo como objetivo "[...] conhecer a articulação entre história e ensino da matemática presente nas barras de calcular de Napier com base na obra Rabdologiae (1617)" (Martins, 2019, p. 19).

Em síntese, após realizar uma aplicação com alunos da licenciatura em matemática, o autor concluiu que as Barras de Calcular possui uma potencialidade didática que "[...] constitui-se em um possível indicador de que atividades didáticas, ao serem aplicadas no ensino, o façam dando significado aos conteúdos apresentados" (Martins, 2019, p. 78).

Desse modo, a partir dessa descrição das produções do GPEHM/UECE, percebe-se que, com os instrumentos estudados por alguns de seus membros, pode-se propiciar um espaço formativo que leve em consideração as demandas preconizadas pela BNCC, em especial no que se refere às diferentes estratégias de resolução de problemas, aos significados associados e à compreensão de que o algoritmo multiplicativo simplificado é apenas uma das possibilidades, mas não a única.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste texto, teve-se como objetivo descrever as produções desenvolvidas por membros do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM/UECE) que abordam a utilização de instrumentos matemáticos históricos direcionados ao ensino da multiplicação, tanto na Educação Básica quanto na formação de professores.

Para alcançá-lo, utilizou-se uma abordagem de pesquisa qualitativa e de procedimentos da pesquisa bibliográfica para a coleta dos dados. Tal coleta levou em consideração os artigos, teses e dissertações produzidos por membros do GPEHM/UECE e depositados no Google Acadêmico e nos repositórios institucionais da UECE e do IFCE.

A partir desse procedimento metodológico, foi possível destacar os 17 trabalhos encontrados, sendo realizada uma descrição agrupada pelos instrumentos matemáticos abordados em cada um deles. Desse modo, evidenciou-se os trabalhos que abordaram o *Promptuario*, o Tabuleiro de Xadrez de John Napier, as Réguas para Cálculo, o Ábaco de Gerbert e as Barras de Calcular.

Percebeu-se, em suma, que as produções do GPEHM envoltas nessa temática apontam para a existência, nesses aparatos, de potencialidades didáticas para o ensino de multiplicação, que podem ser aproveitadas em propostas direcionadas tanto à sala de aula da educação básica, na perspectiva preconizada pela BNCC, quanto à formação de professores que ensinam matemática, com o intuito de minimizar os efeitos das práticas de ensino embasadas na mera memorização e repetição.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Suzie Maria de. **Um estudo sobre a articulação entre a multiplicação contida no Traité de Gerbert (1843) e o ensino na formação de professores de matemática**. Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.

ALMEIDA, Jeniffer Pires de**. Um estudo das operações de multiplicação e divisão realizadas no tabuleiro de xadrez de John Napier para a formação inicial de professores que ensinam matemática**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2024.

ALMEIDA, Jeniffer Pires de; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A Aritmética De Localização de John Napier para a Multiplicação. **Revista História da Matemática para Professores**, [S. l.], v. 6, n. 2, p. 43–56, 2020. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/59. Acesso em: 18 jan. 2025.

ALMEIDA, Jeniffer Pires de; RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Uma proposta de atividade envolvendo o tabuleiro de xadrez de John Napier para o ensino de multiplicação. **Revista História da Matemática para Professores**, [S. l.], v. 9, n. 2, p. 1–10, 2023. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/105. Acesso em: 18 jan. 2025.

ALMEIDA, Jeniffer Pires de; RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; SILVA FILHO, Ezequiel de Paula da. A multiplicação por meio do tabuleiro de xadrez de John Napier: uma experiência na educação básica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 11, n. 32, p. 1–16, 2024. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/12373. Acesso em: 18 jan. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 18 jan. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CP nº 5/2005, aprovado em 13 de dezembro de 2005. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de Pedagogia**. Diário Oficial da União, Brasília, 15 de maio de 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES nº 1.302/2001, aprovado em 6 de novembro de 2001. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.** Diário Oficial da União, Brasília, 5 de março de 2002.

ESTEBAN, Maria Paz Sandín. **Pesquisa qualitativa em educação**: fundamentos e tradições. Tradução de Miguel Cabrera. Porto Alegre: AMGH, 2010.

GIL, Maria Luiza Evangelista. **O ensino de multiplicação com base na inter-relação entre a aritmética, a geometria e a álgebra**. 2024. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2024.

LARANJEIRA, Suyanne Rodrigues Alves. **A Teoria dos Campos Conceituais e suas contribuições para o ensino da multiplicação através de resolução de problema**. 2019. 87 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade Estadual de Roraima, Boa Vista, 2019.

LIMA, Amanda Cardoso Benicio de; SOARES, Kawoana da Costa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Realizando multiplicações por meio das duas réguas para cálculo de William Oughtred: uma proposta de atividade. **Revista História da Matemática para Professores**, [S. l.], v. 9, n. 2, p. 1–9, 2023a. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/99. Acesso em: 18 jan. 2025.

LIMA, Amanda Cardoso Benicio de; SOARES, Kawoana da Costa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Diálogo sobre os conhecimentos aritméticos contidos na manipulação das duas réguas para cálculo de William Oughtred. **Educação Matemática Debate,** Montes Claros, v. 7, n. 13, p. 1–18, 2023b. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/6216. Acesso em: 18 jan. 2025.

LIMA, Gabriel Loureiro; MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque. O caso da memorização de tabuadas de multiplicação. **Ensino da Matemática em Debate**, [S. l.], v. 1, n. 1, 2014. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/19792. Acesso em: 18 jan. 2025.

MARTINS, Eugeniano Brito. **Conhecimentos matemáticos mobilizados na manipulação das barras de calcular de John Napier descritas no tratado Rabdologiae de 1617**. Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.

NAPIER, John. **Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo**. Edimburgo: Andreas Hart, 1617.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; CAVALCANTE, Davi Souza; PEREIRA, Ana Carolina Costa. O procedimento de construção das varetas do promptuario de John Napier (1550-1617). **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 21, p. 112–121, 2020. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4453. Acesso em: 18 jan. 2025.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; OLIVEIRA, Gisele Pereira de. O uso do Promptuario de John Napier (1550 – 1617) para o Ensino de Multiplicação à luz da percepção de Licenciandos da UECE. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 9, n. 26, p. 359–373, 2022. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/8028. Acesso em: 18 jan. 2025.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; PEREIRA, Ana Carolina Costa. O ensino de multiplicação a partir do manuseio do Promptuario de John Napier: uma experiência na formação inicial de professores de matemática. **Contraponto: Discussões Científicas e Pedagógicas em Ciências, Matemática e Educação**, v. 4, n. 5, p. 38-56, 2023a. Disponível em: https://publicacoes.ifc.edu.br/index.php/contraponto/article/download/2925/2867. Acesso em: 18 jan. 2025.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; PEREIRA, Ana Carolina Costa. O processo de graduação e uma utilização do Promptuario para a multiplicação. **Revista História da Matemática para Professores**, [S. l.], v. 7, n. 2, p. 1–11, 2021. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/75. Acesso em: 18 jan. 2025.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Proposta de atividade envolvendo multiplicação a partir da manipulação do Promptuario para a formação de professores. **Revista de Instrumentos, Modelos e Políticas em Avaliação Educacional**, v. 4, 2023b. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/impa/article/view/12298. Acesso em: 18 jan. 2025.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; PEREIRA, Ana Carolina Costa; OLIVEIRA, Gisele Pereira de. Conhecimentos mobilizados a partir da construção do Promptuario de John Napier em um minicurso de extensão universitária. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 8, n. 23, p. 1094–1107, 2021. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5053. Acesso em: 18 jan. 2025.

RIBEIRO, Pedro Henrique Sales; SILVA, Ednaldo Nunes da; OLIVEIRA, Adriana Nogueira de. A resolução de problemas do Campo Conceitual Multiplicativo via Promptuario de John Napier. **Revista Cearense de Educação Matemática**, v. 3, n. 7, p. 1-20, 29 out. 2024. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/rceem/article/view/4160. Acesso em: 18 jan. 2025.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e sua (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SANTOS, Andressa Gomes dos; ALVES, Verusca Batista; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Explorando a régua de cálculo como recurso didático no ensino de multiplicação para formação de professores de matemática. **Revista Brasileira de Ensino Superior**, v. 4, n. 4, p. 38-56, 2018. Disponível em: https://seer.atitus.edu.br/index.php/REBES/article/view/3480. Acesso em: 18 jan. 2025.

SANTOS, Andressa Gomes dos; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A incorporação da régua de cálculo no ensino de multiplicação através da sua construção e do seu manuseio. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 20, p. 357–369, 2021. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2827. Acesso em: 18 jan. 2025.

SANTOS, Andressa Gomes dos. **Os aspectos matemáticos relacionados à média geométrica que emergem a partir da manipulação da escala dos números (1623) elaborada por Edmund Gunter com licenciandos em Matemática.** 2022. 222 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)–Instituto Federal do Ceará, Campus Fortaleza, 2022.

STAREPRAVO, Ana Ruth. **A multiplicação na escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino**. 2010. 262 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Um estudo sobre o instrumento histórico Finitorium e suas possibilidades didáticas

A study of the historical instrument Finitorium and its didactic possibilities

Marina Oliveira Tavares[1]
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Ana Carolina Costa Pereira[2]
Universidade Estadual do Ceará – UECE

RESUMO

A Educação Matemática, como campo de pesquisa, tem contribuído com propostas didáticas voltadas para o ensino de matemática, agregando à prática pedagógica dos professores. Dentre essas possibilidades, tem sido realizada uma articulação com outras áreas de conhecimento, sendo uma delas a história da matemática, articulando-a ao ensino, sendo um de seus contatos através do estudo de instrumentos históricos inseridos em tratados. Assim, tem-se o *Finitorium*, instrumento na obra *De Statua* descrito por Alberti (1404 – 1472), o qual mobiliza conhecimentos matemáticos através do estudo da construção e graduação dele. Desse modo, o presente trabalho tem por objetivo compreender os conceitos históricos e matemáticos acerca do instrumento, observando suas possibilidades didáticas para o ensino. Assim, a metodologia utilizada, além de ser documental, é bibliográfica e de cunho descritivo, com abordagem qualitativa e documental, e por ser uma pesquisa em andamento, tem-se observado os aspectos contextuais e historiográficos sobre o instrumento e o tratado que está inserido, além da relação com outras obras descritas pelo mesmo autor, permitindo conhecer os conceitos por meio de um olhar reflexivo sobre a matemática do período histórico em estudo. Assim, ao propor a investigação histórica através do *Finitorium*, tem-se possibilidades didáticas, no intuito de articular a história ao ensino de matemática, de tal maneira que contribua para a prática pedagógica dos professores.

Palavras-chave: Ensino de Geometria; História da Matemática; Finitorium

ABSTRACT

Mathematics Education, as a field of research, has contributed with didactic proposals aimed at teaching mathematics, adding to the pedagogical practice of teachers. Among these possibilities, there has been an articulation with other areas of knowledge, one of which is the history of mathematics, articulating it to teaching, one of its contacts being through the study of historical instruments inserted in treatises. Thus, there is the Finitorium, an instrument in the work De Statua described by Alberti (1404–1472), which mobilizes mathematical knowledge through the study of its construction and graduation. The aim of this work is to understand the historical and mathematical concepts surrounding the instrument, observing its didactic possibilities for teaching. As well as being documental, the methodology used is bibliographical and descriptive, with a qualitative and documental approach, and as it is research in progress, we have observed the contextual and historiographical aspects of the instrument and the treatise it is part of, as well as the relationship with other works described by the same author, allowing us to get to know the concepts through a reflective look at the mathematics of the historical period under study. Thus, by proposing historical research through the Finitorium, there are didactic possibilities for linking history to mathematics teaching in such a way as to contribute to teachers' pedagogical practice.

Keywords: Geometry teaching; History of Mathematics; Finitorium.

[1] Mestranda pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Professora do ensino básico na Secretaria Municipal de Educação e Desporto de Paraipaba (SME/Paraipaba), Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: marioliveira.tavares@uece.br

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE), Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: carolina.pereira@uece.br.

INTRODUÇÃO

A Educação Matemática tem se voltado cada vez mais para o estudo de propostas didáticas, no intuito de oferecer aportes teóricos e metodológicos que tragam a superação das dificuldades encontradas durante o processo de ensino de matemática nas salas de aula, e tal inserção delas contribui também para a prática pedagógica dos professores.

Dessa forma, uma das relações que ela vem estabelecendo é com a história da matemática, de maneira que proporcione recursos que auxiliem nesse processo de profissionalização docente, articulando tal investigação na área ao ensino. Nesse estudo, considera-se uma perspectiva sobre a história da matemática como um campo de pesquisa que fornece recursos através de diferentes fontes para o ensino por meio de um tratamento didático.

Esse contato com a história pode ser dado através de instrumentos matemáticos descritos em tratados, os quais são aparatos, que de acordo com Saito (2016) possuem uso em laboratório para realizar observações e experimentos, bem como medições de comprimento ou outras grandezas. Um desses é o *Finitorium*, descrito por Leon Battista Alberti (1404 – 1472), por volta de 1466, no tratado *De Statua* o qual relata sua construção e manuseio, para estabelecer medidas e posições proporcionais dos membros e partes de um corpo vivo, visando a construção de estátuas.

Assim, em um contexto renascentista, em que há uma maior valorização artística e cultural, Alberti produz uma obra que retrata algumas formas de trabalhos manuais, através da produção de estatuários, de maneira a trazer instruções e aparatos que poderiam auxiliar em uma prática comum ao período.

Nesse sentido, o *De Statua* possui instrumentos descritos pelo autor que ele acredita auxiliar o trabalho de todos aqueles "que se dedicam a exprimir e a retratar nas suas obras a natureza e as semelhanças dos corpos criados pela natureza" (Alberti, 1782, p. 323, tradução nossa[3])[4], e discute sobre as semelhanças e diferenças entre os da mesma espécie ou não.

Dessa forma, ele descreve a construção e manuseio de três artefatos: *Exempeda*, que se configura como uma régua que se estende do topo da cabeça aos pés, *Normae mobiles* ou réguas móveis, as quais se comportam como esquadros determinando diâmetro ou distância entre membros, e o *Finitorium*, que determina localizações de partes do corpo, de maneira a determinar o tamanho proporcional dos membros.

O estudo desse instrumento histórico, descrito através do tratado *De Statua*, faz parte de uma pesquisa a nível de mestrado, em andamento, em que se tem buscado investigar a obra e o artefato na busca de possibilidades para inserção de propostas didáticas que articulem a história e o ensino de matemática. Atualmente, tem-se investigado a relação do *Finitorium* com outros instrumentos descritos pelo autor em outros trabalhos, além de tratados que trazem conceitos matemáticos que o autor se apoiou na sua escrita. Dessa maneira, busca-se estudos que imprimam não só contexto do período de escrita do tratado, mas também a compreensão epistemológica dos conhecimentos que Alberti traz através do seu trabalho.

[3] "I o penso che le arti di coloro, che si messono a volere esprimere, & ritrarre con le opere loro le essigie, & le somiglianze de corpi procreati da la natura [...]" (Alberti, 1782, p. 323).

[4] Segundo Grayson (1972), há dez versões do tratado, e nessa escrita apoiou-se num desses manuscritos, como forma de cotejamento, disponibilizado pela Biblioteca Bodleiana em Oxford, compilado em 1805 com outros escritos do autor.

Nesse sentido, para nortear esse escrito, elabora-se a seguinte pergunta norteadora: Quais os conhecimentos matemáticos mobilizados durante a construção do *Finitorium*? A fim de respondê-la, o objetivo desse trabalho busca compreender os conceitos históricos e matemáticos acerca do instrumento, observando suas possibilidades didáticas para o ensino.

No intuito de atingir o objetivo traçado, essa pesquisa traçou um caminho metodológico utilizando-se da pesquisa documental, bibliográfica, com uma abordagem qualitativa e descritiva. Assim, como forma de organizar essa escrita, dividiu-se esse trabalho em seis tópicos, sendo a primeira com as considerações iniciais.

Posteriormente, no segundo tópico destinou-se a descrever sobre o tratado no qual o instrumento está inserido, possuindo como subtópico a descrição acerca da investigação do *Finitorium* escolhido, por conseguinte, a metodologia utilizada no trabalho, passando adiante para os resultados e discussões sobre o estudo, no quinto realizou-se algumas considerações finais, sendo o último reservado para as referências utilizadas no texto.

O TRATADO HISTÓRICO *DE STATUA*

Partindo de um estudo historiográfico da obra histórica, observou-se que sua escrita versa no período renascentista (séculos XV e XVI), e ao final da Idade Média, Cole (1995, p. 7, tradução nossa) afirma que "a ideia de *rinascità* (renascimento) definiu um movimento em vez de um período, com foco no renascimento do aprendizado clássico e um senso estimulante de potencial humano renovado nas esferas moral, política e criativa".

Sobre ele, Saito (2015) cita alguns aspectos que fizeram parte do desenvolvimento científico no período, dentre eles reformas no ensino, desenvolvimento das línguas vernáculas, valorização das artes manuais e circulação de conhecimento através do surgimento da imprensa. Nesse contexto, observa-se que as cortes regionais como Nápoles, Urbino, Milão, Florença, Ferrara e Mântua, tiveram papel importante na disseminação e desenvolvimento da valorização cultural e artística, de maneira a adaptar as tradições locais e agendas culturais, para se adequarem às últimas tendências, justificando a riqueza e diversidade de arte italiana durante esse período (Cole, 1995; Baxandall, 1991; Bucker, 1983).

Assim, tais mudança visuais nas cidades italianas são retratadas em obras do período, como *De Re Aedificatoria* de Alberti publicado em 1485, em que menciona sobre essa renovação, e Pontano (1514), no tratado *De Magnificentia*, escrito por volta de 1486[5], cita sobre a civilização romana, trazendo exemplos de construtos como a ponte de Carlos Magno e as igrejas, vilas e bibliotecas de Cosimo de Médici.

Essas mudanças arquitetônicas se deram a partir do investimento por parte dos governantes renascentistas, que de acordo com Cole (1995, p. 17, tradução nossa), acreditavam que "o dinheiro esbanjado em arte e arquitetura era dinheiro gasto honrosamente". Dessa forma, houve enriquecimento gradual na cultura através das artes, em especial, sendo influenciados por

[5] O tratado aqui mencionado foi escrito no século XV, mas o acesso foi através de uma publicação do ano de 1514, intitulada por *Opera Ioannis Iouiani Pontani. De fortitudine: libri duo. De principe: liber unus. Dialogus qui Charon inscribitur. Dialogus qui Antonius inscribitur. De liberalitate. Liber unus. De beneficentia: liber unus. De magnificentia: liber unus. De splendore: liber unus. De conuiuentia: liber unus. De obedientia: libri quinque. De prudentia: libri quinque,* disponível na *National Central Library of Rome* e na *Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze*, em latim.

> Humanistas florentinos como Leonardo Bruni e Leon Battista Alberti, eles próprios de distintas famílias aristocráticas, citaram o antigo filósofo grego Aristóteles em apoio a tal exibição custosa: riqueza. Eles argumentaram que era um pré-requisito da virtude na arena pública, pois apenas os ricos tinham a oportunidade de usar o dinheiro virtuosamente e para o bem público (Cole, 1995, p. 17, tradução nossa).

Nesse âmbito, o emprego de artistas locais passa a ter maior valorização, de modo a oferecer aos governos uma base popular, baseando-se no orgulho local e voltando a ter uma identidade cívica cultural através dessas manifestações artísticas, fornecendo assim uma continuidade histórica (Cole, 1995).

Por conta do interesse em demonstração de prestígio e poder, houve uma movimentação comercial maior em relação às artes no século XV, sendo a pintura um dos exemplos, e Baxandall (1991) discute sobre isso, afirmando que o dinheiro teve importância considerável na história da arte, bem como na forma e estilo que era produzida, sendo o estilo econômico renascentista impresso nesses feitos artísticos.

Dessa forma, o renascimento é marcado com esses ideais de que a arquitetura associada às artes traz grandeza e prestígio para quem investia nelas, obtendo-as como um trunfo, sendo essas concepções encontradas na escrita do tratado em estudo, *De Statua*, em que Alberti reafirma esse argumento ao trazer instruções sobre como construir estatuários colossais, para todos os que se destinavam a trabalhar com eles.

Dessa obra histórica, encontra-se 10 manuscritos, datados a partir da segunda metade do século XV ou mais tarde, em algumas bibliotecas em Florença, Milão, Oxford e Roma, além da tradução realizada por Cosimo Bartoli contida na obra *Opuscoli Morali di Leon Batista Alberti* (1568). Aqui, esse estudo deteve-se a uma impressão dessa tradução, publicada em 1782 pelo Nell' Instituto delle Scienze, em Bolonha, a qual possui também os tratados *De Pictura* e *Della Architetura*, sendo introduzida por uma biografia escrita por Rafael Du'Fresne sobre Alberti.

Figura 1 – Frontispício da tradução de 1782

Fonte: Bartoli (1782, s.p.)

Observa-se que ela foi dedicada a Giovanandrea de' Bussi, e Grayson (1972) afirma que, por essa razão, o manuscrito não pode ser datado de antes de 1466, pois foi o ano em que ele se tornou bispo de Aleria. Porém, nem todos os manuscritos possuem esse escrito, sendo encontrado para esse trabalho uma transcrição feita pela biblioteca *Delle fonti storico-artistiche.*

Na dedicatória, Alberti demonstra muito respeito e admiração por Bussi, além disso, o bispo era conhecido por ser "ativo e renomado como estudioso e crítico textual, auxiliando os impressores Schweinheim e Pannartz, editando muitos textos clássicos" (Grayson, 1972, p. 140, tradução nossa). Nela, o autor menciona que se tratará do arquiteto, sendo uma segunda obra sobre essa profissão, mas no corpo do texto afirma que escreve para todos aqueles que trabalham com a retratação dos corpos e da natureza.

O tratado está estruturado na forma de texto corrido, sendo uma característica comum nos manuscritos da época, e após descrever algumas profissões que lidavam com modelagem ou criação de imagens, introduz sua fala sobre os instrumentos que podem ser utilizados para a realização dos trabalhos manuais mencionados, citando a necessidade deles para construir o que se desejasse, afirmando que "se os carpinteiros não tivessem o esquadro, o chumbo, a linha, o arquipéncil, os sextos para fazer o círculo, não poderiam, se não fosse por meio desses instrumentos, ordenar os ângulos, nivelar, dirigir e terminar suas obras" (Alberti, 1782, p. 324, tradução nossa[6]).

Acerca desses artefatos, o autor três, sendo denominados por *Exempeda*, *Normae mobiles* (réguas móveis) e o *Finitorium*. O primeiro, é no formato de uma régua já existente, e a partir dela, o autor indica construir sua graduação com "uma linha reta ao longo do comprimento desta régua, tão longa quanto o comprimento do corpo que se pretende medir, ou seja, do topo da cabeça à planta do pé" (Alberti, 1782, p. 326, tradução nossa[7]), ou seja, de acordo com o tamanho do corpo que se deseja medir, não possuindo um comprimento pré-estabelecido.

O segundo supracitado, o *Normae mobiles*, é formado por outras réguas, em um formato diferente da *Exempeda*, sendo composto por duas de base na direção horizontal, e duas verticais, formando a configuração de dois esquadros. Esse, tem como finalidade realizar medições de distâncias de membros, como por exemplo, o comprimento do diâmetro da cabeça.

O último, *Finitorium*, é composto por três instrumentos unidos: *Orizonte,* régua, a qual se move sob o primeiro, e o fio de prumo, sendo seu primeiro membro citado em outra obra, a *Ex Ludis Rerum Mathematicarum* (c. 1452), e utilizado em *Description Urbis Romae* (1443), quando Alberti realizou um mapeamento da cidade de Roma. A seguir, vê-se uma imagem da exposição desses instrumentos feita no Museo Galileu.

[6] "Che pensi tu? Se i legnaiuoli non havessino havuto la squadra, il piombo, la linea, 'l archipenzolo, le seste da fare il cerchio mediante i quali instrumenti, essi possono ordinare gli angoli, spianare, dirizzare, & terminare i loro lavori" (Alberti, 1782, p. 323).

[7] "Per lo lungo di questo regolo si tira uma linea direta, lunga quanto farà la lunghezza del corpo che noi vorremo misurare, cioè da la somità del capo sino ala pianta del piede" (Alberti, 1782, p. 326).

Figura 2 – Instrumentos contidos no tratado *De Statua*

Fonte: Della Scienza (2025)

No subtópico a seguir, encaminha-se o leitor para a descrição do *Finitorium*, seus membros e como o autor detalha sua construção, de maneira a observar os aspectos matemáticos que são mobilizadas nesse percurso e reservando essa escrita para transmitir algumas ideias que Alberti menciona sobre sua graduação.

INSTRUMENTO DE MEDIÇÃO *FINITORIUM*

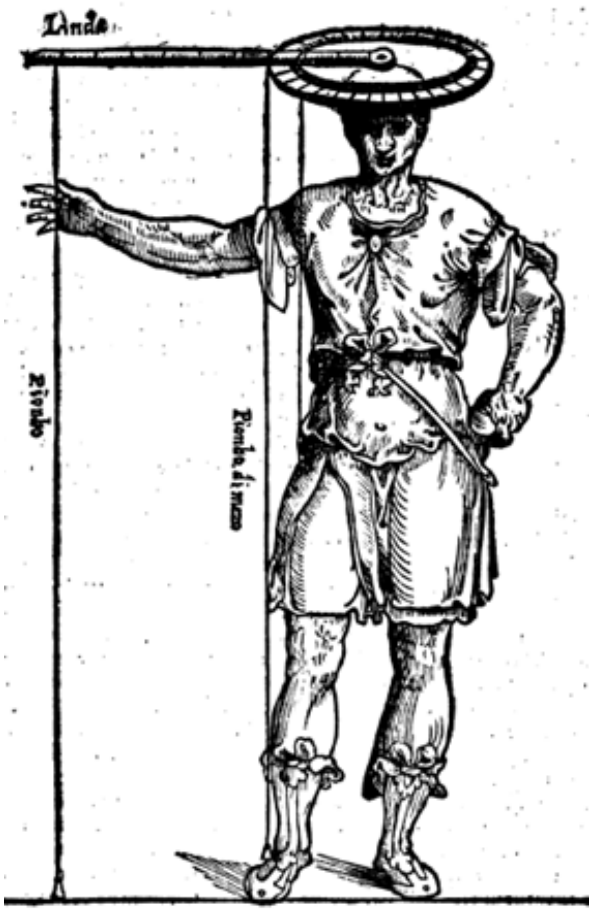
O instrumento escolhido para estudo encontra-se descrito em *De Statua*, juntamente com outros dois artefatos citados anteriormente, e Alberti (1782, p. 325, tradução nossa[8]) afirma que através dos métodos descritos por ele, "aquele que for instruído nessas coisas será capaz de marcar, avistar, notar, com marcas muito firmes, os lineamentos, locais e posições das partes de qualquer corpo".

A ideia do autor é a de que, ao medir um corpo, caso as partes da estátua ou colosso sejam separadas, ou construídas em locais diferentes, suas instruções permitiriam localizar as partes do corpo do estatuário, sem perder essas medições ao longo do tempo. Além disso, ele exemplifica esse pensamento ao afirmar que, ao cobrir totalmente uma estátua com cera ou terra, seria possível perfurar a estátua e encontrar através das medidas traçadas, os seus membros.

Assim, ao tratar sobre sua composição, ele descreve que o *Finitorium* é composto por três partes, ou membros, sendo o primeiro chamado de ***Orizonte***, composto por um círculo graduado, o segundo de **régua**, que perpassa por todo o círculo, e o terceiro por **fio de prumo** com chumbo na ponta, o qual se estende desde o topo da cabeça até o chão.

[8] "Perche colui che fará instrutto do queste cose, potrà talmente segnare & avvertire, & notare com alcuni fermissimi contrasegni, i liniamenti, i siti, & le positure de le parti di qual si voglia corpo" (Alberti, 1782, p. 325).

Figura 3 – *Finitorium*



Fonte: Alberti (1568, p. 169)

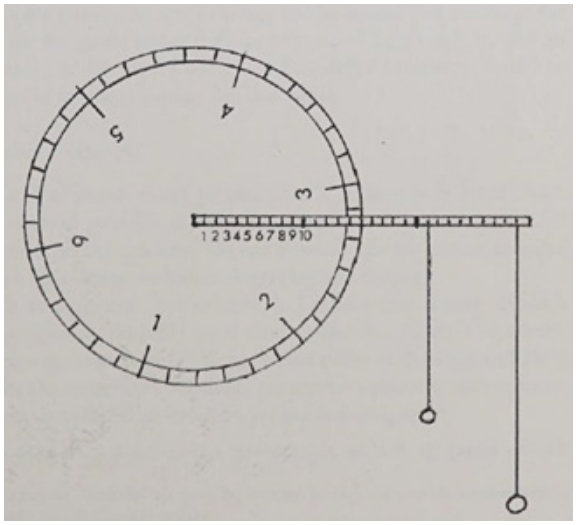
A descrição de como construí-lo é feita da seguinte forma: "coloca uma placa plana, [...], e desenha nela um círculo, cujo diâmetro saber ser de três pés, e divide a circunferência do dito círculo na sua extremidade em partes iguais" (Alberti, 1782, p. 328, tradução nossa[9]). Para essa divisão de maneira igualitária, ele referencia a mesma utilizada no Astrolábio, e chama cada parte dividida de "graus" e subdivide cada um em quantas partes quiser, mas ele sugere 6 "partes mais pequenas" e chama a esse espaço menor de "minutos". Dessa forma, cada grau será nomeado por um número, iniciando por 1, em ordem, até chegar ao 4, e a este círculo graduado, chama-se *Orizonte*.

O segundo membro é construído a partir de uma régua, já existente, que possua "três pés de comprimento do seu gênero, e com uma de suas cabeças, prendo-a com um pivô no centro do seu horizonte ou círculo, de modo que fique firmemente sobre ele" (Alberti, 1782, p. 328, tradução nossa[10]). Assim, é possível que a régua possa se transferir à volta do *Orizonte*, e para graduá-la, ele pede que realize conforme o modelo descrito na *Exempeda*, dividindo-a em onças e nomeando cada uma a partir do 1, até a extremidade da régua. A ela, Alberti indica prender o terceiro membro do *Finitorium*, o fio de prumo, com um pequeno chumbo na ponta, de maneira que ele se mova pela régua.

[9] "Piagliasi uma távola piana bem piallata & pulita, & in quella si tira um cerchio, il diâmetro del quale sai ter piedi, & la circunferentia di detto cerchio, nella sua estremità, si divida in parte uguali" (Alberti, 1782, p. 328).

[10] "Io piglio um regoletto fottile & diritto, lungo ter piedi del suo genere, & com uma de le sue teste lo fermo com um perno al centro del suo Orizonte o cerchio, talmente che egli vi stia faldo" (Alberti, 1782, p. 328).

Figura 4 – *Finitorium*



Fonte: Grayson (1972, p. 141)

Com relação ao segundo fio de prumo apresentado na Figura 3, Alberti (1782, p. 329, tradução nossa[11]) indica que, caso queira encontrar algumas partes do corpo mais côncavas ou fundas, poderá ser acrescido outro fio de forma semelhante, colocando os dois entre o que se deseja medir, na régua, encontrando a distância entre eles. Assim, "por meio dessas duas linhas de prumos, ocorrerá que, pela sua retidão, como se estivessem presos a um estilo da superfície plana acima" pode-se encontrar o quanto o segundo fio está mais perto do que o primeiro, do centro do *Finitorium*, chegando assim a uma medida central, a qual ele chama de prumo médio.

Após o momento de descrição da construção, Alberti (1782) indica como manusear o instrumento, para traçar medições dos membros do corpo vivo. Tais práticas realizadas não determinam de maneira específica uma medida de membros, afirmando ter ciência da diversidade dos corpos na introdução da obra, mas o objetivo é medir para determinar localizações desses membros, como por exemplo:

> diga-se que eu quero marcar ou anotar o ângulo do cotovelo esquerdo, [...] coloco o seu centro no topo da cabeça da estátua, neste dito estado e lugar, de modo que a placa em que o *Orizonte* é desenhado esteja completamente firme e imóvel; e volto o chumbo até que a borda do chumbo toque o cotovelo esquerdo da dita estátua que queríamos anotar. [...] Em primeiro lugar, verificaremos a que distância está o fio de prumo no horizonte do local de onde o movemos pela primeira vez, e determinaremos o grau em que o referido fio de prumo toca no *Orizonte* [...]. Em segundo lugar, verificarás, pelas onças e minutos marcados na régua, a que distância o cotovelo está do centro do meio do *Orizonte*. Em terceiro lugar, verificarás, colocando o modelo no chão da dita estátua, quantas onças e minutos o dito cotovelo está acima do dito chão (Alberti, 1782, p. 329, tradução nossa).

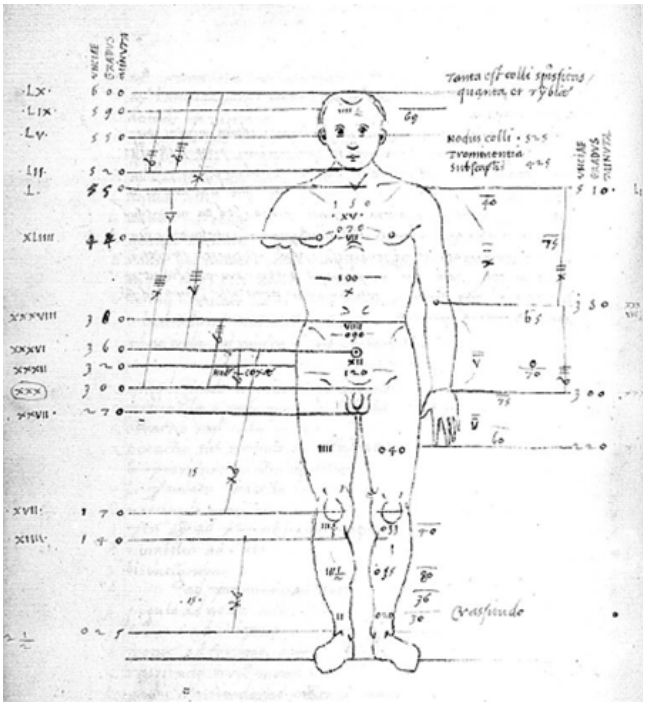
Acerca do texto exposto, observa-se que, há etapas na utilização do instrumento, sendo a primeira a localização do cotovelo, alinhando o prumo e medindo o grau e minuto inicial. Em seguida, ao realizar a volta com a régua em torno do *Orizonte*, até tocar no cotovelo novamente, denota-se

[11] "[..]percioche mediante queste due fila de piombi, ti avverrà che per le loro diritture, come che elle sieno appiccate ad uno stile de la superficie piana di sopra" (Alberti, 1782, p. 329).

o ponto final, demarcando não só onde localiza-se o membro, mas observando através da distância entre os graus marcados, a espessura do cotovelo.

Além disso, para saber a distância dele ao centro do corpo humano, utiliza-se o segundo membro do *Finitorium* novamente, mas como régua, demarcando essa medida, finalizando com a determinação da sua distância até a planta do pé, sendo a *Exempeda* utilizada como instrumento auxiliar, para finalizar essa prática.

Figura 5 – Medições traçadas por Alberti



Fonte: Alberti (c. 1466)

Para exemplificar sua fala, a Figura 5 representa o manuseio que Alberti (1782) realizou com os instrumentos, descritos no tratado, medindo uma estátua já pronta, de autoria de Fídias. Para isso, serra o colosso ao meio, facilitando a prática e demarcando, pois o autor descreve na obra que, ao realizar tais medições, mesmo que sejam em locais diferentes, pode-se unir as localizações marcadas, obtendo assim as medidas pretendidas de um corpo vivo. Além da figura no manuscrito, o autor insere uma tabela com medidas demarcadas de cada parte do estatuário, especificando quais membros e como de onde inicia a medição.

METODOLOGIA

De maneira a delinear um percurso metodológico, traçou-se algumas etapas, iniciando pela pesquisa documental, estudo bibliográfico acerca dele e dos instrumentos descritos, sob o olhar de uma abordagem qualitativa e de cunho descritivo. Na primeira etapa, utiliza-se da pesquisa documental pois o instrumento escolhido para estudo encontra-se em um tratado histórico, apoiando-se em Cellard (2012), que traz um estudo da história em seu contexto e suas finalidades.

Em seguida, realizou-se um estudo bibliográfico, corroborando com Marconi e Lakatos (2017, p. 200), pois a pesquisa consultou uma bibliografia pública "em relação ao tema de estudo, desde

publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, material cartográfico etc.", sobre a obra histórica e o contexto em que ela está inserida, e acerca do instrumento.

Outrossim, a fim de conhecer as possibilidades metodológicas através da construção dos membros do instrumento escolhido, utilizou-se o método qualitativo, através do estudo dos conceitos matemáticos mobilizados no *Finitorium*, de maneira que "a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto, pois é nessa fase que constrói as hipóteses que nortearão a própria pesquisa e possibilitarão a formulação necessária para a construção de um novo conhecimento" (Silva, 2015, p. 110).

Além disso, possui cunho descritivo, o qual "visa descrever as características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis" (Prodanov & Freitas, 2013, p. 52). Tal descrição se faz necessária pois, durante o caminho metodológico da pesquisa realizada, necessitou-se de um detalhamento das características do tratado e instrumento em estudo.

Para essa pesquisa, utilizou-se da versão publicada, a partir da tradução de Bartoli de 1568, pelo *Nell Instituto delle Scienze* (1782), a qual possui uma biografia de Alberti escrita por Rafael Du' Fresne e outras obras do autor como *De Pictura* (1435) e *De Re Aedficatoria* (1452), sendo sua escolha pela facilidade de tradução por estar traduzido para a língua italiana realizando-se um cotejamento com o manuscrito disponibilizado pela Biblioteca Bodleiana em Oxford, compilado a outros trabalhos de Alberti. Realiza-se dessa forma, compreendendo também ser uma obra primária, pois,

> Se um educador matemático está utilizando uma obra em seu trabalho, ela será sua fonte primária, pois é o principal meio de obtenção de informação. Todos os outros materiais que ele usar para entender sua obra principal, algo sobre ela e seu autor, o contexto ou a epistemologia em que está inserida, serão suas fontes secundárias (Silva; Pereira, 2021, p. 232).

Portanto, o caminho metodológico delimitado aqui vem a partir do estudo longitudinal do tratado histórico, iniciando-se com sua tradução, para posterior leitura e estudo de seu contexto, historiografia e epistemologia, sendo necessárias tais ações, para que em um momento posterior, haja compreensão dos conhecimentos históricos e matemáticos mobilizados, para observar as possibilidades didáticas existentes.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir do estudo sobre a construção dos membros do instrumento, bem como sua graduação, observou-se nesse trabalho sobre os conceitos matemáticos envoltos durante esses procedimentos citados, bem como os conhecimentos geométricos acerca das medidas traçadas na circunferência, as quais o autor se apoia, a fim de traçar possibilidades didáticas, trazendo a investigação em história da matemática no ensino, através de um artefato histórico.

Para compreender os conhecimentos matemáticos trazidos por Alberti através da descrição dos instrumentos, se faz necessário citar como o autor trata dos conceitos de medida. Dessa forma, coloca-se aqui a descrição, no intuito de observar a definição que Alberti trouxe no tratado:

> Portanto, trataremos de medida, que certamente não é outra coisa senão uma observação e uma notação estável, firme e certa, pela qual se conhece e se coloca em números e me-

> didas o hábito, a proporção e a correspondência que todas as partes do corpo têm entre si, umas com as outras, tanto em altura como em espessura, e o que elas têm com todo o comprimento do corpo. [...] A fixação dos termos é a determinação ou estabelecimento que se faz traçando todas as linhas, e desenrolando-as, parando os ângulos, os fundos, os relevos, colocando-os todos como uma regra verdadeira e certa nos seus devidos lugares (Alberti, 1782, p. 326 – 327).

Assim, a medida para Alberti se trata de notações exatas acerca do que se mede, de modo a utilizá-la como referência em comparação com outras partes que se deseja conhecer as dimensões. Bem como a fixação desses termos, que toma essas notações para estabelecê-las e tomar como regra a fim de realizar outras medições, permitindo comparar umas às outras.

Saito (2015, p. 175) discute também sobre esse conceito, afirmando que "significa essencialmente 'comparar' e, muitas vezes, para medirmos, subdividimos uma das grandezas para obter a unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes", nessa comparação entre grandezas. Essa fala se dá acerca das matemáticas no período entre século XV e XVI, de maneira que a prática conduzia os procedimentos de medições, os quais se vê impresso na obra de Alberti.

Assim, a fim de articular as matemáticas mobilizadas na construção do instrumento com as diretrizes educacionais, investigou-se na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o qual é documento norteador para a educação brasileira, quais as competências e habilidades que podem ser desenvolvidas ou ressignificadas por meio dessa relação entre os conhecimentos históricos e matemáticos.

Sabendo disso, descreve-se a seguir (Quadro 1) alguns conceitos matemáticos mobilizados durante a construção do *Finitorium*, de acordo com cada membro, observando os conhecimentos envoltos na prática e quais relações possui com algumas principais diretrizes abordadas no documento oficial.

Quadro 1 – Conhecimentos matemáticos mobilizados e diretrizes

MEMBRO DO INSTRUMENTO	CONCEITO MATEMÁTICO	HABILIDADES BNCC
Orizonte	Medidas na circunferência e seus ângulos	(EF06MA26) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão;
Régua	Medição de distâncias	(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.
Fio de prumo	Medição de distâncias e proporcionalidade entre grandezas	
Fios de prumo		(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Fonte: Elaborado pelas autoras

Com relação ao *Orizonte*, formado por dois círculos concêntricos, o autor cita conhecimentos matemáticos como diâmetro e estabelece medidas acerca dele, o que possibilita trabalhar com os conceitos relacionados ao círculo, como construí-lo e definir suas medições. Além disso, pode-se estabelecer relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, pois o instrumento lida com medidas de comprimento e de localização dos membros do corpo humano.

Por se tratar de medidas antropométricas[12], o grau no *Orizonte* possui um significado epistemológico diferente do que conhecemos na matemática moderna, sendo tratado nesse caso como as partes graduadas do instrumento, o que contribui no estudo sobre as unidades de medida, constituídas historicamente. Aqui, nota-se através do Quadro 1 que, através da construção desse membro, podem ser trabalhadas resoluções de problemas referente às medidas de comprimento, como eram realizadas historicamente, reconhecendo sua utilização através de um instrumento inserido em uma obra histórica.

Além disso, por se tratar de um instrumento que traça medições de distâncias, a régua e fio de prumo mobilizam esses conhecimentos, possibilitando a resolução e elaboração de problemas dessa natureza, conforme as diretrizes nacionais, principalmente através da articulação com outras áreas de conhecimento. Nesse sentido, os dois fios de prumo possibilitam a inserção de conhecimentos sobre proporcionalidade entre grandezas, de maneira a estabelecer uma medida central com relação ao centro do *Orizonte*, indo de encontro às diretrizes mencionadas anteriormente, ressignificando esses conhecimentos.

Dessa forma, notam-se algumas possibilidades didáticas ao inserir o estudo acerca da construção e graduação do instrumento histórico, através da investigação dos conhecimentos matemáticos mobilizados em cada membro do *Finitorium*. Assim, consegue-se articular conhecimentos, de maneira a contribuir com o ensino de matemática, enriquecendo a prática pedagógica,

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do estudo histórico e matemático instrumento, refletindo acerca dos conceitos envoltos em sua construção, em que se utiliza como fonte principal o documento histórico *De Statua* (c. 1466), é possível observar que a articulação entre a investigação histórica e o ensino de matemática, pode vir a contribuir com o processo de ensino, ao permitir uma reflexão e ressignificação de conhecimentos, demonstrando uma ciência como fruto de diversas transformações humanas ao longo do tempo.

Além disso, a partir do estudo do documento histórico, observou-se que cada instrumento descrito em *De Statua* possui uma construção e modo de utilização diferente, porém os fins se assemelham, sendo eles a determinação de medidas proporcionais de corpos vivos, para que ao construir ou esculpir um estatuário, os tamanhos determinados sejam de acordo com as medições de um corpo humano.

Sabe-se também, que apesar de serem listadas aqui algumas habilidades que os estudantes de cada etapa devem desenvolver, de acordo com a BNCC, o documento sozinho não possui direcionamentos que tragam aportes didáticos para o professor utilizar durante sua prática, e por isso, esse

[12] Beltran et. al. (2017) afirmam que as medidas antropométricas, como o pé por exemplo, eram estabelecidas por instituições do governo e variavam conforme a região.

estudo preocupou-se em trazer sugestões didáticas, de maneira a articular a história ao ensino de matemática.

Acerca dos conhecimentos matemáticos mobilizados, notam-se que estão no âmbito da geometria, além de trazer possibilidades didáticas nessa área de ensino, ressignifica conhecimentos inseridos nos livros didáticos e diretrizes educacionais, de maneira a enriquecer o ensino sobre as medidas da circunferência, distâncias proporcionais e comparação entre grandezas, articulando história ao ensino de matemática.

Assim, apesar da investigação histórica, ela sozinha não se configura como atividade didática para o ensino, mas ao aproximar as duas áreas de conhecimento, história e ensino, realiza-se um diálogo que possibilita a construção de recursos voltados para a formação inicial de licenciandos, propiciando atividades enriquecedoras para a futura prática pedagógica.

REFERÊNCIAS

ALBERTI, Leon Battista. ***De Statua***.[s.l.] [s.n]. 1466c. Acervo da Biblioteca Bodleiana.

ALBERTI, Leon Battista. ***Della Statua*.** In: BARTOLI, Cosimo (trad.). ***Della Architettura*, *Della Pittura* e *Della Statua***. Bolonha: Nell' Instituto Delle Scienze, 1782.

ALBERTI, Leon Battista. **On Sculpture.** In: Grayson, Cecil (trad.). **On paiting and On Sculpture**, 1972.

ALBERTI, Leon Battista. **Opuscoli morali di Leon Batista Alberti**. In: BARTOLI, Cosimo (trad.). Itália. 1568.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BAXANDALL, Michael. **O olhar renascente**: pintura e experiência social na Itália da Renascença. Tradução de Maria Cecília Preto da Rocha de Almeida. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1991.

BUCKER, Peter. **Florence Golden**. Milão: Arnoldo Mondadori Editore, 1983.

BELTRAN, Maria Helena Roxo *et al*. **A imprensa, a pólvora e a bússola**: ciência e técnica nas origens da ciência moderna. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

CELLARD, André. A análise documental. In: POUPART, J. et al (org.). **A pesquisa qualitativa:** enfoques epistemológicos e metodológicos. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2012. p. 295-316. Tradução de Ana Cristina Arantes Nasser.

COLE, Alison. ***Art of the Italian Renaissance courts***. Londres: The Everyman Art Library, 1995.

DELLA SCIENZA, Instituto e Museo de Storia (org.). **Mostra Museo Galileo**. Disponível em: https://mostre.museogalileo.it/cms/it/sezione-vii/234-sez-vii-2.html. Acesso em: 20 jan. 2025.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

PONTANO, Giovanni. ***Opera Ioannis Iouiani Pontani. De fortitudine: libri duo. De principe: liber unus. Dialogus qui Charon inscribitur. Dialogus qui Antonius inscribitur. De liberalitate. Liber unus. De beneficentia: liber unus. De magnificentia: liber unus. De splendore: liber***

unus. De conuiuentia: liber unus. De obedientia: libri quinque. De prudentia: libri quinque. In: TROT, Barthélemy (comp.). Florença: Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze, 1514.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015. 259 p.

SAITO, Fumikazu. História e Ensino de Matemática: Construindo Interfaces. In: SALAZAR, Jesús Flores; GUERRA, Francisco Ugarte. **Investigaciones em Educación Matemática**. Lima: PUC, 2016. P. 253 – 291.

SILVA, Wilker Solidade da. A pesquisa qualitativa em educação. Horizontes–**Revista de Educação** ISSN 2318-1540, [S. l.], v. 2, n. 3, p. 97–105, 2015.

SILVA, Isabelle Coelho da; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Definições e Critérios para o Uso de Textos Originais na Articulação entre História e Ensino de Matemática. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 35, n. 69, p. 223-241, jan. 2021.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

O uso do teodolito no ensino de conceitos trigonométricos: uma abordagem histórica e prática

The use of theodolite in the teaching of trigonometric concepts: a historical and practical approach

Sara Carolayne Mendonça Salgado[1]
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

Marcos Andrey Rosa[2]
Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI

RESUMO

Este trabalho descreve uma prática pedagógica, apoiada na História da Matemática, para o ensino de Trigonometria em uma turma de 30 alunos do 2° ano do Ensino Médio de uma escola pública do Sul de Minas Gerais. O objetivo foi explorar a construção e o uso de um Teodolito caseiro, instrumento histórico de medição, como recurso para ensinar e ampliar conceitos trigonométricos. A metodologia adotada foi dividida em quatro etapas: a apresentação dos aspectos históricos, a construção do Teodolito, a realização de medições práticas e a socialização dos resultados encontrados pelos alunos. O uso do Teodolito caseiro como recurso didático, juntamente com a exploração de contextos históricos, mostrou-se uma estratégia eficaz para oportunizar maneiras de trabalhar com os conceitos de Trigonometria de forma ampliada. Destacamos que durante a implementação da prática com o Teodolito não houve erros relacionados à aplicação dos conceitos de Trigonometria, apenas erros de medida. O uso Teodolito no ensino de Trigonometria possibilitou evidenciar que os instrumentos históricos em atividades práticas favorecem a aprendizagem ativa e contextualizada, auxiliando os alunos a compreenderem a relevância da Trigonometria. Logo, vemos como uma possibilidade para novos trabalhos a exploração de outros instrumentos históricos em sala de aula, permitindo comparar os diferentes métodos de medição e o desenvolvimento dos instrumentos matemáticos.

Palavras-chave: História da Matemática; Instrumento histórico de medida; Ensino Médio; Trigonometria.

ABSTRACT

This paper describes a pedagogical practice based on the History of Mathematics for teaching Trigonometry to a class of 30 students in the second year of high school at a public school in the south of Minas Gerais. The aim was to explore the construction and use of a homemade theodolite, a historical measuring instrument, as a resource for teaching and expanding trigonometric concepts. The adopted methodology was divided into four stages: presenting historical aspects, constructing the theodolite, conducting practical measurements, and sharing the results obtained by the students. Using homemade theodolite as a didactic resource, along with the exploration of historical contexts, proved to be an effective strategy for expanding the ways in which trigonometric concepts are explored. Notably, no errors were found in the application of trigonometric concepts, only in measurement. Using the theodolite in Trigonometry teaching highlighted that historical instruments in practical activities promote active and contextualized learning, helping students understand the relevance of Trigonometry. Thus, exploring other historical instruments in the classroom presents an opportunity for further research, allowing comparisons between different measurement methods and the development of mathematical instruments.

Keywords: History of Mathematics; Historical measure instruments; Secondary Education; Trigonometry.

INTRODUÇÃO

Desde o final do século XIX, a Matemática se constitui como uma área específica e independente. Com a implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é possível perceber que, embora a Matemática seja apresentada em unidades temáticas, as competências e habilidades

[1] Doutoranda pelo Programa de Pós-graduação em Educação (PPGE) da UNICAMP. E-mail: sarinhacms@outlook.com.
[2] Mestre pelo Pós-graduação em Educação em Ciências (PPGEC) da UNIFEI. E-mail: marcosandrey.r@gmail.com.

descrevem uma articulação de saberes com outros aspectos matemáticos e recursos, possibilitando uma noção de que a Matemática não se constitui isoladamente e que há uma abertura para sua correlação com outros aspectos da sociedade (Batista; Pereira, 2024).

Como exemplo, observamos que a BNCC propõe o ensino de Trigonometria utilizando a resolução de problemas, conforme descreve a habilidade que compõe o eixo de Geometria e Medidas "(EM13MAT308) aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos" (Brasil, 2018, p. 545). Dessa forma, percebemos uma relação entre Geometria e a Álgebra, destacando a utilização de aspectos numéricos para a resolução de problemas em diferentes contextos.

Para promover a articulação entre os saberes matemáticos propostos na BNCC com vistas à resolução de problemas, é possível a utilização da História da Matemática (HM) como abordagem para explorar os diferentes campos da Matemática. A BNCC destaca que a HM permite "reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos" (Brasil, 2018, p. 267). Tal perspectiva permite compreender que a Matemática permeia diferentes culturas que possibilitam contribuir para a resolução de diferentes problemas de ordem prática utilizando diferentes ferramentas (Batista; Pereira, 2020).

Fried (2001) argumenta que integrar a HM no ensino permite enriquecer o aprendizado e dar sentido aos conceitos matemáticos. Na perspectiva do autor, a HM não deve ser vista apenas como um acréscimo superficial ou decorativo ao ensino, mas como um elemento central para desenvolver uma compreensão aprofundada da Matemática. Assim, ao conhecer os aspectos históricos e as motivações que levaram ao desenvolvimento de ideias matemáticas, os alunos conseguem perceber a Matemática como uma construção humana, dinâmica e evolutiva, e não apenas como verdades absolutas e atemporais.

Uma maneira eficaz de integrar esses conhecimentos é propor práticas em sala de aula que envolvam o uso de instrumentos históricos para resolver problemas reais. Esta abordagem permite que os alunos vivenciem situações em que, no passado, apenas um determinado instrumento estava disponível para realizar medições. Ao explorar esses recursos históricos, os alunos têm a oportunidade de ampliar suas percepções sobre a Matemática, compreendendo como conceitos e técnicas se desenvolveram ao longo do tempo e enriquecendo sua compreensão por meio de uma experiência contextualizada (Batista; Pereira, 2024).

Partindo desse contexto, o presente relato de experiência tem como objetivo descrever e analisar uma prática com a utilização do instrumento Teodolito, que buscou oportunizar maneiras de trabalhar os conceitos de Trigonometria em uma turma do 2° ano do Ensino Médio de uma escola pública do Sul de Minas Gerais.

REFERENCIAL TEÓRICO

Muitos autores têm se dedicado a identificar as implicações da HM para o ensino. Fried (2001), ao analisar a literatura, identificou a presença de três principais contribuições, nas quais a HM: (1) humaniza a Matemática; (2) torna a Matemática mais interessante, mais compreensível e mais acessível; (3) fornece *insights* sobre conceitos, problemas e soluções de problemas.

A primeira contribuição, "vê-se a História da Matemática como um incentivo às abordagens multiculturais, fornecendo aos alunos modelos históricos, ligando o estudo da Matemática às emoções e motivações humanas" (Fried, 2001, p. 392, tradução nossa). Isto significa que a HM pode apresentar a Matemática como uma construção humana, um corpo de conhecimento dinâmico e influenciado por fatores internos e externos.

Com relação à segunda, "inclui afirmações de que a História da Matemática acrescenta variedade ao ensino, diminui o medo dos alunos em relação à Matemática, dá alguma noção do lugar da Matemática na sociedade" (Fried, 2001, p. 392, tradução nossa). Ou seja, a HM pode fornecer uma imagem menos intimidadora da Matemática, além de apresentar seu papel na sociedade, que pode suscitar interesse do aluno pelo conteúdo.

Já na última, a HM pode contribuir: "fornecendo um contexto para problemas e ideias, sugerindo abordagens alternativas para a resolução de problemas, mostrando as relações entre ideias, definições e aplicações" (Fried, 2001, p. 392, tradução nossa). Isto é, a HM apresenta novas oportunidades de investigação, que pode contribuir para a compreensão dos alunos sobre a Matemática.

Tais contribuições se estendem para o ensino de tópicos específicos da Matemática, como a Trigonometria. Segundo Oliveira e Siqueira (2023, p. 2), "os conceitos trigonométricos surgiram de acordo com a necessidade de alguma civilização em um determinado período e se desenvolveram conforme outras necessidades de outras civilizações". Entendemos que a abordagem histórica pode ser uma oportunidade para apresentar estes aspectos socioculturais, além do conteúdo de Trigonometria em si.

Dentre os recursos que permitem a integração da HM ao ensino de Trigonometria, unindo a teoria e a prática, destacamos os instrumentos históricos matemáticos, que, na perspectiva de Pereira (2023), são usados para resolver problemas observacionais e experimentais, muitas vezes voltados para medir distâncias e ângulos. Este tipo de abordagem pode contribuir com uma formação significativa de alguns conceitos matemáticos, que emergem do estudo contextualizado de seu lugar diante de uma teoria e da experimentação proporcionada pela análise histórica (Pereira; Saito, 2018).

Vislumbramos essa possibilidade com o Teodolito, por exemplo, que é um instrumento desse tipo que remonta ao século XVI e foi amplamente utilizado para medir ângulos horizontais e verticais em levantamentos topográficos e construções (Andrade; Oliveira; Pereira, 2018). Sua construção e o uso prático pode possibilitar que os alunos visualizem e apliquem conceitos trigonométricos em situações que simulam problemas reais, tal como propomos em nossa prática, sendo detalhada na seção subsequente.

METODOLOGIA

Com o intuito de atingir o objetivo proposto, a pesquisa foi iniciada com a elaboração e planejamento das atividades, voltada para o ensino da Trigonometria. Tal prática foi desenvolvida em uma sala de 30 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Sul de Minas Gerais, onde a primeira autora era professora regente da disciplina de Matemática. A prática foi realizada em nove aulas sendo dividida em quatro etapas, conforme descrito no Quadro 1:

Quadro 1 – Etapas da prática

Etapa	Objetivo	Quantidade de aulas
1ª Etapa	Apresentar os aspectos históricos	2 aulas (1h40min)
2ª Etapa	Construção do Teodolito	2 aulas (1h40min)
3ª Etapa	Orientações e início da prática	3 aulas (2h30min)
4ª Etapa	Socialização dos resultados	2 aulas (1h40min)
Total de horas		**9 aulas (7h40min)**

Fonte: Elaborado pelos autores

A primeira etapa teve como objetivo realizar a apresentação dos aspectos históricos do instrumento Teodolito em sala de aula. A professora regente, de forma dialógica descreveu o instrumento Teodolito destacando a sua construção, os modelos rudimentares que surgiram no século XVI e os processos de aprimoramento causados a necessidade de precisão do instrumento para o cálculo de medidas.

A segunda etapa teve como foco a construção de um Teodolito caseiro em sala de aula. Para orientar os procedimentos de construção e da prática na próxima aula, a professora regente elaborou uma folha de orientações detalhando o objetivo da proposta, os materiais necessários para a construção do Teodolito e os procedimentos na prática da próxima aula. Esta folha de orientações foi essencial para possibilitar uma prática onde os alunos pudessem ter autonomia.

Com o Teodolito pronto, na terceira etapa os alunos utilizaram o instrumento para a medição de algumas alturas na praça da cidade. A proposta consistia em que cada grupo fizesse a escolha de casas, construções ou objetos que não são acessíveis de medição apenas com uma trena, e dessa forma, utilizassem o Teodolito e os cálculos de Trigonometria para determinar aproximações de alturas. Os alunos foram instruídos a registrar utilizando a folha de anotações fornecida pela professora, na qual deveriam anotar a distância, o ângulo e os cálculos utilizados para determinar a altura.

Ao final de toda a prática e com os dados organizados, na última etapa, os alunos ficaram encarregados de elaborar um relatório descrevendo toda a prática juntamente com os dados encontrados nas medições, destacando os cálculos trigonométricos utilizados. Em sala, a professora realizou uma socialização e discussão de alguns resultados encontrados.

ANÁLISES E RESULTADOS

Nesta seção, analisamos e discutimos os resultados encontrados durante a prática com o Teodolito caseiro, descrevendo alguns cálculos realizados juntamente com os conceitos de Trigonometria ampliados com a prática. Visamos descrever os resultados encontrados pautando-se no referencial de Fried (2001) que destaca aspectos importantes para o ensino, com o apoio da HM.

1ª Etapa: Apresentação dos aspectos históricos

Na primeira etapa a professora regente fez uma apresentação para os alunos sobre as características do Teodolito, as problemáticas quanto a sua utilização no século XVI e a necessidade da sua modernização quanto as demandas atuais, também, dos recursos proporcionados pelo uso de tecnologias digitais e de sistemas eletrônicos de leitura.

Levar para a sala de aula discussões voltadas ao uso de um instrumento, destacando os seus aspectos históricos e as suas problemáticas, chamou a atenção dos alunos para o papel da Matemática na sociedade. Estas discussões podem promover uma abordagem menos intimidadora e mais acessível da Matemática (Fried, 2001).

2ª Etapa: Construção do Teodolito

Para a realização da prática, os alunos se dividiram em quatro grupos, nos quais receberam uma folha de orientações contendo a lista de materiais que seriam utilizados para a construção do Teodolito caseiro e aqueles que seriam utilizados para a prática. Esta lista de materiais está descrita no Quadro 2, tendo sido disponibilizada um dia antes da aula.

Quadro 2 – Materiais utilizados na proposta

Materiais para a construção do Teodolito	Materiais para a prática
- Papelão; - Transferidor 180° ou 360°; - Cola quente; - Parafuso ou porca; - Tampa de garrafa PET; - Palito de churrasco.	- Trenas e calculadoras; - Celular; - Papel e lápis; - Folha de ângulos (seno, cosseno e tangente).

Fonte: Elaborado pelos autores

Com os materiais em mãos, os grupos iniciaram a confecção seguindo os procedimentos detalhados no Quadro 3.

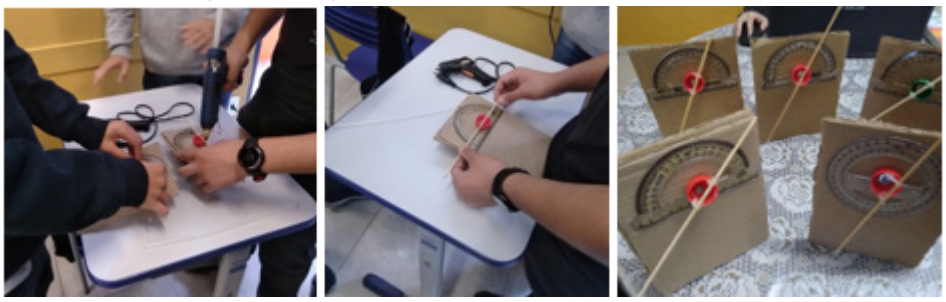
Quadro 3 – Instruções para a construção do Teodolito caseiro

Instruções para a construção do Teodolito	
Passo 1	Cortar o papelão em formato de retângulo (por ex: 20x15cm);
Passo 2	Cortas apoios triangulares para segurar as bases;
Passo 3	Colar o transferidor na parte superior do papelão com auxílio da cola quente;
Passo 4	Fazer um furo no meio da tampa de garrafa PET e ao centro do papelão, próximo ao transferidor;
Passo 5	Colocar o parafuso na tampa e inserir no papelão, prendendo com a porca;
Passo 6	Colar o palito na tampinha, fazendo com que ela gire;
Passo 7	Colar as bases no papelão, para que o instrumento fique em pé.

Fonte: Elaborado pelos autores

É importante destacar que a folha de orientações foi fundamental para os alunos poderem desenvolver a prática em colaboração com os outros colegas, contando com pequenas intervenções da professora regente, cujo objetivo era auxiliar na construção quando necessário. Na Figura 1 apresentamos algumas etapas de construção dos alunos em sala de aula e o instrumental finalizado.

Figura 1 – Registros da construção do Teodolito caseiro



Fonte: Registro da primeira autora

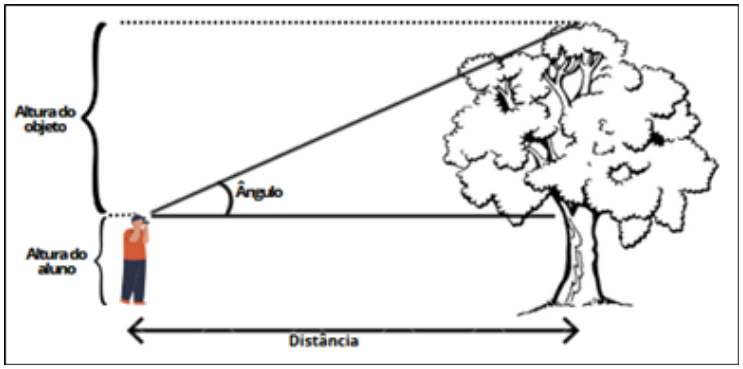
Conforme descreve Fried (2001), utilizar abordagens práticas tende a aumentar o engajamento dos alunos, que pode estimular sua curiosidade e o interesse pela Matemática. Além disso, possibilitar aos alunos a construção de um instrumento histórico de medida contribui para a sua compreensão histórica e cultural. Os alunos não apenas recriaram um objeto, mas também se conectam com o contexto em que esse instrumento foi concebido e utilizado. Isso implica na percepção deles acerca do passado e do desenvolvimento do conhecimento humano. Dessa forma, permite aos alunos reconstruírem o contexto de necessidade no qual o instrumento foi criado, reconhecer a diversidade cultural, desenvolver um aprendizado crítico sobre o desenvolvimento tecnológico e estabelecer conexões com o cotidiano daquele período (Pereira; Saito, 2018).

3ª Etapa: Momento da prática

Com o Teodolito caseiro pronto foi realizada a terceira etapa da prática, que os alunos realizaram medições de casas, prédios e objetos na praça da cidade com a finalidade de determinar a altura, utilizando o instrumento e os cálculos de Trigonometria. Este exercício não é apenas teórico, mas também prático, pois incentivou os alunos a experimentarem estratégias alternativas para resolver problemas matemáticos e científicos, tal como os matemáticos do passado fizeram. A principal ideia neste contexto da prática é levar os alunos a compreenderem que o desenvolvimento do conhecimento se dá via tentativas, erros e descobertas progressivas, desenvolvendo assim uma apreciação pelo pensamento matemático ao longo da história, conforme apresentada por Fried (2001) no que se refere a humanizar a Matemática.

Ao iniciarem a observação das casas, prédios e objetos escolhidos, os alunos começaram a trabalhar em conjunto e a delegar os responsáveis para segurar o instrumento de medida, anotar os dados e realizar os cálculos. A professora regente orientou os alunos a realizarem três medidas de distâncias diferentes, para que ao final, após aplicar os conceitos de Trigonometria os alunos pudessem comparar as três alturas encontradas de um mesmo objeto escolhido e verificar se houve ou não aproximações. A professora também destacou em sala de aula que o cálculo da altura final teria implicações importantes, caso um dos alunos assumisse a função de segurar o instrumento. Nesse caso, seria necessário considerar a altura do aluno que segurou o Teodolito, pois essa medida precisaria ser somada à altura final encontrada, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Modelo de medição utilizando o Teodolito caseiro

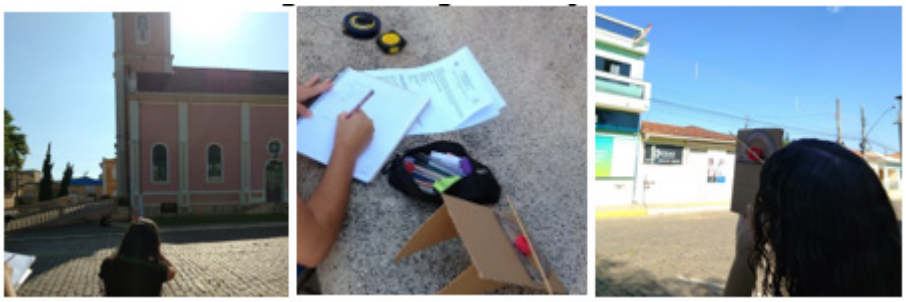


Fonte: Elaborada pelos autores

A discussão conduzida pela professora regente foi essencial para estabelecer as bases teóricas sobre como escolher a relação trigonométrica adequada em diferentes situações. Ao explicar inicialmente em sala de aula, a professora destacou que a escolha da relação depende de quais lados do triângulo retângulo são conhecidos e de qual valor está sendo solicitado, como a altura.

Foi possível observar com as discussões dos alunos que o instrumento de medida oportunizou maneiras de aplicar os conceitos de Trigonometria ampliando os conceitos, com ênfase nas relações obtidas do triângulo retângulo com: a hipotenusa (o lado oposto ao ângulo reto), o cateto oposto (o lado que se opõe ao ângulo considerado) e o cateto adjacente (o lado que fica ao lado do ângulo considerado). Os registros da prática dos alunos são apresentados na Figura 3.

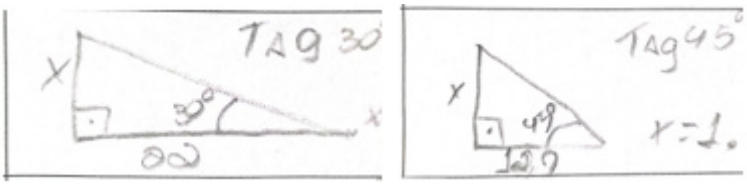
Figura 3 – Registros da prática



Fonte: Registro da primeira autora

Usando o suporte do desenho do triângulo retângulo, conforme a Figura 4, os alunos anotaram os valores correspondentes aos lados, a hipotenusa, o cateto oposto e o cateto adjacente, e a partir disso, decidiram qual relação trigonométrica (seno, cosseno ou tangente) seria mais adequada para calcular a altura.

Figura 4 – Desenho do triângulo retângulo



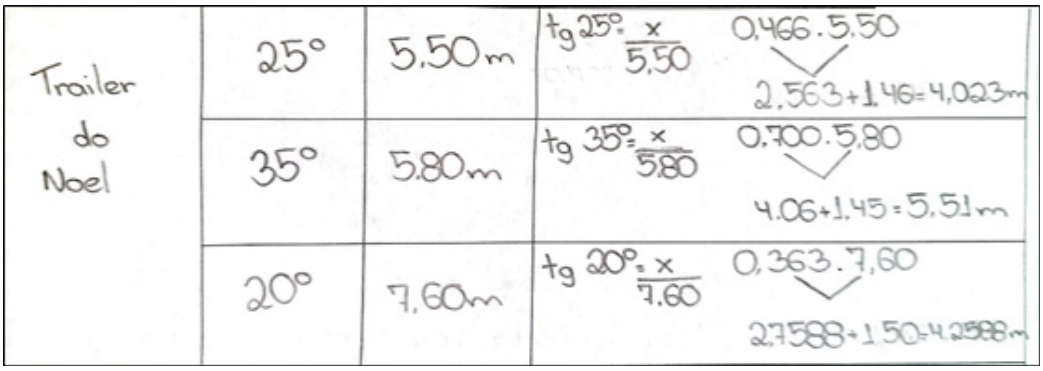
Fonte: Registro da primeira autora

A prática de utilizar um instrumento de medida para realizar a coleta de dados de forma prática e contextualizada se mostrou uma maneira eficaz para que os alunos ampliassem os conceitos trigonométricos.

4ª Etapa: Socialização e apresentação final

Após determinar os valores referentes a distância e os ângulos, os grupos em sala de aula, finalizaram as contas e encontraram as alturas. O Grupo 1 realizou a medição do "Trailer do Noel" utilizando três distâncias diferentes, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Registros do Grupo 1



Fonte: Registro da primeira autora da folha com os cálculos

O Grupo 1, ao determinar uma distância de 5,5m do objeto escolhido encontrou um ângulo de 25°. Logo, o cálculo da tangente de 25º multiplicada pela distância horizontal foi de aproximadamente 2,563, que somada com a altura do aluno de 1,46m resultou na altura final de 4,023m. O segundo e o terceiro cálculo foram realizados utilizando o mesmo procedimento, mas com alturas e ângulos diferentes. Com a distância igual a 5,8m e um ângulo de 35° a altura aproximada foi de 4,06m, somada à altura do aluno resultou em 5,51m. Já com a distância maior, com 7,6m e ângulo igual a 20°, a altura encontra foi de 4,2588m.

Dessa forma, nas três alturas encontradas, vemos uma pequena diferença que pode ser causada devido a precisão do instrumento de medição. Como o Teodolito foi confeccionado pelos alunos, já era prevista, uma imprecisão durante o uso. Outro fator são os cálculos trigonométricos, que, especialmente para a função tangente, pequenas variações no valor do ângulo ou no arredondamento, podem causar diferenças significativas nos resultados. Por exemplo, a tangente de 35º é igual a 0,7002 é considerada maior do que a tangente de 25° que é equivalente a 0,4663, o que explica a altura significativa maior obtida no cálculo referente a 35º.

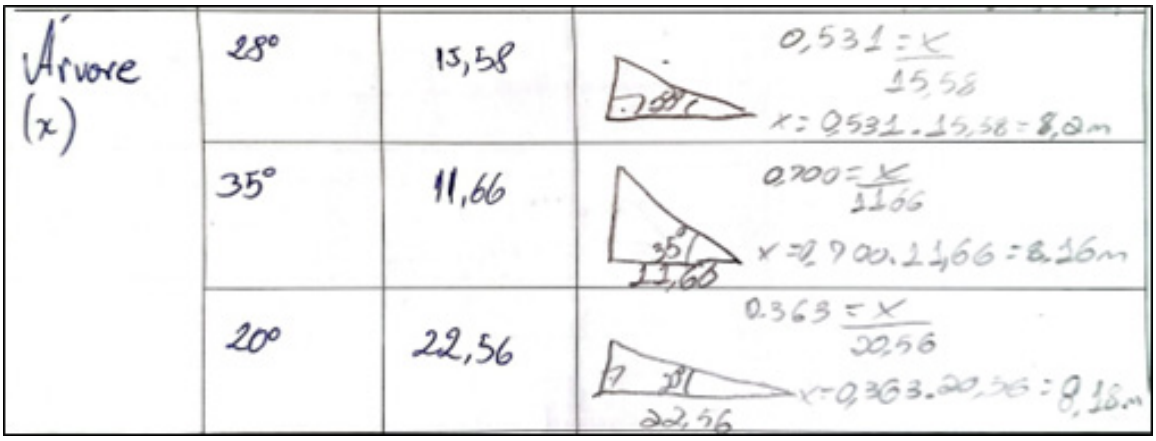
Em um cenário ideal, as três medições de ângulo e distância deveriam resultar na mesma altura para o "Trailer do Noel". No entanto, os valores variam de 4,023m, 5,51m e 4,258m. A diferença de mais de 1m entre a segunda (5,51m) e a primeira (4,023) sugere que as medições de ângulo ou distância horizontal no segundo caso (35º e 5,8m) podem ter sido menos precisas ou que a tangente do ângulo de 35º teve um impacto maior nos cálculos.

Essas situações permitem que o professor discuta com os alunos sobre a importância de um instrumento preciso. Se os conceitos trigonométricos desenvolveram conforme as necessidades da

sociedade (Oliveira; Siqueira, 2023), então pode ser compreendido que o aprimoramento dos instrumentos históricos, como o Teodolito, a partir das motivações sociais.

O Grupo 2 escolheu determinar a altura da "Árvore". As distâncias escolhidas pelo grupo foram de 15,58m, 11,66m e 22,56m, com os respectivos ângulos, 28º, 35º e 20º. O cálculo foi realizado da mesma forma que o Grupo 1, resultando em três alturas aproximadas de 8,2m, 8,16m e 8,16m, conforme mostra a Figura 6.

Figura 6 – Resolução do Grupo 1

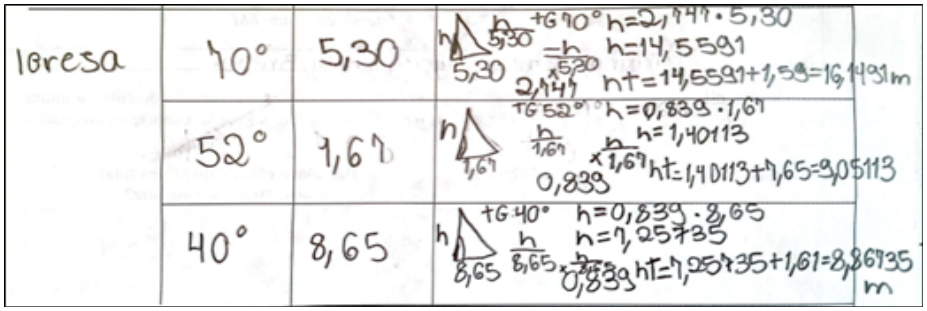


Fonte: Registro da primeira autora da folha com os cálculos

Apesar das diferentes distâncias horizontais e ângulos de elevação, os resultados convergem para valores próximos, o que sugere que as medições foram consistentes e a altura da "Árvore" seja de aproximadamente 8m. Assim como na análise anterior, pequenas variações no ângulo e na distância horizontal podem resultar em pequenas diferenças nos resultados. Isso reforça a importância de instrumentos precisos e métodos de medição adequados.

Já o Grupo 3 escolheu um objeto maior para a realização dos cálculos, o que gerou uma diferença interessante para discussão em sala. O grupo escolheu determinar a altura da "Igreja" utilizando três distâncias de 5,3m, 1,67m e 8,65m, com os respectivos ângulos 70°, 52° e 40°. O cálculo foi realizado multiplicando a distância horizontal encontrada pelo valor do ângulo da tangente. Contudo, no momento de somar a altura do aluno que teria ficado responsável por segurar o instrumento, o grupo utilizou três alturas diferentes, o que implicou alterações no resultado, conforme mostra na Figura 7.

Figura 7 – Resolução do Grupo 3

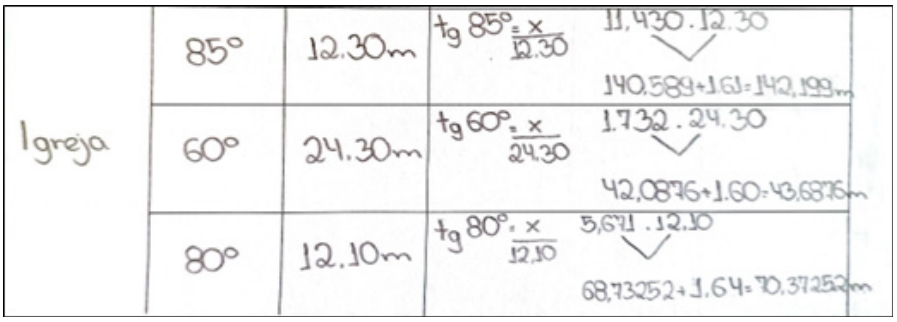


Fonte: Registro da primeira autora da folha com os cálculos

Embora o valor da altura do observador tenha implicado em alterações nos resultados, é perceptível que à medida que o ângulo de elevação diminui, a altura calculada também diminui, ou seja, o ângulo de 70° resultou em uma altura final de 16,1491m, o ângulo de 52° resultou em uma altura de 9,05113m e o ângulo de 40° resultou em uma altura de 8,86735m. Isso é esperado, já que, com um ângulo menor e uma distância horizontal maior, a linha de visão do observador tem menos inclinação em relação à altura do objeto, o que gera uma altura menor no cálculo.

Por fim, o Grupo 4 também escolheu determinar a altura da "Igreja", conforme mostra a Figura 8.

Figura 8 – Resolução do Grupo 4



Fonte: Registro da primeira autora da folha com os cálculos

As três distâncias utilizadas pelo grupo foi de 12,3m, 24,3m e 12,1m com os respectivos ângulos 85°, 60° e 80°. Para determinar o valor da altura, os alunos realizaram a multiplicação do valor da distância horizontal pelo valor do ângulo da tangente. Ao final, os alunos também somaram o valor da altura referente ao aluno que possivelmente segurou o Teodolito, contudo, nos três casos o valor da altura sofreu pequenas alterações sendo de 1,61m, 1,60 e 1,64m.

Após os cálculos as alturas encontradas foram de 142,199m, 43,6876m e 70,37252m, e que não apresentam aproximações. Assim, ao comparar os resultados encontrados pelo Grupo 3 e Grupo 4 podemos observar que o Grupo 3 encontrou alturas que variam entre 8,86735m e 16,1491m, mostrando uma diferença modesta entre os valores conforme o ângulo de elevação diminui. Já o Grupo 4, as alturas variam entre 43,6876m e 142,199m, sendo muito maiores do que as alturas encontradas pelo Grupo 3.

Assim, podemos observar que as medições do Grupo 1 e Grupo 2 se aproximaram de valores reais, mesmo com pequenas alterações que poderiam ser causadas pela imprecisão do instrumento de medida. Já o Grupo 3 e o Grupo 4 apresentam uma grande variação nos resultados, em especial, pela altura do objetivo escolhido ser elevado, o que implicaria na necessidade de um instrumento com maior precisão.

A importância de mostrar a precisão dos instrumentos de medição para os alunos vai além de ensiná-los a obter dados corretos em atividades práticas. Ao compreender a importância da precisão nos instrumentos de medida, os alunos aprendem a valorizar o rigor nos experimentos e a interpretar os resultados obtidos. O desenvolvimento dos instrumentos de medição, como o Teodolito, reflete a crescente demanda por precisão em cálculos matemáticos ao longo da história. A necessidade no aprimoramento nas precisões desses instrumentos de medida, atualmente, representa uma melhoria significativa na qualidade das medições e, por consequência, nos cálculos derivados delas.

Nas observações individuais dos alunos no relatório final, onde se questionava se foi possível com a prática compreender os conceitos de Trigonometria, alguns registros dos alunos foram:

> **Aluno (C):** *Eu adorei a prática tanto em sala de aula ou na praça, para mim ficou bem claro o uso do Teodolito.*
>
> **Aluno (D):** *Foi ótima a experiencia da pesquisa, consegui entender o assunto ainda mais.*
>
> **Aluno (E):** *Sim, mas para mim foi um pouco mais difícil por conta da dificuldade.*
>
> **Aluno (F):** *Achei interessante e diversificado, pois realmente se entende a função da Matemática [...] a prática com o Teodolito além de ser legal, nos mostrou o motivo da Trigonometria e da Matemática.*

O relato dos alunos indica que a utilização de ferramentas concretas, como o Teodolito, facilita a aprendizagem, especialmente ao trazer a Matemática para um contexto prático. O aluno E reconhece que a prática contribuiu para o entendimento da Trigonometria, mas relata que foi "um pouco mais difícil" devido à sua dificuldade pessoal. Este relato é relevante porque mostra que, mesmo com uma atividade prática e contextualizada, alguns alunos podem enfrentar barreiras, seja por falta de familiaridade com o equipamento ou dificuldade em conectar a teoria e a prática.

Por fim, o comentário do Aluno F indica que a atividade ajudou a compreender o porquê da Matemática, indo além da simples execução de fórmulas e cálculos. Esse tipo de comentário mostra que o aluno entendeu o propósito da Trigonometria como ferramenta prática. Quando os alunos conseguem ver a relevância do conteúdo para problemas do mundo real, a Matemática deixa de ser apenas uma disciplina abstrata e passa a ter significado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A prática permitiu que os alunos compreendessem a necessidade que levou à criação do instrumento, favorecendo, como propõem Pereira e Saito (2018), um aprendizado crítico sobre o desenvolvimento tecnológico e suas conexões com o cotidiano da época. Batista e Pereira (2020) ressaltam a importância de considerar, em sala de aula, contextos históricos nos quais apenas um único instrumento estava disponível para medições. Essa abordagem dialoga com a segunda contribuição apontada por Fried (2001), que destaca como a HM enriquece o ensino, diversifica estratégias pedagógicas e amplia a compreensão dos alunos sobre o papel da Matemática na sociedade.

O uso do Teodolito caseiro como recurso didático, aliado à exploração de contextos históricos, mostrou-se uma estratégia eficaz para ampliar a abordagem dos conceitos de Trigonometria. Destacamos que, durante a implementação da prática, os erros observados estavam relacionados apenas à precisão das medições, e não à compreensão ou aplicação dos conceitos trigonométricos.

Uma dificuldade observada foi o tempo reduzido para a socialização em sala, visto que os alunos mostraram grande interesse em discutir a validade dos resultados após as medições. Para uma aplicação futura, sugerimos que, após toda a prática e com os resultados em mãos, seja reservado mais tempo para esse processo. Além disso, propõe-se retomar a discussão sobre a necessidade de modernização dos instrumentos de medição, considerando as demandas atuais e as imprecisões observadas nas medições feitas pelos alunos.

Com isso, a prática com o Teodolito no ensino de Trigonometria possibilitou evidenciar as três contribuições da HM conforme descrito por Fried (2001), em especial, nos momentos de fornecer

insight sobre conceitos, problemas e soluções de problemas, ampliando os conceitos de Trigonometria. Logo, vemos uma possibilidade para novos trabalhos a exploração de outros instrumentos históricos em sala de aula, permitindo comparar os diferentes métodos de medição e o desenvolvimento dos instrumentos matemáticos.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Maria Helena de; OLIVEIRA, Rannyelly Rodrigues de; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Um Recurso Histórico para Estudos Iniciais de Trigonometria : Apresentando o Teodolito. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática–BOCEHM**, v. 5, n. 13, p. 66–76, 2018. https://doi.org/10.30938/bocehm.v5i13.69

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

BATISTA, Antonia Naiara de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Um levantamento nacional e internacional de pesquisas que mobilizaram ou articularam saberes geométricos e trigonométricos por meio de instrumentos ou tratados antigos. **Revista História da Matemática para Professores – RHMP**, v. 9, n. 1, p. 1–10, 2023. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/94. Acesso em: 27 out. 2024.

FRIED, Michael N. Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?. **Science & Education**, v. 10, n. 4, p. 391–408, 2001. https://doi.org/10.1023/A:1011205014608

OLIVEIRA, Isabela Cristina; SIQUEIRA, Mônica de Cássia. Trigonometria em sala de aula: uma possibilidade à luz da História da Matemática. *In*: Seminário Nacional de História da Matemática–SNHM, 15., 2023, Maceió. **Anais eletrônicos** [...]. Maceió: SBHMat, 2023, p. 1-15. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/17. Acesso em: 27 out. 2024.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. Pesquisas envolvendo instrumentos matemáticos: um estudo a partir de trabalhos publicados no SNHM. *In*: Seminário Nacional de História da Matemática–SNHM, 15, 2023, Maceió. **Anais eletrônicos** [...]. Maceió: SBHMat, 2023, p. 10-19. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/24. Acesso em: 27 out. 2024.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de Matemática: compreendendo o cenário nacional nos últimos 10 anos. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática – BOCEHM**, v. 5, n. 14, p. 109–122, 2018. https://doi.org/10.30938/bocehm.v5i14.225

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Mulheres na matemática: um estudo sobre suas principais contribuições

Women in mathematics: a study of their main contributions

Isabela Strantica[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP

Rachel Mariotto[2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP

RESUMO

Apesar de tanto homens quanto mulheres participarem do desenvolvimento histórico da Matemática, a mulher teve seu papel inferiorizado, não somente nessa ciência, como em tantas outras. O resultado dessa exclusão é que, ainda hoje, embora haja resultados importantes desenvolvidos por mulheres, associam-se muitas dessas contribuições aos homens. Assim, o objetivo dessa pesquisa foi investigar e trazer à luz a essas mulheres, suas respectivas participações, colaborações e o impacto que elas trazem para a representatividade feminina neste ramo do conhecimento. Para isso, foi realizada uma pesquisa de cunho bibliográfico onde elencou-se algumas mulheres matemáticas do século IV ao XXI, estudou-se suas biografias, dificuldades e respectivas contribuições dentro de suas áreas de atuação. Esse estudo trouxe como resultado a verificação de que sim, a participação feminina nas Ciências Exatas é menor quando comparada com a masculina, porém, foi possível observar que, apesar dos desafios, elas realizaram grandes feitos, fazendo-se presentes em todas as grandes áreas da Matemática.

Palavras-chave: História da Matemática; Presença feminina na Matemática; Pesquisadoras Matemáticas.

ABSTRACT

Although both men and women have participated in the historical development of mathematics, women have had an inferior role, not only in this science, but in so many others. The result of this exclusion is that, even today, although there are important results developed by women, many of these contributions are associated with men. The aim of this research was therefore to investigate and bring to light these women, their respective participations, collaborations and the impact they have on female representation in this field of knowledge. To this end, a bibliographical study was carried out in which some women mathematicians from the fourth to the twenty-first century were listed, their biographies, difficulties and respective contributions within their fields of activity were studied. The result of this study was to verify that, yes, female participation in the Exact Sciences is lower when compared to male participation, but it was possible to observe that, despite the challenges, they have achieved great things, making their presence felt in all the major areas of Mathematics.

Keywords: History of Mathematics; Female presence in Mathematics; Mathematical Researchers.

INTRODUÇÃO

A falta de representatividade feminina na Matemática foi observada ao longo da história e, tanto se consolidou, que até os dias de hoje permanece a ideia de que a mulher não nasceu para essa ciência. De acordo com Silva Sobrinho e Oliveira (2023), essa ausência da atuação das mulheres é passível de se questionar: é possível que exista uma forma masculina e outra feminina de pensar? Se sim, o que comprova que as mulheres não possuíam capacidade intelectual de produzir matemática tanto quanto os homens?

Ao analisar livros de história da matemática mais tradicionais, como os de Boyer (2010) e Cajori (2007), é possível notar que poucas são as páginas dedicadas à presença feminina, fato que se

[1] Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de São Paulo (IFSP), campus Birigui, Birigui, São Paulo, Brasil. E-mail: isabelastrantica@outlook.com.
[2] Docente do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), campus Birigui. Birigui, São Paulo, Brasil. E-mail: rmariotto@ifsp.edu.br.

modifica quando comparamos os nomes masculinos listados nessas obras. Mesmo diante de tratativas tão diferentes, não só na escrita histórica, mas na sociedade em que viveram, algumas mulheres conseguiram participar efetivamente do campo científico. Por exemplo, podemos citar: Hipátia de Alexandria (370-415), Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), Sophie Germain (1776-1831), Mary Fairfax Greig Somerville (1780-1872), Sofia Kovalevskaya (1850-1891), Amalie Emmy Noether (1882-1935), Katherine Johnson (1918-2020), Maryam Mirzakhani (1977-2017). No Brasil, podemos destacar Elza Furtado Gomide (1925-2013), Maria Laura Mouzinho Leite Lopes (1919-2013), Marília Chaves Peixoto (1921-1961), Carolina Bhering de Araujo (1976).

Neste sentido, o presente estudo, realizado no âmbito de um projeto de Iniciação Científica, visou contribuir para a ampliação da discussão sobre a presença feminina nas Ciências Exatas, destacando a relevância desse tema na área de História da Matemática. Buscou-se também colaborar na construção e registro de uma história que possa dar a devida notoriedade a essas mulheres matemáticas e suas contribuições que, por tanto tempo não tiveram reconhecimento e ficaram esquecidas ou em um segundo plano na história. Para isso, a pesquisa foi dividida em dois momentos: o primeiro foi um estudo sobre a vida e os desafios enfrentados por essas figuras femininas, considerando a época, a sociedade e o local onde viveram, abordado no artigo *"Mulheres na Matemática: um estudo sobre suas barreiras acadêmicas"* (Strantica e Mariotto, 2024). Posteriormente, buscou-se analisar e evidenciar as áreas de atuação e as principais contribuições dessas mulheres para as Ciências Exatas.

Assim, esse artigo se refere a segunda etapa desta pesquisa, apresentando informações biográficas dessas matemáticas e uma classificação dos estudos publicados por cada uma. Essa classificação não foi encontrada em outros trabalhos e tem o objetivo de colaborar na compreensão da produção matemática de cada uma, assim como evidenciar a presença delas em todas as áreas da matemática.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O desenvolvimento desta pesquisa se deu através de um estudo histórico–bibliográfico, onde em um primeiro momento foram elencados os nomes das principais figuras femininas presentes na matemática. Optou-se por estudar as quatorze mulheres com maior destaque segundo os trabalhos de Cavalari (2020), Amaral; Fernandez; Viana (2019), Silva Sobrinho (2023), Robertson; O'Connor (2014) e demais trabalhos analisados durante a pesquisa.

Posteriormente, houve a elaboração de uma pequena biografia dessas mulheres, com intuito de entender suas dificuldades, o contexto histórico no qual estavam inseridas e suas produções científicas, visando compreender suas áreas de atuação. Durante a construção das biografias foi também realizado uma listagem com as obras de cada uma. Por fim, a partir dessa listagem, analisando o foco de cada trabalho, foi feita uma classificação das áreas da Matemática em que atuaram. Essa classificação se deu de acordo com as áreas do conhecimento apresentadas pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) a fim de corroborar para a compreensão dos resultados obtidos.

CONTEXTO HISTÓRICO DAS MULHERES NA MATEMÁTICA

A presença feminina na Matemática tem sido marcada por desafios históricos, culturais e sociais. De acordo com Brech (2018) os papéis sociais impostos geram expectativas divergentes entre o que se espera de meninos e meninas, na educação oferecida e nas dificuldades enfrentadas por eles para atuar em uma mesma área.

Com seus papéis sociais já pré-definidos, homens e mulheres exerceram ao longo da história funções muito distintas. Ao ter sua figura associada à fragilidade e dependência do marido, assim como ao pecado e à corrupção do homem, as mulheres passaram a ser excluídas do meio científico-acadêmico e, consequentemente, das Ciências Exatas. Além disso, como os estudos no campo matemático eram exclusivos aos homens e os registros históricos também eram realizados por eles, de acordo com Moura (2015) há poucos relatos sobre a presença feminina não só na Matemática, mas também em um contexto geral da escrita da história humana.

Cavalari (2010) enfatiza que, ao falar de mulher e ciência, é possível imediatamente notar a ausência de mulheres no desenvolvimento dessa atividade ao longo dos períodos históricos. Ao tomar como base os trabalhos de Medeiros e Oliveira (2018), Oliveira (2017), Silva (2012), Santos (2020), é possível assegurar-se de que a exclusão das mulheres nas Ciências Exatas esteve enraizada principalmente em normas de genêro que restringiam e dificultavam o acesso dessas mulheres à educação tal qual era oferecida naturalmente aos homens.

Ainda que muitas figuras femininas tenham se destacado e feito contribuições significativas, de acordo com Osen (1974), Laubenbacher e Pengelley (1998) os créditos por seus trabalhos nem sempre eram associados à elas por motivos diversos: ora porque em determinados momentos históricos não era possível que elas tivessem seus nomes relacionados aos seus estudos, ora porque suas participações eram tão exporádicas que em muitos casos suas descobertas acabaram sendo creditadas a figuras masculinas.

Em contrapartida, atualmente algumas pesquisas têm sido realizadas com o objetivo de rever a história dessas mulheres. Como exemplo, podemos citar os trabalhos de Silva (2012), Oliveira (2017), Medeiros e Oliveira (2018), Gomes (2018); Amaral, Fernandez e Viana (2019); Carvalho (2020); Nogueira (2021); Robertson e O'Connor (2021); Santos (2020), entre outros. Esses trabalhos são significativos no estudo das mulheres matemáticas, trazendo suas biografias, alguns de seus principais trabalhos, além de discussões acerca do papel das mulheres na ciência.

CONTRIBUIÇÕES FEMININAS À MATEMÁTICA

A seguir serão apresentadas as principais contribuições das matemáticas citadas anteriormente.

Hipátia de Alexandria (370–415) é a primeira mulher matemática que se tem registros históricos. Nascida no Egito e filha de um matemático é considera uma figura feminina importante por ser pioneira em adentrar espaços que até então eram ocupados somente pelos homens. Foi professora de aristocratas cristãos e pagãos e era também uma grande filósofa. Sua morte, segundo a história, foi em virtude de seu estilo de vida considerado pagão para a sociedade da época. Assassinada de forma trágica, Hipátia teve sua grandeza imortalizada anos mais tarde nas paredes do Museu do Vaticano pelo pintor renascentista Rafael Sanzio, em seu afresco "A escola de Atenas" (Figura 1).

Figura 1 – A escola de Atenas, de Rafael Sanzio

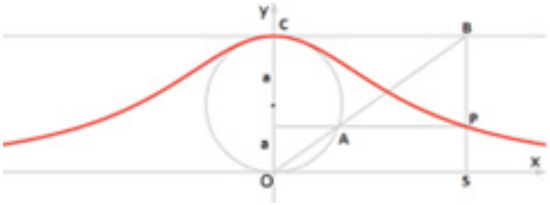
Fonte: Wikimedia Commons[3]

Hipátia atuou nas áreas de Geometria e Álgebra e podemos citar, dentro os seus feitos: 1. *Comentários sobre a aritmética de Diofanto*; 2. *Comentários sobre os "Elementos de Euclides"* – trabalho realizado em conjunto com o pai, buscando simplificar os conceitos trazidos por Euclides; 3. *Tratado sobre a obra "As Cônicas" de Apolônio*–Também simplificando os conceitos do autor através de uma linguagem mais acessível; 4. *Comentários sobre as obras de Ptolomeu.*

Suas contribuições são diversas e todas tinham o objetivo de tornar acessível os conceitos matemáticos da época, porém, não se tem materiais originais a respeito de seus estudos e possíveis trabalhos desenvolvidos (isso se dá ao fato de que todos os registros foram perdidos em um incêndio que tomou a biblioteca de Alexandria).

Cerca de mil anos mais tarde *Maria Gaetana Agnesi* (1718 – 1799), nascida em Milão, ficou conhecida por seus estudos na área de Análise, sua contribuição mais importante foi o estudo do comportamento de uma curva cúbica. Tal curva, de equação cartesiana foi batizada por ela em seu livro de "la versiera" que em latim significa "dar a volta" ou "corda que gira uma vela" (Figura 2).

Figura 2 – Curva de Agnesi



Fonte: Munhós; Santana; Roman (2020)

A curva é descrita da seguinte forma:

- -Temos uma circunferência de raio a;
- - Tomamos um ponto O (0,0) que pertence a ela;
- - Em seguida, traçamos a secante AO, onde A é ponto da circunferência e diferente de zero;
- - Sendo C o ponto diametralmente oposto a O, traçamos a reta tangente à circunferência em C;
- - O ponto B é dado pela intersecção da reta OA com a tangente em C;

[3] Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Escola_de_Atenas_-_Vaticano_2.jpg. Acesso em 21 jan. 2025.

- - Paralelamente a CB, traça-se uma reta que passa por A;
- - Paralelamente a OC, traça-se uma reta que passa por B e chamamos de P o ponto de intersecção dessas duas retas.

O caminho que o ponto P descreve ao variarmos A sobre a circunferência é o que chamamos de "curva de Agnesi".

Equação cartesiana da curva: $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$

Agnesi registrou seus estudos sobre a curva em sua obra mais famosa, o livro *"Instituzioni Analitiche"*. Essa obra é considerada a melhor introdução existente às obras de Euler. Nela são contemplados assuntos de Aritmética, Cálculo Diferencial, Séries Infinitas, Equações Diferenciais, Álgebra, Trigonometria e Geometria.

Posterior a Agnesi, ainda no século XVIII, quem se destaca é *Marie Sophie Germain* (1776 – 1831), atuante principalmente na área de Álgebra e conhecida por suas contribuições à prova do Último Teorema de Fermat. Suas tentativas de provar o teorema geraram o que conhecemos hoje por *"Teorema de Germain": Um número primo p é um número primo de Germain se 2p + 1 também for primo (chamado de primo seguro).* Sophie conseguiu provar que o Último Teorema de Fermat é verdadeiro para os "primos de Germain".

Germain também foi responsável por escrever comentários e realizar descobertas sobre a obra de Le Gendre *"Ensaio sobre a Teoria dos Números"* de 1798. Tais observações foram introduzidas no segundo volume da obra. Além disso, contribuiu para a Teoria da Elásticidade em Fisíca, estabelecendo os fundamentos para a Moderna Teoria da Elasticidade que foi a base para a construção de monumentos como a Torre Eiffel.

Contemporânea à Sophie Germain, *Mary FairFax Somerville* (1780–1872), nascida na Escócia, destacou-se em Matemática Aplicada. Dentre suas principais contribuições, podemos citar: 1. Artigo "*The magnetic properties of the violet rays of the solar spectrum"* – Neste artigo Mary apresenta seus estudos sobre magnetismo e faz observações sobre astronomia. Esse foi o primeiro artigo escrito por uma mulher que foi lido pela Royal Society de Londres e posteriormente publicado em seu periódico. Apesar de a teoria de Somerville ter sido refutada algum tempo depois, foi esse trabalho que a consagrou como uma escritora científica habilidosa e respeitada; 2. Livro *"The Mechanism of the Heavens"* de 1831, essa obra foi um trabalho de tradução da álgebra presente em *"Traité de Mécanique Céleste"* de Laplace para a língua popular dos matemáticos da época. A obra se tratava de um resumo do conhecimento astronômico e foi publicada em dois volumes, sendo eles aclamados por astrônomos e matemáticos. O livro serviu como manual de Astronomia e Matemática durante quase um século; 3. Livro "*On the Connexion of the Physical Sciences"* de 1834, obra onde Mary resumiu estudos sobre astronomia, física, geografia e meteorologia, com relatos de fenômenos físicos e suas conexões com as ciências físicas. Essa foi uma importante contribuição de Somerville para as ciências, pois foi através de seus estudos que vieram novas distinções científicas.

Na Rússia a figura feminina de destaque foi *Sofia Kovaleskaya* (1860 – 1891) que trouxe contribuições para as áreas de Análise, Álgebra e Matemática Aplicada, atuando principalmente no ramo da Teoria dos Números. Sobre seus estudos, destacam-se: 1. Artigo sobre a Redução de Integrais Abelianas e Integrais Elípticas de 1875, o qual mostrava sua forte habilidade com manipulações ma-

temáticas e seu domínio completo da teoria de Weierstrass. Ela conseguiu estabelecer condições algébricas mais práticas do que as condições que existiam anteriormente; 2. Artigo chamado "*Sur un théorème de M Bruns*" – foi nesse trabalho que Sofia deu uma prova nova e mais simples do teorema de Bruns sobre uma propriedade da função potencial de um corpo homogêneo. O *Teorema de Bruns* afirma que "*a soma de dois primos gêmeos (pares de números primos que diferem por 2) converge para um valor finito conhecido como constante de Brun";* 3. Prova do "*Teorema de Cauchy-Kovalevskaia*" sobre equações diferenciais parciais, o qual foi tema de sua tese de doutorado de 1874. Neste trabalho, Sofia demonstrou que um teorema geral poderia ser provado no sentido de que uma série de potências obtida formalmente de uma equação diferencial parcial, na qual ocorrem apenas funções analíticas, necessariamente convergiria.

Seu quarto maior trabalho foi um estudo sobre a revolução de um corpo sólido sobre um ponto fixo conhecido como *Kovalevskaya Top* – esse trabalho foi o que a levou ao prêmio Bordin da Academia de Ciências da França em 1888. O prêmio estava sendo oferecido para trabalhar em uma questão específica: "aperfeiçoar num ponto importante a teoria do movimento de um corpo sólido em torno de um ponto imóvel". Até então, sabia-se que um objeto/pessoa gira dependendo não apenas do seu tamanho e massa, mas também da forma como a sua massa está distribuída, por exemplo quando observamos os patinadores artísticos aproximarem os braços e as pernas do corpo para acelerar as rotações enquanto giram no gelo. Euler e Lagrange elaboraram equações que descreviam o movimento de um tipo especial de pião um século antes do trabalho de Sofia. Kovalevskaya descobriu outro caso em que o movimento pode ser analisado em vez de ser totalmente caótico. No caso dela, dois dos três momentos de inércia são iguais e o terceiro tem metade do seu tamanho. (Os três momentos de inércia referem-se à forma como o peso é distribuído em relação aos três eixos coordenados centrados em um ponto do objeto.)

Na Alemanha, quem se destaca é *Amalie Emmy Noether* (1882–1935), judia e filha de um matemático. Emmy ficou conhecida por seus estudos na área de Álgebra, contribuindo significativamente para a Teoria dos Números. Seus trabalhos de maior destaque são: 1. *Teorema de Noether*–O teorema de Noether afirma que *a cada simetria contínua corresponde a uma corrente que satisfaz uma equação de continuidade, ou, equivalentemente, uma quantidade que é conservada.* O teorema explica a conservação de grandezas físicas, como a energia ou o momento, por meio de simetrias das leis da natureza. Os estudos de Noether tiveram importante influência na física do século XX, particularmente na teoria da relatividade e na mecânica quântica.

A equação a seguir ilustra o seu teorema: a quantidade expressa entre parênteses não muda com o tempo.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_a \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}}\delta q_a\right) = 0$$

2. Teoria ideal para anéis, de 1921 – Foram esses estudos responsáveis por descrever o que hoje conhecemos como "Anel Noetheriano" dentro das estruturas algébricas. O anel de Noether é um anel comutativo que satisfaz a condição da cadeia ascendente para ideais. Anéis de polinômios sobre corpos possuem muitas propriedades especiais, propriedades que derivam do fato de que anéis polinomiais não são em certo sentido "grandes demais". Emmy Noether descobriu que uma propriedade fundamental dos anéis de polinômios é a propriedade da cadeia ascendente para ideais. Para anéis não-comutativos, devemos fazer algumas distinções entre conceitos similares:

- Um anel é dito noetheriano à esquerda caso satisfaça a condição da cadeia ascendente para ideais à esquerda.
- Um anel é dito noetheriano à direita caso satisfaça a condição da cadeia ascendente para ideais à direita.
- Um anel é dito noetheriano caso seja noetheriano tanto à esquerda quanto à direita.

3. Artigo, chamado "Abstrakter Aufbau der Idealtheorie em algebraischen Zahlkorpern", onde apresentou cinco condições para um anel que lhe permitiram deduzir que em tais anéis comutativos todo ideal é o produto único de ideais primos.

Noether também contribuiu para a formulação da segunda edição da obra de Van Der Waerden, chamada *"Modern Algebra"*.

Já no século XX, *Marie Louise Dubreil Jacotin* (1905 – 1972) nascida em Paris, conquistou seu lugar de destaque entre as matemáticas. Suas contribuições estiveram relacionadas à Álgebra principalmente pela confecção de duas obras: 1. Livro *"Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnés et des treillis géométrique"* publicado em 1953, onde aborda assuntos de álgebra, ciência da computação, lógica e física com uma abordagem rigorosa e profunda sobre os temas, tornando-se uma referência essencial para estudantes e pesquisadores da área. 2. Livro*: "Leçons d'algèbre moderne"*, publicado em 1964 e com tradução para o inglês. O livro é conhecido por, também, ter uma abordagem rigorosa e formal de álgebra abstrata, abordando temas como teoria dos grupos, teoria dos anéis, e estruturas algébricas avançadas, além disso a obra tem ênfase na formalização matemática e na apresentação sistemática dos conceitos fundamentais da álgebra moderna.

Uma figura de destaque nos Estados Unidos foi *Katherine Coleman Goble Johnson* (1918 – 2020). Mulher negra e filha de professora, ela teve o seu potencial matemático visto desde muito nova, podendo avançar algumas séries na escola por ser considerada intelectualmente avançada para sua idade. Suas principais contribuições foram para a aeronáutica: Katherine foi coautora de 26 artigos científicos e era uma das matemáticas responsáveis por cálculos complexos e precisos de trajetórias de voo, órbitas e lançamentos de naves espaciais.

Maryam Mirzakhani (1977 – 2017), importante matemática do século XXI, nascida no continente asiático, foi a primeira mulher a ganhar a Medalha Fields (oficialmente conhecida como Medalha Internacional de Descobrimentos Proeminentes em Matemática). Maryam atuou fortemente em Topologia, fazendo avanços importantes no estudo das superfícies hiperbólicas, que são superfícies com curvatura negativa constante. Ela trabalhou em problemas relacionados à classificação de superfícies e à dinâmica dos seus geodésicos, que são as curvas mais curtas entre dois pontos em uma superfície e também contribuiu para o cálculo de volumes dos espaços modulares de superfícies de Riemann, que tem implicações importantes em física teórica e em matemática pura. Além disso, realizou estudos do espaço de Teichmüller, que é um espaço que parametriza todas as estruturas complexas de superfícies de uma determinada topologia. Suas pesquisas ajudaram a entender melhor a geometria e a dinâmica desse espaço. Maryam investigou, ainda, os *"fluxos de Teichmüller"*, que são movimentos no espaço de Teichmüller onde preservam-se uma estrutura geométrica particular. Seu trabalho ajudou a esclarecer a estrutura dosconjuntos invariantes.

Mais recentemente, quem se destacou foi *Maryna Viazovska* (1984) . Nascida na Ucrânia, foi a segunda mulher a receber a Medalha Fields depois de encontrar a solução para o problema de

empacotamento de esferas de 8 e 24 dimensões, trazendo contribuiçõessignificativas para as áreas de Análise, Combinatória e Teoria dos Números. A solução encontrada por Maryna foi publicada no artigo *"The sphere packing problem in dimension 8"* em 2017. Ela relata que esse problema estava em sua vida academica desde 2003 mas foi apenas em 2014 que ela decidiu dedicar-se a resolve-lô e encontrou a função para a dimensão 8 e posteriormente junto dos colegas Stephen Miller, Abinave Kumar e Kiev Daniel Radchenko, chegou em uma função para a dimensão 24.

Fórmula encontrada para o empacotamento de esferas na dimensão 8:

$$\Lambda_8 = \left\{ (x_i) \in Z^{\,8} \cup \left(Z + \frac{1}{2}\right)^8 \middle| \sum_{i=1}^{8} x_i \equiv 0 \ (mod\ 2) \right\}$$

Analogamente, a da dimensão 24:

$$\Lambda_{24} = \left\{ (x_i) \in Z^{\,24} \cup \left(Z + \frac{1}{2}\right)^{24} \middle| \sum_{i=1}^{24} x_i \equiv 0 \ (mod\ 2) \right\}$$

Dentre as matemáticas brasileiras a primeira a ganhar destaque foi *Maria Laura Mouzinho Leite Lopes* de Pernambuco. Foi a primeira mulher brasileira a conquistar um doutorado na área e a pioneira em grandes conquistas para o ensino da matemática no Brasil. Participou da criação do Centro Brasileiro de Pesquisa Física, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da fundação do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Maria Laura participou ativamente de trabalhos relacionados a Educação Matemática e uma de suas maiores contribuições foi a criação do GEPEM – Grupo de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática, onde seus trabalhos resultaram no Projeto Fundão, ativo até os dias de hoje, com o objetivo de melhorar o ensino da matemática nas escolas públicas do estado do Rio de Janeiro. Nesse projeto, Maria Laura, foi responsável pela capacitação de diversos profissionais da educação e produziu inúmeros materiais didático-pedagógicos que ajudaram a modernizar e tornar acessível o ensino da matemática no Brasil. Dentre essas obras, podemos citar: 1. Livro: *"Geometria na era da imagem e do movimento"* – 1996: Obra escrita junto com Lilian Nasser, traz uma introdução à geometria para a educação infantil e o ensino fundamental, das primeiras até a 8ª série. 2. Livro: *"Tratamento da Informação: explorando dados estatísticos e noções de probabilidade"* – 1997: obra desenvolvida em colaboração no Projeto Fundão, com objetivo de apresentar sugestões de atividades para a sala de aula para melhoria da abordagem desse tema.

Além disso, também esteve envolvida com a fundação da SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, onde elaborou e desenvolveu pesquisas para o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP.

A segunda brasileira de destaque foi *Marília Chaves Peixoto*, matemática e engenheira nascida em Santana do Livramento/RS, lecionou cálculo infinitesimal da Escola Nacional de Engenharia do Rio de Janeiro e, para além do cálculo, seus interesses também estavam na topologia, área a qual ministrou cursos e seminários no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF). Lecionou também a disciplina de Cálculo Vetorial, a qual lhe rendeu um livro publicado pela Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Foi a primeira mulher membro efetiva da Academia Brasileira de Ciências, e junto de seu Marido, Maurício Peixoto, desenvolveu o *"Teorema de Peixoto"* que diz: *Os fluxos estruturalmente estáveis em superfícies são simplesmente caracterizados e constituem um aberto e denso no espaço de todos os fluxos (SILVA, 2008, p.159).*

Além disso, Marília fez importantes contribuições para o estudo da teoria qualitativa das equações diferenciais, contribuindo para o desenvolvimento da área no Brasil.

Outro nome de destaque foi *Elza Furtado Gomide*, a segunda mulher brasileira a conquistar o doutorado na área. Assim como Maria Laura, Elza contribuiu fortemente no ramo da Pesquisa em Educação Matemática e atuou em questões voltadas as práticas pedagógicas. Um exemplo de sua participação efetiva em discussões voltadas a Educação Matemática foi a sua participação no Fórum das Licenciaturas, organizado pela USP em 1990. Esse Fórum buscou discutir e debater a formação de professores no Brasil, levantando questões como a qualidade do ensino e a necessidade de atualização dos currículos, com objetivo de promover uma educação mais crítica e reflexiva. Foi nesse Fórum que, junto de Freitas Druck (professor orientador da USP, que atuou fortemente em questões de práticas pedagógicas na formação de professores), Elza apresentou uma proposta de estrutura curricular para o curso de licenciatura em matemática da USP, que foi aprovada e permanece quase a mesma desde a sua implementação no ano de 1994.

Elza também desenvolveu pesquisas na área da Análise e Álgebra, um exemplo é sua tese de Doutorado *"Sobre o teorema de Artin – Weil"* que foi defendida em 1950 e aborda um resultado importante em geometria algébrica e teoria dos números, relacionado com a função zeta de variedades algébricas definidas sobre corpos finitos.

Nascida no Rio de Janeiro, a quarta brasileira de destaque é *Carolina Bhering de Araújo.* Sua primeira formação em matemática na Pontíficia Universidade Católica do Rio de Janeiro, logo após a graduação participou do programa de matemática na Universidade de Princeton, nos Estados Unidadoscom com o apoio CNPq. Ao retornar para o Brasil tornou-se pesquisadora do IMPA, tornou-se membro filiada da Academia Brasileira de Ciências, a qual viria a se tornar titular alguns anos mais tarde e, recebeu diversos prêmios por suas pesquisas/estudos. Em 2017 foi a única mulher atuante no IMPA, fazendo com que passasse a discutir abertamente sobre a igualdade de gênero na ciência. Carolina já orientou dissertações de mestrado e teses de doutorado e, atualmente, é pesquisadora titular do IMPA e desde 2023 atua como presidente do Comitê para Mulheres em Matemática da União Internacional de Matemática.

Suas principais contribuições foram nas áreas de Geometria e Álgebra: Carolina desenvolveu técnicas inovadoras relacionadas à teoria das curvas racionais de grau mínimo, as quais tem sido essenciais para a compreensão e classificação de variedades algébricas complexas. Foi ela quem introduziu a *teoria das Folheações de Fano*, que são variedades algébricas com propriedades geométricas particulares. De acordo com seu currículo na plataforma Lattes, Carolina já publicou mais de 20 artigos, escreveu – em parceria com outros autores–2 livros e 2 capítulos de livros.

Diante das informações levantadas anteriormente e com base nas áreas de conhecimento apresentadas pelo CNPq, foi possível constatar a contribuição dessas mulheres nas áreas matemáticas, conforme Quadro 1:

Quadro 1 – Trabalhos por áreas de atuação das mulheres na Matemática.

MULHER MATEMÁTICA	QUANTIDADE DE TRABALHOS POR ÁREA DE ATUAÇÃO				
	Análise	**Álgebra**	**Geometria e Topologia**	**Matemática Aplicada**	**Educação Matemática**
Hipátia de Alexandria (século IV)		1	3		
Maria Gaetana Agnesi (século XVIII)	1				
Marie Sophie Germain (século XVIII)		2		1	
Mary FairFax Somerville (século XVIII)				3	
Sofia Kovaleskaya (século XIX)	2	1		1	
Amalie Emmy Noether (século XIX)		4		1	
Marie Dubriel Jacotin (século XX)		2			
Katherine Johnson (século XX)				1	
Maryam Mizarkhani (século XX)			2		
Maryna Viazovska (século XXI)		1	1		
Maria Laura Mouzinho Leite Lopes (século XX)					2
Marília Chaves Peixoto (século XX)	1		2		
Elza Furtado Gomide (século XX)	2	3			2
Carolina Bhering de Araújo (século XXI)			20[4]		
TOTAL POR ÁREA	**6**	**15**	**28**	**7**	**4**

Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Alguns dos trabalhos consultados tiveram uma única classificação no Quadro 1, no entanto outras obras abordam mais de uma área. Por exemplo, o trabalho de Maria Gaetana Agnesi foi classificado como Análise, porém, contém o desenvolvimento de conteúdos na Álgebra e Geometria. Além disso, essa classicação foi realizada de acordo com a área matemática predominante no trabalho, mas, para chegar aos resultados, foram utilizados desenvolvimentos em diversos ramos da matemática. Um dos trabalhos de Mary FairFax Somerville, por exempo, foi classificado como Matemática Aplicada, mas foi uma tradução da Matemática presente na *Mecânica Celeste*, de Laplace. Já Maryna Viazovska teve uma importante contribuição na Topologia, mas utilizou recursos de Ánalise e Álgebra.

Katherine Jhonson aparece na tabela acima com apenas um trabalho em Matemática Aplicada, pois foi o único ao qual se teve acesso. No entanto, é importante destacar que ela colaborou em mais de vinte artigos da mesma área. O mesmo ocorre com Maria Laura M. L. Lopes, que aparece com dois trabalhos na área de Educação Matemática, porém, colaborou em diversos materiais relacionados ao assunto.

[4] Devido ao grande número de publicações, foram computados somente os artigos publicados dentro da área de maior atuação da pesquisadora. Carolina possui ainda outras publicações de temas diversos.

Ao analisar o Quadro 1, percebe-se uma predominância de contribuições em Álgebra, possivelmente pela sua natureza abstrata. É importante considerar que a maioria dessas mulheres eram autodidatas já que seu acesso à educação era restrito até o século XX, e sendo assim o caráter teórico dessa área permitia que elas trabalhassem de forma individual sem a necessidade de laboratórios ou a dependência de instituições que eram inacessíveis na época. Cabe destacar que, no quadro, o maior número efetivo de publicações está na área de Geometria em decorrência das publicações mais recentes de Carolina Bhering de Araújo, o que revela a abertura desse espaço para as novas pesquisadoras.

Além disso, muitas atuaram em áreas nas quais encontraram apoio e incentivo. De acordo com O'Connor e Robertson, Hipátia de Alexandria atuou em Geometria por influência do pai, que também era matemático e atuava na área. Emmy Noether teve o apoio David Hilbert e Felix Klein, importantes matemáticos de sua época, os quais defendiam o seu ingresso na Universidade de Gottingen.

Os papéis sociais muitas vezes pressionavam as mulheres para que realizassem atividades tidas como "adequadas" e mesmo quando conseguiam ocupar espaços acadêmicos, era de forma limitada. Isso também explica o porque muitas delas não estavam presentes em áreas como Análise ou Matemática Aplicada, que demandavam acesso a uma maior rede de profissionais, em sua massiva maioria, masculinos. Katherine Johnson, por exemplo, atuou em Matemática Aplicada realizando cálculos para a NASA, mas enfrentou discriminação como mulher e como pessoa negra.

De acordo com Brabo (2022) foi a partir do século XX com o avanço de movimentos pelos direitos das mulheres que figuras femininas passaram a ter acesso a educação e carreiras científicas. Maryam Mirzakhani, por exemplo, se destacou em Matemática tendo recebido a Medalha Fields em (2014) pois o Irã, seu país de origem, passou a investir na educação feminina, como relatado pela American Mathematical Society (2018).

No Brasil é possível observar a atuação das mulheres na área da Educação Matemática. De acordo com Cavalari e Oliveira (2020), foi a partir do século XIX e início do século XX que as mulheres puderam contribuir para a produção de conhecimento no país e nessa época o ensino feminino era voltado para áreas como o magistério, sendo uma das poucas áreas que permitia uma atuação ativa no mercado de trabalho. Esse cenário fazia com que muitas mulheres que se interessavam pela Matemática passavam a atuar em frentes de melhoria do ensino dessa disciplina.

Como já mencionado, Maria Laura M. L. Lopes possui diversos trabalhos voltados à questão educacional brasileira além das duas publicações citadas no Quadro 1. Além disso, as publicações atribuídas à Elza Furtado Gomide, tratam-se de artigos publicados em eventos relacionados a Educação Matemática, onde atuou em questões voltadas à formação de professores, levantando questões como a qualidade do ensino e a necessidade de atualização dos currículos, com objetivo de promover uma educação mais crítica e reflexiva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A atuação dessas mulheres nas diversas áreas da Matemática reflete não apenas suas habilidades intelectuais, mas também, suas condições sociais e culturais de acordo com a época em que viveram, influenciando suas escolhas e trajetórias acadêmicas. A grande maioria das figuras femininas citadas

viveram em períodos onde o acesso à educação para meninas era limitado e o preconceito em relação a suas participações no campo científico era acentuado.

Do século XVIII ao XX se compararmos as contribuições realizadas por nomes femininos com as publicações de apenas dois nomes masculinos, Johann Bernoulli e Johann Carl Friedrich Gauss, teremos um total de 23 à 70 respectivamente. Esses números evidenciam um déficit de produções das mulheres, porém, isso não deveria ser entendido como demérito para essas mulheres pois, além de serem poucas, permaneceram com as obrigações sociais que são, tradicionalmente, impostas às mulheres.

Por fim, é importante ressaltar que mesmo com o número de publicações femininas ainda ser reduzido, esse quadro tem se modificado ao longo dos anos. Como exemplo, Carolina Bhering de Araújo possui um número expressivo de publicações. Além disso, atualmente as discussões a respeito do papel feminino nas ciências tem sido ampliadas e ações de incentivo para meninas e mulheres na ciência tem sido realizadas. Um reflexo disso é que, nos últimos dez anos, tivemos duas mulheres laureadas com a Medalha Fields.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica do IFSP (PIBIFSP).

REFERÊNCIAS

ACAYABA, Cíntia. **Katherine Johnson, matemática negra que ajudou a Nasa a ir para a Lua, morre aos 101 anos.** 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2020/02/24/katherine-johnson-matematica-negra-que-ajudou-a-nasa-a-ir-para-a-lua-morre-aos-101-anos.ghtml. Acesso em: 10 jul. 2024.

AMARAL, Thuany. **A história de 15 Matemáticas**: marie-louise dubreil jacotin. Marie-Louise Dubreil Jacotin. 2020. Disponível em: https://ueeuufsj.wixsite.com/ufsjmatematica/post/a-hist%C3%B3ria-de-15-matem%C3%A1ticas-marie-louise-dubreil-jacotin. Acesso em: 06 jun. 2024.

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY (org.). **Maryam Mirzakhani: 1977–2017**. 2018. Disponível em: https://www.ams.org/journals/notices/201810/rnoti-p1221.pdf. Acesso em: 06 dez. 2024.

BRABO, Tânia Suely Antonelli Marcelino. **A luta histórica das mulheres pela igualdade de direitos e sua influência importante na vida pessoal de muitas mulheres.** 2022. Disponível em: https://educadiversidade.unesp.br/a-luta-historica-das-mulheres-pela-igualdade-de-direitos-e-sua-influencia-importante-na-vida-pessoal-de-muitas-mulheres/. Acesso em: 19 jan. 2025.

CAROLINA Bhering de Araujo. Disponível em: <https://www.abc.org.br/membro/carolina-bhering-de-araujo/>. Acesso em: 02 nov. 2024.

CARVALHO, Tadeu Fernandes de; FERREIRA, Denise Helena; CÉSAR, Júlio. Matemática, Mulheres e Mitos: causas e consequências históricas da discriminação de gênero. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 571-597, out. 2016.

CAVALARI , Mariana Feiteiro. MULHERES MATEMÁTICAS: PRESENÇA FEMININA NA DOCÊNCIA NO ENSINO SUPERIOR DE MATEMÁTICA DAS UNIVERSIDADES ESTADUAIS PAULISTAS. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [S. l.], p. 89-102, 1 jan. 2010.

CAVALARI, Mariana Feiteiro; OLIVEIRA, Daniele Aparecida de. Obstáculos enfrentados por mulheres matemáticas na academia no século XX: um estudo em seis biografias. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Itajubá, v. 19, n. 38, p. 1-21, fev. 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/346455387_Obstaculos_enfrentados_por_mulheres_matematicas_na_academia_no_seculo_XX_Um_estudo_em_seis_biografias. Acesso em: 05 dez. 2024.

CRISPIM, Camila S.; FERNANDEZ, Cecília S.. **A vida de Maryam Mirzakhani**. Disponível em: http://mulheresnamatematica.sites.uff.br/wp-content/uploads/sites/237/2018/07/A-Vida-de-Maryam-Mirzakhani.pdf. Acesso em: 15 ago. 2024.

CURRÍCULO do Sistema de Currículo Lattes: Carolina Bhering de Araújo. Carolina Bhering de Araújo. Disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do;jsessionid=C96D0B4C926CF7656330C18C7B2AB65A.buscatextual_0>. Acesso em: 02 nov. 2024.

ENGENHARIA, Ciências e. **Mary Somerville**. 2017. Disponível em: https://cientificaengenharia.blogspot.com/2017/03/mary-somerville.html. Acesso em: 01 jun. 2024.

FERNANDEZ, Cecília de Souza; AMARAL, Ana Maria Luz Fassarella do. **A história de mulheres matemáticas na escola básica**. 2020. Disponível em: https://www.17snhct.sbhc.org.br/resources/anais/11/snhct2020/1596053530_ARQUIVO_29e9b257d336d546e29f1aa3b8d80824.pdf. Acesso em: 29 abr. 2024.

FERNANDEZ, Cecília de Souza; AMARAL, Ana Maria Luz Fassarella do; VIANA, Isabela Vasconcellos. A HISTÓRIA DE HIPÁTIA E DE MUITAS OUTRAS MATEMÁTICAS. In: SIMPÓSIO DE FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUDESTE, 2., 2019, Rio de Janeiro. **.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. p. 1-57.

JESUS, Samara de; GOMES, Leonardo. A importância de Emmy Noether para a inclusão das mulheres no Ensino Superior e no desenvolvimento dos estudos matemáticos. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 11, n. 6, p. 798-808, dez. 2020.

LAMB, Evelyn. **A Few of My Favorite Spaces: The Kovalevskaya Top**: the mathematical model that should be an amusement park ride. The mathematical model that should be an amusement park ride. 2017. Disponível em: https://www.scientificamerican.com/blog/roots-of-unity/a-few-of-my-favorite-spaces-the-kovalevskaya-top/. Acesso em: 03 jun. 2024.

LAUBENBACHER, Reinhard; PENGELLEY, David. **Athematical expeditions:** chronicles by the explorers. New York: New York: Springer, 1998.

MACTUTOR. **Mulheres Matemáticas**, 2021. Biografias. Disponível em: <https://mathshistory.standrews.ac.uk/Biographies/category-women/>. Acesso em: [2024].

MARQUES, Paulo. **A feiticeira de Maria Agnesi**. 2000. Disponível em: https://www.paulomarques.com.br/arq11-6.htm. Acesso em: 26 abr. 2024.

MOURA, Maiara Chaves de. **A PARTICIPAÇÃO DA MULHER NA CONSTRUÇÃO DA MATEMÁTICA**. 2015. Dissertação (Mestrado)–Universidade Federal Rural do Semi-Árido, [S. l.], 2015.

MUNHÓS, Laura Basso; SANTANA, Mauro Severino de; ROMAN, Rosana San. **Curva de Agnesi**. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5873847/mod_folder/content/0/Curva-de-Agnesi.pdf?forcedownload=1#:~:text=A%20curva%20de%20Agnesi%20%C3%A9,%E2%88%86CAO%20e%20%E2%88%86OSB.. Acesso em: 29 maio 2024.

NEWS, Bbc. **Mary Somerville**: a gênio autodidata que foi declarada rainha da ciência' e depois caiu no esquecimento. a gênio autodidata que foi declarada 'rainha da ciência' e depois caiu no esquecimento. 2020. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-50906021. Acesso em: 01 jun. 2024.

NOGUEIRA, Ricardo Reto Baptista. **MATEMÁTICA**: uma abordagem histórica. Uma abordagem histórica. 2021. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1lYGbdAuJSQEAXQACPraFh4IUKMp3LHIi/view. Acesso em: 30 maio 2024.

OLIVEIRA, Jacqueline Bernardo Pereira. PROJETO FUNDÃO: DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DOCENTE POR MEIO DE TRABALHO COLABORATIVO. In: VIII SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2016, Rio de Janeiro. .Rio de Janeiro: Sbem Brasil, 2016. p. 1-14. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/ocs/index.php/spemrj/viii-spem-rj/paper/viewFile/2031/1225>. Acesso em: 05 out. 2024.

OSEN, Lynn M.. **Women in Mathematics**. Cambridge: Mit Press, 1974.

PEREIRA, Pedro Carlos. **A educadora Maria Laura**: contribuições para a constituição da educação matemática no brasil. 2010. 239 f. Tese (Doutorado)–Curso de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PIONEIRAS na Matemática. Disponível em: <https://memoria.cnpq.br/web/guest/pioneiras-view/-/journal_content/56_INSTANCE_a6MO/10157/1762518>. Acesso em: 02 nov. 2024.

PRASS, Alberto Ricardo. **Em 16/05: MARIA GAETANA AGNESI**. Disponível em: https://fisica.net/biografias/em-16-05-maria-gaetana-agnesi/#:~:text=A%20contribui%C3%A7%C3%A3o%20matem%C3%A1tica%20mais%20importante,sob%20a%20dire%C3%A7%C3%A3o%20de%20Clairaut. Acesso em: 04 maio 2024.

SANTOS, Bruna Alves da Silva; DIAS, Leticia Dornellas; SILVA, Luis Filipe Ramos Campos da; MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **A MATEMÁTICA DAS MULHERES NA MATEMÁTICA PARA SER COMPREENDIDA NO ENSINO BÁSICO – MARIA GAETANA AGNESI E A CURVA DA BRUXA**. 2020. Disponível em: https://www.mat.ufcg.edu.br/pet/arquivos/resumos/vii-ecmat/vii-ecmat-bruna-leticia-luis.pdf. Acesso em: 27 abr. 2024.

SILVA, Circe Mary Silva da. MARÍLIA CHAVES PEIXOTO – UMA MATEMÁTICA BRASILEIRA À SOMBRA. In: XIII SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA BRASILEIRA, 13., 2019, Fortaleza. **Anais [...]** . Fortaleza: Snhm, 2019. p. 150-170. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/335169419_MARILIA_CHAVES_PEIXOTO_-UMA_MATEMATICA_BRASILEIRA_A_SOMBRA>. Acesso em: 10 out. 2024.

SILVA, Clóvis Pereira da. **Início e consolidação da pesquisa em Matemática no Brasil.** [S. l.: s. n.], 2008.

SILVA SOBRINHO, Alberto Paranhos da; OLIVEIRA, Cariolando Magalhães de. **Um estudo histórico da mulher na matemática**. 2023. 58 f. TCC (Graduação)–Curso de Licenciatura em Matemática, Intituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, Macapá, 2023. Disponível em: <http://repositorio.ifap.edu.br/jspui/bitstream/prefix/799/7/OLIVEIRA%3b%20SILVA%20SOBRINHO%20%282023%29%20%20Um%20Estudo%20Hist%c3%b3rico%20da%20Mulher.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2024.

STEINDORF, Vanessa; FRANCO, Simone Munari; PINHEIRO, Eliana do Carmo. **MULHERES NA MATEMÁTICA: CONHECENDO SOBRE O MARCO QUE DEIXARAM NA HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS**. 2012. Disponível em: http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/PO/PO_Steindorf_Vanessa.pdf. Acesso em: 27 abr. 2024.

TOLENTINO, Vaz. **Mary Somerville**: a escritora e polímata escocesa e sua cratera.. a escritora e polímata escocesa e sua cratera.. Disponível em: https://vaztolentino.com.br/imagens/7469-Mary-Somerville-a-escritora-e-polimata-escocesa-e-sua-cratera. Acesso em: 01 jun. 2024.

VIANA, Marcelo (ed.). **Emmy Noether, 'pai' da álgebra moderna**. 2018. Disponível em: https://impa.br/noticias/emmy-noether-pai-da-algebra-moderna/. Acesso em: 03 jun. 2024.

VIANA, Marcelo. **Folha: A história das primeiras professoras universitárias**. 2023. Disponível em: https://impa.br/noticias/folha-a-historia-das-primeiras-professoras-universitarias/. Acesso em: 27 maio 2024.

VIANA, Marcelo. **Na Folha, Viana comenta trabalho de Sophie Germain**. 2022. Disponível em: https://impa.br/noticias/na-folha-viana-comenta-contribuicoes-de-sophiegermain/#:~:text=Germain%20foi%20a%20primeira%20a,caso%20do%20teorema%20de%20Fermat).. Acesso em: 05 maio 2024.

VIEIRA, Júlia; FERREIRA, Matheus; BARBOSA, Isnaldo. A história por trás do teorema de Cauchy-Kovalevskaya. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, Não use números Romanos ou letras, use somente números Arábicos., 2023, Maceió. **Seminário Nacional de História da Matemática**. Maceió: Snhm, 2023. p. 1-16.

WADE, Elton. **Em sua curta vida, a matemática Emmy Noether mudou a face da física.** 2018. Disponível em: https://medium.com/@eltonwade/em-sua-curta-vida-a-matem%C3%A1tica-emmy-noether-mudou-a-face-da-f%C3%ADsica-51ecc4fb9a9. Acesso em: 09 jul. 2024.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

A formação da identidade social e corporal da professora que ensinava matemática até século XX

The formation of the social and bodily identity of the teacher who taught mathematics in the 20th century

Lorrayne Ferreira dos Santos de Paula[1]
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

Roseli Alves de Moura[2]
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

RESUMO

Investiga-se neste artigo, a partir do século XVIII, fazendo menção às mudanças sociais e políticas do século XIX tanto no Brasil quanto em Portugal, chegando até início do século XX; as relações de poder, que perpassam as relações de gênero, sob as quais as mulheres na sociedade brasileira eram submetidas. Destacam-se, com base em pesquisas documentais, o acesso à educação, além das articulações sociais que impossibilitaram durante muito tempo a ascensão da parcela feminina da população de uma maneira geral. Metodologicamente, nos ancoramos nos estudos de Louro (1997, 2003), em consonância com Joan Scott (1995) e Foucault (1987, 1989), este que possui como um direcionamento forte o gênero como peça importante para definir as relações de poder na sociedade. Nos detemos a um breve paralelo entre a educação brasileira e de outros países como Itália e França, destacando também mulheres matemáticas importantes nesse período histórico elencado. Encerramos trazendo algumas relações acerca da educação feminina destinada às professoras que ensinavam matemática e de que maneira suas posturas profissionais e sociais atingiram diretamente a forma como a educação básica era vista, em contraste com o prestígio social que a profissão foi perdendo ao longo do tempo.

Palavras-chave: História; Educação; Docência; Relações de poder; Matemática.

ABSTRACT

This article investigates the power relations, which permeate gender relations, under which women in Brazilian society were subjected, from the 18th century onwards, making mention of the social and political changes of the 19th century in both Brazil and Portugal, up to the beginning of the 20th century. Based on documentary research, we highlight access to education, as well as the social articulations that for a long time made it impossible for women to rise in general. Methodologically, we draw on the studies of Louro (1997, 2003), in line with Joan Scott (1995) and Foucault (1987, 1989), who has a strong focus on gender as an important element in defining power relations in society. We have drawn a brief parallel between Brazilian education and that of other countries such as Italy and France, also highlighting important women mathematicians in this historical period. We close bringing up some relationships about female education for teachers who taught mathematics and how their professional and social attitudes directly affected the way basic education was seen, in contrast to the social prestige that the profession lost over time.

Keywords: History; Education; Teaching; Power relations; Mathematics.

INTRODUÇÃO

Os estudos feministas atuais compreendem que para falar sobre a história das mulheres não basta colocá-las como personagens de uma história a qual elas são protagonistas e coadjuvantes, mas sim, reescrever toda a história dando-as o destaque e as colocando nos lugares que lhes foram retirados. Sendo assim, este artigo não tem a pretensão de falar da história das mulheres, mas sim das mulheres ao longo da história:

[1] Mestre em Educação em Ciências e Matemática–UFFRJ. Aluna do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: lofsant@gmail.com.

[2] Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP. Professora Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: rmoura@ufrrj.br.

> Que inscrever as mulheres na história implica necessariamente a redefinição e o alargamento das noções tradicionais daquilo que é historicamente importante, para incluir tanto a experiência pessoal e subjetiva quanto às atividades públicas e políticas. Não é demais dizer que ainda que as tentativas iniciais tenham sido hesitantes, uma tal metodologia implica não somente uma nova história de mulheres, mas também uma nova história. (Gordon; Buhle; Shron Dye, *apud* Scott, 2005, p. 3)

No que diz respeito a trajetória da mulher branca que viria a ser a professora que ensina matemática, primeiro, precisa-se compreender qual é o lugar social ocupado pela mulher durante todo o processo de construção como cidadã e posteriormente como professora. Antes do papel de professora, para algumas, vieram os de mãe e esposa, as responsáveis pelo lar e pelos afazeres domésticos. Portanto, para que se chegasse à docência, o acesso a conhecimentos educacionais veio primeiro e junto a este, a conquista de direitos sociais básicos.

Este artigo se inicia no século XVIII e perpassa pelo século XIX, chegando assim no novecentos, buscando contextualizar a sociedade na qual a mulher estava inserida e sob quais tutelas estavam submetidas. As principais fontes de pesquisa são Louro (1997, 2003), cujos estudos estão em consonância com Joan Scott (1995) que se aproxima dos estudos de Foucault (1987, 1989), este que possui como um direcionamento forte o gênero como peça importante para definir as relações de poder na sociedade:

> Minha definição de gênero tem duas partes e diversas subconjuntos, que estão interrelacionados, mas devem ser analiticamente diferenciados. O núcleo da definição repousa numa conexão integral entre duas proposições: (1) o gênero é um elemento constitutivo de relações sociais baseadas nas diferenças percebidas entre os sexos e (2) o gênero é uma forma primária de dar significado às relações de poder. As mudanças na organização das relações sociais correspondem sempre a mudanças nas representações do poder, mas a mudança não é unidirecional (Scott, 1995, p. 86).

Utilizando também a ideia do Materialismo dialético que discute a diferença entre os movimentos evolutivo e revolucionário, além da ideia convergente entre o materialismo e o idealismo. Como fonte para este ponto utiliza-se o livro Materialismo Dialético, de 1955, da Academia de Ciências da URSS.

O século XIX, marcado pelo início das mudanças educacionais nas leis, os quais promoveram um acesso feminino à educação pautado na crença social que o lugar da mulher sempre será com os cuidados de família e filhos. Chega-se então à Feminização do Magistério, ponto importante relacionado ao papel em que a docência e a mulher se interseccionam e que se perpetua até os dias atuais.

Assim, neste artigo, o objetivo a ser alcançado é o de fazer um breve percurso sobre as rédeas as quais as mulheres eram submetidas dentro das relações de gênero e, consequentemente, das relações de poder, até chegar ao início do século XX, de forma delimitada.

A SOCIEDADE QUE SE MOLDAVA A PARTIR DO OITOCENTOS

A configuração de sociedade que se compôs no Brasil desde a chegada dos portugueses, dificultou de diversas maneiras que as mulheres pudessem ocupar espaços, cargos e conquistar direitos.

Primeiro, por haver uma constante manutenção da crença que a mulher deveria estar subordinada aos dogmas cristãos, para que ela se lembrasse sempre que foi responsável por corromper o homem, fazê-lo comer o fruto proibido e ter contato com o Satanás (Araújo, 1997 *apud* Almeida, 2006). Segundo, ao relegar a mulher a um local de vítima e domínio, com a ideia de que ela sempre é dominada *versus* o homem dominador (Louro, 2003). Assim, depreende-se que ideais religiosos estão intrinsecamente relacionados aos sociais e estes serão considerados neste artigo.

Além disso, para falar sobre o processo de construção da professora do século XX, é necessário vislumbrarmos alguns aspectos do século XVIII para melhor situarmos e destacarmos alguns processos legislativos e sociais, além de culturais, que possibilitaram a entrada da mulher no magistério. Importante sinalizar que também ocorreu uma entrada voluntária, como possibilidade de uma nova realidade ou como a única alternativa possível diferente do "cárcere" social em que elas viviam.

As mulheres tiveram o processo de inclusão educacional no Brasil de maneira muito diferente dos homens. Em um primeiro momento, logo após a chegada dos portugueses ao Brasil, elas foram excluídas das escolas jesuítas e, consequentemente, excluídas do processo de leitura e escrita. Posteriormente, permitiu-se que frequentassem algumas instituições, porém com o cunho religioso e visando este estilo de vida para a posteridade, como relata Stamatto (2002, p. 2) "Assim, no período colonial, as mulheres tiveram acesso restrito ou nulo à escolarização, podendo em alguns casos estudar em casa, com preceptores, ou em alguns conventos visando a vida religiosa.". Além disso, houve um processo de "acolhimento" de mulheres solteiras e desamparadas por parte dos conventos, como uma forma de cuidar de mulheres que não tinham o cuidado dos maridos ou pais, que também, segundo Stamatto (2002, p. 3), "era uma preocupação com a honra, que na concepção da época dependia da castidade feminina tanto para a mulher como para o homem que 'a guardava'(...)".

Durante o século XVIII houve mudanças sociais, econômicas e legislativas em Portugal e suas colônias, consequentemente no Brasil, sendo estas principalmente fomentadas por Sebastião José de Carvalho e Melo (1699-1782), conhecido como Marquês de Pombal. A reforma Pombalina, como ficou conhecida, teve como objetivo levar novas configurações através da influência das ideias iluministas, em efervescência na Europa, buscando um desenvolvimento econômico e político. Segundo Saviani (2013 *apud* Neto, Strieder; Silva, 2019) a reforma pode ser dividida em períodos, em que se destacam dois desses períodos que convergem com o apontado, de acordo com as concepções de pedagogias educacionais:

> 1º período (1549-1759) – monopólio da vertente religiosa da pedagogia tradicional, subdividida nas seguintes fases: 1) uma pedagogia brasílica ou o período heróico (1549-1599) 2) a institucionalização da pedagogia jesuítica ou o Ratio Studiorum (1559-1759) 2º período (1759-1932) – Coexistência entre as vertentes religiosa e leiga da pedagogia tradicional, subdividida nas seguintes fases: 1) A pedagogia pombalina ou as ideias pedagógicas do despotismo esclarecido (1759-1827) 2) Desenvolvimento da pedagogia leiga: ecletismo, liberalismo e positivismo (1827-1932). (Neto, Strieder, Silva, 2019, p. 118)

Como uma das consequências da reforma, o Marquês de Pombal retirou, de forma ostensiva, o controle educacional das mãos dos jesuítas, fato que, segundo os autores Neto, Strieder, Silva (2019, p. 119), "caiu como uma bomba, desmantelando o trabalho que vinha sendo desenvolvido há dois séculos." Sobre a educação das mulheres, no segundo período da reforma depreende-se informações importantes: a diminuição e retirada do controle da educação das rédeas dos jesuítas favoreceu à população feminina que estas pudessem frequentar a escola, mas não para beneficiar-se

do aprendizado de conhecimentos escolares. Frente a esta mudança, houve uma reformulação do que era ensinado, mas não houve alteração nos valores cristãos que eram passados para as moças. Sendo assim, como destacam os autores Neto, Strieder e Silva (2019, p. 124) "a apresentação de considerações sobre a educação das mulheres, sugerindo a necessidade de que elas frequentassem as escolas para adquirir conhecimentos associados à administração do lar." Portanto, pode-se concluir que a educação e a importância que tinha, dependia de para qual grupo estava direcionada e igualmente ligada às particularidades de gênero atribuídas aos indivíduos. Logo, a educação era pautada nos papéis sociais que cada sexo deveria apresentar (Guapindaia, 2010).

É relevante destacar que esse modelo de Educação para as mulheres que a reforma pombalina propunha e fundamentava no Brasil não era igual ao que estava ocorrendo na Europa, especificamente entre as sociedades portuguesas e brasileiras, as diferenças foram visíveis. Segundo Seco e Amaral (2006) "em Portugal as reformas educacionais promoveram a laicização do ensino". Já no Brasil, "tais reformas significaram um retrocesso na educação escolar com o desmantelamento completo da educação brasileira oferecida pelo antigo sistema de educação jesuítica, mais bem estruturado do que as aulas régias puderam oferecer". Apesar de toda essa transição que a reforma se pautava, alguns autores não consideram que ela realmente rompeu com a educação jesuíta. Segundo Ribeiro (1998 *apud* Neto, Strieder, Silva, 2019) a orientação de ensino que se aplicava no Brasil era visto como retrocesso, se analisado sob a ótica pedagógica, visto que, acrescentou conteúdos e não houve de fato uma fissura com o ensino tradicional que já existia no país.

No que diz respeito à perspectiva social em outras nações, de maneira a construir uma comparação, Itália e França serão citadas de forma geral. No século XVIII, sob os auspícios do império austro-húngaro, a Itália passou por processos sociais, e, sobretudo em Milão, promovia-se uma aristocratização das elites dominantes. Através deste processo, ocorria uma implementação de diferentes mecanismos que favoreciam uma elite cujo prestígio e *status*, decorriam, não somente do nível socioeconômico, mas do sexo. Sobre isso, na educação, Moura (2017, p. 31) comenta que "existia um tipo de formação específica que era destinada aos filhos da elite dominante".

Especificamente em Milão, destaca-se um grupo de discussão e trocas de informações sobre filosofia e matemática, como forma de divulgar desdobramentos e novas descobertas, no âmbito da matemática. A importância em destacar tal singularidade está também no fato de que os encontros deste grupo ocorriam na casa de Maria Gaetana Agnesi (1718,1799), e eram chamados de *conversaziones*, termo referido às reuniões como também para caracterizar as pessoas que as frequentavam e, ao que parece, foi um fato isolado na sociedade setecentista. Contudo, tal acontecimento está vinculado à personagem Agnesi que pertencia a um grupo seleto da sociedade italiana, e seu legado decorre principalmente de ter seu nome atrelado à curva matemática "Bruxa de Agnesi", que de forma equívoca é fruto de um erro cometido pela tentativa de tradução de seu trabalho matemático, posteriormente. A obra matemática da estudiosa, embora tenha favorecido a inúmeros estudiosos posteriormente, somente foi traduzido para a língua inglesa, no século seguinte, em que se destaca o erro supracitado, e relegada ao esquecimento. Sobre sua formação, Agnesi recebia educação através de professores particulares contratados pelo seu pai, Pietro Agnesi, que apesar de serem tutores de seus irmãos, sugeriram que a jovem também fosse tutorada. Eles observavam o interesse da jovem, e de forma pontual, Agnesi e seus irmãos receberam educação desde a infância, pois assim que chegaram à adolescência os meninos seguiam para os colégios religiosos, não havendo evidências de que outras meninas estudassem em casa com os melhores professores disponíveis, como o que ocorreu com ela, como destaca Moura (2017).

Na França, por sua vez, ocorriam encontros promovidos por Voltaire (1694-1778) e a Marquesa Gabrielle Émilie Du-Châtelet (1706-1749). Estes encontros foram determinantes para a elaboração da obra de 1737, *II Newtonianismo per la donne ovvero dialoghi sopra la luce i colore e I'atrazione,* escrito por Francesco Algarotti (1712-1764*)*, que os visitava ocasionalmente. Constituído como um diálogo entre uma mulher e um homem, seu objetivo era disseminar a filosofia newtoniana, modelo este que, embora comum na França, era uma novidade para a sociedade italiana. Entretanto, Algarotti fez a associação entre a matemática e sua abstração, com a masculinidade (Moura, 2017). Vale destacar também que a Marquesa Du-Châtelet foi a responsável pela tradução da obra de Newton sobre o Cálculo Diferencial e Infinitesimal, mais conhecido como *Principia* de Newton (Moura, 2019). Apesar disso, seu papel também foi relegado a segundo plano. É válido salientar neste momento que houve uma relação muito próxima entre a Marquesa e Voltaire, grande destaque do movimento iluminista. Proximidade esta que permitiu que ele escrevesse o prefácio de *Principia*, este que segue abaixo deixando evidente a visão deste movimento a respeito das mulheres:

> Esta tradução, que os mais talentosos homens da França deveriam ter feito e que os outros devem estudar, uma mulher a empreendeu e terminou, para o espanto e glória de seu país. Gabrielle Émilie [...] é a autora desta tradução que se tornou necessária a todos aqueles que queiram adquirir profundos conhecimentos que o mundo deve ao grande Newton. Era muito para uma mulher conhecer a geometria elementar, que não é nem mesmo uma introdução às verdades sublimes desta obra imortal. Tem-se aí dois prodígios: o primeiro que Newton tenha escrito esta obra; o outro, que uma mulher a tenha traduzido e esclarecido. (Zinzer, 2006, p. 208 *apud* Silva, 2018, p. 53)

Na França do século XVIII, à época da Revolução Francesa, que tinha como pensador, dentre outros, Jean-Jacques Rousseau (1712-1778), as configurações educacionais e sociais aconteciam de maneira um pouco diferente. Rousseau era um iluminista que pregava severa distinção entre homens e mulheres na sociedade francesa. Para ele, as mulheres tinham uma função natural de ser cuidadoras do lar e serem capazes de educar seus filhos para fazer deles bons cidadãos:

> Assim, toda educação das mulheres deve ser relativa aos homens. Agradar-lhes, ser-lhes útil, fazer-se amar e honrar por eles, educá-los quando jovens, cuidar deles quando grandes, aconselhá-los, consolá-los, tornar suas vidas agradáveis e doces: eis os deveres da mulher em todos os tempos e o que lhes deve ser ensinado desde a infância. [...] faz com que gostem de seu sexo, que sejam honestas, que saibam cuidar de seu lar, ocupar-se com sua casa; [...] a obediência que deve ao seu marido, a ternura e os cuidados que deve a seus filhos, são conseqüências tão naturais e tão sensíveis de sua condição. (Rousseau, 1999, p. 502 *apud* Schmidt, 2012, p. 9)

Dando continuidade ao breve relato sobre a sociedade francesa, uma mulher matemática oriunda do país, pode ser destacada a fim de compreendermos mais profundamente como era o processo de escolarização e as oportunidades que eram oferecidas para as mulheres. Marie Sophie Germain (1776-1831) nascida em Paris, filha de pais burgueses, recebeu educação e sempre foi muito curiosa pelos conhecimentos matemáticos. Contudo, seu interesse não era bem-visto por sua família, por isso estudava nas madrugadas na biblioteca de seu pai. Vale lembrar que durante sua adolescência, a França enfrentou a Revolução Francesa que mesmo trazendo consigo ideais iluministas, não tinha como objetivo promover a cidadania política para as mulheres (Santos, 2020). Sophie tentou ingressar na Escola Politécnica de Paris, mas, como não aceitavam mulheres, para que pudesse continuar seus estudos, ela utilizou o codinome M. Le Blanc. Sendo este um ex-aluno da escola, o qual a Instituição

não tinha ciência que tinha deixado a cidade de Paris, a escola continuava a mandar as atividades para ele, mas quem resolvia os exercícios era Sophie. Em sua troca de correspondências com Gauss e Lagrange, foi descoberta pelo primeiro que se tratava de uma mulher e não de Le Blanc. Assim, sob a tutela de Gauss, dentre outras contribuições, a estudiosa se destaca com um trabalho sobre Superfícies Elásticas, que favoreceria à construção da Torre Eiffel, mas seu nome não apareceu, sequer, na lista de agradecimentos (Viana, Fernandez**,** 2020). Não obstante as revoluções políticas e sociais do final dos setecentos estes quadros de invisibilidade das mulheres não iria se alterar no século seguinte, como iremos discorrer a seguir.

É importante salientar que o paralelo estabelecido anteriormente demonstra as diferenças entre as sociedades francesa e italiana com a brasileira. Enquanto no Brasil, mesmo as mulheres que faziam parte de uma influência social através de suas famílias, tinham a educação voltada para o lar e sendo uma manutenção do seu lugar social, as mulheres europeias em questão, as que viriam a ser grandes matemáticas, mesmo que poucas, podiam adentrar, de alguma forma, o ambiente de desenvolvimento científico e de formação educacional.

AS RÉDEAS SOCIAIS E EDUCACIONAIS DO SÉCULO XIX

Posteriormente, já no século XIX, o Brasil começou a investir na educação, principalmente com a chegada da família portuguesa. A partir de então, houve a criação de diversas escolas, dentre elas a Academia Real Militar, situada no Rio de Janeiro. De forma análoga ao que ocorria na Europa dos setecentos, só meninos filhos de nobres poderiam ter acesso aos ensinamentos. Para as meninas, a escola normal as aceitava e as professoras esperavam-nas. A partir desse ponto, o processo de entrada das meninas na docência se tornou o único caminho possível de acesso à educação e a novas perspectivas sociais. Além disso, o ensino não era o mesmo para meninos e meninas "Ler, escrever e contar, saber as quatro operações, mais a doutrina cristã, nisso consistiam os primeiros ensinamentos para ambos os sexos; mas logo algumas distinções apareciam: para os meninos, noções de geometria; para as meninas, bordado e costura" (Louro, 1997). E, embora o domínio jesuíta não fosse mais evidente nas escolas, a educação cristã-católica ainda era primordial, juntamente com o ensino da docência:

> Ainda que a República formalizasse a separação da Igreja católica do Estado, permaneceria como dominante a moral religiosa, que apontava para as mulheres a dicotomia entre Eva e Maria. A escolha entre esses dois modelos representava, na verdade, uma não-escolha, pois se esperava que as meninas e jovens construíssem suas vidas pela imagem de pureza da Virgem. (Louro, 1997, p. 374)

Entretanto, vale ressaltar que o ensino não era análogo para todos os povos que viviam na sociedade brasileira. Compreendendo que a sociedade era composta por diferentes imigrantes, que as necessidades industriais do país exigiam grande quantidade de mão de obra, havia diversas bases educacionais que eram destinadas aos povos oriundos do exterior. As crianças negras eram submetidas a violência em seus ambientes de trabalho e às leis que oportunizavam a manutenção da escravidão. Aos povos indígenas estava destinada uma educação que se pautava nas práticas dos seus grupos e, apesar de sofrerem ações religiosas, a presença deles era proibida nas escolas públicas. Aos imigrantes alemães, italianos, espanhóis e japoneses, conhecidos como "trabalhadores livres", prevaleciam propostas educativas diferentes das demais. "As diferenças entre o sexo masculino e feminino estavam

presentes nas concepções educativas dos imigrantes — da mesma forma que determinavam, é claro, as dos luso-brasileiros" (Louro, 1997).

Os países que viviam sob a égide da Igreja Católica ainda promoviam uma educação fundamentada em diferenças para os gêneros masculino e feminino, além da educação voltada para as classes mais favorecidas da sociedade. Na Itália, por exemplo, após o processo de unificação em que o país ficou sob o domínio de Piemonte, houve uma lei chamada de "Lei Casatti", caracterizada por Saviani (2002, p. 276) "escola primária permanece ainda fora da alçada do governo central, devendo ser mantida pelos municípios que, como no Brasil, não dispunham dos fundos necessários". Corroborando ainda mais com o que acontecia no território brasileiro, a igreja católica ainda detinha influência no meio social. Por exemplo, no ano de 1872, uma revista católica publicou "meio seguríssimo de bem-estar material é o trabalho e a ausência de vícios". Ora, ao trabalho se requerem braços, não o alfabeto e do bom costume cuida a boa educação paterna e a instrução religiosa" (Catarsi, 1985, p. 20 *apud* Saviani, 2002, p. 276). Ainda segundo ao autor, não enxergavam a educação positivamente, ao contrário, compreendiam o poder que ela tinha e não objetivavam que a classe menos favorecida tivesse acesso a mesma. Consolidando esta ideia, ao final do século XIX, houve um Congresso na Sicília, no qual estavam reunidos grandes proprietários e neste, houve uma corajosa ideia que propunha "para toda reforma, a abolição da instrução elementar, para que os camponeses e os mineiros não pudessem, lendo, absorver as novas idéias". (Catarsi, 1985, p. 31 *apud* Saviani, 2002, p. 276).

De maneira concisa, a educação e o espaço das mulheres matemáticas citadas anteriormente, que viriam a ser referência em suas pesquisas, se comparadas com as mulheres que estavam adentrando à docência no Brasil, demonstram semelhanças no que diz respeito à falta de prestígio social. Entretanto, convergem quando se trata de remuneração, referência e formação adequada. Por sua vez, no Brasil, observa-se o processo de formação da professora dos anos iniciais sendo estritamente influenciador e influenciado pelas perspectivas sociais. Para alguns autores, o processo de docência das mulheres é definido como Feminização do Magistério primário:

> Referindo-se à expansão da mão-de-obra feminina nos postos de trabalho em escolas e nos sistemas educacionais, à frequência da Escola Normal e aos traços culturais que favoreceram a ocupação do magistério pelas mulheres. (Araújo, 1998, p. 610 *apud* Werle, 2005)

As escolas normais existentes na época foram desenvolvidas para receber alunos e alunas. Por exemplo, no Colégio Santa Teresa, no Rio Grande do Sul, era destinado muito mais a homens do que mulheres, mas aceitava meninas órfãs, foi instituída uma Escola Normal. Esta, funcionava separadamente do Colégio, seu diretor Pe Cacique, era contra as mudanças estruturais e legislativas, pois acreditava que a inclusão de disciplinas seria prejudicial ao aprendizado na escola, que possuía em sua maioria mulheres, estas eram representadas publicamente como cognitivamente inferiores. (Werle, 2005).

Entretanto, aos poucos foram constatados que mais mulheres estavam sendo formadas, já que esse era o único meio educacional que elas poderiam seguir, fato também influenciado pelas mudanças sociais que ocorriam:

> Provavelmente vinculado ao processo de urbanização e industrialização que ampliava as oportunidades de trabalho para os homens. A presença dos imigrantes e o crescimento

> dos setores sociais médios provocavam uma outra expectativa com relação à escolarização. Esses fatores e ainda a ampliação das atividades de comércio, a maior circulação de jornais e revistas, a instituição de novos hábitos e comportamentos, especialmente ligados às transformações urbanas, estavam produzindo novos sujeitos sociais, tudo concorria para a viabilização desse movimento. (Louro, 1997, p. 4)

Então, o cenário que se descortinava ao longo do século XIX era a prevalência das escolas normais cada vez mais ocupadas por mulheres, tanto como alunas, quanto como docentes. Alguns consideravam que elas não tinham aptidão para tal ocupação, outros acreditavam que a docência era perfeita para o cuidado, como uma extensão da maternidade, em consonância com Louro (2004) "a docência não subverteria a função feminina fundamental, ao contrário, poderia ampliá-la ou sublimá-la.". Começou-se então, a estruturar a docência de maneira que ela se assemelhasse cada vez mais com o papel de uma mãe, na qual a mulher não estivesse saindo da sua função natural definida pela bíblia e que foi corroborada pela sociedade durante todos os anos. Este processo é denominado como Feminilização, que é definido por Araújo (1998 *apud* Werle, 2005) afirmando que nele ocorreu uma "feminilização" pela "identificação entre a natureza feminil e a prática docente no ensino primário". Além disso, esses argumentos tinham como consequência a visão de que o magistério era um sacerdócio, vinculado à valores judaico cristãos, diminuindo assim as críticas, lutas e melhorias de condições de trabalho, pontos destacados por Louro (1997).

Um fato relevante a ser salientado acerca do trabalho da mulher como docente, é que mesmo saindo de casa por necessidade ou como uma fuga da educação voltada para os cuidados, a autorização dos pais ou maridos continuava sendo necessária para tais ações. Para Stamatto (2002), existiam legislações nas províncias que restringiam as mulheres, elas precisavam de autorizações de párocos, apresentar comportamentos adequados e, caso fossem divorciadas, ter um atestado de divórcio.

Um contínuo discurso permanecia, este que fomentava na sociedade de maneira a minimizar os locais ocupados pela parcela feminina da população. Conforme Louro (1997), tinha como objetivo lembrar que a mulher não tinha como função natural o trabalho fora de casa, era sempre destacado que elas poderiam trabalhar fora, mas que ao se casarem, sua principal função seria o lar e os filhos, apesar da construção da "mulher professorinha". Convergindo, tem-se:

> A exigência do celibato para que as mulheres pudessem exercer a função de professoras do ensino público estava proposta no Estatuto da Instrução Pública nos seus artigos de 22 a 25, apresentada pelo diretor Anísio Brito. Segundo aquela proposta, as professoras tinham que ser solteiras ou viúvas e caso viessem a contrair matrimônio perderiam imediatamente o cargo para o qual tinham sido nomeadas (Ferro, 1996, p. 92-94 *apud* Stamatto, 2002, p. 9)

Em suma, a ocupação dos espaços pelos corpos femininos era contestada e criticada pelos critérios religiosos, sociais, médicos e educacionais. A postura determinada socialmente revelava sob quais tutelas das relações de poder as mulheres docentes eram submetidas. O Brasil que se constituiu nos anos finais do novecentos para o século XX era o país que estava saindo do Império e entrando no período da República, mudanças que levaram tempo. O que se busca agora neste artigo é compreender como os acontecimentos anteriores foram agentes ativos na formação da professora que atuava no século passado. A partir disso, o seguinte questionamento é feito: Qual seria a postura ideal que a professora que ensinava matemática na educação básica deveria possuir? Para

que se possa falar sobre uma postura adequada ou perfil ideal, é necessário compreender sob quais controles sociais viviam as mulheres no geral e como isso se ampliava para as docentes no século XX.

Este período é também marcado pela identidade social que a docência carrega. O magistério primário era visto como lugar de mulher e como o patamar mais alto que uma mulher poderia chegar na época. Aos poucos as professoras eram chamadas de educadoras, sendo que a função da educadora consistia em dar afeto, instrução e apoio. (Louro, 1997) Evidenciando ainda mais o local das mulheres no Brasil, à medida que elas foram inseridas na docência, a profissão começou a diminuir de prestígio e consequentemente ser menor remunerada (Pucci, Oliveira; Sguissardi, 1991, p. 63 *apud* Santos; Silva, 2015, p. 7).

AS RELAÇÕES DE PODER NAS RELAÇÕES DE GÊNERO NO SÉCULO XX

No início deste artigo foi falado sobre os lugares fixos que se acreditavam que as mulheres e os homens ocupavam socialmente, romper com essa ideia é um dos pontos importantes aqui. Fundamentada em Foucault, Louro (2003) destaca a importância de não considerar que, nas relações de poder, algum polo possui poder e outro, não. Na verdade, são os sujeitos que exercem esse poder, e este tem efeito sob suas ações. Além disso, para que haja o exercício do poder, os sujeitos devem ser capazes de resistir, caso contrário, tem-se uma relação de violência. Para Foucault, não há poder sem liberdade e sem potencial de revolta (Maia, 1985 *apud* Louro, 2003). As relações de poder podem ser destacadas pela ótica que permite uma compreensão de que homens e mulheres se constroem socialmente por meio de ações, gestos e posturas, ou seja, o poder pode também constituir os corpos dóceis e induzir comportamentos, portanto, o exercício do poder se estabelece nas relações de gênero e para as relações de gênero (Louro, 2003).

Para o exercício do poder nas relações de gênero, há um domínio dos corpos. Para que esse corpo seja utilizado da forma como se quer, não necessariamente precisa haver uma violência física, basta que sejam moldados e orientados de forma que não compreendam o controle que sofrem, não possuindo ciência de como sair desse controle, compondo assim o que Foucault chama de tecnologia do poder:

> O corpo só se torna força útil se é ao mesmo tempo corpo produtivo e corpo submisso. Essa sujeição não é obtida só pelos instrumentos da violência ou da ideologia; pode muito bem ser direta, física, usar a força contra a força, agir sobre elementos materiais sem, no entanto, ser violenta; pode ser calculada, organizada, tecnicamente pensada, pode ser sutil, não fazer uso de armas nem do terror, e, no entanto, continuar a ser de ordem física. quer dizer que pode haver um "saber" do corpo que não é exatamente a ciência de seu funcionamento, e um controle de suas forças que é mais que a capacidade de vencê-las: esse saber e esse controle constituem o que se poderia chamar a tecnologia política do corpo. (Foucault, 1987, p. 29)

Tem-se, então, que as mulheres tinham seus corpos, atitudes, posturas e espaços moldados através das relações de poder que eram exercidas nelas, tanto pelo Estado, quanto pelas pessoas que compunham a sociedade. Aliás, Foucault (1987) afirma que o poder que se exerce nos corpos não é necessariamente adquirido pela classe dominante, mas sim efeito das posições estratégicas ocupadas por ela. Também é manifestado e pode ser reconduzido pelos que estão sendo dominados. Portanto, manter as mulheres como um grupo que já tinha funções pré-determinadas, uma vocação

e sob égide do patriarcado, era uma forma de continuar sustentando suas posições de privilégios e as deixando no polo dominado. Ou seja, o exercício do poder ditava quais lugares eram femininos.

Também, ao falar de história, o idealismo, construído por Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831), como sinaliza Tchertkov et al (1955), se baseava principalmente em fontes fictícias, podendo chegar até as fontes divinas. Sob tais perspectivas, consideremos que, se o idealismo consistia em crenças religiosas e as mulheres eram caracterizadas pela forma como o "divino" as enxergava, então, o idealismo pode ser compreendido como uma das bases para a construção que a figura feminina possuía:

> Não é casual, portanto, que o próprio idealista Hegel tenha falado da "razão universal" como ideia do "portador do mundo", isto é, de Deus, e os machistas tenham, de fato, representado o papel de lacaios do obscurantismo clerical. Todos os idealistas apelam, de uma maneira ou de outra, para a religião. O idealismo se confunde intimamente com a religião. (Tchertkov et al, 1955, p. 21)

As mulheres, então, viviam sob as relações de poder pois estavam no polo que não dispunha do controle desse poder. Entretanto, para que algo pudesse ser modificado, era necessário que existisse algum movimento que convergisse com tal mudança. Para o materialismo dialético a caracterização dos movimentos pode acontecer de duas maneiras: movimento evolutivo e movimento revolucionário. O movimento evolutivo se estabelece quando os elementos progressistas continuam suas funções dia após dia, portanto, produz pequenas mudanças, de maneira quantitativa e gradual. O movimento revolucionário, por sua vez, se consolida a partir do momento em que os elementos se unem e promovem uma revolta de maneira a extinguir a ordem existente sobre as coisas e possibilitar uma nova (Tchertkov et al, 1955). O movimento das mulheres pela busca de direitos e espaços, com o avanço do movimento feminista, aconteceu de maneira gradual, como um movimento evolutivo e consideramos relacionados com a construção da identidade das professoras que ensinavam matemática.

Relacionar o materialismo dialético e seu movimento evolutivo com o processo de alteração da posição das mulheres dentro da perspectiva social, rompe com a ideia impregnada pelo idealismo que se baseia na religião e no abstrato para determinar o local "ideal" das pessoas/coisas.

O processo de ocupar os espaços educacionais com os corpos femininos, utilizando a definição biológica, faz relação direta com a ideia de Foucault, promovendo uma reflexão baseada na historiografia, de que as mulheres da época começavam a fomentar a discussão, por mais rasa que fosse, sobre seus direitos e destacando que, ao terem formação adequada, poderiam estar em quaisquer espaços educacionais e de troca de conhecimento. Para tanto, ao longo do século XX, os movimentos sociais ganham força e passam a ser acolhidos por uma parcela da sociedade. É importante ressaltar que mesmo com esta aceitação, cada grupo possuía suas próprias lutas, demandas e alegações na busca por mais direitos e que, neste artigo, não nos deteremos a este período histórico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A docência do século XVIII foi se estabelecendo e relacionando-se a crenças religiosas que se estendiam também às leis para que os corpos femininos (através da definição biológica) se manti-

vessem sob as rédeas das relações do poder do lado dominado, sem muitas chances de uma revolta, constituindo assim uma violência.

As grandes matemáticas europeias, mesmo não conhecendo os termos atuais utilizados para definir lutas e processos de empoderamento, através de suas oportunidades, foram objetos de estudo deste artigo como forma de destacar sua importância e relatar suas trajetórias comparadas com as professoras docentes da educação primária no Brasil. Enquanto na Europa mulheres faziam parte de grupos de estudo científicos, desenvolviam pesquisas com outros matemáticos importantes da época, no Brasil, este grupo estava na tentativa de conseguir uma educação básica de qualidade que pudesse ser um fuga de seus lares e dos princípios cristãos.

Apesar das dificuldades, o século XIX se constitui de maneira um pouco diferente para este grupo. A partir do momento em que eclodem movimentos sociais que indagaram e problematizaram esse local de "dominado", as mudanças começaram a se fomentar na sociedade. Foi neste período em que as mulheres obtiveram o espaço como docentes, mas ainda sob a égide de um patriarcado que as colocava como cuidadoras e realizavam essa manutenção socialmente.

O que se pode compreender desta formação feminina é o quanto as relações de poder estavam intrínsecas à ela. Primeiro, por não permitir que a mulher tivesse uma formação adequada simplesmente por ser mulher. Depois, por preterir que a docência tivesse um reconhecimento social e financeiro e, em um terceiro momento, tentar manter o ambiente matemático de certa forma afastado das mulheres que buscavam adentrá-lo.

Nos anos finais do novecentos e início do século XX os movimentos sociais constituídos por mulheres em diferentes partes dos continentes e no Brasil possibilitaram uma reivindicação mais incisiva que questionava as circunstâncias sociais que as mulheres se encontravam. Interpelando a respeito de suas profissões, direitos, salários, sexualidade e controle sobre seus corpos físicos, bem como sobre suas estruturas sociais.

Sob estas circunstâncias, pode-se compreender que a entrada das mulheres na docência possibilitou um novo rumo para suas realidades, mas este espaço era também limitado pela construção social que delimitava o espaço ocupado por elas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Jane Soares. **Mulheres na Educação: Missão, Vocação e Destino? A feminização do magistério ao longo do século XX**. In: O Legado Educacional do Século XX no Brasil. 2ª. ed. São Paulo: Autores Associados, 2006. v. Único, cap. 2, p. 59-102. ISBN 978-85-7496-105-1

FOUCAULT, Michel. **Vigiar e Punir: Nascimento da prisão.** 27. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1987. 349 p. v. 1. ISBN 85.326.0508-7. Disponível em: https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/centrocultural/foucault_vigiar_punir.pdf. Acesso em: 24 mar. 2022.

FOUCAULT, Michel. **História da sexualidade I: A vontade do saber**. 13. ed. Rio de Janeiro: EDIÇÕES GRAAL Ltda., 1999. 151 p. v. 1. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2940534/mod_resource/content/1/Hist%C3%B3ria-da-Sexualidade-1-A-Vontade-de-Saber.pdf. Acesso em: 25 mar. 2022.

GUAPINDAIA, Mayra Calandrini. **Relações de gênero, pensamento pedagógico e reforma política na ilustração portuguesa.** Diásporas, Diversidades e Deslocamentos, [*s. l.*], p. 1-10, 2010. Disponível em: http://www.fg2010.wwc2017.eventos.dype.cm.br/resources/anais/1277840802_ARQUIVO_Artigo.pdf. Acesso em: 31 mar. 2022.

LOURO, G. L. **Gênero, Sexualidade e Educação: Uma perspectiva pós-estruturalista**. 6ª. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003. 184 p. v. 1. ISBN 85.326.1862-6.

LOURO, G. L. **Mulheres na sala de aula**. In: DEL PRIORI, Mary (org). História das Mulheres no Brasil. São Paulo: contexto, 1997. P.443-481.

MELO, Wanderson Fabio de. **Marx e a educação na Comuna de Paris**. Núcleo Interdisciplinar de Estudos e Pesquisas sobre Marx e Marxismo, Niterói, RJ, set/out 2013. Disponível em: https://www.niepmarx.blog.br/MManteriores/MM2013/Trabalhos/Amc214.pdf. Acesso em: 28 abr. 2022.

MOURA, Roseli Alves de. **Um estudo sobre Instituzioni Analitiche de Maria Gaetana Agnesi: Álgebra e Análise na Itália setecentista**. Orientador: Fumikazu Saito. 219 p. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação Matemática)–Pontífica Universidade Católica, São Paulo, 2017. Disponível em: https://heemaweb.files.wordpress.com/2017/03/ramouratese-1.pdf. Acesso em: 28 abr. 2022.

NASCIMENTO, João Batista do. **Algumas mulheres da História da Matemática:** E a questão de gênero em ciência e tecnologia. 2013:1-67. Disponível em: https://www.mathunion.org/fileadmin/CDC/cdc-uploads/CVgrantsIndividual/mulheres.matematica.maio..13.pdf. Acesso em: 30 abr 2022.

SANTOS, Rieli Tainá Gomes dos. **Sophie-Marie Germain (1776–1831)**. *In*: GPET–FÍSICA–UNICENTRO. [*S. l.*], 2020. Disponível em: https://www3.unicentro.br/petfisica/2020/11/06/sophie-marie-germain-1776-1831/. Acesso em: 22 abr. 2022.

SANTOS, A. M. dos; SILVA, R. S. da. **O processo de construção da identidade do docente no Brasil**. XV Seminário Internacional de Educação , [*s. l.*], 2015. Disponível em: https://www.fe-evale.br/Comum/midias/bc6a3914-c2b7-4435-ad2b-574f5310852e/O%20processo%20de%20constru%C3%A7%C3%A3o%20da%20identidade%20docente%20no%20Brasil.pdf. Acesso em: 13 abr. 2022.

SCOTT, Joan. **Gênero:** uma categoria útil de análise histórica. Educação e Realidade, [*s. l.*], v. 20, ed. 2, p. 71- 99, jul-dez 1995. Disponível em: https://www.seer.ufrgs.br/educacaoerealidade/article/viewFile/71721/40667. Acesso em: 8 abr. 2022.

SECO, Ana Paula; AMARAL, Tania Conceição Iglezias. Marquês de Pombal e a Reforma Educacional Brasileira. **HISTED BR:** Navegando pela história da Educação Brasileira, [*s. l.*], 2006. Disponível em: https://www.histedbr.fe.unicamp.br/navegando/artigos/marques-de-pombal-e-a-reforma-educacional-brasileira. Acesso em: 13 abr. 2022.

SCHMIDT, J. de F. (2012). As Mulheres na Revolução Francesa. **Revista Thema**, *9*(2). Disponível em: https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/147 Acesso em: 24 abr. 2022.

SHIGUNOV Neto, A., STRIEDER, D.M., & SILVA, A.C. da. (2019). A reforma pombalina e suas implicações para a educação brasileira em meados do século XVIII. **Tendências Pedagó-**

gicas, 33, 117-126. Disponível em:https://revistas.uam.es/tendenciaspedagogicas/article/view/tp2019.33.009 doi: 10.15366/tp2019.33.009. Acesso em: 5 abr 2022.

SILVA, Vanessa Moura e. **Émilie du Châtelet Filósofa e Cientista do Iluminismo na França do Século XVIII**. Rio de Janeiro: [*s. n.*], 2018. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/38595/38595.PDF. Acesso em: 18 out. 2022.

STAMATTO, Maria Inês Sucupira. **Um olhar na História: a mulher na escola (Brasil: 1549 – 1910)**. Programa de Pós-Graduação em Educação – UFRN. II Congresso Brasileiro de História da Educação, 2002. Disponível em: https://www.tjrj.jus.br/documents/10136/3936242/a-mulher-escola-brasil-colonia.pdf . Acesso em: 13 abr 2022.

VIANA, Isabela V.; FERNANDEZ, Cecília S. A Vida de Sophie Germain. **Mulheres na Matemática**, [*s. l.*], 2020. Disponível em: http://mulheresnamatematica.sites.uff.br/wp-content/uploads/sites/237/2021/04/A-Vida-de-Sophie-Germain.pdf. Acesso em: 29 abr. 2022.

TCHERTKOV, V. P. *et al*. **Materialismo Dialético**. Moscou, URSS: Editorial Vitória Ltda, 1955. 783 p.

WERLE, Flávia Obino Corrêa. Práticas de Gestão e Feminização do Magistério. **Caderno e Pesquisa**, [*s. l.*], v. 35, ed. 126, p. 609-634, set-dez 2005. Disponível em: https://www.scielo.br/j/cp/a/ry6Fzg8Qxt7ZCHtFTtk7Hkj/?format=pdf. Acesso em: 12 abr. 2022.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Reflexões históricas no ensino da matemática: caminhos para uma compreensão significativa

Historical considerations on the teaching of mathematics: ways to a meaningful understanding

Daniela Almeida Barbosa[1]
Universidade Federal de Goiás – UFG

Bruno Felipe Gonçalves Diamantino da Silva[2]
Universidade Federal de Goiás – UFG

Humberto de Assis Clímaco[3]
Universidade Federal de Goiás – UFG

RESUMO

Este artigo apresenta uma revisão documental sobre a integração da história da matemática no ensino, abordando como essa estratégia pode enriquecer a aprendizagem matemática e tornar a disciplina mais acessível e envolvente para os estudantes. A partir de uma análise bibliográfica de estudos nacionais e internacionais, o artigo explora diferentes abordagens pedagógicas que incorporam elementos históricos, discutindo os benefícios dessa prática para a compreensão de conceitos matemáticos e o desenvolvimento de um pensamento crítico. O uso da história da matemática permite contextualizar e humanizar a disciplina, oferecendo aos alunos uma perspectiva ampliada sobre sua evolução e importância cultural, científica e tecnológica ao longo do tempo. A revisão também destaca como essa metodologia promove uma aprendizagem mais ativa e significativa, incentivando a curiosidade e a participação dos estudantes. Conclui-se que a integração da história da matemática em sala de aula pode ser uma ferramenta valiosa para aumentar o interesse dos alunos, bem como para desenvolver habilidades analíticas e críticas, fundamentais na formação cidadã e acadêmica dos estudantes.

Palavras-chave: História da Matemática, Ensino da Matemática, Contextualização, Aprendizagem ativa, Metodologia Pedagógica.

ABSTRACT

This article presents a documentary review on the integration of the history of mathematics in teaching, addressing how this strategy can enrich mathematical learning and make the subject more accessible and engaging for students. Through a bibliographic analysis of national and international studies, the article explores different pedagogical approaches that incorporate historical elements, discussing the benefits of this practice for the understanding of mathematical concepts and the development of critical thinking. Using the history of mathematics allows for contextualizing and humanizing the subject, offering students an expanded perspective on its evolution and cultural, scientific, and technological significance over time. The review also highlights how this methodology promotes a more active and meaningful learning experience, fostering students' curiosity and participation. It concludes that integrating the history of mathematics into the classroom can be a valuable tool for increasing students' interest, as well as developing analytical and critical skills, essential for students' civic and academic formation.

Keywords: History of Mathematics, Mathematics Education, Contextualization, Active Learning, Pedagogical Methodology.

[1] Licencianda em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Estudante e estagiária pelo Instituto de Matemática e Estatística da UFG (IME), Goiânia, Goiás, Brasil. E-mail: dani173004@gmail.com.

[2] Licenciando em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Bolsista pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG), Goiânia, Goiás, Brasil. E-mail: diamantino@discente.ufg.br.

[3] Doutor em Educação pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Professor adjunto no Instituto de Matemática e Estatística (IME) da UFG, Goiânia, Goiás, Brasil. E-mail: humberto_climaco@ufg.br.

INTRODUÇÃO

Conhecer a História por trás do que se estuda é fundamental para a contextualização e para a compreensão dos conteúdos. No entanto, essa prática ainda é pouco explorada como ferramenta didática nas aulas de Matemática e seu uso, quando ocorre, geralmente fica limitado à narração acrítica de anedotas e contos acerca de personagens e fatos históricos relacionados à Matemática.

Desde a segunda metade do século XX, no entanto, a História da Matemática tem se consolidado como uma área de conhecimento e investigação na Educação Matemática e sua integração ao ensino tem sido discutida em eventos científicos, como o próprio *Seminário Nacional de História da Matemática* (SNHM), além de artigos, livros, dissertações, teses e revistas especializadas, como a *Revista de História da Educação Matemática* (Revista Histemat), entre outras.

Concomitantemente, nos últimos anos, inúmeras pesquisas têm sido feitas na área do Ensino da Matemática com o foco em buscar soluções para tornar a aprendizagem dessa disciplina acessível e atrativa. Entre essas soluções, a inclusão da História da Matemática no currículo escolar surge como uma abordagem promissora, com potencial de humanizar a disciplina e promover uma aprendizagem mais significativa e contextualizada para os alunos.

Assim, esta pesquisa visa explorar as bases conceituais e práticas da integralização da História da Matemática ao Ensino de Matemática como metodologia, destacando a importância de sua implementação e os desafios enfrentados pelos educadores que se dispõem a efetivá-la. Com base no material acima vagamente referido – e que exporemos mais pormenorizadamente no decorrer de nosso texto –, esta pesquisa busca selecionar as contribuições de grandes pesquisadores sobre o tema e demonstrar como a História da Matemática pode ser utilizada como uma ferramenta pedagógica muito efetiva.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

Esta investigação fundamenta-se em uma análise cuidadosa das contribuições de autores renomados na área da Educação Matemática. Buscamos integrar autores nacionais e internacionais, tanto para oferecer uma visão mais ampla sobre o tema quanto para contribuirmos com a democratização do acesso à literatura estrangeira. Cinco autores se destacam por suas contribuições teóricas e práticas relacionadas ao uso da História da Matemática no contexto educacional: Fauvel e Van Maanen (2000), Miguel e Miorim (2005, 2011) e Barbin (2012).

Fauvel e Van Maanen defendem a importância de incorporar a História da Matemática no ensino. Em *History in Mathematics Education: An ICMI Study* (2000), eles exploram como a História da Matemática pode ser utilizada como uma ferramenta pedagógica poderosa para aproximar os alunos da Matemática ao torná-la mais relevante. Eles trazem à pesquisa o respaldo de um estudo internacional amplamente reconhecido, que fundamenta teoricamente a integração da História da Matemática ao ensino em razão de sua potencialidade – enquanto ferramenta pedagógica – de humanização dos saberes matemáticos. Este estudo se trata de uma investigação conduzida sob os auspícios da *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), que analisa e discute como a História da Matemática pode ser integrada ao ensino e aprendizado da Matemática em diferentes níveis educacionais. Explora diversas abordagens pedagógicas, benefícios e desafios dessa integração, apresentando exemplos e argumentos que mostram como a História da Matemática pode enriquecer a experiência dos alunos, aproximá-los dos conceitos matemáticos e tornar tais

conceitos mais significativos. Ele reúne contribuições de educadores e pesquisadores de várias partes do mundo, sendo uma referência inigualável para quem busca fundamentação teórica e práticas aplicadas nesse campo.

Miguel e Miorim são autores brasileiros que se destacam no campo da Educação Matemática, especialmente na análise da aplicação da História no ensino de Matemática no Brasil. Em seus trabalhos, *A História da Matemática e o Ensino: Algumas Reflexões e Possibilidades* (2005) e *Ensinar Matemática com História* (2011), eles exploram metodologias lúdicas e alternativas, narrativas históricas, jogos etc. com o intuito de engajar os estudantes. Discutem também como os conceitos matemáticos foram construídos ao longo do tempo de maneira a tornar a aprendizagem mais significativa e utilizando a História como um recurso didático eficaz. Para esta pesquisa, Miguel e Miorim fornecem uma perspectiva brasileira sobre a utilização da História no ensino de Matemática, o que nos possibilita, além de articular as produções científicas estrangeiras com o contexto nacional, mostrar as realidades e desafios enfrentados pelos professores e alunos no contexto nacional.

Finalmente, Barbin é uma das maiores autoridades mundiais no que se refere ao uso da História da Matemática na Educação. Em seu trabalho *A História da Matemática e o Ensino* (2012), ela argumenta que, ao abordar a Matemática como uma construção humana e histórica, os alunos podem se sentir mais conectados com os saberes desta disciplina e perceber sua relevância no mundo real, o que, como não é muito difícil perceber, está em íntimo diálogo com as conclusões de Fauvel e Van Maanen (2000) acima expostas. Sua obra, amplamente respeitada, é uma verdadeira referência para os professores que buscam integrar a História da Matemática em suas aulas, tornando os conceitos mais acessíveis para os alunos.

De forma geral, os estudos de Fauvel e Van Maanen (2000), Miguel e Miorim (2005, 2011) e Barbin (2012) proporcionam à pesquisa uma base teórica sólida que conecta a História da Matemática ao ensino contemporâneo, destacando a relevância dessa integração para a formação de alunos mais engajados e críticos em relação à disciplina matemática.

METODOLOGIA

Na construção desta pesquisa de cunho documental-bibliográfica, a metodologia adotada baseou-se em Lakatos e Marconi (2003) e Witter (1990). A partir deles, selecionamos, organizamos e interpretamos como se deve sempre proceder numa pesquisa bibliográfica no que diz respeito às referências de artigos acadêmicos, livros, teses e relatórios, tanto nacionais quanto internacionais, que tratam do tema.

O processo seguiu etapas definidas para garantir a relevância e qualidade dos materiais, assim como uma visão abrangente e aprofundada sobre o tema.

Inicialmente, foi realizada uma busca em bases de dados reconhecidas, como *Google Scholar*, SciELO, *Education Resources Information Center* (ERIC) e periódicos especializados em Educação Matemática e Pedagogia, com palavras-chave específicas como "história da matemática no ensino", "metodologias pedagógicas" e "ensino de matemática". Os critérios de inclusão abrangeram publicações dos últimos vinte anos, com foco em textos que apresentassem tanto abordagens teóricas quanto evidências práticas sobre a aplicação da história da matemática em sala de aula. Foram priorizados artigos e livros que oferecessem dados quantitativos e qualitativos sobre os benefícios, desafios e metodologias associadas ao uso da História da Matemática no ensino.

Após a coleta e leitura dos documentos, eles foram organizados em categorias temáticas, abordando: (i) a importância da história da matemática para a aprendizagem; (ii) metodologias e práticas pedagógicas; e (iii) estudos de caso e desafios. A análise envolveu uma leitura aprofundada para identificar as contribuições de cada autor e como elas poderiam ser integradas ao contexto educacional atual. As informações relevantes foram sintetizadas, permitindo uma discussão detalhada sobre as melhores práticas e os desafios envolvidos na implementação da História da Matemática no currículo escolar.

A revisão documental-bibliográfica foi complementada pela análise crítica dos autores expostos e de outros, como Motta (2005), na *Fundamentação Teórica*.

Dessa forma, a metodologia utilizada permitiu identificar e sintetizar conhecimentos prévios, oferecendo uma base sólida para a discussão sobre a importância da História da Matemática na Educação e suas implicações pedagógicas.

Abaixo, damos dois quadros que resumem a seleção dos documentos estudados nessa pesquisa e o processo de categorização por nós determinado após a leitura dos textos encontrados.

Quadro 1 – Processo de seleção dos documentos na pesquisa

Base de Dados	Documentos inicialmente encontrados	Documentos após aplicação dos critérios de inclusão	Documentos selecionados para análise
Google Scholar	52	18	10
SciELO	23	9	5
ERIC	17	7	4
Periódicos CAPES	38	15	8
Revistas Especializadas (Histemat, Zetetiké)	21	10	6
Total	**151**	**59**	**33**

Fonte: Elaboração pelos autores.

Quadro 2 – Documentos encontrados e sua categorização

Categoria	Referência	Principais contribuições
(i) Importância da História da Matemática para a Aprendizagem	Fauvel e Van Maanen (2000)	Explora como a História da Matemática pode enriquecer o ensino e tornar a aprendizagem mais significativa
	Barbin (2012)	Argumenta que a História da Matemática humaniza a disciplina, conectando-a ao contexto cultural e científico.
	Clark *et al.* (2022)	Defende que a inclusão da História da Matemática melhora a motivação e o engajamento dos alunos.
	Miguel e Miorim (2011)	Aponta que a História da Matemática contribui para a formação do pensamento crítico e contextualizado.

(ii) Metodologias e Práticas Pedagógicas	Teixeira (2019)	Discute metodologias ativas, com o *Problem-Based Learning* (PBL) e ensino baseado na resolução de problemas históricos.
	Miguel e Miorim (2005)	Propõe abordagens lúdicas, narrativas históricas e atividades interativa para ensinar Matemática.
	Oliveira e Siqueira (2023)	Apresenta um estudo de caso sobre o ensino de trigonometria a partir de um contexto histórico.
	Vieira *et al*. (2019)	Demostra o uso de histórias em quadrinhos (HQs) para ensinar conceitos matemáticos por meio de narrativas ilustradas.
(iii) Estudo de caso e desafios	Becker e Baldridge (2016)	Relata um estudo de caso sobre o uso da História no ensino de Matemática.
	Pimentel (2019)	Analisa o impacto da História da Matemática na motivação dos estudantes do ensino fundamental.
	Fernandes (2010)	Examina as dificuldades enfrentadas pelos professores na implementação da História da Matemática.
	Saito (2016)	Discute desafios curriculares e a necessidade de formação docente para aplicação dessa abordagem.

Fonte: Elaboração pelos autores.

ANÁLISES E RESULTADOS

A integralização da História da Matemática no ensino é uma estratégia pedagógica inovadora e promissora, defendida por diversos estudiosos como uma ferramenta capaz de tornar a matemática mais acessível e atraente para os alunos. O uso de conteúdos históricos nas aulas ajuda a contextualizar conceitos matemáticos, mostrando o processo evolutivo e os desafios enfrentados pelos matemáticos ao longo dos séculos.

De acordo com Fauvel e Van Maanen (2000), a introdução de elementos históricos na Educação Matemática permite que os estudantes compreendam a disciplina como uma construção cultural e humana, conectada a outras áreas do conhecimento e a eventos históricos significativos que humanizam a matemática, promovendo maior interesse e engajamento dos alunos.

No Brasil, a aplicação da História na Educação Matemática ainda enfrenta desafios significativos, desde a formação docente até a adaptação curricular para incorporar essa perspectiva de maneira eficaz e envolvente (Miguel; Miorim, 2005). É necessário compreendermos em que medida essa área do conhecimento pode ser usada como ferramenta para aumentar a motivação e o entendimento dos alunos, além de desenvolver uma abordagem crítica e contextualizada.

Relevância da História no ensino

A inclusão da História da Matemática no ensino tem se mostrado um tema relevante entre educadores e pesquisadores. Ao integrar elementos históricos ao ensino é possível não apenas enriquecer o conteúdo pedagógico, mas também oferecer um contexto mais amplo, de modo a facilitar a compreensão por parte dos alunos. Além de contextualizar o conhecimento, a História da Matemática tem um papel essencial de motivar os alunos. Relatar as descobertas e os obstáculos enfrentados pelos matemáticos pode despertar nos alunos sua curiosidade pelo conteúdo, uma vez

que tenham eles percebido que os conhecimentos produzidos nesta área não são frutos de uma genialidade inata isolada, mas sim do contexto sociocultural daqueles que os produziram e do esforço e trabalho humanos.

No Brasil, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 2011) reforça a importância de uma formação integral, incluindo o desenvolvimento de uma visão crítica e contextualizada do conhecimento matemático. Esse enfoque é essencial, uma vez que os estudantes brasileiros ainda apresentam baixo desempenho em Matemática, o que pode ser constatado tanto em avaliações internas quanto nas externas (OCDE, 2016). A introdução de elementos históricos tem, portanto, o potencial de tornar a Matemática mais interessante e acessível, ajudando os alunos a superarem barreiras e preconceitos que frequentemente acompanham o ensino desta disciplina (Silveira, 2011).

Segundo Motta (2005), o conhecimento histórico proporciona uma visão mais rica e complexa da Matemática, facilitando a compreensão dos conceitos e incentivando o raciocínio analítico. Além disso, Barbin (2012) aponta que a História da Matemática pode servir como uma ferramenta poderosa para desenvolver a curiosidade e o interesse dos alunos, promovendo uma aprendizagem mais ativa e participativa. Clark *et al.* (2022) acrescentam que, ao entenderem as motivações históricas por trás dos conceitos matemáticos, os alunos são capazes de desenvolver uma visão crítica, o que contribui para o fortalecimento de suas habilidades de resolução de problemas.

Além disso, a História da Matemática promove uma compreensão mais ampla dos conteúdos, uma vez que os conecta a contextos culturais e científicos, o que enriquece a aprendizagem (Russ, 1991).

Benefícios cognitivo-pedagógicos

A História da Matemática pode oferecer aos alunos uma contextualização em decorrência da qual eles podem explorar diferentes abordagens na prática de resolução de problemas. Ao estudar as soluções adotadas por matemáticos de diversas épocas e culturas, os alunos aprendem que não existe uma única maneira de se abordar um problema, de maneira a os encorajar a procurar suas próprias soluções.

Miguel e Miorim (2005) enfatizam que se pode buscar na História da Matemática

> [...] apoio para se atingir, com os alunos, objetivos pedagógicos que os levem a perceber, por exemplo: (1) a matemática como criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião; matemática e lógica , etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar a generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.(Miguel; Miorim, 2005, p. 53).

Metodologia de ensino e prática

Para promover uma *aprendizagem significativa* – conceito desenvolvido por David Ausubel – diversas metodologias têm sido desenvolvidas para integrar a História da Matemática em sala

de aula. Dentre elas, o *Problem-Based Learning* (PBL) se destaca como uma das abordagens mais eficazes.

O PBL é uma metodologia ativa de ensino que coloca os alunos no centro do aprendizado, desafiando-os a resolver problemas reais ou simulados. Ela promove habilidades como pensamento crítico, colaboração e autonomia, conectando teoria e prática. Professores atuam como facilitadores, guiando os estudantes no processo de construção do conhecimento. A supracitada eficácia dessa abordagem, portanto, se deve ao fato de ela permitir que os alunos enfrentem problemas reais e históricos, estimulando a investigação e o pensamento crítico (Teixeira, 2019).

Em consonância com essa proposta, a *aprendizagem ativa*, como o próprio nome indica, incentiva os alunos a participarem ativamente do processo de aprendizagem, construindo seu entendimento sobre os conceitos matemáticos (Clark *et al.*, 2022).

As metodologias lúdicas também têm se mostrado eficazes para engajar os alunos na História da Matemática. Segundo Miguel e Miorim (2011), atividades que envolvem jogos, dramatizações e reconstituições de experimentos históricos ajudam a criar um ambiente de ensino mais dinâmico e atraente, facilitando a assimilação dos conteúdos. Outro recurso valioso são as palestras sobre temas históricos específicos, que permitem que os alunos compreendam o desenvolvimento dos conceitos matemáticos ao longo do tempo e a relevância cultural da Matemática (Fauvel; Van Maanen, 2000).

A utilização da História da Matemática como recurso pedagógico é exemplificada de forma prática em Oliveira e Siqueira (2023) e Cunha e Siqueira (2023). No primeiro caso, a história da trigonometria é abordada como um caminho para engajar os alunos no estudo dessa área, através da conexão entre eles e as origens e o desenvolvimento dos conceitos, como os de seno e cosseno, que possuem aplicações diretas em problemas do cotidiano e da ciência moderna. Essa abordagem histórica permite que os estudantes entendam as razões pelas quais esses conceitos foram desenvolvidos, tornando a aprendizagem mais significativa e aplicável. Este exemplo reflete como o uso da História pode transformar aulas de Matemática tradicionalmente abstratas em experiências mais concretas e envolventes.

De forma complementar, Cunha e Siqueira (2023) propõem uma abordagem histórica, explorando como diferentes matemáticos e culturas contribuíram para a evolução dos conceitos ao longo dos séculos. A análise histórica demonstra como as funções surgiram da necessidade prática de resolver problemas no comércio, na engenharia e na astronomia, e como essas necessidades moldaram a Matemática que conhecemos hoje. Essa perspectiva amplia a visão dos alunos, permitindo que eles percebam a Matemática como uma construção social e cultural em constante evolução, e não como uma disciplina fixa e puramente técnica.

Ao analisar esses dois estudos de caso, é possível notar que a História da Matemática não apenas enriquece o conteúdo pedagógico, mas também promove uma aprendizagem interdisciplinar, conectando a Matemática a outras áreas do conhecimento, como a História e a Filosofia. Além disso, a inclusão de elementos históricos nas aulas incentiva o pensamento crítico, pois os alunos são desafiados a refletir sobre os contextos que motivaram os avanços matemáticos e como esses avanços moldaram o mundo. Esses exemplos servem como referência para professores que desejam inovar em suas práticas pedagógicas, mostrando que a História da Matemática pode ser uma poderosa ferramenta para transformar o ensino.

A utilização da História da Matemática como metodologia de ensino pode ser potencializada por recursos narrativos e visuais, tornando o aprendizado mais acessível e dinâmico. Um exemplo prático dessa abordagem foi apresentado por Vieira *et al.* (2019), que descreve uma experiência realizada em uma turma do 1° ano do curso técnico de Logística. Na atividade, a História da Matemática foi integrada ao uso de histórias em quadrinhos (HQs) para ensinar o Teorema de Tales. Os alunos foram expostos a um enredo ilustrado que contextualizava a descoberta desse teorema na Grécia Antiga, demostrando como Tales de Mileto teria utilizado sombras para medir a altura da pirâmide de Quéops. Após a leitura, os estudantes foram incentivados a resolver problemas baseados na aplicação do teorema, conectando os conceitos matemáticos ao contexto histórico e visualizando a relevância do conteúdo no mundo real.

Esta atividade proporcionou um ambiente motivador e interativo, estimulando assim a aprendizagem significativa, conforme defendido por David Ausubel. Além disso, a abordagem despertou maior interesse e engajamento dos alunos, demostrando que o uso da História da Matemática, aliado a metodologias lúdicas como as HQs, pode ser uma ferramenta eficaz para o ensino de conceitos matemáticos abstratos.

Aplicação da História da Matemática em diferentes níveis de ensino

A utilização da História da Matemática em sala de aula pode ser adaptada conforme a faixa etária e o nível de ensino dos alunos. A seguir, damos algumas propostas metodológicas concretas para aplicação em diferentes níveis de ensino:

Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental

- Contação de histórias: utilizar narrativas sobre matemáticos e descobertas matemáticas para introduzir um conceito novo de forma lúdica. Por exemplo, contar a história de como os antigos egípcios usavam a geometria nas construções das pirâmides.
- Atividades práticas: incorporar jogos e brincadeiras que envolvam conceitos matemáticos históricos, como jogos de tabuleiro antigos que envolvem contagem e estratégia.

Anos finais do Ensino Fundamental

- Estudo de problemas: apresentar problemas matemáticos clássicos e explorar as diferentes soluções desenvolvidas ao longo da história.
- Projetos de pesquisa: encaminhar os alunos para pesquisarem sobre diferentes sistemas numéricos utilizados por civilizações antigas e apresentar suas descobertas para a turma.

Ensino médio

- Análise de textos históricos: trabalhar com documentos históricos, como *Os Elementos* de Euclides, para que os alunos compreendam o desenvolvimento lógico dos teoremas, suas demonstrações, bem como a diferença entre a geometria antiga e a moderna.
- Discussões sobre a evolução dos conceitos matemáticos: promover debates sobre como determinados conceitos, como o zero ou os números negativos, foram desenvolvidos e aceitos ao longo do tempo.

Ensino Superior

- Estudo aprofundado de teorias matemáticas: analisar o contexto histórico e os problemas que levaram ao desenvolvimento de teorias específicas, como o cálculo diferencial e integral.
- Pesquisa historiográfica: incentivar os alunos a investigarem a vida e as contribuições de matemáticos de diferentes épocas, compreendendo o impacto de suas descobertas no avanço da matemática.

Estudo de caso

Vários estudos têm abordado a eficácia da inclusão da História da Matemática no ensino. Um exemplo notável é o trabalho de Becker e Baldridge (2016), em que se investiga como a História da Matemática pode ser utilizada para ensinar conceitos de álgebra em uma sala de aula do Ensino Médio. Os autores relataram que a introdução de elementos históricos não apenas aumentou o interesse dos alunos pela álgebra, mas também melhorou sua compreensão dos conceitos.

Outro estudo relevante foi realizado por Pimentel (2019), que analisou o impacto da História da Matemática na motivação dos alunos do ensino fundamental. Os resultados indicaram que as aulas que integravam a História da Matemática resultaram em um aumento significativo no engajamento e na motivação dos alunos em comparação com aulas tradicionais.

Estudos de caso realizados tanto no Brasil quanto em outros países ilustram a eficácia do uso da História da Matemática no ensino. Russ (1991) compartilha exemplos de experiências bem-sucedidas de professores que utilizaram narrativas históricas para tornar as aulas de Matemática mais envolventes. De forma semelhante, Fernandes (2010) relata que a introdução da História da Matemática em salas de aula brasileiras resultou em maior engajamento dos alunos, que passaram a perceber a disciplina como um campo mais acessível e relevante.

No contexto brasileiro, Pires e Allevato (2016) investigaram o impacto da História da Matemática no desenvolvimento de habilidades analíticas e argumentativas dos alunos. O estudo concluiu que o uso de elementos históricos na Educação Matemática não apenas desperta o interesse dos alunos, mas também melhora a compreensão e a retenção dos conteúdos. Esse efeito é corroborado por Teixeira (2019), que defende que a História da Matemática oferece um caminho alternativo para superar as dificuldades tradicionais encontradas no ensino da disciplina.

A pesquisa de Saito (2016), por outro lado, enfatiza como a História da Matemática pode criar "interfaces" pedagógicas, permitindo que professores integrem temas históricos que ajudem os alunos a entender a evolução da Matemática e a ver suas aplicações na sociedade. Este estudo, apresentado pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), ressalta o valor da História como um elemento didático que aproxima o aluno da disciplina por meio de contexto e relevância prática.

Desafios na implementação

A implementação da História da Matemática em sala de aula enfrenta diversas dificuldades, muitas das quais estão relacionadas à infraestrutura escolar e ao uso limitado de recursos didáticos. A falta de materiais didáticos, como livros que integrem o contexto histórico de maneira eficaz, é um desafio indicado por diversos professores. Quando tais materiais existem, eles não apresentam a História da Matemática de forma adequada, o que dificulta a incorporação desse tema nas aulas.

Outro fator é a falta de apoio institucional e a falta de formação específica dos docentes para tratar da história de sua própria disciplina.

Muitos professores, embora reconheçam a importância da História da Matemática, sentem receios quanto ao impacto que essa inclusão possa ter no tempo de aula e no cumprimento do cronograma. Há uma preocupação, da parte deles, de que o tempo que seja dedicado a implementar este contexto histórico dos conteúdos possa comprometer o ensino dos conceitos que são essenciais. Como consequência, muitos deixam de utilizar esse recurso, mesmo quando há oportunidades de integrá-lo aos temas estudados. Isso ocorre em parte por falta de familiaridade dos professores com a abordagem histórica, em parte por medo de desviar o foco dos alunos do conteúdo.

Por outro lado, a resistência também está ligada à percepção de que os alunos, por estarem focados nos resultados das avaliações, podem não valorizar a introdução da História nas aulas. Isso resulta em uma situação em que tanto o educador quanto o estudante criam uma resistência que os impossibilita de perceber a relevância do estudo histórico para a aprendizagem da Matemática.

Para Teixeira (2019), é necessário investir na capacitação docente e na criação de materiais de apoio que atendam às necessidades dos professores para que a História da Matemática se torne uma prática comum.

Clark *et al.* (2022) enfatizam que uma das principais dificuldades está na adaptação dos currículos para incluir a História da Matemática de maneira integrada e relevante. Essa adaptação exige uma abordagem interdisciplinar e o apoio de políticas educacionais que incentivem a inovação no ensino. Além disso, a formação inicial e continuada dos professores precisa ser fortalecida para que eles se sintam preparados para aplicar a História da Matemática em suas aulas, como metodologia de ensino, de forma eficaz.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Reforçamos que a integração da História da Matemática no ensino pode resultar num impacto significativo na aprendizagem dos estudantes, promovendo uma compreensão mais contextualizada e humana da disciplina. A análise dos estudos abordados revela que o uso da História não apenas contribui para tornar o conteúdo mais acessível e interessante, mas também auxilia no desenvolvimento de habilidades analíticas e críticas, fundamentais para a formação cidadã e acadêmica.

Ao explorar a Matemática sob uma perspectiva histórica, os professores podem romper com a visão estática e descontextualizada da disciplina, muitas vezes associada a dificuldades e desinteresse por parte dos alunos. Através de metodologias ativas, como o uso de problemas históricos e a contextualização de conceitos, é possível engajar os estudantes, estimulando sua curiosidade e valorizando o conhecimento matemático como uma construção social. Este enfoque permite que os alunos compreendam melhor a relevância da Matemática e sua relação com outros campos do saber, enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem.

Em síntese, a integração da História da Matemática nas salas de aula apresenta-se como uma prática pedagógica promissora para tornar o ensino mais dinâmico, significativo e eficaz. A continuidade dessa abordagem, apoiada por novas pesquisas e recursos didáticos, poderá colaborar para que a Educação Matemática se torne mais inclusiva e relevante, atendendo às necessidades da sociedade contemporânea. Portanto, incentiva-se que futuros estudos e práticas pedagógicas

explorem cada vez mais essa intersecção entre História e Matemática, contribuindo para o avanço da Educação matemática e para a formação de alunos mais preparados e críticos diante dos desafios do mundo atual.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG).

REFERÊNCIAS

BARBIN, Évelyne. The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 50, p. 7-15, 2012.

BECKER, J. P.; BALDRIDGE, L. Historical Perspectives on Algebra Instruction: A Study of Teaching Practices in the Classroom. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, v. 47, n. 2, p. 201-218, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica**. Brasília: MEC, 2011.

CLARK, Kathleen; KJELDSEN, Tinne Hoff; SCHORCHT, Sebastian; TZANAKIS, Constantinos; WANG, Xiaoqin. History of mathematics in mathematics education: Recent developments. **ZDM – Mathematics Education**, v. 54, p. 1407-1420, nov. 2022. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-022-01442-7. Acesso em: 26 fev. 2025.

CUNHA, Thaís Carneiro; SIQUEIRA, Mônica de Cássia. Uma abordagem histórica do conceito de função. In: Seminário Nacional de História da Matemática–SNHM, 15., 2023, Maceió. **Anais** [...]. [s. l.]: [s. n.], 2023. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/18/61Acesso em: 23 nov. 2024.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A importância da história da matemática no ensino. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação Matemática**, 2017.

FAUVEL, John (ed.); VAN MAANEN, Jan (ed.). **History in Mathematics Education: The ICMI Study**. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2000.

FERNANDES, A. C. S. **Didática da Matemática**: Reflexões Psicopedagógicas. São Paulo: Cortez, 2010.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Maria de Andrade. **Fundamentos da Metodologia Científica**. São Paulo: Atlas, 2003.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **Ensinar Matemática com História**. Campinas: Autores Associados, 2005.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática: Propostas e Desafios**. Campinas: Autores Associados, 2011.

MOTTA, Waldomiro. **O Uso da História da Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Cortez, 2005.

OLIVEIRA, Isabela Cristina; SIQUEIRA, Mônica de Cássia. Trigonometria em sala de aula: uma possibilidade à luz da História da Matemática. In: Seminário Nacional de História da Matemática–SNHM, 15., 2023, Maceió. **Anais** [...]. [s. l.]: [s. n.], 2023. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/17/17. Acesso em: 23 nov. 2024.

PIMENTEL, R. C. **A História da Matemática no Ensino Fundamental**: Um Estudo de Caso sobre a Motivação dos Alunos. 2019. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

RUSS, Steve. The Experience of History in Mathematics Education. **For the Learning of Mathematics**, v. 11, n. 2, p. 11-18, 1991.

VIEIRA, Francisco Ruan Costa; FEITOSA, Elissandro Da Silva; NASCIMENTO FILHO, José Vieira do; LIMA, Aurismar da Silva. História da Matemática como metodologia de ensino incrementada com histórias em quadrinhos. In: Congresso Nacional de Educação – CONEDU, 6., 2019, Campina Grande. **Anais** [...]. Campina Grande: Realize Editora, 2019. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2019/TRABALHO_EV127_MD1_SA1_ID10290_26082019131146.pdf. Acesso em: 21 fev. 2025.

SAITO, Fumikazu. Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 3, n. 1, p. 3-19, ago. 2016.

TEIXEIRA, João Freitas. **Metodologias Ativas no Ensino de Matemática**: Desafios e Possibilidades. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

WITTER, Geraldina Porto. Pesquisa bibliográfica, pesquisa documental e busca de informação. **Estudos de Psicologia**, [s. l.], v. 7, n. 1, p. 5-30, jan./jul. 1990.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

A teoria da especulação de Louis Bachelier, considerações de Norbert Wiener e o movimento browniano: aproximações com o mercado financeiro

Louis Bachelier's theory of speculation, considerations by Norbert Wiener and the Brownian movement: approximations to the finance market

Douglas Gonçalves Leite[1]
Instituto Pecege

Kleyton Vinicyus Godoy[2]
Universidade Federal de Lavras – UFLA

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma breve análise histórica da contribuição de Louis Bachelier para o desenvolvimento das teorias matemáticas aplicadas ao mercado financeiro no início do século XX. Filho de um comerciante de vinhos, Bachelier apresentou, em 1900, sua tese de doutorado, intitulada *Théorie de la Spéculation*, na qual propôs que o movimento dos preços de ativos no mercado financeiro poderia ser descrito por meio de uma abordagem probabilística. Orientado por Henri Poincaré, Bachelier inicialmente recebeu pouca atenção acadêmica, uma vez que o tema não gerava grande interesse na época. Como resultado, seu trabalho permaneceu relativamente desconhecido nos primeiros anos após sua publicação. Décadas mais tarde, Norbert Wiener apresentou o conceito do movimento browniano, que descreve a aleatoriedade do movimento de partículas e sua independência em relação aos movimentos anteriores. Tanto as ideias de Bachelier quanto as de Wiener se baseiam no estudo da probabilidade. O objetivo deste trabalho é contextualizar historicamente a proposta de Bachelier, explorar suas conexões com as ideias de Wiener e destacar as relações entre sua teoria e o movimento browniano.

Palavras-chave: Louis Bachelier; Norbert Wiener; Movimento Browniano.

ABSTRACT

This paper presents a brief historical analysis of Louis Bachelier's contribution to the development of mathematical theories applied to the financial market in the early 20th century. The son of a wine merchant, Bachelier presented his doctoral thesis, *Théorie de la Spéculation*, in 1900, in which he proposed that the movement of asset prices in the financial market could be described through a probabilistic approach. Supervised by Henri Poincaré, Bachelier initially received little academic attention, as the topic did not generate significant interest at the time. As a result, his work remained relatively unknown in the years following its publication. Decades later, Norbert Wiener introduced the concept of Brownian motion, which describes the randomness of particle movement and its independence from prior movements. Both Bachelier's and Wiener's ideas are grounded in the study of probability. The aim of this paper is to historically contextualize Bachelier's proposal, explore its connections to Wiener's ideas, and highlight the relationships between his theory and Brownian motion.

Keywords: Louis Bachelier; Norbert Wiener; Brownian Motion.

INTRODUÇÃO

O matemático francês Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier (1870-1946) é amplamente reconhecido por suas contribuições associando o estudo de probabilidades ao movimento do preço de ativos na bolsa de valores. Filho de Jean Etienne Alphonse Bachelier (1840-1889), um comerciante de vinhos, Louis Bachelier ingressou na Universidade de Sorbonne em 1892, onde teve a oportunidade de estudar sob a orientação de Jules Henri Poincaré (1854-1912), um dos mais influentes

[1] Doutor em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp). Orientador de MBA no Instituto Pecege, Piracicaba, São Paulo, Brasil. E-mail: douglas.g.leite@unesp.br.

[2] Doutor em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp). Docente na Universidade Federal de Lavras (UFLA), Lavras, Minas Gerais, Brasil. E-mail: kleyton.godoy@ufla.br.

matemáticos franceses de sua época. Oito anos após seu ingresso, em 29 de março de 1900, Bachelier apresentou sua tese de doutorado intitulada *Théorie de la Spéculation* (A Teoria da Especulação) que, de acordo com Taqqu (2001), marca o início das finanças matemáticas (*mathematical finance*).

Em sua tese, Bachelier propôs uma nova visão para modelar a dinâmica dos preços dos ativos no mercado financeiro. Combinando elementos da teoria dos jogos e da probabilidade, ele considerou que, no curto prazo, os preços dos ativos poderiam seguir um padrão de movimento aleatório. Essas mesmas ideias foram posteriormente tratadas por Norbert Wiener (1894-1964), que estabeleceu uma conexão entre movimentos aleatórios observados por Robert Brown (1773-1858), conhecidos como movimento browniano, e a teoria das equações diferenciais estocásticas para tratar de diversos assuntos, entre eles, o movimento de ativos no mercado financeiro.

A percepção de aleatoriedade associada à movimentação de ativos no mercado, tratada por Bachelier, assim como por Wiener, tornou possível investigar a oscilação do preço desses ativos por meio de uma abordagem probabilística. Por volta de 1850, a Bolsa de Paris se consolidou como um dos principais mercados para a negociação de títulos do governo francês. Esses títulos desempenhavam o papel de uma "Renda Fixa": quando o governo precisava captar recursos por meio de empréstimos, ele emitia tais papéis.

A estabilidade dos títulos era assegurada pelo Estado francês e pelo valor do franco-ouro, e, até 1914, a inflação era quase inexistente, com a taxa de juros variando entre 3% e 5% ao ano (Taqqu, 2001). No período em que Bachelier desenvolveu seus estudos, os movimentos dos ativos na bolsa de valores eram predominantemente analisados por meio de abordagens qualitativas e intuitivas. Investidores e especuladores tomavam decisões com base em informações econômicas e políticas, além de tendências de mercado frequentemente influenciadas por eventos sazonais ou rumores (Aliber, Kindleberger, 2015).

De acordo com Taqqu (2001), Bachelier foi a pessoa certa no momento certo. Naquele período, Paris era um importante centro de especulação de títulos, e a matemática desenvolvida por Poincaré e seus alunos não estava voltada para esse tema. Grande parte da teoria produzida pela academia matemática francesa no final do século XIX estava relacionada ao estudo de funções de variáveis complexas, teoria da medida, assim como teoria dos conjuntos.

Na época, a tese de Louis Bachelier não obteve reconhecimento imediato. No entanto, algumas décadas mais tarde, os conceitos por ele introduzidos contribuíram para o desenvolvimento da teoria relacionada às Equações Diferenciais Estocásticas. Um dos principais marcos dessa evolução foi o trabalho *Differential Space* (Espaço Diferencial), desenvolvido por Norbert Wiener, que, como professor no *Massachusetts Institute of Technology*[3] (MIT), dedicou-se extensivamente à teoria probabilística associada ao campo da física.

Wiener é amplamente reconhecido por formalizar a teoria matemática do movimento browniano, estabelecendo as bases dos processos estocásticos e contribuindo para a criação do que hoje conhecemos como cálculo estocástico. Seus trabalhos colaboraram indiretamente para o desenvolvimento da análise de risco associada ao mercado financeiro.

[3] Instituto de Tecnologia de Massachusetts.

De maneira geral, há uma vasta produção acadêmica[4] no cenário internacional que explora as conexões entre a teoria desenvolvida por Bachelier, os textos de Wiener e o movimento browniano. O objetivo deste trabalho é apresentar as aproximações entre algumas das principais ideias abordadas por esses autores a partir de uma perspectiva da História da Matemática, aproximando-as daquilo que se tornou conhecido como movimento browniano.

Entre o final do século XIX e a primeira metade do século XX, houve um aumento significativo no número de trabalhos dedicados ao estudo das probabilidades em diversas áreas do conhecimento. Muitos autores estabeleceram conexões entre esse tema e campos como a Teoria dos Jogos, a Genética Quantitativa e a Teoria da Evolução.

Textos como *Le Hasard* (O Acaso), de Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956), tornaram-se conhecidos por desenvolverem discussões a respeito das aplicações da teoria das probabilidades a temas como Teoria dos Jogos, herança genética, Física, entre outras áreas.

Além de Borel, Karl Pearson (1857-1936), um dos principais estatísticos desse período, apresentou uma definição para o conceito de correlação, assim como de regressão à média. Alguns de seus trabalhos relacionavam o campo da matemática à Teoria da Evolução. Em 1896 Pearson publicou o texto Contribuições Matemáticas para a Teoria da Evolução,–III. Regressão, Hereditariedade, e Panmixia (*Mathematical Contributions to the Theory of Evolution,–III. Regression, Heredity, and Panmixia).*

Neste texto, o autor buscou demonstrar como determinadas condições matemáticas podem ser empregadas para investigar as influências que moldam a formação genética de um indivíduo. Pearson utilizou conceitos como a regressão à média para analisar a transmissão de traços hereditários. Assim como Francis Galton[5] (1822-1911), Pearson contribuiu para a compreensão das dinâmicas populacionais e suas implicações genéticas.

Parte dos trabalhos dedicados ao campo da probabilidade e estatística no início do século XX estavam relacionados à Biologia e à Teoria dos Jogos. Nesse contexto, o texto de Louis Bachelier (1870-1946), publicado em 1900, se destaca por abordar especificamente a aplicação da teoria das probabilidades ao campo das finanças, o que o torna distinto das abordagens de muitos de seus contemporâneos.

Por se tratar de um tema pouco explorado naquele contexto, a Tese de Bachelier permaneceu, durante muitos anos, desconhecida por parte da comunidade matemática. Foi apenas na década de 1950 que Paul Samuelson (1915-2009), professor de economia do MIT, iniciou a divulgação das teorias de Louis Bachelier. Em sua sala de trabalho, Samuelson[6] se deparou com o estudo de um matemático francês.

[4] No âmbito brasileiro, identificamos que as contribuições de Bachelier são exploradas especialmente em pesquisas de finanças quantitativas e matemática financeira. Contudo, quando concebido historicamente, há uma escassez de trabalhos nessa temática.

[5] Francis Galton tornou-se amplamente conhecido como um dos principais proponentes da teoria da eugenia.

[6] Paul Samuelson, influente economista do século XX, foi um importante defensores da utilização da matemática em investigações relacionadas às Ciências Econômicas. Ao integrar a matemática à Economia, permitiu uma análise mais profunda dos fenômenos econômicos e abriu caminhos para o desenvolvimento de modelos econômicos mais sofisticados e precisos. Laureado com o Prêmio Nobel de Economia em 1970, seu livro *Fundamentos da Análise Econômica* tornou-se uma importante referência para gerações posteriores.

Para sua surpresa, ele descobriu que, embora não tivesse ouvido falar de Bachelier, muitas das considerações feitas por esse teórico já haviam sido exploradas em outros trabalhos, chegando a influenciar profundamente suas próprias pesquisas na área de economia e finanças:

> Em 1900, esse personagem Bachelier aparentemente havia elaborado grande parte da matemática que Samuelson e seus alunos estavam apenas agora adaptando para uso em economia — matemática que Samuelson achava ter sido desenvolvida muito mais recentemente, por matemáticos cujos nomes Samuelson sabia de cor porque estavam vinculados aos conceitos que eles supostamente haviam inventado. Processos de Wiener. Equações de Kolmogorov. Martingales de Doob. Samuelson achava que isso era algo de ponta, com vinte anos no máximo. Mas lá estava tudo, na tese de Bachelier (Weatherall, 20, p. 4, tradução nossa) [7].

Por meio de Samuelson, as contribuições de Bachelier se tornaram amplamente reconhecidas, e seus resultados foram utilizados para o desenvolvimento de modelos de precificação de opções, entre eles, o modelo de Black-Scholes, desenvolvido por Fischer Sheffey Black (1938-1995) e Myron Samuel Scholes (1941-) na década de 1970. Além disso, cem anos após a publicação da tese de doutorado de Bachelier, em 2000, foi realizado o primeiro evento da *Bachelier Finance Society*, em Paris, em homenagem às contribuições desse matemático de grande importância para o desenvolvimento da matemática associada ao mercado financeiro.

BACHELIER, IDEIAS INICIAIS

Entre as principais características tratadas por Louis Bachelier, temos que, para ele, os movimentos dos preços dos ativos na bolsa de valores seguiam um comportamento aleatório. A determinação das oscilações dos preços estava subordinada a uma infinidade de fatores; desse modo, seria impossível obter uma previsão matemática do preço de um ativo em um determinado período (Bachelier, 1900).

Entre os diversos fatores envolvidos, o comportamento humano é um agente relevante no processo de (des)valorização de um ativo, pois, por meio de visões pessoais e ações coletivas, podem ser produzidas grandes movimentações de preços.

Bachelier tinha pleno conhecimento disso e deixou claro em sua tese que esse seria um fator relevante no processo de tomada de decisão. Para ele, duas probabilidades eram fundamentalmente importantes:

> 1° A probabilidade que poderíamos chamar de matemática é aquela que podemos determinar a priori; é a que estudamos nos jogos de azar.
> 2° A probabilidade que depende de fatos futuros e, portanto, impossível de prever de uma forma matemática. É essa última probabilidade que o especulador busca prever; ele analisa as razões que podem influenciar a alta ou a baixa e a amplitude dos movimentos.

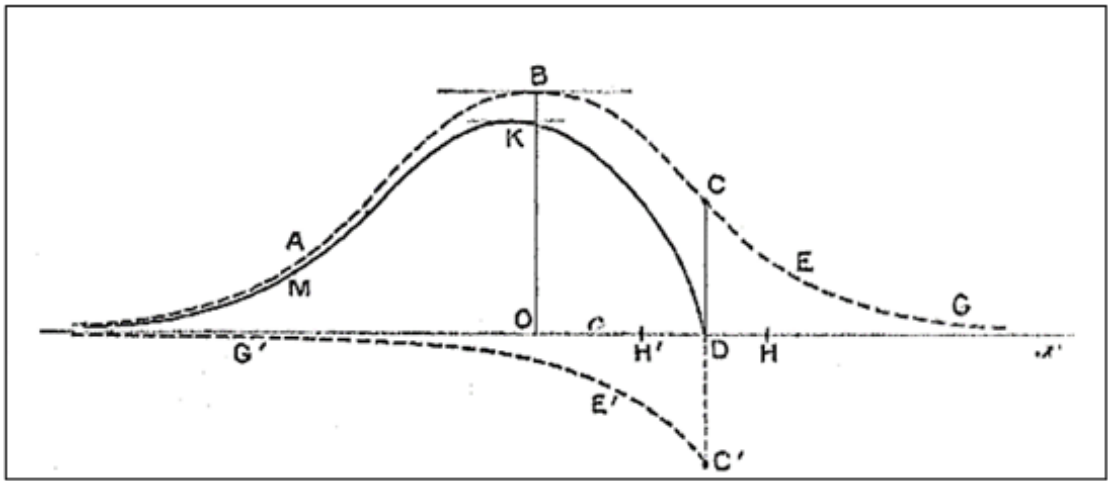
[7] No original: "By 1900, this Bachelier character had apparently worked out much of the mathematics that Samuelson and his students were only now adapting for use in economics — mathematics that Samuelson thought had been developed far more recently, by mathematicians whose names Samuelson knew by heart because they were tied to the concepts they had supposedly invented. Weiner processes. Kolmogorov's equations. doob's martingales. Samuelson thought this was cutting-edge stuff, twenty years old at the most. But there it all was, in Bachelier's thesis".

> Suas induções são absolutamente pessoais, uma vez que sua contraparte necessariamente tem a opinião oposta (Bachelier, 1900, p. 31, tradução nossa).[8]

Ele estava interessado em desenvolver uma forma de mensurar uma expectativa matemática para a o movimento do preço de um ativo em um determinado período. De acordo com Weatherall (2013), Bachelier havia descoberto que se o preço de uma ação realiza um comportamento aleatório, a variação do preço ao longo do tempo segue uma distribuição gaussiana (p. 14). Ao abordar a distribuição de probabilidade, Bachelier destacou que não é suficiente apenas conhecer a probabilidade de o preço ser atingido antes do instante t; é igualmente necessário entender a lei de probabilidade no instante t, caso o preço não tenha sido alcançado, ou seja, o tempo percorrido também influencia no cálculo de probabilidade.

Ele argumenta que a probabilidade de atingir um valor *c* no instante *t* corresponde à área DCEG sob a curva de distribuição (Figura 1). Além disso, pontua que a área total da curva de probabilidades deve, nesse contexto, ser ajustada, subtraindo-se uma quantidade igual a DCEG, dado que a probabilidade total P é o dobro da probabilidade associada à área DCEG.

Figura 1 - Distribuição Normal



Fonte: Bachelier, 1900.

Louis Bachelier, ao explorar a distribuição de probabilidades, sugeriu que determinadas oscilações poderiam ser modeladas por teorias matemáticas análogas às utilizadas por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) para descrever a propagação do calor. Em uma espécie de analogia, Bachelier introduziu o conceito que denominou de "Radiação da Probabilidade" (*Rayonnement de la Probabilité*). A chamada Radiação da Probabilidade considera que:

> Cada preço *x* irradia durante o elemento de tempo para o preço vizinho uma quantidade de probabilidade proporcional à diferença de suas probabilidades.
> Digo proporcional, pois devemos levar em conta a razão de Δx para Δt.

[8] No original: "1° La probabilité que l'on pourrait appeler mathématique, c'est celle que l'on peut déterminer a priori ; celle que l'on étudie dans les jeux de hasard.
[2°] La probabilité dépendant de faits à venir et, par conséquent, impossible à prévoir d'une façon mathématique. C'est cette dernière probabilité que cherche à prévoir le spéculateur ; il analyse les raisons qui peuvent influer sur la hausse ou sur la baisse et sur l'amplitude des mouvements. Ses inductions sont absolument personnelles, puisque sa contrepartie a nécessairement l'opinion inverse."

> A lei precedente pode, por analogia com certas teorias físicas, ser chamada de lei de radiação ou de difusão da probabilidade (Bachelier, 1900, p. 46, tradução nossa)[9].

Em seguida, Bachelier apresenta a equação que descreve a variação da probabilidade de oscilação do preço de um ativo ao longo do tempo t, considerando também a flutuação do preço x do ativo. A expressão proposta é:

$$c^2 \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

Nessa equação, P representa a função de probabilidade associada ao preço do ativo, t é o tempo, e x é o preço do ativo. O termo c^2 está relacionado à taxa de variação do preço, refletindo a difusão das flutuações de preços ao longo do tempo. A equação é uma forma da equação diferencial conhecida como equação de difusão, que descreve a propagação de probabilidades no espaço de preços, e se assemelha à equação de calor, usada na física para modelar a transferência de calor em um corpo.

Atualmente, as ferramentas desenvolvidas por Joseph Fourier desempenham um papel importante no estudo da movimentação de preços no mercado financeiro. Diversos modelos matemáticos empregam conceitos como as séries de Fourier, para criar projeções futuras de uma classe de ativos, muitas dessas abordagens estão diretamente relacionadas ao estudo de séries temporais[10].

No relatório redigido por Henri Poincaré, em 1900, com relação à tese de Bachelier, reconhece que, com um pouco de reflexão, é possível mostrar que há uma analogia entre a teoria analítica da propagação do calor, proposta por Fourier, e o estudo de probabilidades de Bachelier e que essa comparação é legítima[11].

De acordo com Taqqu (2001), a tese de Bachelier não havia sido reconhecida como um trabalho sobre probabilidade. Bru (cf. Taqqu 2001) argumenta que o texto do matemático francês foi reconhecido como uma tese sobre Física Matemática, um trabalho sobre Bolsa de Valores, o qual não era um assunto amplamente investigado pela comunidade acadêmica daquele período.

Para Bachelier, uma de suas principais preocupações não era demonstrar a previsibilidade dos movimentos dos preços, mas sim evidenciar a possibilidade de uma lei que regulasse a variação dos ativos. Para ele, essa lei era a lei da probabilidade. Nas últimas linhas de sua tese, Bachelier reforça a ideia de que existe uma lei capaz de descrever, com certa precisão, o comportamento dos ativos no mercado financeiro, sendo essa lei, conforme ele propôs, a lei de probabilidade.

> Uma última observação talvez não seja inútil. Se, em relação a várias questões tratadas neste estudo, comparei os resultados da observação aos da teoria, não foi para verificar fórmulas estabelecidas por métodos matemáticos, mas apenas para mostrar que o mercado, sem saber, obedece a uma lei que o domina: a lei da probabilidade (Bachelier, 1900, p. 86, tradução nossa)[12].

[9] No original: "Chaque cours x rayonne pendant l'élément de temps vers le cours voisin une quantité de probabilité proportionnelle à la différence de leurs probabilités. Je dis proportionnelle, car on doit tenir compte du rapport de Δx à Δt. La loi qui précède peut, par analogie avec certaines théories physiques, être appelée la loi du rayonnement ou de diffusion de la probabilité."

[10] Séries temporais são conjuntos de dados registrados ao longo de um intervalo de tempo específico. Por exemplo, o histórico das variações no preço de um ativo financeiro durante um período determinado, como os últimos cinco anos, constitui uma série temporal.

[11] Luis Bachelier, *Aux origines de la finance mathématique*, p,26.

[12] No original: "Une dernière remarque ne sera peut-être pas inutile. Si, à l'égard de plusieurs questions traitées dans cette étude,

Em seu relatório, Poincaré destacou que, de fato, o tema escolhido se distanciava dos assuntos geralmente abordados pelos candidatos. Os resultados obtidos por ele inserem-se em um conjunto de investigações que ganharam destaque a partir da década de 1920, com o avanço da teoria das probabilidades aplicada ao mercado financeiro.

Nesse período, equações estocásticas e modelos econométricos passaram a ser incorporados ao processo de análise e projeção de preços de ativos. Com o advento da computação, muitos dos modelos desenvolvidos na primeira metade do século XX passaram a ser aplicados de forma prática às flutuações de preços no mercado financeiro. Esse progresso culminou no surgimento de diversas teorias e ferramentas voltadas para a precificação de ativos, entre as quais se destaca o modelo de Black-Scholes, as ferramentas computacionais, assim como os modelos quantitativos.

MOVIMENTO BROWNIANO, BACHELIER E NORBERT WIENER

Entre 1920 e 1940, temos um número crescente de pesquisadores que conecta os conceitos do campo da probabilidade e da estatística ao mercado financeiro. Entre os principais nomes dessa corrente, destacam-se Norbert Wiener, já citado anteriormente, além de Andrey Kolmogorov (1903-1987), John Maynard Keynes (1883-1946) e Charles B. Davenport (1866-1944), entre outros.

Norbert Wiener contribuiu para a teoria da probabilidade no contexto do movimento browniano e da teoria do ruído, influenciando a modelagem estocástica de processos financeiros, especialmente na criação de modelos que descrevem as flutuações de preços no mercado. Andrey Kolmogorov formalizou as bases da teoria das probabilidades, proporcionando fundamentos matemáticos para a análise probabilística aplicada ao mercado financeiro, o que possibilitou o desenvolvimento de modelos mais robustos de previsão e análise de risco.

John Maynard Keynes, embora mais conhecido por estudos relacionados à economia, também contribuiu para o desenvolvimento de teorias relacionadas ao estudo das expectativas e incertezas no mercado financeiro. De forma semelhante, Charles B. Davenport, conhecido por suas contribuições à genética estatística, também aplicou modelos probabilísticos para compreender o comportamento dos preços das ações e os mecanismos de mercado, antecipando discussões sobre análise quantitativa em finanças.

Esses autores se tornaram amplamente reconhecidos por suas investigações envolvendo temas como probabilidade aplicada ao mercado financeiro. De forma geral, todos compartilham um princípio comum: existe certa aleatoriedade nos movimentos dos ativos, consequentemente não é possível determinar com precisão o preço exato de um ativo em um período específico.

Trabalhos como *Théorie et Pratique des Opérations Financières* (*Teoria e Prática das Operações Financeiras*), escrito por Alfred Barriol[13] (1873-1959), publicado em 1908, levaram as ideias desenvolvidas por Bachelier adiante. Nesse livro, Barriol discute detalhadamente a realização de operações em títulos públicos, cálculo de renda perpétua e temporária, taxa de retorno, assim como probabilidades e esperança matemática.

j'ai comparé les résultats de l'observation à ceux de la théorie, ce n'était pas pour vérifier des formules établies par les méthodes mathématiques, mais pour montrer seulement que le marché, à son insu, obéit à une loi qui le domine : la loi de la probabilité."

[13] Alfred Barriol, que, após se formar na Escola Politécnica e tornar-se economista atuário, se estabeleceu como uma referência no campo das finanças e da estatística. Barriol não só foi o primeiro professor de finanças no Instituto de Estatística da Universidade de Paris, mas também atuou como consultor financeiro de diversos governos franceses, contribuindo significativamente para a aplicação das teorias probabilísticas em questões econômicas.

As conexões entre as obras de Bachelier e Wiener podem ser observadas, considerando que ambos os autores trabalharam com conceitos probabilísticos para descrever fenômenos que, na época, ainda não eram amplamente compreendidos de forma sistemática no campo da probabilidade e estatística

Norbert Wiener é amplamente reconhecido como o pai da cibernética. Nos seus primeiros anos de pesquisa no MIT, aos 26 anos, publicou um artigo considerado como um dos primeiros trabalhos a formalizar matematicamente o conceito de movimento browniano. Em 1923, ao publicar o trabalho *Differential Space* no *Journal of Mathematics and Physics*, Wiener apresentou uma formalização matemática para os experimentos observados por Robert Brown, expressando-os da seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi A(t_1 - t)}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{A(t_1-t)}} dx$$

A fórmula acima descreve a probabilidade de que a diferença x_{t1}-x_t representando o deslocamento de uma partícula, esteja dentro do intervalo [a,b]. Essa probabilidade é expressa como uma integral da função densidade de probabilidade correspondente, que possui a forma de uma distribuição gaussiana. O termo multiplicador da integral garante a normalização da densidade, enquanto o expoente reflete a dispersão estatística do deslocamento em função do tempo decorrido.

Wiener propôs que, no contexto do movimento browniano, as partículas se deslocam de maneira aleatória, e os movimentos em intervalos de tempo sucessivos são independentes entre si. Ele descreve essa independência da seguinte forma:

> **Espaço Diferencial.** No movimento browniano, não é a posição de uma partícula em um momento que é independente da posição da partícula em outro momento; é o deslocamento de uma partícula em um intervalo que é independente do deslocamento da partícula em outro intervalo (Wiener, 1923, p. 135, tradução nossa)[14].

Esse está entre os primeiros conceitos a contribuir para a formação da teoria dos processos estocásticos, que mais tarde se tornaria essencial em várias áreas da matemática aplicada, incluindo as finanças. Ao formalizar matematicamente esse fenômeno, Wiener não apenas contribuiu para a compreensão dos processos aleatórios, mas também apresentou elementos que figuram a base para a modelagem de sistemas dinâmicos complexos que dependem de variáveis probabilísticas

De fato, ao discutir a independência entre séries de eventos, Wiener prosseguiu no desenvolvimento das ideias de Bachelier, considerando que os movimentos entre ativos na bolsa poderiam ser descritos como processos aleatórios. Nesse sentido, a percepção da aleatoriedade no movimento de um objeto constitui o ponto de conexão entre as abordagens de Wiener, Bachelier e os experimentos observados por Robert Brown, estabelecendo uma linha de continuidade entre os fenômenos naturais e suas aplicações no campo financeiro.

Em 1828, Robert Brown publicou o trabalho *A brief account of microscopical observations made on the particles contained in the pollen of plants* (Um breve relato de observações microscópicas feitas

[14] No original: "Differential-Space. In the Brownian movement, it is not the position of a particle at one time that is independent of the position of a particle at another; It is the displacement of a particle over one interval that is independent of the displacement of the particle over another interval."

nas partículas contidas no pólen das plantas), contendo algumas de suas principais considerações relacionadas ao movimento do pólen sobre a superfície de um fluido. De acordo com as palavras de Brown:

> Ao examinar a forma dessas partículas imersas em água, observei várias delas muito evidentemente em movimento; seu movimento consistindo não apenas em uma mudança de lugar no fluido, manifestada por alterações em suas posições relativas, mas também, não raramente, em uma mudança de forma na própria partícula; uma contração ou curvatura ocorrendo repetidamente em torno do meio de um lado, acompanhada por um inchaço ou convexidade correspondente no lado oposto da partícula. Em alguns casos, a partícula foi vista girando em seu eixo mais longo. Esses movimentos eram tais que me satisfaziam, após observação frequentemente repetida, que não surgiam nem de correntes no fluido, nem de sua evaporação gradual, mas pertenciam à própria partícula (Brown, 1828, p. 161-162, tradução nossa)[15].

O movimento observado por Brown nas partículas imersas em água, que exibem tanto alterações de posição quanto variações na forma, como contrações e expansões, pode ser compreendido a partir das abordagens desenvolvidas por Bachelier e Wiener sobre o comportamento aleatório. As partículas, em seu incessante movimento, não se deslocam de maneira determinística, mas sim de forma irregular, resultante de forças microscópicas internas ao sistema, o que prenuncia o conceito de um processo estocástico.

Bachelier, ao aplicar os conceitos de probabilidade ao mercado financeiro, e Wiener, ao formalizar o movimento browniano matematicamente, revelam que tais trajetórias não podem ser previstas com certeza, mas seguem padrões probabilísticos e descontínuos, muito semelhantes aos movimentos observados por Brown. Ambos os teóricos oferecem a chave para compreender os fenômenos de variabilidade e aleatoriedade nas partículas como expressões de processos estocásticos, nos quais os movimentos das partículas não se devem a causas externas diretas, mas a flutuações internas de natureza imprevisível, caracterizando o movimento browniano como um exemplo claro de processos dinâmicos complexos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Louis Bachelier, com sua teoria de Difusão da Probabilidade, e considerando que os movimentos dos preços seguem uma distribuição gaussiana, busca representar matematicamente a aleatoriedade existente no movimento dos ativos. Suas considerações tornaram-se parte integrante da teoria associada a processos estocásticos. Seus resultados foram fundamentais para o desenvolvimento de modelo de preço de opções denominado de Black-Scholes. Assim como para Bachelier, no modelo de Black-Scholes o preço do ativo varia no tempo, ou seja, conforme o prazo de vencimento se aproxima, o ativo tem seu preço modificado.

[15] No original: I observed many of them very evidently in motion; their motion consisting not only of a change of place in the fluid, manifested by alterations in their relative positions, but also not unfrequently of a change of form in the particle itself; a contraction or curvature taking place repeatedly about the middle of one side, accompanied by a corresponding swelling or convexity on the opposite side of the particle. In a few instances the particle was seen to turn on its longer axis. These motions were such as to satisfy me, it after frequently repeated observation, that they arose neither from currents in the fluid, nor from its gradual evaporation, but belonged to the particle itself.

Wiener, por sua vez, com sua teoria sobre o movimento browniano, não apenas fez avanços significativos na compreensão dos processos estocásticos, mas também contribuiu para a criação de uma ponte entre a matemática e o mercado financeiro. Norbert Wiener figura entre os principais teóricos que se dedicaram a tratar do movimento browniano no séc. XX. Seu trabalho fundamenta áreas como o cálculo estocástico, as equações diferenciais estocásticas, assim como parte da modelagem financeira moderna.

O movimento browniano é um conceito fundamental estudado em diversas áreas, como matemática, física, e mercado financeiro, devido à sua relevância na modelagem de fenômenos aleatórios e processos dinâmicos. Na matemática, é amplamente analisado dentro da teoria dos processos estocásticos, enquanto na física, desempenha um papel crucial na compreensão da difusão e do comportamento de partículas em suspensão.

Décadas antes, Albert Einstein (1879-1955) investigou o movimento de partículas pequenas suspensas em líquidos[16] e sugeriu a possibilidade de aleatoriedade no movimento causado pelo impacto entre moléculas. Isso o levou a considerar a existência de um fenômeno que poderia fugir das leis da termodinâmica clássica e do estudo molecular cinético.

De fato, no início do século XX, vimos emergir um novo campo da matemática que não apenas se consolidou como uma ferramenta indispensável para diversas ciências. O estudo de Probabilidade e Estatística se estabeleceu com "corpo próprio" com contribuições específicas para o avanço da própria ciência.

A teoria estatística, juntamente com os processos estocásticos, está entre as principais áreas de pesquisa científica e acadêmica da atualidade. Esses campos não apenas têm se expandido de maneira notável, mas também se relacionado com diversas áreas, como física, biologia, finanças e engenharia, tornando-se essenciais para a modelagem de sistemas complexos e contribuindo diretamente para a organização de um volume grande de informações.

Aceitando a existência da aleatoriedade nos fenômenos a nossa volta, somos capazes de pensar nas possibilidades que permeiam a dinâmica de sistemas naturais e artificiais, conduzindo a novas descobertas e aplicações inovadoras. Bachelier e Wiener são dois representantes dessa criatividade para além do próprio campo de estudo, seus resultados possibilitaram a ampliação da utilização do conhecimento para os mais diversos campos da ciência.

REFERÊNCIAS

ALIBER, Robert Zelwin; KINDLEBERGER, Charles Poor. **Manias, panics, and crashes**: a history of financial crises. Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2015.

BACHELIER, Louis Jean-Baptiste Alphonse. **Théorie de la spéculation**. Annales scientifiques de l'École normale supérieure. Paris, 1900. p. 21-86. Disponível em: http://archive.numdam.org/article/ASENS_1900_3_17__21_0.pdf. Acesso em: 28 de fev. 2025.

BARRIOL, Alfred. **Théorie et pratique des opérations financières**. Paris: Gaston Doin, 1914.

[16] Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.

BOREL, Félix Édouard Justin Émile. **Le Hasard.** Nouvelle Collection Scientifique. Libraire Félix Alcan, 1938.

BROWN, Robert. XXVII. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. **The philosophical magazine**, v. 4, n. 21, p. 161-173, 1828.

EINSTEIN, Albert. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. **Annalen der Physic**, v. 4, p. 549-560, 1905.

PEARSON, Karl. VII. Mathematical contributions to the theory of evolution.–III. Regression, heredity, and panmixia. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. Series A, containing papers of a mathematical or physical character, v. 187, p. 253-318, 1896.

TAQQU, M. S. **Bachelier and his times**: A conversation with Bernard Bru. Finance and Stochastics, v. 5, p. 3-32, 2001.

WEATHERALL, J. Q. **The physics of Wall Street**: a brief history of predicting the unpredictable. New York: Houghton Mifflin Harcourt, 2013.

WIENER, Norbert. Differential-space. **Journal of Mathematics and Physics**, v. 2, n. 1-4, p. 131-174, 1923.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

A relação entre o Teorema de Sturm e Teoria dos Invariantes na obra de Sylvester

The relationship between Sturm's Theorem and Invariant Theory in Sylvester's work

Magno Luiz Ferreira[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de apresentar conexões entre as contribuições de James Joseph Sylvester (1814–1897) para a Teoria dos Invariantes e desdobramentos que ocorreram com o que ficou conhecido como Teorema de Sturm. Este teorema foi apresentado em 1829 na Academia de Ciências de Paris pelo matemático Jacques Charles François Sturm (1803–1855). Apesar ser um método para determinar a existência de raízes reais de um polinômio em um dado intervalo, o resultado recebeu o nome de teorema por conta da rápida notoriedade que ganhou no continente europeu. Através da metodologia das redes de textos, selecionamos oito artigos publicados pelo britânico entre 1839 e 1866, período dividido em dois momentos: 1839 a 1850, quando encontramos um tratamento algébrico do teorema, e 1850 a 1866, quando encontramos desdobramentos em outras áreas como uma possível solução para o problema da equação que auxilia nas investigações sobre as desigualdades seculares do movimento dos planetas, mais conhecida como Equação Secular. As análises dos artigos mostraram que as contribuições de Sylvester ocorreram no contexto do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes, mais especificamente em investigações sobre eliminação ou no desenvolvimento da lei de inércia para formas quadráticas. Os elementos apresentados revelam que o Teorema de Sturm influenciou a descoberta de um invariante, assim como o desenvolvimento da Teoria dos Invariantes tem influência na popularização do Teorema. Entendemos que este fator evidencia um trabalho coletivo que contribui para uma perspectiva contextual da História da matemática.

Palavras-chave: Teorema de Sturm; Teoria dos Invariantes; Eliminação; Equação Secular; Sylvester.

ABSTRACT

This work aims to present connections between the contributions of James Joseph Sylvester (1814–1897) to the Theory of Invariants and developments related to what became known as Sturm's Theorem. This theorem was presented in 1829 at the Academy of Sciences in Paris by the mathematician Jacques Charles François Sturm (1803–1855). Although it is a method for determining the existence of real roots of a polynomial within a given interval, the result was named a theorem due to the rapid prominence it gained across Europe. Using the methodology of text networks, we selected eight articles published by the British mathematician between 1839 and 1866, a period divided into two phases: 1839 to 1850, when we find an algebraic treatment of the theorem, and 1850 to 1866, when we find developments in other areas, such as a potential solution to the problem of the equation that aids in investigations of the secular inequalities of planetary motion, more commonly known as the Secular Equation. The analysis of the articles revealed that Sylvester's contributions occurred within the context of the development of the Theory of Invariants, more specifically in investigations on elimination or in the development of the law of inertia for quadratic forms. The elements presented show that Sturm's Theorem influenced the discovery of an invariant, just as the development of the Theory of Invariants influenced the popularization of the Theorem. We understand that this factor highlights a collective effort that contributes to a contextual perspective on the History of Mathematics.

Keywords: Sturm's Theorem; Invariant Theory; Elimination; Secular Equation; Sylvester.

INTRODUÇÃO

Quando se trata do histórico da Teoria dos Invariantes é comum encontrar menções aos trabalhos dos matemáticos britânicos Arthur Cayley (1821 – 1895), James Joseph Sylvester (1814 – 1897) e George Salmon (1819 – 1904), que ficaram conhecidos como o trio de ferro (Parshall,

[1] Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBTT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: magno.ferreira@ifrj.edu.br.

2006). Do ponto de vista da produção matemática, estes autores são apresentados como personagens relevantes na evolução de processos e técnicas associados a elementos de Álgebra Linear como transformações lineares e determinantes.

Apesar disso, trabalhos recentes têm demonstrado contextos diferentes, como é caso de Dias (2023) que destaca as contribuições de Cayley para geometria através na elaboração de uma métrica através de análises das famosas memórias sobre os quantics e de Ferreira (2023) que apresenta alguns desdobramentos significativos da obra de Sylvester.

Este trabalho se dedica a apresentar uma conexão entre as primeiras contribuições de Sylvester para a Teoria dos Invariantes e um destes desdobramentos, que atende pelo nome de Teorema de Sturm. Apesar do nome, trata-se de um método para determinar o número de raízes de um polinômio em um determinando intervalo real elaborado pelo matemático Jacques Charles François Sturm (1803 – 1855) e publicado pela primeira vez em 1829 na Academia de Ciências de Paris. Inicialmente, este foi um resultado importante para álgebra dos polinômios, que rapidamente se mostrou um resultado importante para outros matemáticos, tanto da França como de outros países da Europa.

De modo mais específico, Sinaceur (1991) destaca o teorema como uma conexão importante entre as investigações da Teoria dos Invariantes e os estudos sobre a equação que auxilia no problema das desigualdades seculares dos movimentos dos planetas, conhecida como Equação Secular.

Desta forma, esta comunicação oral pretende elucidar a relação entre as primeiras contribuições de Sylvester para o desenvolvimento da Teoria dos Invariantes e o resultado apresentado pelo matemático franco-alemão no final da década de 1820. Como forma de identificar o *corpus* de textos analisado, utiliza-se a metodologia das redes de textos. De acordo com Brechenmacher (2006), esta abordagem possibilita uma descrição das culturas matemáticas, suas interações e comunicações, que se manifestam no entorno de um texto, ou autor, específico.

Em nosso caso, a análise se concentra em artigos que compõem uma rede de textos constituída a partir de trabalhos de Sylvester que se relacionaram com o texto *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, publicado por Sturm no periódico *Mémoires divers présentés par des savants étrangers* em 1835, uma versão atualizada do resultado apresentado na Academia de Ciências de Paris em 1829.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

Sinaceur (1991) destaca uma relação próxima entre o Teorema de Sturm e a Lei de Inércia para formas quadráticas, enunciada por Sylvester em 1852, a qual se faz presente através do estudo da Equação Secular. Essa conexão começa a ser estabelecida a partir das publicações da década de 1830 do matemático britânico, período no qual ele se dedica ao estudo de teoria de eliminação e raízes de polinômios.

De acordo com Ferreira (2023), o período de 1839 a 1866 representa uma mudança significativa nas pesquisas de Sylvester, que passam a se concentrar em questões de geometria e mecânica, para além da abordagem algébrica. Essa mudança de perspectiva aproxima o Teorema e a Lei, citados no parágrafo anterior, através do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes, que apresenta contribuição importante para os estudos da Equação Secular.

O problema das desigualdades seculares é bem abordado em Brechenmacher (2006), que apresenta um levantamento dos trabalhos e personagens que fizeram parte da discussão de 1766 até 1874. O autor ressalta as alterações das teorias e ideias que ocorreram neste período. Essas variações vão de questionamentos relacionados à mecânica até investigações aritméticas, passando por problemas de geometria. Essa variedade nos mostra que o problema das pequenas oscilações se expande através de diferentes ramos em outras áreas.

No entanto, é importante notar que estes ramos, ou diferentes identidades como Brechenmacher (2008) se refere, permanecem conectados pela ideia dos movimentos de rotação ou das desigualdades seculares. Outra conexão importante, ocorre através da Teoria dos Invariantes que tem início com investigações sobre transformações associadas a Equação Secular (Ferreira, 2023). A partir deste contexto, iniciamos o levantamento do *corpus* de textos para análises.

METODOLOGIA

Uma leitura prévia da obra de Sylvester foi possível perceber duas temáticas específicas que lidaram com o Teorema de Sturm: Teoria de Eliminação e Rotações de Corpos Rígidos. A partir disso, selecionamos artigos relacionados através das conexões reveladas pela metodologia das redes de textos.

> Uma rede de textos consiste em um estudo sistemático de um coletivo de textos em torno de algum(s) tema(s) específico(s). Nesse estudo, buscam-se as relações intertextuais entre os elementos que compõem esse coletivo. É necessário salientar que a construção de uma rede de textos não se dá exclusivamente (e nem necessariamente) por citações explícitas. (Santos, 2015, p. 43)

Nesta citação, encontramos uma boa descrição da abordagem das redes. No caso deste trabalho, analisamos as práticas que foram mobilizadas ao longo das publicações entrelaçadas nas redes que conectam o texto de Sturm (1835) com a Teoria de Eliminação e Rotações Corpos Rígidos. Como recorte temporal, optamos pelo intervalo de 1839 a 1866, dividido em dois momentos: 1839 a 1850, período em que ocorre uma interpretação algébrica de Sylvester, sobre o Teorema de Sturm, e 1850 a 1866, onde o matemático inglês participa do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes e apresenta desdobramentos do mesmo Teorema, em particular a Lei de Inércia para formas quadráticas, como foi enunciada em Sylvester (1852a). É importante ressaltar que a rede de textos pode apresentar trabalhos fora do recorte temporal.

As análises foram conduzidas levando em conta as práticas que ganharam notoriedade por terem sido utilizadas durante o desenvolvimento da Teoria dos Invariantes, como o caso dos determinantes e transformações lineares, além de técnicas mais específicas da Teoria.

O TEOREMA DE STURM E A OBRA DE SYLVESTER

O método para encontrar raízes de um polinômio em dado intervalo real toma como base o algoritmo da divisão de Euclides e uma variação da regra de sinais de Descartes, que buscava determinar o limite máximo de raízes possíveis em um dado intervalo. Desta forma, Sturm (1835) propõe o seguinte processo para determinar a existência ou não de raízes em um intervalo real $[a, b]$:

Considerando o polinômio $P(x)$ e sua derivada $P_1(x)$, aplicamos o algoritmo da divisão de Euclides: $\frac{P(x)+P_2(x)}{P_1(x)} = Q$ ou $P(x) = Q \cdot P_1(x) - P_2(x)$, onde Q é o quociente da divisão e $P_2(x)$ é o seu resto. Em seguida, repete-se o processo para $P_1(x)$ e $P_2(x)$, tendo $P_1(x) = Q \cdot P_2(x) - P_3(x)$. Assim, constrói-se a seguinte sequência de polinômios $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_n(x)$, sendo o último um polinômio constante. A partir disso, o autor verifica quantas mudanças de sinal ocorrem na sequência se $x = a$ e quantas ocorrem se $x = b$. Caso o número de variações de sinais do primeiro caso for maior que o número de variações do segundo, existe uma raiz no intervalo $[a, b]$, caso contrário o intervalo não apresenta raízes reais.

É importante notar que este método está baseado numa perspectiva analítica do polinômio. Essa informação destaca o papel da obra Sylvester no processo de popularização do Teorema de Sturm, uma vez que a abordagem do matemático britânico trata de aspectos algébricos dos polinômios, numa perspectiva mais algébrica do que analítica.

A Teoria dos Invariantes trata de uma investigação sobre transformações lineares. De acordo com Parshall (1989), estas pesquisas se iniciam na década de 1840 quando Cayley se propõe a identificar todas as formas algébricas, associadas a polinômios, que permanecem inalteradas após uma substituição das variáveis. É interessante notar que ele e Sylvester se conhecem nesta mesma época. Nesta seção, nos concentramos em duas temáticas que detalham o modo como a Teoria dos Invariantes representa uma ponte entre as investigações sobre raízes de polinômios e desigualdades seculares.

Problemas de Eliminação

Para além de representar os primeiros resultados de Sylvester na Teoria dos Invariantes, esta temática destaca a mudança de perspectiva do autor em relação a natureza de suas pesquisas, inicialmente algébrica e seguida de abordagens geométrica. O primeiro artigo publicado sobre o tema, intitulado *On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory of elimination* (Sylvester, 1839), tem como objetivo estabelecer um método original de eliminação. Considerando um sistema de dois polinômios de graus m e n em uma variável, o primeiro passo foi apresentar teoremas sobre os resultantes do processo de eliminação. Esses resultados apresentam uma forte conexão com o Teorema de Sturm.

Como dito anteriormente, este resultado foi apresentado à Academia de Ciências de Paris em 1829 e se trata de um método para determinar o número de raízes reais de um polinômio de grau m em um intervalo específico. Apesar disso, Sylvester percebeu uma conexão importante entre tal método e seus interesses em 1839.

> Quando uma das equações de coexistência é o coeficiente diferencial em relação ao termo repetido da outra, os derivativos primários dados no teorema 2 que coincidem neste caso com as funções auxiliares de Sturm reduzidas a seus termos mais baixos, podem ser exibidas sob um aspecto integral.[2] (Sylvester, 1839, p. 433, Tradução Nossa)

[2] When one of the equations of coexistence is the differential coefficient with respect to the repeated term of the other, the prime derivatives given in Theorem 2 which coincide in this case with Sturm's auxiliary functions reduced to their lowest terms, may be exhibited under an integral aspect.

O teorema 2, citado nesse trecho, se refere ao fato de que os derivativos[3] são sempre do mesmo grau, independentemente da utilização das raízes da primeira ou da segunda equação de coexistência (nome dado pelo autor para um sistema de equações). As funções auxiliares de Sturm, são os quocientes gerados a partir do processo de divisões sucessivas que determina o número de raízes em um intervalo dado. De acordo com Sinaceur (1991), a abordagem de Sylvester não só se conecta ao Teorema de Sturm, mas também lhe acrescenta uma nova perspectiva.

Enquanto o Teorema de Sturm se propõe a determinar o número de raízes reais de um polinômio em um intervalo dado, Sylvester apresenta uma relação entre as raízes através dos produtos dos quadrados de suas diferenças. O matemático inglês retoma a discussão que foi iniciada no *Mécanique Analytique* de Lagrange a respeito das soluções de equações polinomiais de graus maiores do que 4.

Essa distinção representa uma mudança na natureza do pensamento sobre o Teorema de Sturm, uma vez que a perspectiva analítica da ideia original do teorema é substituída por uma ideia algébrica. Esta afirmação pode ser confirmada ao observarmos que Sturm se concentra nas mudanças de sinal dentro do intervalo estudado, o que caracteriza um entendimento de continuidade do polinômio, enquanto Sylvester se baseia apenas em combinações dos coeficientes e raízes dos polinômios.

A natureza algébrica do trabalho que Sylvester desenvolveu nesse estudo sobre as raízes dos polinômios pode ser mais bem percebida no artigo *A New and More General Theory of Multiples Roots* (Sylvester, 1841). Além de estabelecer uma notação capaz de representar as combinações das raízes em quadrados de diferenças, o autor apresentou uma abordagem que permite formar equações lineares que serão importantes no processo de eliminação das variáveis, dado um conjunto de pares de raízes iguais. A partir disso, era possível determinar as outras raízes. Podemos observar que esse método é, exclusivamente, baseado na estrutura formal do polinômio. Além disso, esse trabalho traz indícios de que a ideia de eliminação de Sylvester tem alicerce nas ideias de Lagrange.

> Dificilmente se pode duvidar que o ilustre Lagrange, se tivesse escolhido aperfeiçoar a teoria incompleta de raízes iguais dada na Resolução Numérique, aplicando a ela sua própria máquina favorita de funções simétricas, dificilmente teria deixado de tropeçar por uma passagem para trás sobre teorema memorável de Sturm.[4] (Sylvester, 1841, p. 251, Tradução Nossa)

Nessa citação podemos verificar que Sylvester percebia a conexão entre a obra do autor do *Mécanique Analytique*, sua Teoria de Eliminação e o Teorema de Sturm. É interessante perceber que o matemático inglês acreditava que a ideia de Lagrange passaria pelo famoso teorema de seu amigo francês, caso prosseguisse em suas investigações sobre raízes de polinômios.

Como Molk (1916) destaca, o método de Sylvester ganhou alguma repercussão no continente. Em 1840, o matemático alemão Friedrich Julius Richelot (1808-1875) publicou uma nota no Jornal do Crelle onde reproduz o Método Dialítico, nome pelo qual ficou conhecido a partir dos anos

[3] Dadas P e Q, duas equações polinomiais em uma variável (x) de graus m e n, os derivativos do sistema formado por elas é um polinômio C de grau r (especificamente para o artigo de 1839, Sylvester exigiu que r fosse menor que m e n) cujos coeficientes são combinações dos coeficientes de P e Q. o Derivativo primário é o polinômio irredutível formado por essas características.

[4] It can scarcely be doubted that the illustrious Lagrange, had he chosen to perfect the incomplete theory of equal roots given in the Resolution Numérique, by applying to it his own favourite engine of symmetric functions, could scarcely have failed of stumbling by a back passage upon Sturm's memorable theorem.

1840. Na nota, há indicação das funções multiplicadoras usadas pelo matemático inglês no processo de eliminação. Entretanto, o Teorema de Sturm só retornaria a pauta do britânico na década de 1850, quando o autor já se encontrava imerso nos desenvolvimentos da Teoria dos Invariantes e em suas interpretações geométricas do seu método de dialítico.

> Como preparação para algumas observações a serem feitas sobre as fórmulas relacionadas com o teorema de M. Sturm, é necessário premissa de dois teoremas de grande importância sobre funções quadráticas, um dos quais, apesar de sua extrema simplicidade, é, até onde sei, muito pouco (se é que é) conhecido, e o outro foi dado em parte há muitos anos por M. Cauchy, mas também não é geralmente conhecido.[5] (Sylvester, 1853b, p. 489, Tradução Nossa)

Este trecho faz parte do artigo em que o autor apresenta um vocabulário da Teoria dos Invariantes, onde se encontra o termo resultante como um exemplo de invariante. Este fator revela como a relação entre as investigações sobre eliminação e o Teorema de Sturm se manifesta no desenvolvimento da nova Teoria britânica. Outro termo que aparece no vocabulário é a inércia, um desdobramento que é analisado na próxima seção.

A LEI DE INÉRCIA

Este teorema foi enunciado pela primeira vez em 1852 no contexto das investigações sobre a Equação Secular e partiu da publicação do artigo *Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert a déterminer les inégalités séculaires des planètes* (Sylvester, 1852b). Esse trabalho, que se inicia com uma contribuição do editor do jornal sobre as propriedades conhecidas dos produtos de determinantes da época, trata do problema de diagonalização de uma matriz simétrica. Mais especificamente, o autor apresenta uma relação entre as raízes da equação característica de uma matriz e a equação característica de sua potência. Em notação moderna temos: Se $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ ,\ \lambda_p$ são raízes da equação $|M - I| = 0$ então ${\lambda_1}^k,\ {\lambda_2}^k,\ \dots\ ,\ {\lambda_p}^k$, serão raízes da equação $\left|M^k - I\right| = 0$, onde *M* é uma matriz quadrada simétrica e a *I* identidade de mesma ordem.

Essa prática foi retomada com o artigo *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares* (Sylvester, 1852a), onde encontramos uma demonstração da possibilidade da redução de polinômios homogêneos à soma de quadrados positivos e negativos. Junto a isso, Sylvester apresenta sua conhecida Lei de Inércia para formas quadráticas. Essa lei afirma que o número de coeficientes positivos e negativos da forma reduzida é invariável, independentemente da transformação linear aplicada.

Esse resultado se revela associada ao contexto da Equação Secular através da publicação do artigo *The algebraical theory of the secular inequality determinantive equation generalised* (Sylvester, 1853a), onde se apresenta uma nova versão da Equação Secular, utilizando-se uma sequência de determinantes como abaixo:

$$X_1 = ax + \alpha;\ X_2 = \begin{bmatrix} ax+\alpha & bx+\beta \\ bx+\beta & cx+\gamma \end{bmatrix};\ X_3 = \begin{bmatrix} ax+\alpha & bx+\beta & dx+\delta \\ bx+\beta & cx+\gamma & ex+\epsilon \\ dx+\delta & ex+\epsilon & fx+\phi \end{bmatrix}$$

[5] As preparatory to some remarks about to be made on the formulas connected with M. Sturm's theorem, it is necessary to premise two theorems of great importance concerning quadratic functions, one of which, notwithstanding its extreme simplicity, is as far as I know very little (if at all) known, and the other was given in part many years ago by M. Cauchy, but is also not generally known.

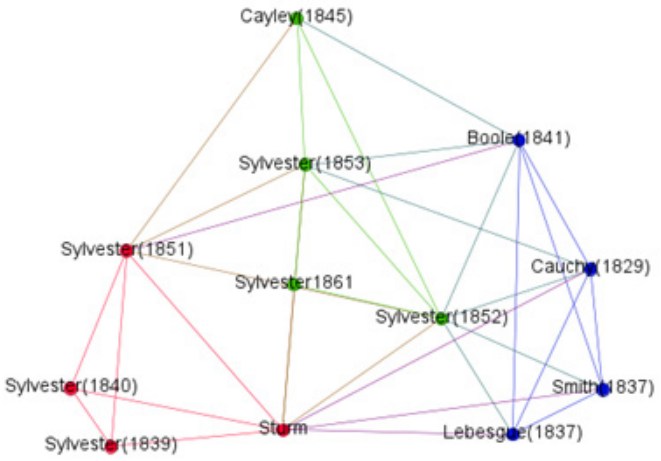
A partir desses objetos e com base em propriedades de determinantes de matrizes simétricas, é possível determinar se as raízes de X_i serão todas reais, de acordo com a alternância de sinal entre as raízes de X_{i-1}. É importante destacar que essa abordagem se vale da noção de continuidade que não se fez presente na utilização das funções auxiliares de Sturm, quando se utilizavam as propriedades algébricas do polinômio em questão. Além disso, essa abordagem revela que a Equação Secular era considerada como um tema de investigação em si, descolada do problema das desigualdades seculares que surgiu em meados do século XVIII, nos trabalhos de D'Alembert e Lagrange.

É interessante notar que os trabalhos apresentados nesta seção lidam com questões sobre as raízes polinômios, fator que os aproximam do Teorema de Sturm. No entanto, encontramos evidências mais robustas desta conexão, como foi o caso do texto *On the expression of the quotients which appear in the application of Sturm's method to the discovery of the real roots of an equation*, publicado em 1853 nos relatórios da Associação Britânica para o Avanço das Ciências (BAAS), onde se apresenta a representação do quociente do Teorema de Sturm como frações continuas, além da distinção dos fatores que virão a receber o nome de allótrios; ainda no mesmo ano, há duas publicações no volume 12 da *Nouvelles Annales des Mathématiques*. No texto, *Théorème sur les limites des racines réelles des équations algébriques* (Sylvester, 1853d), o autor começa a analisar os intervalos das raízes, com a utilização de sequência de expressões lineares, como uma possibilidade de decomposição do polinômio. Em *Nouvelle méthode pour trouver une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles d'une équation algébrique quelconque* (Sylvester, 1853c), por sua vez, se constroem fórmulas que permitem tomar decisão sobre as raízes serem imaginárias ou reais, a partir das sequências apresentadas nesta seção. O texto sobre as relações syzygéticas de Sylvester, deixa explícita a relação da Lei de Inércia.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta seção se dedica a apresentar o modo os textos que destacados anteriormente se conectam em rede com outras obras. A partir disso, estabelecemos o papel de Sylvester em relação a popularização do Teorema de Sturm. Após as análises dos artigos, foi possível construir a seguinte rede:

Figura 1 – Trabalhos ao redor do Teorema de Sturm



Fonte: Elaborado pelo Autor

Nas redes acima, os eixos à esquerda representam a linha do tempo das publicações de Sylvester. A partir destas linhas apresentamos outros textos que se relacionam com a obra do matemático

britânico no período de 1839 a 1866. Estas publicações revelam, além das investigações sobre eliminação e rotação de corpos rígidos, o modo como o Teorema de Sturm foi interpretado até a década de 1840 e após a década de 1850.

Ao investigar as regiões da rede têm maior interação, percebemos as relações da obra de Sylvester com o Teorema de Sturm. A região azul representa a conexão com a Equação Secular; a região verde com a Teoria dos Invariantes; e a região vermelha com a teoria de eliminação. É importante destacar que os trabalhos de Boole (1841), texto fundador da pesquisa sobre os invariantes, Cayley (1845), primeiro trabalho ativo sobre o tema e Sylvester (1851), artigo que define formalmente o termo *invariante*.

Esta rede nos mostra a capacidade de aglutinação da obra de Sylvester, fator que se revela no artigo Sylvester (1853). Este trabalho destaca a natureza algébrica da Teoria dos Invariantes e a nova perspectiva que se criava sobre o Teorema de Sturm, como pode ser visto nas citações do artigo de 1853. Além disso, este é o trabalho que conecta os assuntos discutidos nesta comunicação, como é o caso da Lei de Inércia para formas quadráticas e o teorema apresentado por Cauchy em 1829, utilizado para uma abordagem de transformações ortogonais de formas cônicas com a finalidade classificar estas formas. Nesse sentido, o artigo discute fórmulas para determinar a natureza das raízes de um polinômio, através dos restos do processo de medida comum com suas diferenciais, o que o autor chamou de resíduos *sturmianos*.

Desta forma, entendemos que a abordagem algébrica dos artigos produzidos por Sylvester nas décadas de 1830 e 1840, já revelavam uma mudança de perspectiva ao representar uma alternativa à solução analítica de Sturm. No entanto, é na demonstração da invariância do número de sinais positivos e negativos de um polinômio homogêneo transformado em soma de quadrados, a Lei de Inércia, que a contribuição do britânico ganha maior relevância. A conexão com a Equação Secular faz com que o teorema francês e a Teoria dos Invariantes, ganhem importância na comunidade científica da época, fator que traz credibilidade para os assuntos que foram tratados nesta comunicação oral. Com isso, esperamos ter contribuído para investigações mais completas do processo histórico da matemática no século XIX.

REFERÊNCIAS

BOOLE, George. Exposition of a general theory of linear transformations. **Cambridge Mathematical Journal**, E. Johnson, Trinity Street and Whittanker., v. 3, p. 106–119, 1841.

BRECHENMACHER, Frédéric. **Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930)** : Formes de représentation et méthodes de décomposition. 2006. 729f. (Doutorado em História das Ciências)

BRECHENMACHER, Frédéric. L'identité algébrique d'une pratique portée par la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (1766-1874). **Sciences et techniques en perspective**, v. 1, p. 1–51, 2008.

CAYLEY, Arthur. On linear transformations. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 1, p. 104–122, 1845.

DIAS, Leandro Silva. **As métricas de Cayley e seus desdobramentos (1857-1895)**. 2023. 171f. (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física)

FERREIRA, Magno Luiz. **JJ Sylvester e a comunidade formada através do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes**. 2023. 485f. (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física)

MOLK, Jules. **Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pure et Appiquées**. v. 1. Jacques Gabay, 1916.

PARSHALL, Karen Hunger. Toward a history of nineteenth-century invariant theory. In: MCCLEARY, John; ROWE, David (Org.). **Ideas and their Reception.** Elsevier, 1989. p. 155–206.

PARSHALL, Karen Hunger. **James Joseph Sylvester: Jewish Mathematician in a Victorian World**. JHU Press, 2006

SANTOS, Cleber Haubrichs dos. **Étienne Bobillier (1798-1840)**: percursos matemático, docente e profissional. 2015. 709f. (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia)

SINACEUR, Hourya. **Corps et modèles**: essai sur l'histoire de l'algèbre réelle. Vrin, 1991.

STURM, Jacques Charles François. Mémoire sur la résolution des équations numériques. **Mémoires divers présentés par des savants étrangers**, Bachelier, v. 6, p. 273–318, 1835.

SYLVESTER, James Joseph. On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory of elimination. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 15, n. 98, p. 428–435, 1839.

SYLVESTER, James Joseph. A new and more general theory of multiple roots. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 18, n. 117, p. 249–254, 1841.

SYLVESTER, James Joseph. On the general theory of associated algebraical forms. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 6, p. 289–293, 1851.

SYLVESTER, James Joseph. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 4, n. 23, p. 138–142, 1852a.

SYLVESTER, James. Joseph. Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 11, p. 434–440, 1852b.

SYLVESTER, James. Joseph. The algebraical theory of the secular-inequality determinantive equation generalized. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 6, n. 38, p. 214–216, 1853a.

SYLVESTER, James. Joseph. On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 143, p. 407–548, 1853b.

SYLVESTER, James. Joseph. Nouvelle méthode pour trouver une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles d'une équation algébrique quelconque. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 12, p. 329–336, 1853c.

SYLVESTER, James. Joseph. Théorème sur les limites des racines réelles des équations algébriques. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 12, p. 286–287, 1853d.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Os novos conceitos na geometria: a percepção de Poncelet sobre o princípio da projetividade

New concepts in geometry: Poncelet's perception of the principle of projectivity

Jansley Alves Chaves[1]
Instituto Federal do Sul de Minas – IFSULDEMINAS

Leandro Silva Dias[2]
Instituto Federal do Rio de Janeiro – IFRJ

Gérard Émile Grimberg[3]
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

RESUMO

No transcurso dos séculos XVII e XVIII, o uso de métodos geométricos sem o suporte da álgebra perdeu importância devido ao trabalho de René Descartes. O desenvolvimento de métodos analíticos havia eclipsado as abordagens geométricas tradicionais, levando a uma geometria cada vez mais algebrizada. Porém, após a Revolução Francesa, no final do século XVIII, surgiram trabalhos de geômetras que valorizavam as figuras e as construções visuais como instrumentos fundamentais para o raciocínio matemático. Foi justamente nesse ambiente de "insatisfação" que novas teorias vieram à luz, trazendo um novo ímpeto à geometria e resgatando sua essência visual. Esses novos conceitos como transversais, polos, polares, eixo radical, ponto ideal, similitude, entre outros, ampliaram as possibilidades de exploração da geometria sintética, que se contrapõe à geometria analítica. Essa renovação foi fortemente influenciada pelos trabalhos de Lazare Carnot, com sua *Géométrie de Position* e Gaspard Monge, com a *Géométrie Descriptive*. Inspirados por suas ideias sobre projeções, diversos geômetras desenvolveram novos resultados utilizando métodos geométricos que, em alguns casos, superaram a abordagem algébrica. Esses avanços publicados em obras de Monge, Servois, Carnot, Poncelet, Brianchon, Gergonne e outros, bem como em importantes periódicos da época, como o *Journal de l'École Polytechnique,* a *Correspondance sur l'École Polytechnique* e os *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, além de outros periódicos ao longo do século XIX, deram um impulso ao ramo da Geometria Sintética. Nosso objetivo, neste trabalho, é apresentar alguns desses novos conceitos, suas vantagens, em algumas abordagens, diante da aplicação da álgebra e a importância ao Ensino.

Palavras-chave: Geometria Sintética; Geometria Projetiva; Poncelet.

ABSTRACT

During the 17th and 18th centuries, the use of geometric methods without the support of algebra lost significance due to the work of René Descartes. The development of analytical methods had eclipsed traditional geometric approaches, leading to an increasingly algebraized geometry. However, after the French Revolution in the late 18th century, works emerged from geometers who valued figures and visual constructions as fundamental tools for mathematical reasoning. It was precisely in this atmosphere of «dissatisfaction» that new theories came to light, bringing renewed momentum to geometry and restoring its visual essence. These new concepts—such as transversals, poles, polars, radical axis, ideal points, and similarity, among others—expanded the possibilities of synthetic geometry, which stands in contrast to analytic geometry. This renewal was strongly influenced by the works of Lazare Carnot, with his *Géométrie de Position*, and Gaspard Monge, with *Géométrie Descriptive*. Inspired by their ideas on projections, several geometers developed new results using geometric methods that, in some cases, surpassed the algebraic approach. These advances, published in the works of Monge, Servois, Carnot, Poncelet, Brianchon, Gergonne, and others, as well as in key journals of the time such as the *Journal de l'École Polytechnique*, *Correspondance sur l'École Polytechnique*, and *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* gave significant impetus to the field of Synthetic Geometry throughout the 19th century. The objec-

[1] Doutor pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBTT no Instituto Federal do Sul de Minas (IFSULDEMINAS), Muzambinho, MG, Brasil. E-mail: Jansley.chaves@muz.ifsuldeminas.edu.br.

[2] Doutor pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBTT no Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, RJ, Brasil. E-mail: Leandro.dias@ifrj.edu.br.

[3] Doutor pela Université Paris Diderot, PARIS 7, França. Professor grau 7 associado 2 da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: gerard.emile@terra.com.br.

tive of this study is to present some of these new concepts, their advantages in certain approaches compared to algebraic methods, and their importance in mathematics education.

Keywords : Synthetic Geometry ; Projective Geometry ; Poncelet.

INTRODUÇÃO

No início do século XIX novos conceitos surgiram no campo da Geometria marcando uma fase de renovação e avanço. Entre esses conceitos, destacam-se as Transversais, os Polos e as Polares, o Eixo Radical, o Ponto Ideal, a Similitude e outros que ampliaram significativamente as possibilidades de exploração geométrica. Essas inovações foram amplamente divulgadas em periódicos como o *Journal de l'École Polytechnique*, a *Correspondance sur l'École Polytechnique* e os *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*. Este último o primeiro periódico exclusivamente dedicado à comunidade matemática, já que os outros dois citados são vinculados à *École Polytechnique* e possuía, além das divulgações citadas, características administrativas. Dentre os principais geômetras que impulsionaram essas contribuições, destacam-se Carnot (1753-1823), Monge (1746-1818), Servois (1767-1847), Brianchon (1783-1864), Poncelet (1788-1867) e Gergonne (1771-1859).

Poncelet denominou de *Géométrie rationnelle* as iniciativas que renovaram e atualizaram a geometria antiga, destacando as propriedades projetivas nos trabalhos dos geômetras da época. Essas propriedades tornaram-se o alicerce de sua principal obra, *Traité des propriétés projectives des figures*, publicada em 1822. É nesse tratado que o autor identifica que o princípio da projeção é um elemento comum nos estudos dos geômetras contemporâneos.

Consideramos relevante destacar as contribuições das propriedades projetivas por meio de obras fundamentais, como *Géométrie Descriptive* de Gaspard Monge, *Géométrie de position* de Lazare Carnot e *Solutions peu connues* de Joseph Servois. Essas obras introduzem conceitos inovadores e processos geométricos marcados por abordagens focadas nas relações em vez de equações. A partir desse ponto, a Geometria pode ser dividida em duas abordagens principais: a Sintética, que foca nas relações entre figuras e conceitos, e a Analítica, que utiliza equações para resolver problemas geométricos. Poncelet enfatiza o uso sistemático da projeção como elemento central na resolução de problemas, consolidando a Geometria Projetiva Sintética.

Neste contexto efervescente da Geometria no início do século XIX surge um importante marco em 1810, os *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées,* conhecido como os *Annales de Gergonne*. Sob a liderança de Joseph-Diaz Gergonne, esse periódico tornou-se um ponto de referência para a comunidade matemática ao reunir artigos e promover o intercâmbio de ideias. Os *Annales* desempenharam um papel fundamental na disseminação das novas teorias e ferramentas, atraindo matemáticos de diversos ramos. O periódico também foi essencial para consolidar o caráter rigoroso e inovador da Geometria Sintética, mostrando que ela podia competir de igual para igual com a Análise em termos de sofisticação e aplicação.

Entre os matemáticos que mais contribuíram para esse renascimento geométrico e que abordaremos neste nosso trabalho, podemos destacar:

1) Gaspard Monge pioneiro no desenvolvimento da Geometria Descritiva, área essencial à formação de engenheiros. Poncelet, por exemplo, foi um engenheiro militar formado na *École Polytechnique* e ex-aluno de Monge.

2) Lazare Carnot introduziu ideias que exploravam a simetria e a relação entre os elementos geométricos.

3) François-Joseph Servois, em *Solutions peu connues*, apresentou soluções sintéticas utilizando apenas a régua, resultando em construções simples e elegantes.

4) Poncelet, em *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, consolidou as ideias sobre propriedades projetivas.

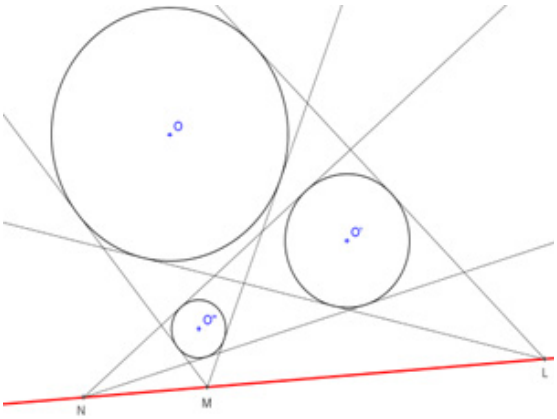
Neste trabalho, exploraremos os conceitos presentes nas obras dos matemáticos mencionados, com ênfase no papel das abordagens sintéticas. Além de abordar o contexto histórico, buscamos contribuir para o ensino da matemática, demonstrando como essas abordagens podem enriquecer o aprendizado ao promover uma compreensão mais ampla e diversificada. Analisaremos as contribuições de cada um dos quatro matemáticos, concluindo com reflexões sobre suas perspectivas e legados.

A GEOMETRIA DESCRITIVA DE MONGE

A Geometria Descritiva representa projeções de figuras com aplicações práticas na Mecânica e na descoberta de novas propriedades sem álgebra ou métricas. Monge disseminou amplamente seus conceitos por meio do ensino na *École du génie de Mézières*, *École Normale* e *École Polytechnique*, onde a geometria descritiva permaneceu relevante no século XIX (Laurentin, 2000).

Podemos apresentar um claro exemplo de propriedades projetivas: a figura abaixo ilustra a projeção de três esferas. O objetivo é traçar um plano tangente às esferas. A aplicação do teorema de Monge, que estabelece que os três pontos de similitude de três pares de esferas são colineares, permite encontrar esse plano tangente de forma precisa.

Figura 1 – Teorema de Monge



Fonte: Chaves (2023, p. 22)

De forma intuitiva, podemos deduzir o teorema de Monge que afirma que os centros de similitude de três circunferências coplanares são colineares. Para isso, podemos seccionar as três esferas pelo plano definido pelos seus três centros e encontrar um plano tangente às três esferas que também é tangente aos três cones tangentes duas a duas às esferas. Dessa forma, podemos concluir que os três vértices desses cones, que estão na interseção dos dois planos tangentes, são colineares, ou seja, a reta de intersecção dos dois planos tangentes contém os três vértices.

A solução requer um processo de raciocínio geométrico que destaca a importância da propriedade projetiva, que é fundamental para a resolução de problemas que envolvam figuras tridimensionais e sua representação em duas dimensões. Segundo o autor, a solução de problemas geométricos requer um processo de raciocínio que exige uma grande habilidade de visualização da figura, o que nem sempre é possível devido à natureza tridimensional do objeto em questão. Poncelet reconhece que a solução encontrada por Monge envolve o uso da projeção como um meio de representar as figuras tridimensionais em duas dimensões, o que permite a realização de cálculos e análises geométricas com maior facilidade e precisão. Em suma, o conceito de projeção é fundamental na Geometria Descritiva.

A GEOMETRIA DE POSIÇÃO DE CARNOT

Lazare Carnot publicou três obras matemáticas que tratam sobre as relações de posição entre as partes de uma figura geométrica, resolução de problemas geométricos baseados nessas relações e propostas sobre transversais.

Carnot sustenta que a Análise Algébrica é inadequada para a geometria quando conduz a manipulação de expressões desconectadas da figura, demonstrando sua limitação em certas situações (Nabonnand, 2006). Ele argumenta que a álgebra lida com equações sem conexão com o significado geométrico, como quantidades negativas e imaginárias.

Propõe uma abordagem diferenciada para a Geometria, dividindo as relações entre partes das figuras em duas categorias: grandezas, que tratam valores absolutos, e posição, que expressam a relação relativa entre elementos. Argumenta que é possível estudar Geometria sem considerar a posição relativa, sugerindo implicitamente a projeção como ferramenta para representar figuras projetadas em planos, preservando sua forma e estrutura. Poncelet também defendia a ideia de Carnot de que a Geometria deveria ser tratada sem se preocupar com a posição relativa dos elementos e figuras geométricas. Assim como Carnot, ele fazia uma distinção entre as relações métricas, que envolvem as grandezas, e as relações descritivas, que envolvem a posição relativa dos elementos da figura. Em seu *Tratado*, Poncelet estudou as propriedades das figuras que permanecem inalteradas por projeções. Isso se refere a encontrar propriedades mais abstrata e geral, que se concentra nas propriedades invariantes sob projeções.

A imagem geométrica de Carnot é muito influente para os trabalhos em Mecânica e há uma analogia muito forte entre as transformações de uma figura e de um sistema mecânico. A analogia com os sistemas mecânicos sugere que ele via a Geometria como uma ciência aplicável. Observaremos isto em Monge e, também, em Poncelet.

Carnot reconhece que sua geometria se baseia na Geometria elementar e que essa geometria pode ser usada como um meio pedagógico para ensinar rigor e reflexão. Ele também acredita que a Geometria elementar é fundamental para o avanço da Geometria como um todo (Carnot, 1803).

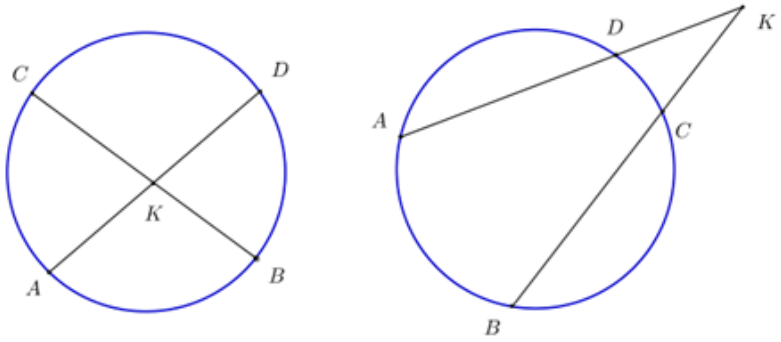
Carnot questiona se a "ciência das projeções" deve ser considerada uma parte integral da Geometria elementar. Ele rejeita a ideia de que essa teoria deve ser estudada apenas em aplicações geométricas, pois considera difícil comparar os princípios com as aplicações. Para Carnot, a noção de problema geral em Geometria surge a partir da consideração da organização e da plenitude dos resultados da Geometria elementar. Ele argumenta que, mesmo sendo uma coleção completa de proposições, a Geometria elementar possui áreas negligenciadas que precisam ser preenchidas para

que se alcance a solução desse problema geral. Nesse sentido, nos parece que a "ciência das projeções" é uma dessas áreas negligenciadas que precisam ser estudadas para se compreender a Geometria de forma completa.

Para Carnot, a Síntese era mais iluminada porque permitia trabalhar com objetos matemáticos sem perdê-los de vista, ao contrário da Análise.

Vejamos um exemplo ilustrativo da ideia fundamental que sustenta o conceito de projeção. É importante notar que essa ideia está implícita. Suponha um ponto de projeção no espaço, raios que partem desse ponto e um plano de projeção. Ao deslocar o ponto de projeção, a imagem projetada assume uma nova configuração.

Figura 2 – Invariância



Fonte: Chaves (2023, p. 24)

Na figura 2, é verdadeira a relação *KA.KD=KC.KB*. Na Geometria euclidiana, necessita-se de duas provas separadas, uma para cada posição de *K*, interior ou exterior à circunferência de círculo.

A ideia agora consiste em considerar as duas figuras como correlatas, ou seja, visualizar a segunda figura como uma transformação contínua da primeira figura, através de um movimento contínuo do ponto *K*. É exatamente isso que Poncelet está investigando em sua obra, examinando a mudança do ponto de projeção central e, consequentemente, a permanência de propriedades geométricas.

A ideia de correlação entre figuras geométricas sugere uma nova visão da geometria, na qual os objetos geométricos não são mais considerados isolados, como na concepção euclidiana clássica, mas sim como partes de uma cadeia de figuras continuamente móveis. Essa ideia teve uma influência profunda em Poncelet.

AS SOLUÇÕES POUCO CONHECIDAS DE SERVOIS

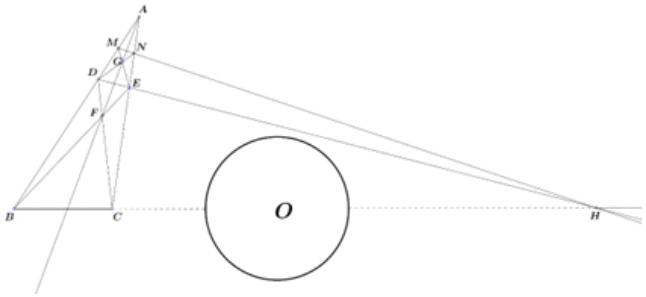
O trabalho de Servois é original por atender às necessidades militares, propondo construções com apenas dois instrumentos: estacas para alinhamentos e corda para medir comprimentos. No plano, usa-se apenas a régua.

Vejamos um exemplo. Determinar, em uma estrada interrompida por uma montanha, o ponto de reinício do outro lado para manter o alinhamento e permitir escavação simultânea em ambos os lados.

> *BC* são dois pontos na estrada cuja extensão procuramos: em um ponto A, fora da reta, e de onde podemos ver *B* e *C*, coloque uma "estaca". Coloque no segmento *AB* uma "estaca" *D*, depois uma terceira "estaca", *E*, em *AC*, de modo que o alinhamento *DE* passe sobre o obstáculo *O* que oculta a estrada definida pelos pontos *B* e *C*. Coloque uma quarta "estaca", *F*, interseção dos dois alinhamentos *BE*, *CD*. Coloque uma quinta "estaca" *G* sobre *AF*, depois uma sexta *M* em *EG* e *AB*, depois uma sétima *N* em *DG* e *AC*, finalmente, coloque uma oitava, *H*, em conjunto com os dois alinhamentos *DE* e *MN*. Esta última "estaca" estará na extensão de *BC* (Servois, 1805, p. 31).

A justificativa desta construção é deduzida da concorrência das retas *BC*, *DE* e *MN* no ponto *H*.

Figura 3 – Invariância

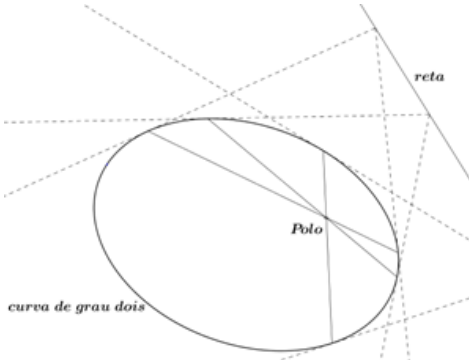


Fonte: Chaves (2023, p. 24)

No primeiro volume dos *Annales de mathématiques pures et appliquées*, Servois apresenta uma importante contribuição para a Geometria: a ideia de pólo de uma reta em relação a uma cônica. Essa ideia permite uma abordagem mais eficiente para a solução de problemas envolvendo cônicas, como a identificação de pontos de tangência, interseções e outros aspectos geométricos relacionados. Servois mostrou que, por meio do conceito de pólo, é possível converter problemas de cônicas em problemas de retas e vice-versa, simplificando a análise e resolução desses problemas:

> Atribuindo-se uma reta e uma curva de segunda ordem, chamo pólo da reta o ponto [...] em torno do qual giram todas as cordas dos pontos de contato dos pares de tangentes à curva dos diferentes pontos da reta. (Servois, 1810, p. 337)[4].

Figura 4 – Polo de uma reta em relação à curva de grau dois



Fonte: Chaves (2023, p. 27)

[4] Annales de mathématiques pures et appliquées, tome 1, Paris : Courcier, 1810-1811, p. 337-341.

O trabalho de Servois destaca a presença da ideia de projeção, o que pode ter sido percebido por Poncelet ao imaginar o movimento do centro de projeção no espaço, causando a rotação das cordas de contato em torno do polo. Em outras palavras, Servois utilizou conceitos de projeção implicitamente para descrever movimentos de objetos geométricos.

PROPRIEDADES PROJETIVAS DAS FIGURAS DE PONCELET

Poncelet em uma carta ao editor dos *Annales de Mathématique Pures et Appliquées* diz que não considera que a geometria racional tenha sempre vantagem sobre a análise, nem que se deva constantemente preferi-la a esta última nas pesquisas puramente geométricas, mas, ao contrário, pensa como Dupin[5]: "cada uma dessas duas ciências tem meios específicos e não poderia, sem grande prejuízo para o avanço da ciência, cultivar uma sem a outra" (Poncelet, 1817, p. 143).

Ele descreve as vantagens da análise algébrica em relação à geometria racional:

> Enquanto a geometria analítica oferece, por seu próprio curso, meios gerais e uniformes para proceder à solução das questões que surgem, à busca das propriedades das figuras; enquanto ela chega a resultados cuja generalidade é sem limites, a outra [geometria racional] procede por acaso; seu progresso depende inteiramente da sagacidade de quem o emprega, e seus resultados são quase sempre limitados ao estado particular da figura em questão. Através dos esforços sucessivos dos geômetras, verdades particulares se multiplicaram sem cessar, mas raramente aconteceu que o método e a teoria geral tenham ganhado com isso (Poncelet, 1822, p. xix).

De acordo com Poncelet, a ampla generalidade dos resultados da Geometria Analítica decorre do uso de "características que não têm valor por si mesmas", que são essencialmente "seres de razão" e parecem ser uma prerrogativa exclusiva da Álgebra.

Diferentemente de Carnot, que rejeita a validade dessas características nas demonstrações geométricas, Poncelet procura estabelecer noções que possam desempenhar um papel equivalente em Geometria:

> Se fosse possível aplicar-lhe o raciocínio implícito, desconsiderando a figura [...], a Geometria ordinária, sem por isso empregar os cálculos e os sinais da Álgebra, provaria, em muitos aspectos, rival da Geometria Analítica (Poncelet, 1822, p. xxij).

Esse raciocínio implícito é aplicável as noções como pontos no infinito, bem como às novas noções de elementos ideais e imaginários na figura (Friedelmeyer, 2007).

Por exemplo, Poncelet ilustra a eficácia das noções de secante ideal e pontos imaginários utilizando uma curva de segunda ordem C, juntamente com a secante MN e o diâmetro conjugado AB (o lugar geométrico dos pontos médios das cordas de mesma direção). Neste caso, o diâmetro AB intersecta a corda MN em seu ponto médio O, as tangentes à curva em M e N se encontram em um ponto O' do prolongamento do diâmetro e O e O' são conjugados em relação a A e B . Isso implica em uma proporção específica:

$$O'A/O'B = AO/OB.$$

[5] Développements des géométrie, 1ª partie, p. 238

Percebe-se que os pontos *O* e *O'* poderiam ser determinados mesmo quando a reta *MN* não intersecta a curva *C*. Nesta situação a reta é chamada de secante ideal, em que os pontos de interseção da reta com a curva são considerados imaginários. Esses conceitos são possíveis graças ao princípio da continuidade, que preserva as propriedades do objeto geométrico, e ao princípio de projeção, que permite mover esse objeto por meio do deslocamento do centro de projeção. Evidenciando a importância destas propriedades.

O método das projeções é uma técnica poderosa e uniforme na geometria, permitindo relacionar figuras em perspectiva a figuras planas. Ele oferece uma abordagem direta para resolver problemas geométricos, preservando as propriedades invariantes dos objetos em diferentes posições espaciais.

Poncelet percebe nos trabalhos de outros geômetras que a ideia do princípio de projeção é utilizada mesmo que implicitamente. Assim, acreditava que existiam duas abordagens igualmente poderosas para melhorar a geometria racional: uma consistia em expandir o escopo das concepções dessa geometria por meio do princípio da continuidade, enquanto a outra utilizava os princípios da doutrina das projeções para avançar de forma rápida e confiante na busca da verdade geométrica.

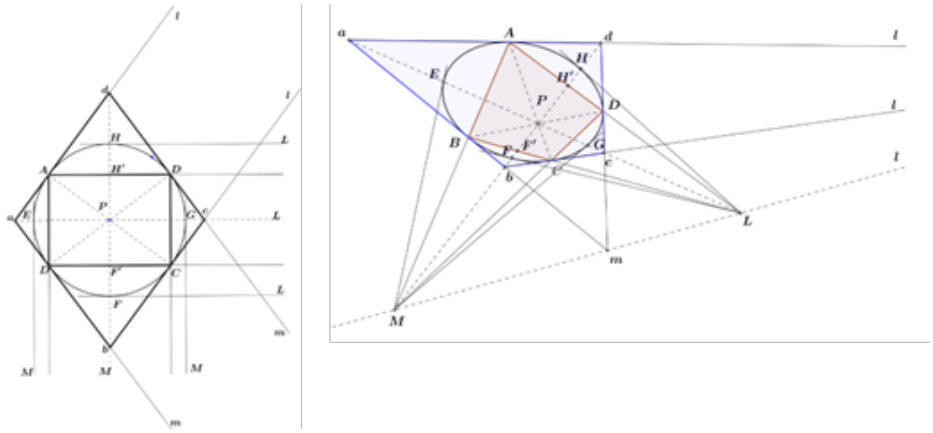
A doutrina das projeções geométricas distingue as propriedades das figuras que permanecem inalteradas pela projeção. Esse método permite identificar propriedades gerais ao demonstrar sua validade em todas as projeções. Projeções mais simples podem facilitar a análise, tornando as propriedades projetivas uma ferramenta eficiente para estudar figuras em perspectiva.

Uma das projeções mais comuns é a cônica ou central, que não afeta a correlação, grau ou ordem da figura original. Geralmente, a projeção também não altera as relações gráficas entre as partes da figura, que dependem apenas da direção indefinida das retas, suas intersecções, contatos e assim por diante.

Poncelet demonstra como determinar as propriedades de quadriláteros inscritos e circunscritos em uma cônica. Ele mostra que qualquer figura formada por uma cônica e uma reta é a projeção de um círculo e uma reta no infinito. Aplicando esse princípio, conclui que o quadrilátero inscrito na cônica, com lados opostos paralelos, é um retângulo, enquanto o circunscrito é um losango.

Uma vez estabelecida a figura mais simples, é fácil perceber que as quatro diagonais dos dois quadriláteros se encontram em um único ponto, ou que os lados opostos dos dois quadriláteros são paralelos e se encontram em um ponto da reta no infinito. Como essas propriedades são projetivas, elas também se mantêm verdadeiras para a figura inicial.

Figura 5 – Quadriláteros inscrito e circunscrito



Fonte: Chaves (2023, p. 30)

Ao fazer uso de pontos no infinito e de uma projeção apropriada, Poncelet é capaz de estender as concepções geométricas e, assim, demonstrar propriedades da figura.

Poncelet destacou a projeção como elemento central na renovação dos métodos geométricos, utilizando-a para avançar rapidamente na descoberta de verdades geométricas. Ele aplicou esse princípio para determinar propriedades de figuras, como quadriláteros inscritos e circunscritos a uma cônica, conforme ilustrado na Figura 4.

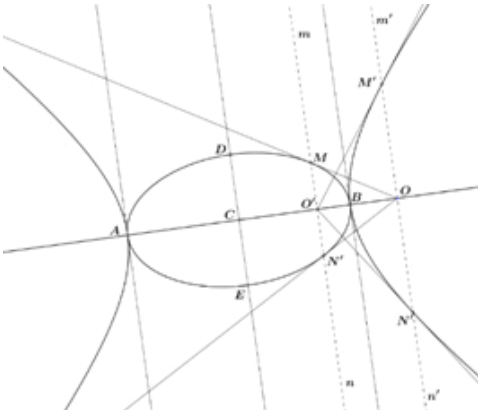
Ele buscava sistematicamente as propriedades que são preservadas por projeção, as propriedades projetivas das figuras. Com essa técnica, ofereceu enormes contribuições à Matemática, permitindo um entendimento mais profundo das relações entre as figuras e seus aspectos geométricos. Essa abordagem independe da posição ou orientação das figuras no espaço, tornando a Geometria Projetiva um novo ramo.

Ao adicionar o princípio da continuidade ao princípio de projeção, Poncelet pôde utilizar o conceito de pontos e retas no infinito, bem como pontos e retas imaginárias no infinito. Ele percebeu que os geômetras usavam o conceito de princípio de projeção, às vezes implicitamente. Um exemplo é a polar do centro de uma circunferência, que pode ser entendida como estando no infinito como o exemplo da Figura 4, onde o encontro das diagonais é o polo da reta no infinito.

Desta forma, pôde identificar dois princípios fundamentais para estudar propriedades projetivas das figuras: o princípio de projeção, que revela as propriedades invariantes sob perspectiva, e o princípio de continuidade, que permite considerar todas as transformações de uma figura. Esses princípios o permitiram conectar elementos ao infinito, imaginários ou não, à ideia de continuidade.

Ao investigar famílias de elipses semelhantes, Poncelet introduz, também, a ideia de pontos imaginários. Isso fica evidente ao estudar o caso de uma família de elipses concêntricas e suas hipérboles complementares, como ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Elipses e suas cônicas suplementares

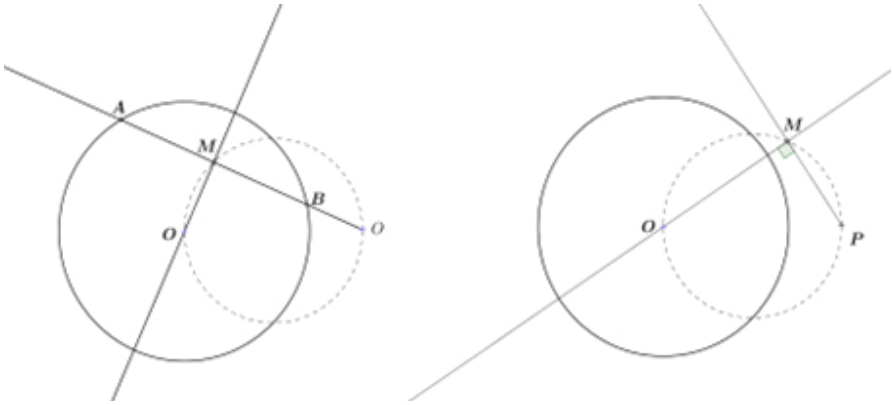


Fonte: Chaves (2023, p. 33)

Poncelet utiliza a noção de diâmetro conjugado para mostrar que o ponto médio da corda *MN* (paralela ao diâmetro *DE*), ou seja, o ponto *O'*, e o ponto *O*, intersecção das tangentes à elipse nos pontos de contato da corda *MN*, estão ambos os incidentes no diâmetro *AB*. Os pontos *A*, *B*, *O* e *O'* são conjugados harmônicos, o que leva Poncelet a considerar a reta *m'n'*, na qual incide o ponto *O* e é paralela à reta *mn*, como uma secante ideal da elipse. Os pontos *O* e *O'* são recíprocos, sendo *O* a intersecção das tangentes reais à elipse e *O'* a intersecção das tangentes imaginárias à elipse. Similarmente, *O* é a intersecção das tangentes imaginárias à hipérbole suplementar, enquanto *O'* é a intersecção das tangentes reais à hipérbole suplementar.

No exemplo seguinte, Poncelet usa de forma intuitiva o princípio de continuidade e de projeção para apresentar o ponto médio da corda apoiada em uma reta secante a uma circunferência de círculo, mesmo quando esta reta deixa de ser secante e se torna exterior à curva. O motivo de sempre se obter o ponto médio por meio de uma construção é que os pontos extremos da corda se tornam imaginários conjugados, e seu ponto médio sempre será real. Vamos observar a construção da Figura 7.

Figura 7 – O ponto é determinado, mesmo na reta exterior



Fonte: Chaves (2023, p. 35)

O ponto *M* é facilmente determinado, mesmo quando a reta de apoio da corda está fora da circunferência. *M* é sempre o ponto médio dos pontos extremos da corda, que podem ser imaginários conjugados. Geometricamente *M* é a interseção da reta externa com a perpendicular ao centro da

circunferência. Em resumo, a posição da corda em relação à circunferência não afeta a localização de *M* como o ponto médio da corda.

CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho é destacar as percepções de Poncelet sobre as propriedades projetivas. Embora outros autores sejam mencionados ao longo do estudo, isso ocorre apenas para demonstrar que, ainda que de forma implícita, já existiam indícios do conceito de projetividade em seus trabalhos. No entanto, é o tratado das propriedades projetivas de Poncelet que consolida e dá visibilidade a essa ideia. Dessa forma, a ênfase deste estudo está em suas contribuições, o que nos conduz nesta conclusão reforçar sua relevância.

Os conceitos explorados por Poncelet em seu Tratado, como transversais, polo e polar, eixo radical e ponto ideal, estabeleceram uma base teórica sólida para a Geometria Projetiva, abordando relações geométricas sob uma perspectiva inovadora. Esses conceitos fundamentais permitiram deduções profundas e abriram novos caminhos para a resolução de problemas clássicos.

O princípio de continuidade, em conjunto com o de projeção, viabilizou o tratamento de elementos abstratos, como pontos no infinito, ressaltando o dinamismo das figuras geométricas, conforme observado por Chaves e Grimberg (2014). Essa integração demonstra que o movimento contínuo do centro de projeção está diretamente associado à manutenção de certas propriedades, ampliando a compreensão da Geometria Projetiva Sintética.

Além disso, a introdução dos pontos imaginários, descritos como pontos cíclicos no infinito, teve um papel fundamental na teoria de interseção de circunferências. Esses pontos não apenas asseguram a continuidade do sistema, mas também expandem suas possibilidades, conferindo maior flexibilidade e profundidade teórica, ainda que sua justificativa seja frequentemente abordada por meio de métodos algébricos.

Assim, o trabalho de Poncelet não só reformulou a geometria tradicional, mas também introduziu uma visão dinâmica e contínua das figuras, combinando rigor matemático com intuição geométrica. Seu legado consolidou a Geometria Projetiva como uma ferramenta essencial para a compreensão das propriedades fundamentais do espaço.

REFERÊNCIAS

CARNOT, Lazare Nicolas Marguerite. **Géométrie de position**. Imprimerie de Crapelet, 1803.

CHAVES, Jansley Alves. **Jean-Victor Poncelet: das fundações da Geometria Projetiva à Patrimonialização de um personagem**. 2023. Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Brasil.

CHAVES, J.A; GRIMBERG, G. E. **O tratado sobre as propriedades projetivas das figuras de Jean-Victor Poncelet : elementos de uma gênese**. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 14, p. 85–106, 2014.

FRIEDELMEYER, J.-P. Le théorème de clôture de poncelet, une démonstration « imparfaite », qui fait toute une histoire. Évelyne Barbin et Dominique Bénard, éditeurs : **Histoire et enseignement des mathématiques–Rigueurs, erreurs, raisonnements**, p. 229–261, 2007.

LAURENTIN, Jerôme. **Fidélités et reconstructions, l'exemple de l'école géométrique française de Gaspard Monge** (1771-1816). Tese (Doutorado) — Paris, EHESS, 2000.

NABONNAND, P. **Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19e siècle**. HAL, 2006. Acessado em 02/05/2023. Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-010822/.

PONCELET, Jean-Victor. **Traité des propriétés projectives des figures**. Paris: Bachelier, 1822

PONCELET, J.-V. Réflexions sur l'usage de l'analise algébrique dans la géométrie ; suivies de la solution de quelques problèmes d'dépendant de la géométrie de la règle. **Annales de mathématiques pures et appliquées**, v. 8, p. 141–155, 1817–1818.

SERVOIS, François Joseph. **Solutions peu connues de différens problèmes de géométrie-pratique**. [S.l.]: Devilly; Paris: Courcier, 1805.

SERVOIS, F.-J. Solution du premier des deux problèmes proposés à. In: **Annales de mathématiques pures et appliquées**. [S.l.: s.n.], 1810. v. 1, n. 1810-1811, p. 337–341.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Al-Biruni, contemporâneos e contribuições para matemática islâmica medieval

Al-Biruni, contemporaries and contributions to medieval islamic mathematics

Vitória Lima Quaresma[1]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Giselle Costa de Sousa[2]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

RESUMO

Esse estudo ancora-se nas potencialidades da História da Matemática (HM) e das Tecnologias Digitais (TD) na Educação Matemática (EM), enquanto ferramentas que podem promover uma melhor compreensão de conhecimentos matemáticos, a contextualização dessa ciência e o estímulo de estudantes pela disciplina. No entanto, ainda há desafios como a falta de literatura adequada para isso, devido entre outros fatores, à reprodução de narrativas historiográficas tradicionais, que corrobora para a invisibilização de diversas contribuições, em particular as de povos islâmicos no período da Idade Média. Por isso, o presente trabalho tem como objetivo investigar o conhecimento em trânsito relativo à matemática islâmica medieval por meio da interseção da produção de al-Biruni com outros contemporâneos, disponibilizando material atualizado e cientificamente embasado, por meio da produção de Mapas Mentais Digitais e outras tecnologias. Para tanto, tem como objeto de pesquisa conhecimentos de natureza matemática produzidos por esses estudiosos. Nesse sentido, adotamos uma metodologia com abordagem qualitativa e procedimentos bibliográficos, analisando fontes sobre al-Biruni, seus contemporâneos e suas produções. Como resultados, obtivemos informações sobre a vida desses estudiosos, trabalhos e obras que desenvolveram, e o contexto no qual estavam inseridos. A sistematização dessas informações culminou na produção de Mapas Mentais Digitais (e outras tecnologias) que elucidam a relação entre al-Biruni, seus contemporâneos e conhecimento em trânsito da matemática islâmica medieval, norteada pela aliança entre HM e TD e por aproximação da perspectiva historiográfica atualizada, contribuindo para disponibilização de materiais e literatura sobre a temática.

Palavras-chave: Matemática Islâmica Medieval; Aliança; História da Matemática; Tecnologias Digitais; Mapas Mentais.

ABSTRACT

This study is based on the potential of the history of mathematics (HM) and digital technologies (DT) in mathematics education (ME), as tools that can promote a better understanding of mathematical knowledge, the contextualization of this science and the stimulation of students by the subject. However, there are still challenges such as the lack of suitable literature for this, due among other factors to the reproduction of traditional historiographical narratives, which contributes to the anticivilization of various contributions, particularly those of Islamic peoples in the Middle Ages. For this reason, this work aims to investigate the knowledge in transit relating to medieval Islamic mathematics through the intersection of al-Biruni's production with other contemporaries, providing up-to-date and scientifically based material through the production of Digital Mind Maps and other technologies. To this end, the research object is the mathematical knowledge produced by these scholars. In this sense, we adopted a methodology with a qualitative approach and bibliographic procedures, analyzing sources on al-Biruni, his contemporaries and their productions. As a result, we obtained information about the lives of these scholars, the works they developed and the context in which they were inserted. The systematization of this information culminated in the production of Digital Mind Maps (and other technologies) that elucidate the relationship between al-Biruni, his contemporaries and the knowledge in transit of medieval Islamic mathematics, guided by the alliance between HM and DT and by an approach to the updated historiographical perspective, contributing to the availability of materials and literature on the subject.

Keywords: Medieval Islamic Mathematics; Alliance; History of Mathematics; Digital Technologies; Mind Maps.

[1] Graduanda da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: vitoria.quaresma.137@ufrn.edu.br.

[2] Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora titular do DMAT, do PPGECNM e do PPGECM-UFRN(UFRN), Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: giselle.sousa@ufrn.br.

INTRODUÇÃO

Em consonância com documentos normativos da educação básica brasileira, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a história da matemática (HM) tem sido recomendada como recurso para o ensino de matemática, para estimular a compreensão e o interesse pela disciplina, contribuindo para a compreensão, contextualização e humanização dessa ciência. No entanto, alguns materiais didáticos que propõem o uso da HM ainda se limitam à apresentação de historietas e curiosidades, narrando a história de *grandes gênios* da matemática a partir de um encadeamento de fatos sucessivos que teriam levado à matemática moderna, num processo sem erros ou rupturas e linear evolução.

Tais narrativas contribuem para a difusão de informações que não são inteiramente verídicas e para uma visão da matemática como uma ciência pronta e acabada, desconsiderando o seu processo de construção. Esse tipo de abordagem geralmente é embasado na historiografia tradicional, a qual também se caracteriza pela apresentação dos fatos sob uma visão eurocêntrica, invisibilizando contribuições de outros povos, como aqueles que viveram no Oriente Médio no período da Idade Média. Surge então uma problemática que precisa ser discutida, isto é, a necessidade de produzir materiais para preencher lacunas referentes ao uso da HM na educação matemática (HM) relativos à matemática islâmica medieval.

Paralelamente, as tecnologias digitais (TD) estão cada vez mais presentes no cotidiano humano. Com dispositivos eletrônicos, *softwares* e interfaces avançando constantemente, o ambiente virtual se tornou mais atrativo e com ainda mais possibilidades de interatividade com o passar dos anos. Tendo isso em vista, a incorporação das TD no âmbito educacional tem sido buscada e investigada por muitos professores e estudiosos.

Nessa perspectiva, enxergamos as tecnologias digitais como uma ferramenta que pode possibilitar a sistematização de forma visual e atrativa dos aspectos históricos relativos ao conhecimento em trânsito da matemática islâmica medieval. Ao mencionarmos a expressão *conhecimento em trânsito*, nos referimos ao conhecimento produzido, difundido e transformado em diferentes culturas e regiões, neste caso, particularmente durante a Idade Média na região em que a religião do Islã tinha forte influência. Mas, que conhecimento seria este?

Diante desta indagação, temos como objeto de pesquisa conhecimentos de natureza matemática produzidos por al-Biruni e seus contemporâneos. al-Biruni foi um estudioso islâmico medieval que se dedicou ao estudo de diversas áreas que hoje conhecemos como álgebra, geometria, trigonometria, astronomia, entre outras. Além disso, ele se correspondeu com muitos estudiosos da mesma época e região, bem como produziu mais de 140 obras. Por isso, escolhemos nos aprofundar acerca de suas contribuições.

Assim, tendo em vista as inquietações/justificativas anteriormente discutidas, propomos uma pesquisa com o objetivo de investigar o conhecimento em trânsito relativo à matemática islâmica medieval por meio da interseção da produção de al-Biruni com outros contemporâneos, disponibilizando material atualizado e cientificamente embasado, por meio da produção de Mapas Mentais Digitais e outras tecnologias. Esses materiais poderão ser utilizados para pesquisa e ensino. Logo, neste trabalho, almejamos relatar resultados dessa pesquisa com abordagem qualitativa e fundamentos que são detalhados ao longo do texto. Desse modo, organizamos o presente artigo em cinco seções que envolvem, além dessa seção introdutória, a seção do referencial teórico da pesquisa; seguida

da seção do percurso metodológico; posteriormente temos uma seção para discutir os resultados obtidos e; por fim, temos as considerações finais.

REFERENCIAL TEÓRICO

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular–BNCC (Brasil, 2017, p. 298), além de recursos didáticos como ábacos, jogos e *softwares* de geometria dinâmica, "é importante incluir a história da matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar matemática". Além disso, elementos históricos podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de matemática por permitir a reflexão sobre a natureza da atividade matemática (Chorlay *et al.*, 2022). Assim, a história pode revelar a matemática como uma criação humana, em diversos momentos históricos e estabelecer comparações entre conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Assim como Fauvel e Mannen (2000) trazem funções de uso da história da matemática, Miguel e Miorim (2005) apontam ainda argumentos favoráveis e argumentos questionadores ao uso da HM. De tal modo, os autores defendem que a história pode ser uma fonte de seleção de métodos de ensino, de identificação de obstáculos epistemológicos, que auxilia na compreensão da natureza do pensamento matemático e possibilita a desmistificação da matemática. No entanto, os argumentos questionadores se referem à ausência de literatura adequada, à natureza imprópria da literatura disponível, à história com fator complicador e à ausência do sentido de progresso histórico.

Apesar dos avanços das produções de materiais referentes à história da matemática desde então, ainda são poucos os materiais disponibilizados que se aproximam de uma historiografia atualizada, quando comparado com os materiais norteados por uma historiografia tradicional.

Saito (2015) aponta para uma nova orientação de estudos históricos, na qual há a preocupação com a contextualização do conhecimento matemático. Dessa forma, a historiografia atualizada busca compreender o processo de construção de conhecimentos matemáticos e o contexto no qual as técnicas e conteúdos foram elaborados. Essa vertente incorpora um olhar crítico sobre o desenvolvimento da matemática e pode permitir a compreensão dos contextos sociais, políticos e culturais que influenciaram esse processo. Por isso, apesar da dificuldade em incorporar a historiografia atualizada na formação de professores ou na educação básica, é fundamental produção de materiais que colaborem para uma aproximação dessa vertente.

De acordo com Saito (2015, p. 22) "grande parte do material de história da matemática no Brasil, disponível aos professores de matemática, encontra-se defasada, visto que ainda está baseada numa historiografia que remonta o início do século XX". Além disso, embora já possamos identificar iniciativas para estudos votados às contribuições não eurocêntricas, a exemplo da matemática islâmica medieval e sobre al-Biruni, consideramos que ainda há necessidade de fomento para produções desta natureza.

De acordo com Roque (2012, p 16), "o mito da ciência como um saber tipicamente greco-ocidental serve, nesse caso, para exaltar a matemática pura, com seu caráter teórico e formal, e para desmerecer os trabalhos da Idade Média, em particular os dos árabes". No período da Idade Média, os estudiosos islâmicos realizaram trabalhos que "marcam estágios importantes no desenvolvimento da aritmética decimal, da trigonometria plana e esférica, da álgebra e de métodos matemáticos como a interpolação e a aproximação de raízes de equações" (Bergreen, 2000, p. vii). Assim, apesar

de, na perspectiva da historiografia tradicional, a Idade Média ter ficado conhecida como a *idade das trevas*, consideramos que foi um período de muita produção científica nas regiões que atualmente correspondem ao Oriente Médio.

Buscando difundir essas contribuições, enxergamos as tecnologias digitais como um meio de sistematizar as informações históricas relativas à matemática islâmica medieval. Borba, Silva e Gadanidis (2020) e Borba, Souto e Canedo Junior (2022) discutem sobre o desenvolvimento de cinco fases acerca do uso das tecnologias digitais (TD) em educação matemática (EM) no Brasil, as quais marcam o uso de diversas tecnologias no ensino de matemática, como calculadoras, *softwares* de geometria dinâmica, ambientes virtuais, vídeos, entre outras. Observando as mudanças nessa trajetória, é possível perceber um movimento crescente da utilização das TD na educação matemática, ganhando destaque como ferramenta para promover a construção de autonomia, reflexão crítica, interatividade e multimodalidade.

Considerando o que foi supracitado, surge a possibilidade da *aliança* entre a história da matemática e as tecnologias digitais, enquanto uma nova tendência em educação matemática, de modo que

> Seu cerne reside no fato de mover-se para além das individualidades que se constituem como extremamente importantes, quando isoladas (exemplo das tendências HM e TD, separadamente), mas que também ao unir-se (aliança) podem se valer de força e importância de constituição (Sousa, 2023, p. 11, grifos do autor).

Nesse sentido, a *aliança* alia e evidencia a HM e as TD. Tais aspectos norteiam as investigações acerca do nosso objeto de estudo. Desse modo, discutiremos a seguir sobre o percurso metodológico desenvolvido.

METODOLOGIA

Em consonância com os objetivos estabelecidos, conforme mencionado, adotamos uma abordagem metodológica qualitativa com procedimentos bibliográficos. Para Oliveira (2008, p. 41), a abordagem qualitativa é "um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para a compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo sua estruturação". Assim, para realização desse tipo de estudo, é necessário um corte epistemológico, delimitando um espaço e um tempo.

Além disso, Gil (2017) também estabelece uma classificação das pesquisas com base nos procedimentos metodológicos utilizados, sendo uma delas a pesquisa bibliográfica, baseada na análise de fontes como livros e artigos em periódicos. Dessa forma, a pesquisa bibliográfica é aquela em que "o pesquisador busca obras já publicadas relevantes para conhecer e analisar o tema e problema da pesquisa a ser realizada" (Sousa, Oliveira, Alves, 2021, p. 65). Então, a pesquisa bibliográfica é realizada a partir de etapas procedimentais que envolvem um levantamento bibliográfico, a seleção de fontes, a produção de fichamentos e análise dos materiais levantados, sistematizando os dados coletados em quadros e/ou outras formas, a exemplo de Mapas.

Tendo isso em vista, realizamos a busca e a investigação de fontes bibliográficas sobre a matemática islâmica medieval, bem como, sobre al-Biruni, seus contemporâneos e suas produções.

Fizemos essa busca em repositórios, periódicos e anais de eventos (a exemplo do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES; periódicos CAPES; CREPHMAT, revista RHMP; revista BOCHEM; anais do SNHM e anais do SCHM), utilizando descritores como *matemática islâmica* e *al-Biruni*. As leituras foram sistematizadas por meio da produção de fichamentos e da organização de quadros no Google Planilhas (cada coluna correspondendo a sistematização dos dados e categorias), para investigação do contexto de desenvolvimento da matemática islâmica medieval, bem como para o estudo das contribuições de natureza matemática desenvolvidas por al-Biruni e seus contemporâneos.

Para isso, reunimos informações sobre a bibliografia investigada (título, autores, e ano de publicação) e separamos os dados obtidos em categorias, sendo elas: contexto envolvido; trabalhos que tratam de al-Biruni; trabalhos que se referem aos contemporâneos de al-Biruni; e ainda, trabalhos sobre a produção de al-Biruni e seus coeâneos. Por conseguinte, sistematizamos em quadros sintéticos as informações reunidas sobre al-Biruni e os estudiosos que viveram na mesma época e região que ele, separando informações como nome, ano de nascimento e morte, região, trabalhos e obras.

Após essas análises, classificamos a relação de al-Biruni e cada um de seus contemporâneos como relação *direta* ou *indireta*. Neste caso, a relação *direta* se refere a estudiosos que viveram na mesma época e região que al-Biruni, desenvolveram estudos de natureza semelhante e realizaram trabalhos juntamente com al-Biruni. Já a relação *indireta* se refere a estudiosos que viveram na mesma época e região que al-Biruni, desenvolveram estudos de natureza semelhante, mas não realizaram trabalhos diretamente com al-Biruni.

Tais sistematizações contribuíram para a produção de dois Mapas Mentais Digitais que elucidam o conhecimento em trânsito da matemática islâmica medieval em torno de al-Biruni. Para construir esses Mapas, utilizamos o site *LucidChart* (www.lucidchart.com). Segundo Buzan (2009, p. 10), "os Mapas Mentais são um método de armazenar, organizar e priorizar informações". Assim, os Mapas Mentais são constituídos por um conjunto de elementos interligados de modo a relacionar informações de forma hierárquica. As análises dos resultados obtidos são apresentadas na seção seguinte.

ANÁLISES E RESULTADOS

Conforme a metodologia explicitada, reunimos informações sobre al-Biruni (Figura 1), seus contemporâneos e suas contribuições. Assim, a partir da análise das obras *Master Astronomer and Muslim Scholar of the Eleventh Century* (Scheppler, 2006), *Episodes in the Mathematics of Medieval Islams* (Berggren, 2000), *A History of Mathematics: An Introduction* (Katz, 2009), das biografias disponibilizadas no site *MacTutor* (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/) e do capítulo sobre al-Biruni no livro *Estudiosos em Ciências e Matemática no Mundo Islâmico Medieval* (Sousa, 2021), foram obtidos resultados sobre a matemática islâmica medieval, que culminaram na produção de Mapas Mentais Digitais que evidenciam as produções e relações entre al-Biruni e seus contemporâneos.

Figura 1 – Abu Arrayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni (973–1048).

Fonte: O'Connor; Robertson (1999).

De fato, chegamos que Abu Arrayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni (973–1048), nasceu na região de Khwarazm, próxima ao Mar Aral, que atualmente corresponde ao Caracalpaquistão, no Uzubequistão (Figura 2). Ele iniciou seus estudos em Kath quando tinha cerca de 17 anos, com o apoio de Abu Nasr Mansur (970–1036), que foi seu mentor.

Figura 2 – Região de Khwarazm.

Fonte: MacTutor (1999).

O período do final do século X e início do século XI foi marcado por muitos conflitos nessa região islâmica. Khwarazm fazia parte do Império Samanid, governado pelo Banu Iraque, Abu Nasr Mansur era um príncipe dessa família (O'Connor; Robertson, 1999). Em 995, al-Biruni precisou fugir, pois o governo dos Banu Iraque foi derrubado por um golpe. Nesse contexto, ele foi para Rayy em 995, onde viveu um período de instabilidade, pois não conseguiu patrocínio. Posteriormente, al-Biruni foi para Gorgan por volta de 1000, onde conseguiu o apoio financeiro de Qabus. Em 1004, retornou para Kath a convite de al-Hasan, um governante que incentivava a produção científica e montou uma corte de estudiosos (Scheppler, 2006). Posteriormente, quando Mahmud tomou o poder, al-Biruni se tornou prisioneiro, mas ainda assim pôde ter acesso a instrumentos astronômicos e realizar seus estudos. As conquistas de Mahmud tiveram influência em grandes partes da Índia, por isso al-Biruni também foi para a Índia, onde estudou sobre a cultura indiana (Berggren, 2000). Ele desenvolveu trabalhos durante grande parte da sua vida, sua produção conta com cerca de mais de 140 obras, sendo algumas delas *A Cronologia das Nações Antigas*, *Índia* e *Cartografia*, contribuindo para conhecimentos de diversas áreas que hoje conhecemos como álgebra, geometria, trigonometria, geografia, física, astronomia, entre outras (Sousa, 2021).

Nesse período, outros estudiosos realizavam investigações de natureza semelhante aos estudos que al-Biruni se dedicou. Inclusive, al-Biruni realizou trabalhos em conjunto com alguns desses estudiosos. Nesse sentido, como resultado da nossa pesquisa, obtivemos um mapeamento de islâ-

micos contemporâneos que al-Biruni. A partir do aprofundamento sobre os trabalhos realizados por al-Biruni e seus contemporâneos, produzimos dois quadros acerca da análise de uma linha do tempo e de biografias disponíveis no site MacTutor, bem como das obras *Episodes in the Mathematics of Medieval Islams* (Berggren, 2000) e *A History of Mathematics: An Introduction* (Katz, 2009).

Os quadros contêm informações sobre o contexto da região islâmica; trabalhos e obras desenvolvidos pelos estudiosos; conhecimentos de natureza matemática estudados por eles; e apontamentos acerca da relação de al-Biruni e seus contemporâneos. Esses quadros podem ser acessados no link: Quadros–Mapeamento. A partir da análise desses quadros, foi possível mapear 14 estudiosos que viveram na mesma época e região que al-Biruni, além de identificar se eles tiveram relação direta (desenvolveram trabalhos juntos) ou indireta (não se corresponderam diretamente) com ele. O Quadro 1 a seguir mostra cada estudioso e a classificação de sua relação com al-Biruni.

Quadro 1 – Classificação da relação de al-Biruni com os seus contemporâneos.

Nome	Classificação da relação com al-Biruni	Nome	Classificação da relação com al-Biruni
Aryabhata II (920-1000)	Indireta	Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji (953-1029)	Indireta
al-Quhi (940-1000)	Indireta	Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham (965-1040)	Indireta
Abu Mahmud Hamid ibn al-Khidr Al-Khujandi (940-1000)	Direta	Abu Nasr Mansur ibn Ali ibn Iraq (970-1036)	Direta
Vijayanandi (940-1010)	Indireta	Abu Mansur ibn Tahir Al-Baghdadi (980-1037)	Indireta
Mohammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani (940-998)	Direta	Abu Ali al-Husain ibn Abdallah ibn Sina (980-1037)	Direta
Abu Said Ahmad ibn Muhammad Al-Sijzi (945-1020)	Direta	Abu al-Hasan Ali ibn Ahmad Al-Nasawi (1010-1075)	Indireta
Abu'l-Hasan Ali ibn Abd al-Rahman ibn Yunus (950-1009)	Indireta	Sripati (1019-1066)	Indireta

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

Observando o Quadro 1, podemos identificar 5 estudiosos que tiveram relação direta com al-Biruni, são eles: Abu Nasr Mansur ibn Iraq (970-1036), Abu Ali Al Hussain ibn Abdallah ibn Sina (Avicena) (980-1037), Abu Said Ahmad ibn Muhammad ibn Abd al-Jalil al-Sijzi (945-1020), Abu Mahmud Hamid ibn al-Khidr Al-Khujandi (940-1000) e Mohammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani (940-998). Tais relações são especificadas sumariamente no Quadro 2.

Quadro 2 – Relação de al-Biruni com alguns contemporâneos.

Nome	Relação com al-Biruni
Abu Nasr Mansur ibn Iraq	Primeiro patrocinador e tutor de al-Biruni, em Kath. Mansur colaborou com al-Biruni em matemática e astronomia. Além disso, posteriormente os dois fizeram parte do grupo de acadêmicos da corte de Abu al-Hasan Ali.
Abu Ali Al Hussain ibn Abdallah ibn Sina (Avicena)	Fazia parte do grupo de acadêmicos da corte de al-Hasan Ali juntamente com al-Biruni. Ibn Sina também se correspondeu, por cartas, com al-Biruni, respondendo perguntas feitas por esse último. Nas cartas enviadas os estudiosos tratavam de assuntos relacionados por exemplo à física, filosofia e astronomia
Abu Said Ahmad ibn Muhammad ibn Abd al-Jalil al-Sijz	al-Biruni o admirava e a precisão de seu astrolábio heliocêntrico. Eles também se corresponderam através de cartas, as quais continham provas nas versões plana e esférica da Lei dos Senos.
Mohammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani	Abu'I-Wafa combinou com al-Biruni de observar um eclipse lunar em 24 de maio de 997, visível em Bagdá e Kath, respectivamente. Isso possibilitou que eles calculassem a diferença de longitude entre as cidades devido a comparação de seus horários.
Abu Mahmud Hamid ibn al-Khidr Al-Khujandi	al-Khujandi discutiu com al-Biruni observações feitas através do seu sextante em 994, para os solstícios de verão e de inverno, em que ele pôde calcular a inclinação do eixo de rotação da terra e latitude de Rayy. al-Biruni mais tarde relatou sobre isso em seu Tahdid, apontando os erros na precisão dos cálculos de al-Khujandi devido ao peso de seu instrumento.
Abu Sahl Masihi	Fazia parte do grupo de acadêmicos da corte de al-Hasan Ali juntamente com al-Biruni.
Abu al-Khayr Khummar	Fazia parte do grupo de acadêmicos da corte de al-Hasan Ali juntamente com al-Biruni.

Fonte: Quaresma; Sousa (2023).

Tais informações, bem como os principais trabalhos e obras produzidos por cada um desses estudiosos foram utilizadas na criação do *Mapa Mental: Árvore Genealógica Científica em torno de al-Biruni* (Figura 3) (disponível no link: Mapa Mental 1).

Figura 3 – Visão geral do Mapa Mental: Árvore Genealógica Científica em torno de al-Biruni.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2023).

Esse Mapa Mental foi organizado no formato de uma árvore genealógica científica em torno de al-Biruni. Desse modo, al-Biruni é a figura central, está no topo do Mapa, e as figuras dos outros estudiosos estão dispostas em três linhas, seguindo um critério de hierarquia conforme o nível de sua relação com al-Biruni. Na primeira linha, estão os contemporâneos cuja relação com al-Biruni foi mais evidente e, na terceira linha, estão aqueles cuja relação foi menos evidente. Além disso, para cada estudioso foram associadas três informações, nessa ordem: trabalhos desenvolvidos, principais obras, descrição de sua relação com al-Biruni.

Outrossim, baseados na análise bibliográfica realizada, obtivemos informações sobre conhecimentos de natureza matemática desenvolvidos por al-Biruni e seus contemporâneos. Quando al-Biruni estava na Índia, observou de uma montanha alta adjacente ao forte Nandana, uma grande planície ao sul da montanha, então decidiu observar o seu método de encontrar a circunferência da Terra lá. Nesse método, al-Biruni estabelece uma relação entre a altura da montanha e o raio da Terra, utilizando a Lei dos Senos e conhecimentos equivalentes a relações de ternos pitagóricos (hoje conhecida como Teorema de Pitágoras). Ele encontrou o valor de 80.478.118,3039 cúbitos (unidade de medida de comprimento baseada na medida de uma parte do corpo humano) para a circunferência da Terra, o que equivale a 36.794,6692 Km, o que é bem próxima da medida de 40.075 Km que conhecemos hoje para o comprimento da circunferência da Terra.

al-Biruni também resolveu problemas envolvendo a distância entre dois pontos na superfície da Terra. Um desses problemas era o de encontrar a direção de Meca em relação a uma determinada localidade. Esse problema "foi um produto da religião do Islã, pois Meca é o ponto mais sagrado do mundo islâmico, e é a direção para a qual os muçulmanos devem se voltar para fazer suas cinco orações diárias" (Berggren, 2000, p. 182, tradução nossa). Isso evidencia a influência da religião no desenvolvimento científico dessa região nessa época.

Os estudiosos islâmicos também precisavam de tabelas trigonométricas (por exemplo, a tabela mostrada na Figura 5) e de métodos de interpolação linear. Assim, eles desenvolviam tabelas que forneciam as posições do sol, da lua e dos planetas em intervalos de tempo ao longo do ano, assim, eles utilizavam a interpolação para compilar essas tabelas.

Figura 4 – Transcrição de parte das tabelas senoidais de al-Biruni.

Degrees	Minutes	Sines				Differences			Corrections			
Column of Arc number		Minutes	Seconds	Thirds	Fourths	Seconds	Thirds	Fourths	Minutes	Seconds	Thirds	Fourths
0	15	0	15	42	28	15	42	28	1	2	49	52
0	30	0	31	24	56	15	42	25	1	2	49	40
0	45	0	47	7	21	15	42	22	1	2	49	28
1	0	1	2	49	43	15	42	18	1	2	49	12
1	15	1	18	32	1	15	42	12	1	2	48	48
1	30	1	34	14	13	15	42	6	1	2	48	24
1	45	1	49	56	19	15	41	58	1	2	47	52

Fonte: Episodes in the Mathematics of Medieval Islams (Berggren, 2000, p. 147).

Além de al-Biruni, estudiosos como Abu Nasr Mansur, Yunus e Abu Wafa trabalharam com a investigação de funções trigonométricas e com tabulações. Os principais tópicos de natureza matemática estudados por al-Biruni e seus contemporâneos são mostrados no Quadro 3.

Quadro 3 – Conhecimentos de natureza matemática estudados por al-Biruni e seus contemporâneos.

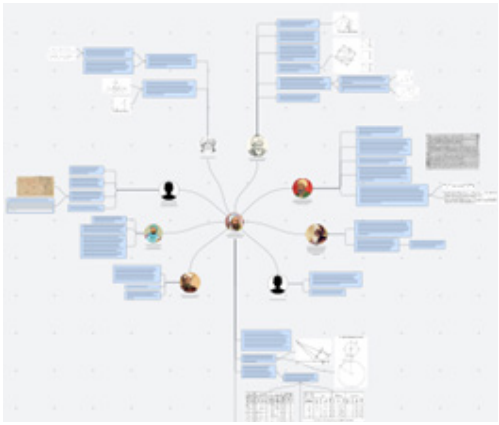
Estudioso	Conhecimentos de natureza matemática estudados
al-Biruni	Determinação da circunferência da Terra, função seno, tabulações astronômicas, interpolação, distância entre localidades, diferenças de latitudes, somatório de séries, análise combinatória, regra de três, números irracionais, teoria das razões, método de resolução de equações algébricas, trissecção do ângulo e outros problemas que não podem ser resolvidos apenas com régua e compasso, seções cônicas, projeção estereográfica, teorema do seno no plano, resolução de triângulos esféricos.

Abu Nars Mansur	Lei dos senos, funções trigonométricas, tabulações astronômicas, interpolação, trigonometria esférica.
Avicena	Diferenças de latitude, subdivisão da matemática, instrumentos astronômicos.
al-Sijz	Problema da trissecção do ângulo, decomposição do cubo, teorema do seno, construção de um heptágono, trigonometria esférica, medição de esferas, cônicas.
al-Karaji	Potências, sequências, proporções, operações entre monômios e polinômios, determinação de incógnitas, matriz triangular, somas de cubos integrais.
Abu Wafa	Construção de um pentágono, funções trigonométricas, problemas envolvendo compasso, mensuração, pagamento de impostos, unidades monetárias, números negativos, construção de um quadrado, trigonometria esférica, diferenças de latitudes.
ibn Yunus	Diferenças de latitudes, tabulações astronômicas, interpolação, funções trigonométricas.
al-Baghdadi	Pagamento de impostos, sistema sexagesimal, numerais, frações, números irracionais, aritmética empresarial.
al-Nasawi	números inteiros, frações, operações, raízes quadradas e cúbicas.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

A partir da análise do Quadro 3, podemos notar que as produções dos estudiosos islâmicos contribuíram para diversos tipos de conhecimentos de natureza matemática. Neste caso, ganham destaque as tabulações astronômicas, as interpolações, as funções trigonométricas, as operações, a trigonometria esférica, as diferenças de latitudes, o teorema do seno, as construções geométricas e o estudo dos conjuntos numéricos.

Figura 5 – Visão geral do Mapa Mental: al- Biruni, alguns de seus contemporâneos e suas contribuições de natureza matemática.



Fonte: Elaborado pelas autoras (2024).

Tais contribuições são descritas sucintamente no *Mapa Mental: al- Biruni, alguns de seus contemporâneos e suas contribuições de natureza matemática* (Figura 5), que pode ser acessado no link: Mapa Mental 2. O Mapa possui uma organização radial, com al-Biruni como figura central, interligando-o a alguns de seus contemporâneos, os quais foram representados por figuras dispostas ao redor da figura de al-Biruni. A cada um dos estudiosos, são associados os conhecimentos de natureza matemática produzidos por eles.

A construção dos Mapas Mentais possibilitou uma associação visual das informações, permitindo o uso de imagens, a integração de *hiperlinks* e a movimentação da estrutura do Mapa Digital (ampliação e direcionamento), permitindo a interatividade propiciada por essas tecnologias digitais. Além disso, esses materiais podem ser constantemente atualizados, com maior facilidade para reor-

ganização de seus elementos do que se fossem produzidos no meio físico. Assim, os Mapas desenvolvidos representam uma *aliança* (Sousa, 2023) entre História da Matemática e Tecnologias Digitais.

Desse modo, os Mapas apresentam contribuições importantes na história da matemática, com ênfase na contribuição da matemática islâmica medieval. Assim, eles podem colaborar para uma melhor compreensão do seu contexto e do processo de construção de conhecimentos matemáticos, numa perspectiva que se aproxima da historiografia atualizada, conforme Saito (2015). Além dos Mapas Mentais, em nossa pesquisa obtivemos outros produtos com o uso das tecnologias digitais, como HQs e vídeos[3], que também sistematizam as informações supracitadas. Portanto, essa pesquisa é fundamental para a visibilização das contribuições islâmicas medievais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Norteados pelo objetivo de elucidar conhecimento em trânsito da matemática islâmica medieval em torno de al-Biruni, foi possível aprofundar conhecimento acerca do nosso objeto de estudo, de modo a evidenciar relações entre al-Biruni e seus contemporâneos por meio da produção de Mapas Mentais Digitais. Assim, identificamos conhecimentos de natureza matemática desenvolvidos, que possuem relação de forma evidente com que conhecemos hoje por trigonometria, geometria, álgebra e aritmética.

Como desdobramentos futuros, os Mapas Mentais elaborados poderão ser utilizados na formação de professores e na educação básica, como uma possibilidade de fomento da aliança entre história da matemática e tecnologias digitais, podendo contribuir para o processo de ensino e aprendizagem em matemática, de forma objetiva, visual, interativa e contextualizada. A partir do contexto e dos conhecimentos de natureza matemática mapeados, poderemos nos aprofundar acerca de conteúdos matemáticos específicos que poderão gerar novos Mapas Mentais ou outros materiais que utilizem as tecnologias digitais como recurso, trabalhando eixos como geometria e álgebra, entre outros, além das informações históricas, por exemplo, por meio de atividades associadas.

Além disso, os materiais produzidos, evidenciam informações sobre o contexto em que viviam os estudiosos islâmicos medievais e como isso influenciou o desenvolvimento de conhecimentos nessa época e região, bem como difundem (por meio dos hiperlinks) outras fontes que tratam desses conteúdos. Por isso, os Mapas Mentais poderão estimular novas pesquisas sobre a temática, auxiliando na compreensão do contexto da matemática islâmica medieval e de conhecimentos de natureza matemática desenvolvidos nessa época e região.

Almejamos ainda buscar e analisar mais fontes relativas às produções de al-Biruni e seus contemporâneos, adicionar mais informações nos Mapas Mentais, conforme a pesquisa for avançando, e produzir novos materiais utilizando as tecnologias digitais (a exemplo de novos Mapas Mentais, HQs, podcasts, vídeos, entre outros). Portanto, esse trabalho contribui para a difusão das contribuições da matemática islâmica medieval, para a disponibilização de materiais cientificamente embasados numa perspectiva de aproximação historiográfica atualizada e para uma melhor compreensão da própria matemática.

[3] A HQ digital pode ser acessada em: HQ–Uma história de al-Biruni e o vídeo está disponível em: https://www.instagram.com/reel/DAQ5fVhJOK2/?igsh=MWZuanZ0cHNsenB4Zw==.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do Programa de Educação Tutorial de Matemática da UFRN (PET) (FNDE) e da Pró-Reitoria de Pesquisa da UFRN (PROPESQ).

REFERÊNCIAS

BERGGREN, John Lennart. **Episodes in the mathematics of medieval Islam**. Canadá: Springer, 2000.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SOUTO, Daise Lago Pereira; CANEDO JUNIOR, Neil da Rocha. **Vídeos na educação matemática: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular. Brasília**, DF: MEC, 2017. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.

BUZAN, Tony. **Mapas Mentais**. Tradução de Paulo Polzonoff Jr. Rio de Janeiro: Sextante, 2009. Disponível em: https://pt.scribd.com/document/426848485/Tony-Buzan-Mapas-Mentais-z-lib-org-pdf. Acesso em 28 nov. 2024.

CHORLAY, Renaud; CLARK, Kathleen Michelle; TZANAKIS, Constantinos. History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. **ZDM – Mathematics Education**, [S.I.], v. 54, p. 1407-1420, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7. Acesso em 8 out 2023.

FAUVEL, J., VAN MAANEN, J. **History in Mathematics Education**. The ICMI Study. 2000.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. – São Paulo: Atlas, 2017.

KATZ, Victor Joseph. **A History of Mathematics**: An introduction. 3 ed. Pearson Education, 2009.

MACTUTOR. **Maths History**. (1999). Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/. Acesso em: 01 out. 2024.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na educação matemática**: propostas e desafios. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

O'CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **MacTutor–Abu Arrayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni**. University of St Andrews, Escócia. (1999). Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Biruni/. Acesso em: 23 nov. 2024.

OLIVEIRA, Maria Marly. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 3 ed. Petrópolis/RJ: Vozes, 2008.

QUARESMA, Vitória Lima; SOUSA, Giselle Costa de. **Uma história da matemática islâmica medieval via hq e mapas mentais na educação**. Anais IX CONEDU. Campina Grande: Realize

Editora, 2023. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/95583. Acesso em 10 out. 2024.

ROQUE, Tatiana. **A História da Matemática**: uma visão crítica: Desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 2012.

SAITO, Fumikazo. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

SCHEPPLER, Bill. **Al- Biruni: Master Astronomer and Muslim Scholar of the Eleventh Century**. New York: The Rosen Publishing, 2006.

SOUSA, Angélica Silva; OLIVEIRA, Guilherme Saramago; ALVES, Laís Hilário. **A pesquisa bibliográfica:** princípios e fundamentos. Cadernos da FUCAMP, v. 20, n. 43, 2021.

SOUSA, Giselle Costa de. Abu Arrayhan Muhammad ibn Ahma al-Biruni (973 – 1048). In: MOREY, Bernadete; PEREIRA, Ana Carolina Costa (org). **Estudiosos em Ciências e Matemática no Mundo Islâmico Medieval.** Fortaleza: Editora da Universidade Estadual do Ceará, 2021, p. 98-126.

SOUSA, Giselle Costa de. **Aliança entre História da Matemática e Tecnologias via Investigação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

SOUSA, Giselle Costa de. **Aliança entre história da matemática e tecnologias digitais na educação matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Pesquisas que utilizaram criptografia em diálogo com história da matemática em aliança com tecnologias digitais

Research that used cryptography in dialogue with the history of mathematics in alliance with digital Technologies

Lais Luisa Pereira da Silva[1]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Giselle Costa de Sousa[2]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

RESUMO

O presente trabalho trata de um levantamento de pesquisas em periódicos com descritores específicos, tendo como objetivo apresentar estudos sobre criptografia, história da matemática (HM) e tecnologias digitais (TD), mais especificamente a criptografia de Turing e seu uso nas salas de aula em aliança com HM e TD. Portanto, adota abordagem metodológica qualitativa com procedimento bibliográfico de modo que são analisados trabalhos acadêmicos que destacam a relevância pedagógica da criptografia em diálogo com HM e TD. Para tanto, foram observados os títulos, resumos, palavras-chave, referências e corpo do texto, utilizando ainda de operadores booleanos para filtragem dos trabalhos. Além disso, esse artigo se fundamenta em estudos históricos que exploram a história da criptografia incluindo seu desenvolvimento e aplicações, como também em autores que falam a respeito da importância das tecnologias digitais para transformar práticas pedagógicas, incluindo seu potencial em aliança com história no ensino de matemática na educação básica. Como resultado, essa pesquisa conclui que, embora existam abordagens significativas para cada área individualmente, ou seja, criptografia, HM e TD, a interseção entre essas três frentes ainda é limitada, isto porque, o levantamento realizado apontou poucos trabalhos voltados para o diálogo desse terno. Contudo, a partir dos encontrados, e tendo em vista a fundamentação aqui adotada, inferimos que este trabalho contribui para a área ao delinear um panorama teórico para futuras pesquisas e aplicações práticas no campo educacional.

Palavras-chave: Criptografia; História da Matemática; Tecnologias Digitais; Ensino de Matemática; Educação Básica.

ABSTRACT

The present work deals with a survey of research in periodicals with specific descriptors, aiming to present studies on cryptography, history of mathematics (HM) and digital technologies (TD), more specifically Turing cryptography and its use in classrooms in alliance with HM and TD. Therefore, it adopts a qualitative methodological approach with a bibliographic procedure so that academic works that highlight the pedagogical relevance of cryptography in dialogue with HM and TD are analyzed. To this end, the titles, abstracts, keywords, references and body of the text were observed, also using boolean operators to filter the works. Furthermore, this article is based on historical studies that explore the history of cryptography, including its development and applications, as well as authors who talk about the importance of digital technologies for transforming pedagogical practices, including their potential in alliance with history in teaching mathematics in basic education. As a result, this research concludes that, although there are significant approaches to each area individually, that is, cryptography, HM and TD, the intersection between these three fronts is still limited, this is because the survey carried out showed few works focused on dialogue in this regard. However, based on the findings, and taking into account the reasoning adopted here, we infer that this work contributes to the area by outlining a theoretical panorama for future research and practical applications in the educational field.

Keywords: Cryptography; History of Mathematics; Digital Technologies; Teaching Mathematics; Basic Education.

[1] Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: lais.silva.700@edu.ufrn.br.

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora Titular da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: giselle.sousa@ufrn.br.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O uso da criptografia está inserido em muitos ambientes, por exemplo, tudo que possui senha ou algum tipo de segurança como bancos, cartões, redes sociais e celulares, tem criptografia para garantir o acesso aos dados somente às pessoas corretas. Dessa forma, a criptografia se faz presente no dia a dia das pessoas, em particular, dos alunos, de maneira que ensiná-la, mostrando a sua história e diferentes procedimentos/motivações de uso, pode fazer com que compreenda sua funcionalidade, incluindo em tecnologias diversas.

A criptografia se encontra de formas diferentes, em momentos variados e em múltiplas esferas distribuídas ao longo do tempo, logo, trabalhá-la por meio da história da matemática incluindo apoio de tecnologias tem potencial para ensinar ao aluno sobre como diferentes sociedades desenvolveram seus próprios métodos criptográficos utilizando ferramentas distintas, ressaltando que a criação da criptografia foi desenvolvida a partir de uma necessidade, em especial relacionada à segurança e proteção de dados. Conforme destaca Carneiro (2015, p. 3), a criptografia é definida como o estudo de "métodos ou técnicas que tornam o conteúdo de mensagens incompreensíveis às pessoas não autorizadas ao mesmo tempo permitindo que os destinatários recuperem a mensagem original". Seguiremos essa definição de criptografia, que defende que seu uso se faz por meio da busca por garantir o sigilo de informações.

Além disso, o conteúdo de criptografia com o uso de tecnologias se enquadra dentre as competências gerais da educação básica na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por exemplo, quando o referido documento defende que se deve:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Brasil, 2017, p. 8).

Com esse amparo, *o objetivo desse artigo é realizar um levantamento bibliográfico sobre criptografia, história da matemática e tecnologias digitais no ensino de matemática,* delimitando um panorama de pesquisas voltadas para essa temática que possa ser usado para fundamentação de uma pesquisa de mestrado profissional em andamento para futuro desenvolvimento de um produto educacional.

A fim de atingir este objetivo, o presente artigo é organizado em cinco seções. A primeira compreende essa introdução chamada de *Considerações iniciais*; a segunda é intitulada *Referencial* e trata dos trabalhos que embasam essa pesquisa; a terceira seção é nomeada por *Metodologia* e apresenta os meios e métodos que foram utilizados para desenvolvimento desse trabalho sendo subdividida na subseção de *Seleção de repositórios* e subseção de *Seleção de descritores, filtragem, observação e seleção de arquivos*; a quarta sessão é intitulada de *Análise e Resultados* de modo que, nela, discutimos acerca da pesquisa e implicações que nos levou, estando subdividida na subseção de título *Uma história da criptografia* e a subseção com título *Alan Turing* as quais se destinam, a partir dos achados, a descrever uma breve narrativa histórica sobre o assunto; por fim, a quinta seção que traz as *Conclusões*, na qual fazemos um aparato geral sobre objetivos alcançados e desdobramentos futuros.

Desse modo, trazemos na próxima seção uma discussão sobre o referencial da pesquisa aqui desenvolvida.

REFERENCIAL

Considerando que esta pesquisa tem como objeto um diálogo entre a criptografia, sua história e as tecnologias digitais em prol do ensino de matemática, seus fundamentos residem em categorias de referenciais que tratam de cada um desses pontos. De fato, buscamos referencial em documentos que regem a educação básica, a exemplo da Base Nacional Comum Curricular – BNCC – complementar (2022) e BNCC (2017). Além disso, procuramos nos fundamentar em referenciais que tratam da história da matemática, em especial da criptografia como Khan (1967). Também encontramos bases em referencias sobre tecnologias digitais e seu uso no ensino, a exemplo de Borba (2010). Assim como na aliança entre história da matemática (HM) e tecnologias digitais (TD), defendida por Sousa (2020, 2023, 2024).

Esclarecendo, o presente trabalho aborda a importância do uso de tecnologias digitais, em prol do ensino, em diálogo com história da matemática ligada à criptografia, uma área que combina conceitos matemáticos com aplicações práticas. Para estudo deste tema, se faz necessária uma fundamentação sobre o uso de recursos tecnológicos e da história da matemática na educação, como meio de compreensão para o uso da criptografia e como mediação no ensino da matemática, além dos fundamentos da criptografia no contexto pedagógico, em especial, da educação básica.

Como dito, podemos encontrar tal respaldo na BNCC (Brasil, 2017) que incentiva o uso, a compreensão e a criação de tecnologias. Além disso, temos um documento complementar a BNCC, intitulado *Computação na Educação Básica* (Brasil, 2022), que além de defender o uso das tecnologias, traz consigo justificativas também para o ensino da criptografia na educação básica. Na habilidade (EF09CO05) nomeada *Analisar técnicas de criptografia para armazenamento e transmissão de dados*, há exemplos de como trabalhar a criptografia neste nível de ensino, por exemplo:

> (1) Apresentando o conceito de criptografia, por exemplo, usando algoritmos simples de criptografia para que os estudantes codifiquem textos e frases e troquem mensagens criptografadas com os colegas. (2) Discutindo a importância do tráfego de informações criptografadas nas redes, por exemplo, em relação a dados como senhas e informações bancárias das pessoas. (3) Discutindo o papel histórico da criptografia, por exemplo, na comunicação de informações sigilosas durante a Segunda Guerra Mundial. (Brasil, 2022, p. 55).

Ainda nesse documento temos outros exemplos de uso da criptografia e argumentos que respaldam a abordagem dessa temática na educação básica, em especial no ensino de matemática.

Os fundamentos supracitados se apoiam numa definição de criptografia que se assemelha a de Khan (1967) que diz que os métodos de criptografia, não ocultam a presença de uma mensagem secreta, mas a tornam ininteligível para estranhos por meio de diversas transformações do texto simples. Tal definição se ancora em uma narrativa historiográfica da criptografia, a fim de compreendê-la. Assim, Khan (1967) também descreve uma história da criptografia contando sobre as primeiras aparições dos mecanismos, acerca de três mil anos antes de Cristo, e passando pelas demais até sua época. Encontramos nesta história fundamentos para o nosso trabalho em reconhecer a importância da história, em particular, da criptografia, a fim de usá-la como ferramenta de ensino, como almejamos.

Diante da história da criptografia e elucidação de sua definição, a relação íntima com tecnologias é revelada de forma que procuramos também em nosso trabalho referenciais que testifiquem seu uso em sala de aula. Nesta direção, Borba (2010) coloca que as possibilidades proporcionadas pelos *softwares* têm o potencial de modificar tanto o tipo de atividades propostas em sala de aula quanto a própria natureza do conhecimento matemático, permitindo uma transformação significativa no ensino e na aprendizagem da disciplina. Essa perspectiva destaca o impacto das tecnologias digitais no ambiente educacional e no papel do professor em adaptar-se a essas novas ferramentas.

Além de aspectos da história da matemática e das tecnologias como ferramentas de ensino, pretendemos também usar ambas trabalhando em consonância, uma aliança defendida em trabalhos de Sousa (2020, 2023, 2024), os quais exploram as chances de usar a história da matemática (HM) e tecnologias digitais (TD) ao ensino de matemática de modo aliado, apresentando fundamentos e atividades, como sequências didáticas. Para tanto, por exemplo, cita argumentos de Fauvel e Maanen (2002, *apud* Sousa, 2020, p. 26) como:

> [...] calculadoras programáveis modernas permitem que os estudantes de hoje refaçam os cálculos de antigamente, muitas vezes, para maior precisão e muito mais para o cálculo. Capturado em poucos segundos um cálculo pode ter levado dezesseis séculos, dias ou meses dos astrônomos, os alunos não vão indiscutivelmente recapturar a experiência antiga, mas gerar uma nova. Em alguns casos, os estudantes de hoje podem ser capazes de encontrar coisas nas imagens que os antecessores não puderam.

A aliança entre HM e TD possui um potencial de ensino baseado na história da matemática, essa aliança que dantes era uma tríade junto com a investigação matemática pode ser trabalhada em dupla entre a HM e a TD como explica Sousa (2023, p. 113):

> A aliança consiste em uma tendência de educação matemática que conectou, inicialmente HM e TD via IM em prol do ensino, mas que a tríade se desdobra no par de aliança entre HM e TD que podem ser via outras tendências para além da IM, bem como, permite mais conexões.

Dessa maneira, pretendemos abordar um diálogo entre a criptografia, a HM e as TD no ensino da matemática, discutindo o uso dessas ferramentas no ensino da matemática. Para tanto, buscamos trabalhos a respeito, destinando tal processo na próxima seção onde serão detalhados os procedimentos metodológicos usados para realizar este levantamento.

METODOLOGIA

A abordagem metodológica adotada neste artigo é qualitativa, pois se baseia na percepção humana, definição trazida por Stake (2011). Logo, esse estudo procura além de ver a quantidade de trabalhos na área, identificar pontos significativos para nossa pesquisa tendo em vista nosso objetivo e fundamentos.

Dentro da abordagem qualitativa adotamos, neste artigo, o procedimento bibliográfico no qual, de acordo com Stake (2011), há uma busca de documentos associada a uma interpretação desses, analisando e sintetizando os dados coletados e aumentando nossa experiência e percepção sobre nosso objeto de investigação. Em seus procedimentos temos a coleta e a interpretação dos epi-

sódios, por exemplo, trechos, citações, traduções de bibliografias, bem como, imagens e associação destes elementos.

Esclarecendo, neste artigo, o levantamento foi realizado em cinco etapas para seleção e observação de quantidade e semelhança de trabalhos tendo em vista os anseios da pesquisa. As cinco etapas foram:

1) Seleção dos repositórios;
2) Seleção dos descritores (que foram buscados em alguns casos em inglês);
3) Filtragem e combinação de descritores;
4) Observação de arquivos relacionados;
5) Seleção de documentos/bibliografias que se direcionam ao nosso objeto de pesquisa (diálogo entre criptografia, história da matemática e tecnologias digitais no ensino de matemática).

Seleção dos Repositórios

Foram selecionados quatro repositórios digitais, cada um escolhido por uma característica particular, mas de modo a abarcar bibliografias acadêmicas do tipo livros, tese, dissertação e artigo científico, que foram os tipos encontrados no decorrer da pesquisa. São eles:

O CREPHIMAT[3] – Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática – é voltado a pesquisas na área da história da matemática. Dessa forma, ao pesquisar nele já sabemos que os trabalhos que serão encontrados possuem uma abordagem histórica, que coincide com anseio de nossa pesquisa.

Periódicos da Capes[4] – Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – é repositório onde trabalhos acadêmicos, incluindo produções de mestrado e doutorado, podem ser obtidos, contendo os estudos realizados no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECNM) ao qual estamos vinculados. Assim, é uma biblioteca de buscas primárias para observar modelos, linhas de pesquisas e produtos da área pesquisada.

Google Acadêmico[5] foi escolhido por ser uma biblioteca digital mais ampla de trabalhos científicos, de modo que a busca nela exige mais filtros, já que possui um acervo maior de artigos, teses, dissertação, resumos e livros.

Por fim o *banco de dados Scielo*[6] – *Scientific Eletronic Library Online*–foi escolhido por ser um banco com visibilidade internacional. Neste caso, algumas das buscas foram, inclusive, feitas em inglês.

[3] Acesso através do link: https://www.crephimat.com.br/ . Último acesso em 17, nov. 2024.
[4] Acesso através do link: https://www.periodicos.capes.gov.br/ . Último acesso em 17, nov. 2024.
[5] Acesso através do link: https://scholar.google.com.br/?hl=pt . Último acesso em 17, nov. 2024.
[6] Acesso através do link: https://www.scielo.br/ . Último acesso em 17, nov. 2024.

Seleção dos descritores, filtragem, observação e seleção de arquivos

Os descritores selecionados foram: criptografia (*encryption*), história da matemática (*history of math*), tecnologia (*technology)*, matemática (*math*) e Alan Turing[7], que estão relacionados diretamente a temática desta pesquisa. A seleção e a filtragem dos descritores foram realizadas a partir de combinações do descritor *criptografia* com os demais, fazendo uso dos operadores booleanos[8] (*AND, OR e NOT*) com base na relevância para os objetivos da pesquisa e no número de resultados obtidos. As buscas foram realizadas no período de outubro a novembro de 2024. A partir da observação preliminar da quantidade de documentos retornados, a leitura foi direcionada, mediante os descritores apresentados e a finalidade exibida nos resumos, exclusivamente para aqueles que se alinhavam mais estreitamente à temática investigada (ligação entre criptografia, história da matemática, tecnologias digitais e ensino de matemática). Este alinhamento foi avaliado pela presença e pertinência dos descritores nos trabalhos encontrados por meio do comando *AND* que seleciona os documentos que falam da combinação dos descritores.

Arquivos/bibliografias que apresentavam maior número de descritores relevantes foram priorizados, como o escrito por Vizioli, Carvalho e Pereira (2019) que falam da possibilidade do uso da criptografia para o ensino de função inversa utilizando a tecnologia como ferramenta para tal. Assim, temos um exemplo de trabalho com uso da criptografia e a tecnologia voltado para o ensino, porém a busca foi mais voltada especialmente **à**queles relacionados à história da matemática, que se mostrou um dos descritores menos frequentes. Para tanto, foram selecionados os descritores *criptografia and história da matemática*. Como resultado, com exceção do *Google Acadêmico*, foi possível encontrar no máximo um documento por periódico/repositório, nas buscas realizadas.

Adotando os procedimentos supracitados, no *CREPHIMAT* somente uma dissertação foi encontrada utilizando apenas o descritor *criptografia.* Nesse trabalho temos a criptografia sendo utilizada por meio do cinema. O trabalho encontrado é de autoria de Fabiana de Souza Bonfim e tem como título *História da matemática e cinema: o caso da criptografia na introdução do ensino de álgebra*, sendo defendido no ano de 2012. Segundo Bonfim (2012), o uso da história da matemática associado ao cinema pode ser uma ferramenta eficaz na introdução de conceitos de álgebra, como demonstrado no caso da criptografia. Essa abordagem permite contextualizar os conteúdos matemáticos e torná-los mais significativos para os alunos, explorando conexões históricas e aplicações práticas do tema no ensino (Bonfim, 2012).

Nos *Periódicos da Capes* a busca por *criptografia* trouxe 247 resultados, sendo assim se fez necessária uma filtragem com acréscimo dos outros descritores. Adicionando *história da matemática*, apenas um arquivo foi encontrado. O trabalho obtido é *Criptologia: possibilidade de estudo no ensino médio amparada em sua concepção histórica* de autoria de Gomes, Santos e Lopes (2016). Neste caso, os referidos autores argumentam que a criptologia pode ser incorporada ao ensino médio como uma ferramenta pedagógica para conectar a história da matemática com conceitos contemporâneos. Essa abordagem permite contextualizar o conteúdo de forma interdisciplinar, promovendo o engajamento dos alunos ao explorar tanto aspectos históricos quanto aplicações práticas da matemática.

Com os descritores *criptografia*, *tecnologia* e *matemática*, seis arquivos foram obtidos nos *Periódicos da Capes* sendo observado que são direcionados para o ensino de criptografia na etapa do

[7] Alan Turing (1912-1954) foi um inglês que se dedicou à matemática e à criptografia, sendo considerado um dos precursores da computação, entre outras contribuições. Mais detalhes serão tratados adiante neste texto.

[8] Palavras que indicam ao sistema de busca como combinar os termos de uma pesquisa.

ensino médio. São eles: *Tecnologias digitais aliadas ao ensino de Criptografia,* de Silva, Evangelista e Evangelista (2022); *Criptologia: possibilidade de estudo no ensino médio amparada em sua concepção histórica,* de Gomes, Santos e Lopes (2016); *Construção de conhecimentos matemáticos utilizando a temática criptografia para o Ensino Médio,* de Kranz e Olgin (2021); *Criptografia simétrica com uma função afim,* de Menezes Neto e Mota (2023); *Criptografia e Livros Didáticos do Ensino Médio: Uma Análise Sobre as Novas Obras Didáticas Específicas do PNLD 2021,* de Litoldo e Guimarães (2023); e *Engenharia didática: uma experiência com o tema criptografia,* de Olgin e Groenwald (2011).

Ainda nos *Periódicos da Capes*, a busca utilizando *criptografia* e *Alan Turing* não obteve nenhum resultado, porém, quando pesquisado em inglês, apareceram 15 trabalhos, filtrando com *Alan Turing*, *history of mathematics* e *encryption* aparece um arquivo. Tal trabalho é de autoria de William H. Sherman e intitulado *Decoding Early Modern Cryptography.* Nele, Sherman (2019) explora como a criptografia, durante a era moderna, foi não apenas uma ferramenta prática para proteger mensagens, mas também um reflexo cultural e intelectual do período. Ele analisa os métodos criptográficos usados na época e os contextualiza em práticas sociais e políticas, destacando como esses sistemas influenciaram e foram influenciados pelas ideias emergentes de linguagem, ciência e segurança. Nesse trabalho foi possível encontrar outras referências importantes da área da criptografia como o livro *The Codebreak* (Kahn, 1967) que traz uma história ampla da criptologia e fundamenta este artigo a dissertação a qual tal estudo é vinculado.

A pesquisa realizada no *Google Acadêmico* foi mais volumosa, de fato, foram encontrados para o descritor *criptografia*, 26100 documentos, isso sem as citações. Mesmo com todos os descritores usados juntos, através dos operadores, ou seja, *criptografia*, *Alan Turing*, *tecnologias* e *história da matemática*, foram obtidos 35 resultados. Da seleção alcançada, para este artigo, foram revisadas as referências dessas 35 bibliografias a fim de fomentar nossa fundamentação sobre o assunto. Contudo, como desdobramento deste artigo, para a dissertação a ele vinculada, serão analisados o conteúdo dos estudos que têm um enfoque no uso da história da matemática e das tecnologias como ferramentas para o ensino.

Por fim, na *base de dados da Scielo* apareceram dez resultados para *criptografia,* porém, para o conjunto com *história da matemática* não foi encontrado nenhum resultado. Assim, foi feita uma busca com os mesmos descritivos em inglês e o resultado foi o mesmo, isto é, nenhum arquivo na base de dados da Scielo se assemelha a pesquisa dissertativa em andamento e ao objeto deste artigo.

Consideramos que o levantamento realizado permite delinear amparo teórico e delimitar o campo de relação entre criptografia, história da matemática e tecnologias digitais em prol do ensino. Uma análise mais detalhada e apontamentos dos achados pode ainda desenhar uma história da criptografia com a intenção de usá-la em aliança com tecnologias para o ensino, como descrevemos na seção que segue.

ANÁLISES E RESULTADOS

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos com base nas pesquisas realizadas, seguidos de sua análise à luz do referencial adotado. Mediante o que foi observado, os trabalhos selecionados falam de criptografia, seja por meio da história da matemática, seja por meio de tecnologias digitais, trazendo abordagens voltadas para o ensino da matemática no ensino médio.

Com base nos resultados das buscas realizadas, observa-se que muitos trabalhos se concentram no estudo da criptografia, no entanto, o número de pesquisas que abordam a matemática associada a história da matemática e tecnologias é significativamente menor. Nesse contexto, a presente pesquisa representa uma contribuição relevante, considerando a escassez de trabalhos que integram essas abordagens, podendo servir como referência para outros profissionais da área que desejem implementar propostas nesta direção. Dentre as contribuições dos trabalhos selecionados e, tendo em vista, os anseios deste artigo e natureza do evento ao qual está direcionado, XVI Seminário Nacional de História da Matemática, destacamos a identificação de uma bibliografia clássica sobre criptografia e sua história, o livro de David Kahn, *The Codebreakers*, publicado em inglês em 1967. Disponível em formato digital, a obra está dividida em 26 capítulos e apresenta, entre os capítulos 2 e 19, uma narrativa detalhada sobre a história da criptologia – ciência que abrange a criptografia e a criptoanálise (que em geral consiste no processo de tentar descobrir o texto cifrado). Detalhando seu conteúdo e adotando como principal referencial, decidimos esboçar uma história da criptografia e contribuições de Alan Turing nas próximas duas subseções.

Uma história da criptografia

A obra de David Khan (1967), com o título *The Codebreakers: the story of secret writing,* relata as principais fases da história da criptografia de forma detalhada. Desse modo, revela o desenvolvimento dessa ferramenta em momentos diversos e culturas distintas, desde as primeiras evidências de criptografia, acerca de 4000 anos atrás, até a criptografia eletrônica, criada e utilizada por militares na época da guerra fria, no entanto, a obra não as criptografias atuais[9], devido à época de sua divulgação. De fato, Khan (1967, p. 9, tradução própria) descreve como objetivo do seu livro "abranger toda a história da criptologia. Meu objetivo foi duplo: narrar o desenvolvimento dos diversos métodos de criação e quebra de códigos e cifras, e contar como esses métodos afetaram as pessoas."[10], sendo uma obra ampla para quem busca entender os fundamentos da criptografia.

Segundo o autor, as primeiras obras sobre o assunto aparecem no antigo Egito, através de papiros encontrados nas catacumbas, que utilizavam símbolos para ocultar informações (anexo I), passando também pelas criptografias gregas e romanas, a exemplo da criptografia de César (anexo II), que desloca as posições das letras no alfabeto para criar mensagens criptografadas e do quadro de Políbio (anexo III), que utilizada números para cifrar uma mensagem. Na era medieval, a criptografia começou a ser utilizada pela igreja e por reinos para proteger mensagens importantes. Após, métodos mais sofisticados, como cifras polialfabéticas, começaram a emergir, preparando o terreno para avanços técnicos, a exemplo temos o disco cifrado de Leon Battista Alberti (anexo IV).

No decorrer dos anos, segundo Khan (1967), épocas como o Renascimento (século XIV a XVII) e Revolução Científica (entre os séculos XVI e XVIII), também apresentam desenvolvimento acerca das criptografias, com a introdução de métodos mais complexos, como a cifra de Vigenère (anexo V). Aqui, a criptografia começa a se expandir com a influência de matemáticos e o surgimento de ferramentas mais avançadas para análise e construção de códigos. Com o advento da Revolução Industrial (entre séculos XIX e XX), novas tecnologias, como o telégrafo[11], demandaram avanços significativos na criptografia. Durante a Primeira e Segunda Guerras Mundiais, a cripto-

[9] Criptografia de chave pública, como o RSA, e padrões como o AES, que são fundamentais para a segurança digital moderna.

[10] *"The book seeks to cover the entire history of cryptology. My goal has been twofold: to narrate the development of the various methods of making and breaking codes and ciphers, and to tell how these methods have affected men."*

[11] Telégrafo é um aparelho que era utilizado para a comunicação em partes do século XIX e do século XX. Esse equipamento utilizava a energia elétrica para enviar pulsos na corrente que eram interpretados por meio de um código que usava pontos e linhas.

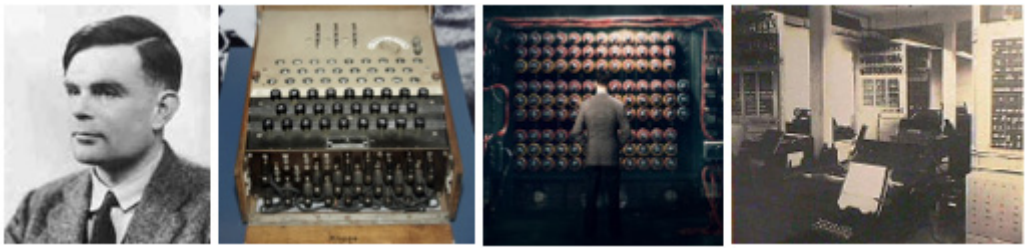
grafia alcançou novos patamares, sendo usada amplamente em operações militares. Destaca-se a batalha entre os códigos dos Aliados e do Eixo[12], incluindo o impacto do trabalho de Alan Turing e a decodificação da máquina Enigma[13]. No texto de Khan (1967), há muitos relatos sobre a guerra, porém, não há muitas menções a Alan Turing, para saber mais sobre ele, foi necessária a busca na Biblioteca Digital Britânica, em conjunto com outras fontes, como o site Mactutor[14], cujos dados detalhamos posteriormente.

Por fim, no livro, Khan (1967) descreve a criptografia que foi utilizada durante e após a Guerra Fria, tornando-se central para a segurança nacional e culminando com o desenvolvimento de sistemas como o *National Security Agency* (NSA). É ressaltado que as técnicas se tornaram mais dependentes de máquinas e algoritmos, avançando para o uso em larga escala, com aplicações em comunicações diplomáticas e espionagem. Dessa forma, utilizamos a obra para realizar um estudo das principais criptografias de cada época, pois David Kahn (1967) documenta não apenas os métodos, mas também as figuras históricas e os contextos sociais e políticos que moldaram o desenvolvimento da criptografia. Seu trabalho é considerado uma referência fundamental para o estudo da história dessa área, porém, conforme mencionado, não explora muito a figura de Alan Turing, do qual iremos falar a seguir.

Alan Turing

De acordo com Copeland (2024), Alan Mathison Turing nasceu em 23 de junho de 1912, em Londres, Inglaterra. Reconhecido como um matemático de destaque do século XX, Turing realizou contribuições significativas para diversas áreas, como criptoanálise, lógica, filosofia, biologia, matemática e ciência da computação. Ele é amplamente reconhecido como pioneiro da inteligência artificial e criador de conceitos que moldaram a computação moderna. Sua contribuição mais conhecida foi o desenvolvimento da máquina capaz de decifrar os códigos gerados pela complexa máquina alemã Enigma, como consta na Figura 1, um marco histórico na Segunda Guerra Mundial.

Figura 1 – Alan Turing e máquinas Enigma, Bombe e Tunny



Fonte: Connor e Robertson (2003); Fernandes (2024); Amorin (2020); Novo Milênio (1997)

Turing estudou em escolas de excelência e, em 1931, ingressou na Universidade de Cambridge para estudar matemática, onde se destacou por suas pesquisas em teoria da probabilidade e outros temas fundamentais para o avanço da computação. Posteriormente, mudou-se para Princeton, onde concluiu seu doutorado em lógica matemática, consolidando-se como um dos principais intelectuais da época. Durante a Segunda Guerra Mundial,

[12] Aliados e Eixo foram as duas principais alianças durante a Segunda Guerra Mundial (1939-1945).
[13] Enigma foi uma máquina de criptografia eletromecânica usada pelos alemães na Segunda Guerra Mundial para enviar mensagens codificadas.
[14] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

Turing liderou esforços para decifrar os códigos alemães, projetando a máquina Bombe[15] (Figura 1), que foi crucial para a interceptação e interpretação de mensagens codificadas pelos alemães. Esse trabalho deu uma vantagem estratégica decisiva aos aliados. Ele também desenvolveu métodos inovadores para decifrar a máquina Tunny[16] (Figura 1), outro sistema alemão de cifras. Por sua contribuição, Turing foi condecorado como Oficial da Ordem do Império Britânico (OBE).

Apesar de seu impacto histórico, Turing enfrentou preconceito e perseguição por sua orientação sexual. Ele foi submetido a um tratamento hormonal, conhecido como castração química, o que o levou a um profundo sofrimento psicológico. Em 1954, Turing faleceu, possivelmente por suicídio, após ingerir cianeto. Trabalhar a figura de Alan Turing na educação básica é essencial não apenas por sua relevância científica e histórica, mas também pelo exemplo que oferece sobre a importância da inclusão e do respeito à diversidade. Sua trajetória inspira o pensamento crítico, a inovação tecnológica e a valorização dos direitos humanos, tornando-se um tema interdisciplinar ideal para conectar matemática, história, tecnologia e ética. Considerando a breve história descrita, a partir dos achados do levantamento realizado, trazemos, na sequência, nossas conclusões conforme consta próxima seção.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos evidenciam a relevância da abordagem interdisciplinar entre criptografia, história da matemática e tecnologias digitais no ensino de matemática. Identificou-se uma lacuna significativa na literatura acadêmica que une essas três frentes de forma integrada, reforçando a importância deste levantamento para ampliar o escopo de pesquisas futuras. Ao trabalhar a criptografia com suporte histórico e tecnológico, pode-se proporcionar ao aluno não apenas o aprendizado matemático, mas também uma compreensão crítica e contextualizada do uso das tecnologias e seu papel na história da sociedade. Isso se alinha às competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017; 2022), que destacam a necessidade de compreender, criar e utilizar tecnologias digitais de forma ética e significativa.

Além disso, a pesquisa destacou a importância de referências históricas, como a obra *The Codebreakers,* de David Kahn (1967), bem como de figuras como Alan Turing, cuja trajetória oferece lições de inovação e inclusão. Essa perspectiva interdisciplinar é fundamental para desenvolver estratégias pedagógicas inovadoras que engajem os estudantes e conectem o conteúdo curricular à realidade contemporânea. Em suma, este trabalho não apenas contribui para reflexões teóricas sobre a integração entre criptografia, história da matemática e tecnologias digitais, mas também serve como base para o desenvolvimento de práticas educacionais que possam ser amplamente aplicadas na educação básica, a exemplo da dissertação e produto educacional vinculados e como desdobramento deste artigo.

REFERÊNCIAS

AMORIN, Gabriel. (2020). 1 jan 1939 ano–Alan Turing faz o desenho inicial da Bombe. In: **The time.graphics**. Disponível em: https://time.graphics/pt/event/4631682. Acesso em: 28 dez. 2024.

[15] Bombe, máquina eletromecânica de quebra de códigos criada por criptologistas na Grã-Bretanha durante a Segunda Guerra Mundial

[16] Tunny foi um dispositivo usado para quebrar mensagens criptografadas pelos alemães e fornecer informações importantes para as forças aliadas

BRASIL. Ministério da Educação. **Computação na Educação Básica – Complemento à BNCC**. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://portal.mec.gov.br/docman/fevereiro-2022-pdf/236791-anexo-ao-parecer-cneceb-n-2-2022-bncc-computacao/file. Acesso em: 7 nov. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 7 nov. 2024.

BONFIM, Fabiana de Souza. **História da Matemática e Cinema: o caso da criptografia na introdução do ensino de álgebra.** Orientador: Antônio Carlos Brolezzi. São Paulo: USP, 2012.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Softwares e internet na sala de aula de matemática. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática**, 10., 2010, Salvador-BA. Disponível em: <www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF> . Acesso em: 22 dez. 2024.

CARNEIRO, Framilson José Ferreira. **Criptografia e a Teoria dos Números**. São Paulo: Editora Ciência Moderna, 2015.

CONNOR, John O'.; ROBERTSON, Edmund. (2003). **Alan Mathison Turing.** In: Mactutor.

Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Turing/. Acesso em 28 dez. 2024.

COPELAND, Jack B. (2024). In: **Encliclopaedia Britannica**. Alan Turing. Disponível em: https://www.britannica.com/biography/Alan-Turing. Acesso em: 21 dez. 2024.

GOMES, Francisco Claudio Lima; SANTOS, Leniedson Guedes dos; LOPES, Thiago Beirigo. CRIPTOLOGIA: POSSIBILIDADE DE ESTUDO NO ENSINO MÉDIO AMPARADA EM SUA CONCEPÇÃO HISTÓRICA. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 3, n. 9, p. 63–78, 2016. DOI: 10.30938/bocehm.v3i9.54. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/54. Acesso em: 1 nov. 2024.

FERNANDES, Cláudio. Máquina Enigma. (2024). In: **Brasil Escola.** Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/historiag/maquina-enigma.htm. Acesso em 28 de dezembro de 2024.

KAHN, David. **The Codebreakers:** The Story of Secret Writing. Nova York: Macmillan, 1967. ISBN: 9780684831305.

KRANZ, Bárbara Elisa; OLGIN, Clarissa de Assis. Construção de conhecimentos matemáticos utilizando a temática criptografia para o Ensino Médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 1–21, 2021. DOI: 10.26843/rencima.v12n3a24. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/2877. Acesso em: 1 nov. 2024.

LITOLDO, Beatriz Fernanda; GUIMARÃES, Douglas Ribeiro (2023). Criptografia e Livros Didáticos do Ensino Médio. **Abakós**, *11*(2), 31-51. https://doi.org/10.5752/P.2316-9451.2023v-11n2p31-51

MENEZES NETO, Jose Laudelino de; MOTA, Welisson Martins. Criptografia simétrica com uma função afim. C.Q.D.–**Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 23, n. 1, p. 99–110, 2023. DOI: 10.21167/cqdv23n12023099110. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/362. Acesso em: 25 nov. 2024.

NOVO Milênio. In: **Caderno Informática** do jornal A Tribuna. Santos/SP, em 9 de setembro de 1997. Disponível em: https://www.novomilenio.inf.br/ano97/97hist03.htm. Acesso em: 28 dez. 2024.

OLGIN, Clarissa de Assis; GROENWALD, Claudia Lisete de Oliveira. Engenharia didática: uma experiência com o tema criptografia. **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, 2011.

SHERMAN, William Henry. "Decoding Early Modern Cryptography." **Huntington Library Quarterly**, vol. 82 no. 2, 2019, p. 315-319. Project MUSE, https://dx.doi.org/10.1353/hlq.2019.0017.

SILVA, M. V. da .; EVANGELISTA, D. H. R.; EVANGELISTA, C. J. . Digital technologies combined with teaching Cryptography. **The Journal of Engineering and Exact Sciences**, Viçosa/MG, BR, v. 8, n. 5, p. 14313–01e, 2022. DOI: 10.18540/jcecvl8iss5pp14313-01e. Disponível em: https://periodicos.ufv.br/jcec/article/view/14313. Acesso em: 13 feb. 2025.

SOUSA, Giselle Costa de. **Aliança entre História da Matemática e Tecnologias via Investigação Matemática.** 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. 270 p. ISBN 9786555630114.

SOUSA, Giselle Costa de. **Aliança entre história da matemática e tecnologias digitais na educação matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2023.

SOUSA, Giselle Costa de. Aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais na Perspectiva da Teoria da Objetivação: um levantamento bibliográfico. **PARADIGMA**, Maracay, v. 45, n. 2, p. e2024010, 2024. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024010.id1583. Disponível em: https://revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma/article/view/1583. Acesso em: 13 feb. 2025.

STAKE, Robert Earl. Pesquisa Qualitativa. Cap. 1 – **Pesquisa qualitativa como as coisas funcionam.** Cap. 2 – Interpretação a pessoa como instrumento. Porto Alegre: EDITORA PENSO, 2011.

VIZOLLI, Idemar; CARVALHO, Euvaldo de Souza.; PEREIRA, Onésimo Rodrigues. CRIPTOGRAFIA: UMA POSSIBILIDADE PARA O ENSINO DE FUNÇÃO INVERSA. REAMEC–**Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 7, n. 1, p. 196–212, 2019. DOI: 10.26571/REAMEC.a2019.v7.n1.p196-212.i8146. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/8146. Acesso em: 1 nov. 2024.

ANEXOS

Anexo I – Símbolos para ocultar informações

Hieroglyphic encipherments of proper names and titles, with cipher hieroglyphs at left, plain equivalents at right

Fonte: Khan (1967, p. 73).

Anexo II – Criptografia de César

plain	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
cipher	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

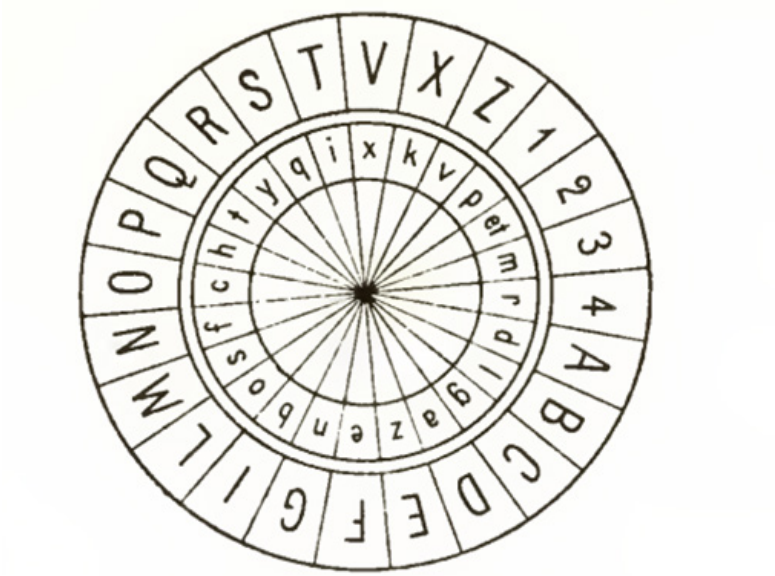
Fonte: Khan (1967, p. 84).

Anexo III – Quadro de Políbio

	1	2	3	4	5
1	a	b	c	d	e
2	f	g	h	ij	k
3	l	m	n	o	p
4	q	r	s	t	u
5	v	w	x	y	z

Fonte: Khan (1967, p. 83).

Anexo IV – Disco cifrado de Leon Battista Alberti



Fonte: Khan (1967, p. 128).

Anexo V – Cifra de Vigenère

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	C	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Fonte: Khan (1967, p. 149).

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Equações quadráticas e GeoGebra: uma releitura da resolução de Agnesi

Quadratic equations and GeoGebra: a reinterpretation of Agnesi's solution

Vívia de Souza Marins[1]
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

Roseli Alves de Moura[2]
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

Renan de Souza Teixeira[3]
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

RESUMO

Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), estudiosa italiana do século XVIII, destacou-se por suas contribuições no estudo da matemática na Itália setecentista, sendo principalmente conhecida pela curva que leva seu nome, *Bruxa de Agnesi*. Em sua obra *Instituzioni Analitiche ad uso Della Gioventú Italiana* (1748), ancorada nas ideias de René Descartes, ela abordou a resolução de equações quadráticas sob uma perspectiva geométrica e algébrica. Fruto de um experimento didático desenvolvido na Atividade Acadêmica NEPE *Softwares*, no curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, o propósito deste trabalho é apresentar, sob uma perspectiva histórica e a partir de tecnologias educacionais, o tratamento dado por Agnesi à estas resoluções, utilizando o *software* GeoGebra. A atividade, mediante o mesmo propósito, referiu-se à uma tentativa de favorecer a compreensão do processo utilizado na busca pelas soluções geométricas e algébricas, de modo diverso do usual, principalmente pautado no uso de fórmulas resolutivas. Metodologicamente, no experimento e nesta apresentação, estabeleceu-se um diálogo no âmbito da História da Matemática e o uso de Tecnologias Digitais, a partir de um estudo de natureza bibliográfica de caráter qualitativo, buscando legitimar pesquisas com possibilidades de aplicação no ensino. Resultados que depreendem do experimento nos levam a considerar que o uso de régua e compasso e a geometria sintética, em voga no período que viveu Agnesi, e o uso de ferramentas tecnológicas, dos dias atuais, retratam práticas distintas e nos convidam à reflexão acerca de procedimentos matemáticos culturalmente aceitos, para além da possibilidade de resoluções intuitivas ou independente da utilização de fórmulas resolutivas.

Palavras-chave: Equações Quadráticas; História da Matemática; Maria Gaetana Agnesi, Tecnologias Educacionais, GeoGebra.

ABSTRACT

Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), an 18th-century Italian scholar, stood out for her contributions to the study of mathematics in 18th-century Italy, and is best known for the curve that bears her name, Agnesi's Witch. In her work Instituzioni Analitiche ad uso Della Gioventú Italiana (1748), anchored in the ideas of René Descartes, she addressed the resolution of quadratic equations from a geometric and algebraic perspective. The result of a didactic experiment developed in the NEPE Softwares Academic Activity, in the undergraduate mathematics course at Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, the purpose of this work is to present, from a historical perspective and based on educational technologies, the treatment given by Agnesi to these resolutions, using the GeoGebra software. The activity, with the same purpose, referred to an attempt to favor the understanding of the process used in the search for geometric and algebraic solutions, in a different way than usual, mainly based on the use of resolution formulas. Methodologically, in the experiment and in this presentation, a dialogue was established within the scope of the History of Mathematics and the use of Digital Technologies, based on a bibliographic study of a qualitative nature, seeking to legitimize research with possibilities of application in teaching. Results that emerge from the experiment lead us to consider that the use

[1] Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: viviasouza.dsm@gmail.com.

[2] Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP. Professora Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: rmoura@ufrrj.br.

[3] Doutorado em Engenharia de Defesa – IME. Professor Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: rsteixeira@ufrrj.br.

of ruler and compass and synthetic geometry, in vogue during the period in which Agnesi lived, and the use of technological tools, today, portray distinct practices and invite us to reflect on culturally accepted mathematical procedures, beyond the possibility of intuitive resolutions or independent of the use of resolution formulas.

Keywords: Quadratic Equations; History of Mathematics; Maria Gaetana Agnesi, Educational Technologies, GeoGebra.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Atualmente há um aumento de pesquisas e estudos que visam refletir acerca de teorias e práticas passíveis de favorecer a aprendizagem e melhor compreensão da matemática, de forma geral. Neste cenário, um diálogo entre concepções no âmbito da História da Matemática e Tecnologias Digitais, é favorecido mediante criação de formas visuais e lúdicas para representações matemáticas, ferramentas tecnológicas e/ou softwares e outras tecnologias, que como sinalizam Sousa e Felipe (2021) e Sousa (2020; 2023) emergem como possibilidades, no ensino. Porém, frente à matemática escolar com que ainda nos deparamos no presente, robusta de representações algébricas e que são replicadas de forma veemente, observa-se que tais possibilidades ainda são consideradas esparsas e requerem uma mudança no paradigma atual na área de educação matemática.

Frente a tal quadro, estas investigações se mostram necessárias, justificadas pelo fato que a matemática é uma área criativa e potencialmente explorável, e inexoravelmente vinculada com a cultura e civilização de diferentes épocas. Não foram poucos os estudiosos, que antes mesmo do florescimento da álgebra analítica e do desenvolvimento do cálculo, que hoje conhecemos, utilizavam-se da geometria para resolver exercícios/problemas, os quais nos pautamos hoje, principalmente por meio de recursos algébricos. Esta prática sustentada por uma geometria sintética[4] foi, por muito tempo, a principal ferramenta de que os estudiosos se valiam.

O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido ao longo de uma Atividade Acadêmica, denominada NEPE[5]–*Softwares* Educacionais, vinculada ao Departamento de Matemática, e voltada ao Ensino, Pesquisa e Extensão da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Realizada de forma remota, ao longo do ano de 2021, período pandêmico, a primeira autora atuou como discente e a segunda autora como orientadora da atividade, cujo propósito principal era apresentar aos graduandos, futuros professores de matemática, maneiras, materiais e metodologias, passíveis de auxiliarem na condução de suas práticas futuras, adicionando a isso, o conhecimento de outras práticas, não usuais nos dias de hoje, do fazer matemático.

O trabalho de Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), matemática e filósofa italiana do século XVIII, nascida em Milão e que desde sua infância desenvolveu um interesse em estudos de ciências e matemática, se insinuou pertinente para o propósito de uma das atividades que desenvolvemos, justamente pelo fato da estudiosa resolver equações quadráticas a partir da geometria sintética, metodologia distinta das fórmulas resolutivas principalmente utilizado atualmente.

[4] Segundo Mazzoti (2007, p. 108), a álgebra no setecentos se mostrava principalmente associada com a engenharia prática e às artes, ao passo que a geometria sintética, ao estilo dos antigos, se sobressaia sobre quaisquer outras formas de conhecimento humano – além da teologia – em função da sua certeza, elegância e relevância metafísica.

[5] Núcleo de Ensino, Pesquisa e Extensão são atividades extensionistas teórico-práticas obrigatórias aos alunos do curso de matemática licenciatura com o propósito de fortalecer o tripé universitário, preceito constitucional que rege as universidades brasileiras e ajuda a definir o seu papel perante a sociedade. O artigo 207 da Constituição Federal, diz que as universidades precisam obedecer ao "princípio de indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão". Há, na grade atual de nossa universidade, cinco NEPEs ao longo da graduação.

Apesar de não ter dedicado toda sua vida aos estudos, a estudiosa se destacou à época, mas obscurecida a partir do século XIX. Como menciona Moura (2021), em sua única obra, *Instituzioni Analitiche ad uso Della Gioventú Italiana*, de 1748, Agnesi alerta quanto a dificuldade de obter materiais para o ensino de matemática, e é sobre isso que ela se busca apresentar, em um período em que o ensino, na forma como temos hoje, ainda se mostrava distante, era restrito a famílias privilegiadas.

No decorrer do texto serão expostos os passos de construção descritos por Agnesi, as respostas da atividade obtidas e a construção no GeoGebra desta representação. Pretendemos, com isto, expor a importância da geometria, especialmente aquelas demonstradas há anos, mas que foram descartadas pelo comodismo da álgebra.

METODOLOGIA

Esta apresentação é fruto de algumas aulas de História da Matemática, em sua primeira etapa, com temática previamente selecionada, que emergiu da atividade acadêmica NEPE–Softwares, e na segunda etapa utilizou-se ferramentas do *software* GeoGebra para realizar construções que emergiram da análise do material verificado na primeira etapa. O propósito neste momento foi encontrar as soluções de equações quadráticas a partir da movimentação de seletores, que oportunamente apresentaremos, representando os coeficientes das equações quadráticas.

Assim, metodologicamente entendemos que a primeira etapa, refere-se a um estudo de natureza bibliográfica, conforme sinaliza Mattos (2020, p. 52), pois foram utilizados documentos já elaborados, tendo em vista que um dos objetivos foi analisar as resoluções de equação quadrática extraída da tese de Moura (2017) com pequenos adendos atuais[6]. A abordagem desta pesquisa assume caráter qualitativo que, para Mattos (2020) se trata de entender como o objeto pesquisa acontece, e assim não nos preocupamos em quantificar, mas sim em aprofundar a compreensão do problema e em desenvolver conhecimentos particulares.

A segunda etapa, tendo como foco principal a utilização de um *software* de matemática dinâmica GeoGebra, permitiu analisar os diferentes casos explicitados por Agnesi, na resolução de equações quadráticas.

A utilização desses procedimentos ocorreu da seguinte forma: na primeira etapa os estudos foram iniciados pautados na pesquisa bibliográfica, priorizando aspectos que abordavam a vida, as obras e o contexto que Agnesi viveu. Como a questão da pouca disponibilidade de tempo para desenvolver o trabalho, ao longo da condução da Atividade, nos atemos no referencial de Moura (2017, 2021), em função da obra ser uma tese elaborada sob as premissas e literatura necessária de que nos valemos. Não houve preocupação em fazer levantamento de outros materiais pois o objetivo do experimento era trazer uma discussão acerca da resolução de equações quadráticas na obra de Agnesi.[7] A atividade acadêmica foi desenvolvida por duas professoras da Universidade, porém, tais procedimentos foram adotados ao longo de três encontros em dias distintos e ministrados quin-

[6] Sobre isso, nos respaldamos no Presentismo Pedagógico apregoado por Fendler (2009, p. 4) que defende o uso de relatos históricos que incorporem, de forma deliberada, perspectivas estrategicamente presentistas que permitem a exploração de conceitos da história do passado, pautadas e projetadas em resoluções atuais, de modo facilitador em diálogo com nosso espaço e tempo, mas que não se confunde com o anacronismo.

[7] Importante destacar que a atividade foi desenvolvida em período de pandemia (2021) e até aquele momento somente a tese de Moura trazia esta abordagem, pautada na obra de Maria Gaetana Agnesi.

zenalmente com somente uma delas, a segunda autora deste trabalho. Cada encontro foi de duas horas (120 minutos, especificamente), momento em que se buscou uma condução de aula, a partir da explanação sobre o desenvolvimento da matemática europeia nos séculos XVII e XVIII, de forma não delimitada, focando na matemática italiana Maria Gaetana Agnesi, em momento oportuno, seu legado e o contexto histórico da época, dentre outros aspectos relevantes e necessários para a compreensão das práticas matemáticas, no cenário setecentista.

Após esta aula, foi enviado um arquivo[8] com diversas citações, retiradas da obra de Agnesi (1748) e da tese de Moura (2017), tanto traduzidas como na língua italiana toscana, e utilizadas por Agnesi em seus escritos matemáticos, proporcionando aos estudantes uma familiarização com retóricas diferentes. No arquivo enviado há, ainda, o passo-a-passo da resolução matemática e construção da resolução de equação quadrática da forma xx + ax – bb = 0, dentre quatro casos abordados por Agnesi em seu tratado matemático. Na sequência, foi disponibilizada uma atividade que pedia para, usando o *software* GeoGebra, refazer as hipóteses desenvolvidas por Agnesi e analisar este método, o qual, para os estudantes, representava nuances da álgebra já conhecida, contudo, sem utilização da usual fórmula resolutiva[9] que utilizamos no Ensino Básico. Na etapa final, foram elaboradas construções no GeoGebra das outras resoluções de equações, as quais, após algumas alterações e adições, se materializam no presente trabalho.

Importante destacar que o GeoGebra é um site ou *software* de matemática dinâmica que permite realizar construções geométricas e disponibiliza diversas ferramentas para realizar tais estudos, como explicitado no trabalho de Dantas, Aparecida e Baldini (1997). Assim, ao longo da realização da atividade foram utilizadas a construção de pontos, retas, segmentos, circunferência e reta tangente, conceitos que estamos familiarizados, e a construção do controle deslizante, que é uma ferramenta que oportuniza que uma incógnita possa assumir um determinado valor dentro de um intervalo, de modo que este valor seja escolhido pelo utilizador, ao deslizar o controle.

Na próxima seção traremos as descrições algébricas e construções – traduzidas para o português – feitas por Agnesi em sua obra, que retratam o encontro das raízes de equações do segundo grau.

AGNESI E EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Como anteriormente mencionado, o trabalho aqui apresentado foi desenvolvido ao longo de uma Atividade Acadêmica no NEPE–Núcleo de Ensino, Pesquisa e Extensão, em que nos valemos da aliança entre a História da Matemática e Software GeoGebra (conforme Sousa 2020; 2023). Delimitamos o trabalho na resolução de equações quadráticas, a partir da obra de Agnesi, *Instituzioni Analitiche*, em seu primeiro volume, a qual, nas palavras da autora, surge para favorecer o ensino para os jovens italianos, que careciam de material adequado para tanto (Moura, 2017).

Não são poucos os estudos dedicados à Agnesi (1718-1799) e ao seu tratado matemático, mas há evidências de que a historiografia tradicional pouco espaço lhe reservou. O historiador D. J. Struik, em *História Concisa da Matemática* não apresenta o trabalho da estudiosa, mas em seu *A Source Book in Mathematics 1700-1800*, somente refere-se a ela de forma apologética, comparando-a a Hypatia (datas?). Na mesma direção, C. Boyer (ano?) enfatiza, em sua *History of Analytic Geometry*, que a estudiosa não traz material novo, ao tratar da geometria analítica que supostamente

[8] https://drive.google.com/drive/folders/1Uuub8w3lrFlggzOhUGJSPjPsLJrXFXEy?usp=sharing

[9] A fórmula resolutiva do segundo grau é descrita da seguinte forma $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

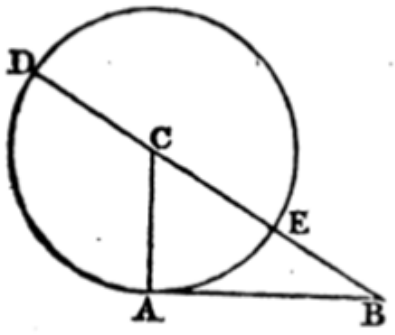
teria encontrado na obra de Agnesi, como destaca Moura (2017). Por sua vez, Eves (1995), em uma edição de *Introdução à História da Matemática*, apresenta uma biografia da estudiosa e comentários acerca da expressão Bruxa de Agnesi (Eves, 1995, pp. 479-83), envolta a equívocos.[10]

Nos ateremos neste trabalho, a apresentar aspectos das resoluções de equações publicadas na obra de Agnesi(ano?), intitulada *Instituzioni Analitiche,* que se apresenta dividida em quatro seções, pautadas em diferentes assuntos da matemática. Nos valemos do já elaborado por Moura (2017) para ilustrar a forma como Agnesi, na segunda seção, utiliza construções geométricas para determinar valores desconhecidos. A referida matemática coloca de forma explícita e detalhada a resolução de quatro casos que, descrevem, segundo ela, todas as equações do segundo grau possíveis, na forma $xx \pm ax \pm bb = 0$:

> Portanto, para construir as duas, a primeira e a segunda, tem-se CA=½ , AB em um ângulo reto é igual a b, e com o raio CA se descreve o círculo AED. Do ponto B prolonga-se a linha BD até D, passando pelo centro C; e será BE a quantidade positiva da incógnita, que é a verdadeira raiz, ou a raiz positiva da equação $xx+ax-bb = 0$, assim como a raiz correspondente à BD será a falsa ou negativa. De modo contrário, BD corresponde à raiz verdadeira, e BR à raiz falsa, na equação $xx-ax-bb = 0$. (Moura, 2017, p. 130 *apud* Agnesi, 1748, p. 112).

Na Figura 1 temos a representação da construção, onde CA, corresponde ao raio da circunferência de centro C, mede metade de , ou seja, é a medida do diâmetro da circunferência e é a medida de um segmento perpendicular ao segmento CA, portanto o segmento AB será tangente à circunferência no ponto A. Esta Figura 1 corresponde à equações escritas nas formas xx + ax – bb = 0 ou xx – ax – bb = 0

Figura 1 – Representação geométrica das equações de termo "*bb*" negativo.



Fonte: M.G.Agnesi, *Analytical Institutions* (1801)

Nosso propósito é somente destacar o que não está explícito na observação da figura, e de que Agnesi se vale, a partir de estudos da obra cartesiana, que escolheu para direcionar seu trabalho e que destacamos a seguir.

> E, de fato, resolver as duas equações, são $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$ e $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, e pela construção, sabendo que CA = CE = CD = $\frac{1}{2}a$, AB = b, CB é igual a $\sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, e BE é igual a $\sqrt{\frac{aa}{4} + bb} - \frac{a}{2}$, quantidade positiva da incógnita na primeira equação e BD tomando como quantidade nega-

[10] Mais a este respeito vide Moura (2017) que elenca alguns autores italianos mais recentes que se envolvem nesta discussão.

> tiva é igual a $-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{aa}{4}+bb}$. O mesmo acontecerá tomando BD como o valor positivo, igual a $\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{aa}{4}+bb}$, da incógnita na segunda equação, e como CB é maior do que CE, EB é igual a $\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{aa}{4}+bb}$, sendo o valor negativo. (Moura, 2017, p. 132 *apud* Agnesi, 1748, p. 112-113).

O que se depreende do mencionado pela estudiosa, é ela afirmar que a medida dos segmentos DB e EB representam as incógnitas da equação e, as medidas de DC, CE e CA são conhecidas, dada a construção. Para a equação *xx+ax-bb = 0*, a medida de EB corresponde à solução positiva, restando assim o segmento DB como solução negativa. O inverso ocorre para a equação *xx-ax-bb = 0*. Temos também, por construção, que o triângulo ABC é retângulo, com ângulo reto em A, e utilizando o teorema de Pitágoras, chegamos à seguinte fórmula:

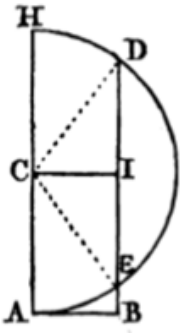
$$AB^2+CA^2=CB^2 \;\Rightarrow\; AB^2+CA^2=(CE+EB)^2 \;\Rightarrow$$
$$b^2+\frac{1}{4}a^2=\left(\frac{1}{2}a+x\right)^2 \;\Rightarrow \pm\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}=\frac{1}{2}a+x \;\Rightarrow$$
$$x=\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$$

Se o segmento EB for o valor negativo -x, de maneira análoga, chegaremos na equação *xx-ax-bb = 0*. Até o presente momento só foram mencionadas as equações onde o termo "*bb*" é negativo, isto porque neste caso teremos uma raiz negativa e outra positiva.

Para os outros dois casos, em que o terceiro termo é positivo, ou ambas as raízes são positivas ou negativa, como exposto por Agnesi é representado pela Figura 2:

> A terceira e quarta fórmula são assim construídas: Tomando CA = ½ e AB = b, formando um ângulo reto, tal como nas construções anteriores, descreve-se com o raio CA, o semicírculo ADH, e conduzindo BD paralelo à AC. As duas retas BE e BD serão os dois valores, ou seja, as duas raízes negativas da equação xx+ax+bb = 0, e também as duas positivas da equação xx-ax+bb=0. (Moura, 2017, p. 135 *apud* Agnesi, 1748, p. 113).

Figura 2 – Representação geométrica das equações de termo "*bb*" positivo.



Fonte: M.G.Agnesi, *Analytical Institutions* (1801)

Para as duas últimas equações a construção utiliza-se de um semicírculo de raio ½ , um segmento AB de medida *b*, perpendicular à CA–semelhante à construção anterior–, e cria-se um segmento paralelo ao diâmetro a partir do ponto B, encontrando assim dois pontos de intersecção entre o segmento criado e o semicírculo. Neste segmento temos as duas incógnitas negativas da equação *xx+ax+bb=0* e as duas positivas de xx-ax+bb=0.

> Assim, resolvendo as equações, a terceira raiz será $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e a quarta raiz, $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$. Agora, conduzindo as linhas CD, CE e CI perpendicular a BD, temos que ID = IE = $\sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$ e BE será a raiz negativa e é igual a $-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, o valor negativo da incógnita desconhecida na terceira equação, sendo BI maior do que o IE; os negativos dessa mesma terceira equação. O oposto será BD positivo será igual a $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e BE positivo será igual a $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, ambos os valores positivos da incógnita na quarta equação. (Moura, 2017, p. 136 *apud* Agnesi, 1748, p. 113).

Apesar de não sabermos se Agnesi utilizou o teorema de Pitágoras no triângulo CEI, retângulo em I, nos valemos dele para favorecer à compreensão, tal como anteriormente feito. Temos que CI é paralelo a AB, por construção, logo CI = AB = b, e, pelo semicírculo, que CA = CE = IB = ½ . Por fim, tem-se que IE = IB–EB. Utilizando as raízes positivas (ou seja, EB = x) segue que:

$$CI^2 + IE^2 = CE^2 \Rightarrow CI + (IB - EB)^2 = CE^2 \Rightarrow$$
$$b^2 + \left(\frac{1}{2}a - x\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow \frac{1}{2}a - x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \Rightarrow$$
$$x = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

Para as raízes negativas, ou seja, quando EB = -x é realizado de forma análoga, chegando à $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Para maiores aprofundamentos sobre o trabalho de Agnesi sugerimos a obra de Moura (2017), não sendo nosso propósito, neste trabalho, enveredarmos em detalhes relacionados à geometria sintética utilizada pela autora e demais singularidades observadas em relação ao fazer matemático que direciona o trabalho da estudiosa nos anos setecentos italiano. Na próxima etapa, apresentaremos os resultados relacionados ao experimento didático elaborado no software GeoGebra.

Na sequência mostraremos as construções feitas no *Software* GeoGebra dos casos descritos na presente seção, alterando os valores dos termos e, então, analisando como são representados geometricamente.

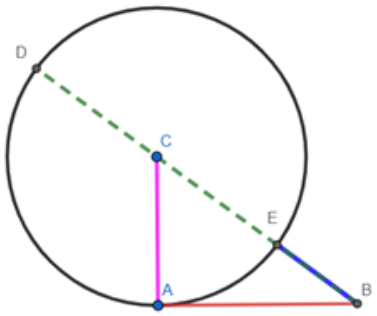
ANÁLISES E RESULTADOS

As equações descritas por Agnesi da forma *xx±ax±bb=0* foram tratadas dois a dois na seção de referencial teórico e, para melhor organização, manteremos a mesma divisão durante esta seção. Abordaremos, primeiro, o caso em que o termo conhecido "bb" é negativo e, posteriormente, o caso onde o terceiro termo é positivo e as construções elaboradas no *softwar*e GeoGebra.

Primeiros casos: *xx+ax-bb=0 e xx-ax-bb=0*

A descrição da construção feita por Agnesi para os casos *xx+ax-bb=0* e *xx-ax-bb=0*, encontrada no referencial teórico, foi reproduzida no GeoGebra, onde *a* e *b* correspondem aos controles deslizantes para possibilitar a flexibilidade dos testes. A Figura 3 representa a construção elaborada no *software.*

Figura 3 – Representação geométrica feita no GeoGebra.

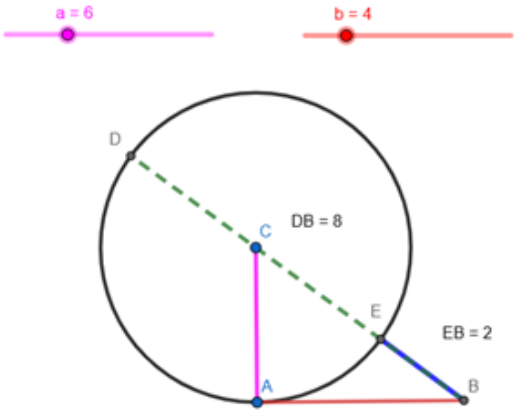


Fonte: Elaborado pela Autora.

Observe que a reta verde pontilhada (DB) corresponde a uma das raízes e a reta azul (EB) a outra raiz. A partir desta construção serão feitos os testes, mostrando as medidas de ambas essas retas em diferentes situações. Em adição, também serão expostas as medidas de AB e CA, em forma de controle deslizante (tamanho de *b* e *1/2* a, respectivamente).

A primeira situação tratada é quando *a, b≠0* (Figura 4). Sejam, então, *a=6* e *b=4*, teremos *xx+6x-16=0* e *xx-6x-16=0*. Se calcularmos com as ferramentas que temos atualmente, obtemos as duas raízes para a equação onde *a* é positiva serão *x=-8* e *x=2* e para a equação onde *a* é negativa serão *x=-2* e *x=8* . Pela construção descrita chegamos na mesma resposta.

Figura 4 – Exemplo feito no GeoGebra com valores para e diferentes de zero.

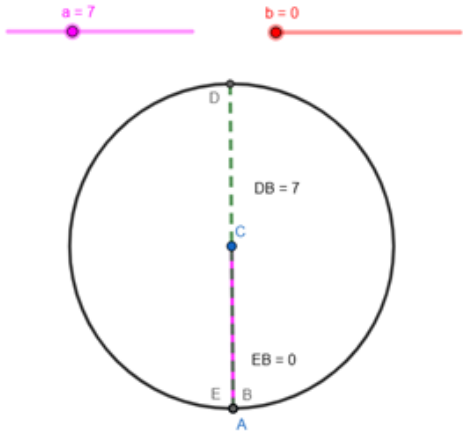


Fonte: Elaborado pela Autora.

Agnesi afirma que há a raiz falsa (negativa) e verdadeira (positiva) e que estas dependem somente de qual dos dois casos estamos analisando, de forma análoga ao direcionamento por Descartes (1596-1650), em sua obra de 1637. O próximo exemplo será se a≠0 e b=0. Quando isto acontece,

não teremos mais um triângulo formado, pois A=B=E, portanto AB=BE=0. Dados $a=7$e $b=0$ chegamos em:

Figura 5 – Exemplo feito no GeoGebra com igual à zero.

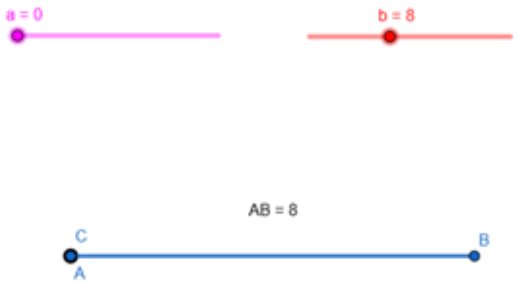


Fonte: Elaborado pela Autora.

Com estas condições uma das raízes (EB) sempre será 0, independente do valor de pois, pela construção, esta incógnita influencia apenas o raio da circunferência e, consequentemente, a raíz representada por DB. A Figura 5 representa as equações $xx+7x=0$, com raízes $x=0$ e $x=-7$, e $xx-7x=0$, onde suas raízes são $x=0$ e $x=7$.

O último caso é quando $a=0$ e $b\neq0$. Neste caso, o raio da circunferência será 0 e a figura será colapsada para um ponto, ou seja, $C=A$. O segmento AB ainda existirá pois este, por construção, tem um ângulo reto em A e seu tamanho depende apenas de b. Apesar de não podermos afirmar muitas coisas sobre o segmento AB, dada a inexistência da circunferência, ele existirá. Seja $b=8$, uma representação pode ser vista na Figura 6.

Figura 6 – Exemplo feito no GeoGebra com igual à zero.



Fonte: Elaborado pela Autora.

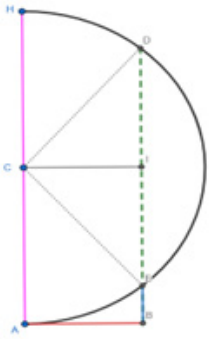
O caso demonstrado na Figura 6 é algebricamente descrito por $xx-64=0$, na qual suas raízes são $x=\pm8$.

Há, ainda, uma situação que ocorreria quando $a=b=0$, porém este exemplo é trivial. Em todos os casos, os valores de a, $b\neq0$ foram arbitrários, e quaisquer que fossem esses valores as representações seriam semelhantes, apenas com as mudanças métricas necessárias.

Dois últimos casos: *xx+ax+bb=0 e xx-ax+bb=0*

A construção no GeoGebra, feita de forma análoga à anterior, seguiu os passos descritos por Agnesi. A utilização do controle deslizante para os valores de *a* e *b* foi mantido com o intuito de facilitar o estudo de cada caso possível.

Figura 7 – Representação geométrica feita no GeoGebra para o terceiro termo positivo.

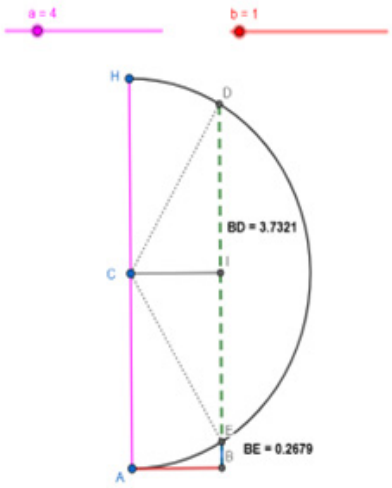


Fonte: Elaborado pela Autora.

A semicircunferência foi construída dado o centro C e um raio ½*a*, o ponto B foi obtido pela construção de um segmento a partir do ponto A e uma distância *b*, criando um ângulo reto em A e, por fim, a construção de um segmento a partir do ponto B e que intersecta a semicircunferência em, no mínimo, dois pontos.

Iniciou-se pelo caso onde *a, b≠0* e *b*<½*a* (raio). Os valores arbitrários escolhidos para e foram, respectivamente, 4 e 1. A Figura 8 representa, então, as equações *xx+4x+1=0* e *xx-4x+1=0*.

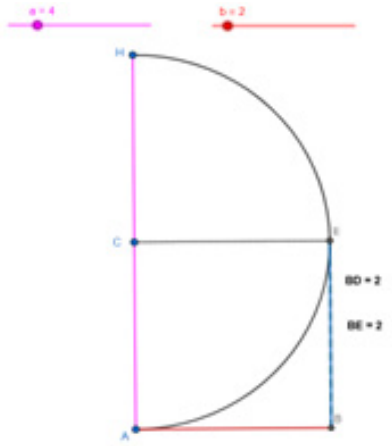
Figura 8 – Exemplo feito no GeoGebra com *a, b≠0* e *b*<½*a*



Fonte: Elaborado pela Autora.

Dadas as condições dos coeficientes é possível encontrar duas raízes distintas, ambas positivas ou negativas, descritas por BE e BD. Se, então, tivermos estritamente *b=½a* teremos o caso descrito pela Figura 9.

Figura 9 – Exemplo feito no GeoGebra com ½*a*=*b*

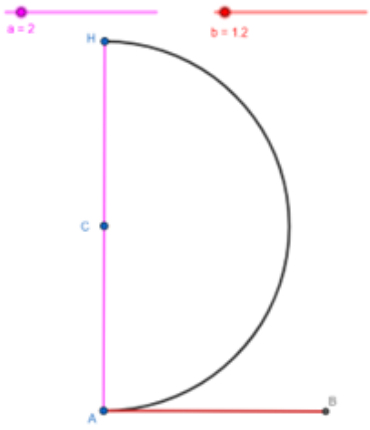


Fonte: Elaborado pela Autora.

A construção na Figura 9 representa as raízes negativas da equação *xx+4x+4=0* e as raízes positivas da equação *xx-4x+4=0*. Como é possível observar, as duas raízes são iguais, isto porque AB = ½*a* (raio) e, portanto, a o segmento que se inicia no ponto B terá apenas uma intersecção com a semicircunferência, que será o ponto onde D = E, logo DB = EB.

Na Figura 10, por sua vez, temos a representação de outro caso, onde é um valor diferente de zero qualquer e *b*>½*a*. Nesta situação, o segmento AB será maior do que a semicircunferência e, portanto, não haverá pontos de intersecção. No exemplo foram escolhidos os valores de *a=2* e *b=1.2*.

Figura 10 – Exemplo feito no GeoGebra com a≠0 e b>1/2 a.



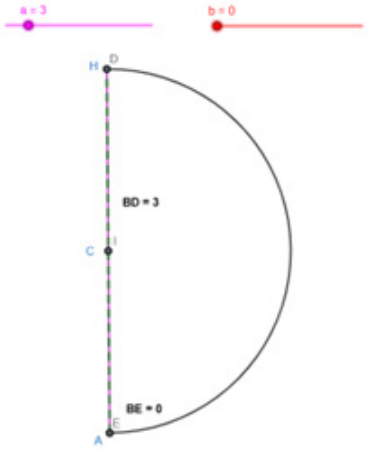
Fonte: Elaborado pela Autora.

As raízes DB e EB não aparecem, pois não são valores reais. Ao calcular as raízes de *xx±2x+1.2=0*, acharemos valores complexos correspondentes. Portanto, esta representação geométrica de equações quadráticas não é útil quando se estuda raízes complexas.

Seja, agora, *a* um valor arbitrário diferente de 0 e *b=0*. Para este caso, ainda teremos a circunferência de diâmetro *a*, porém, como o segmento AB tem medida 0, tem-se A = B e os pontos de intersecção com a circunferência estarão nos extremos na mesma, diante disso E = A = B e D = H e, consequentemente, BE = 0 e BD = AH = *a*. Para visualização, escolhemos *a=3*.

A Figura 11, então, mostra geometricamente as raízes das equações $xx+3x=0$ e $xx-3x=0$, que serão 0 e $\pm a$. O exemplo em que $a=0$ e $b\neq 0$ é semelhante aos casos apresentados anteriormente (onde "bb" negativo).

Figura 11 – Exemplo feito no GeoGebra com $a\neq 0$ e $b=0$.



Fonte: Elaborado pela Autora.

A seguir traremos algumas reflexões e resultados que emergiram ao longo da dinâmica utilizada na condução desta atividade em complemento com a fórmula resolutiva quando estudado o assunto de equação do segundo grau.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O experimento e a construção geométrica utilizada mediante o uso do Geogebra se revelaram simples, apesar de serem necessárias ferramentas de medição para obter um resultado suficientemente próximo, e curiosa, dado o fato de as raízes serem o comprimento de dois segmentos. Também, este método se mostrou útil quando há raízes irracionais, não em questão de precisão, pois há uma perda das casas decimais quando se utiliza régua e compasso, por exemplo, mas em questão de facilidade em reconhecer e descobrir estes valores. Tais fazeres matemáticos se revelaram não usuais e despertaram o interesse dos licenciandos em matemática.

Atualmente, observamos o desestímulo no aprendizado da matemática, sob muitos aspectos, em decorrência do excesso de fórmulas decoradas e falta de compreensão, como enfatizado por Resende e Mesquita (2013). Apesar da fórmula resolutiva da equação do segundo grau ter uma demonstração, a álgebra envolvida tem se mostrado desinteressante aos estudantes, incentivando-os a memorizar uma fórmula, a qual, além de ser um desafio em alguns casos, dificilmente se mostra uma forma efetiva a longo prazo.

Em linhas gerais, o experimento suscitou reflexões que nos levam a considerar que, o uso de régua e compasso e a geometria sintética, do período que viveu Agnesi, juntamente com o uso de ferramentas tecnológicas, dos dias atuais, despontam como reflexos de paradigmas distintos, e nos convidam, para além da possibilidade de resoluções intuitivas ou independente da utilização de fórmulas resolutivas, à reflexões acerca de distintas práticas matemáticas que sinalizam potencialidade de aliança entre história da matemática e tecnologias digitais, conforme aponta Sousa (2020; 2023).

REFERÊNCIAS

AGNESI, Maria Gaetana. **Instituzioni Analitiche ad Uso Della Gioventú Italiana**. Nella Regia Ducal Corte, 1748.

BOYER, Carl. **História da Matemática.** trad. E. F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

DANTAS, Sérgio; APARECIDA, Loreni; BALDINI, Ferreira. **Produção de Conhecimentos Matemáticos e Tecnológicos na Resolução de Problemas com o GeoGebra,** 1997**.**

DESCARTES, Rene. **The Geometry of Rene Descartes**. with a fac-símile of the first edition, translated by D.E.Smith & M.L.Latham, New York: Dover Publications, 1954.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. trad. H.H.Domingues, Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1995.

FENDLER, I. The upside of Presentism. Professorado. **Revista de Currículum y Formación de Professorado**,v. 13, n. 2, pp. 1-15, Universidade de Granada, España, 2009.

MATTOS, Sandra Maria Nascimento de. **Conversando sobre metodologia da pesquisa científica**. Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2020.

MAZZOTI, Massimo. **The World of Maria Gaetana Agnesi, Mathematician of God**, Baltimore: The John Hopkings University Press, 2007.

MOURA, Roseli Alves de; SAITO, Fumikazu. Disseminação do estudo de Análise Matemática e a Repercussão de Instituzioni Analitiche de Maria Gaetana Agnesi. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Pós-Graduandos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 23, n. 1, p. 810-832, 2021. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p810-832.

RESENDE, G.; MESQUITA, M. da G. B. de F. (2013). Principais Dificuldade Percebidas no Processo Ensino-Aprendizagem de Matemática em Escolas do Município de Divinópolis, MG. **Em Teia | Revista De Educação Matemática E Tecnológica Iberoamericana, 3(3)**. Recuperado de https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/2193.

SOUSA, Gisele C. De.; FELIPE, Pérola D. G. História Quadrinhos na Educação. **In: al-Biruni e sua Matemática em História em Quadrinhos**. Fortaleza, 2021.

SOUSA, Giselle Costa de. **Aliança entre História da Matemática e Tecnologias via Investigação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

SOUSA, Giselle Costa de. **Aliança entre história da matemática e tecnologias digitais na educação matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas.** Tradução J.C.S. Guerreiro, 2. Ed., Lisboa: Ciência Aberta, Gradiva, 1992.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Aspectos gerais da obra *Cálculo Vetorial* de Christovam Colombo dos Santos (1890-1980)

General aspects of the work *Vector Calculus* by Christovam Colombo dos Santos (1890-1980)

Davidson Paulo Azevedo Oliveira[1]
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais–CEFET/MG

Roseli Alves de Moura[2]
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro–UFRRJ

Sabrina Helena Bonfim[3]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul–UFMS

RESUMO

Este artigo tem como propósito apresentar aspectos iniciais da pesquisa em andamento relacionada à obra *Calculo Vectorial–Licções professadas na Escola de Minas de Ouro Preto,* publicada em 1927, de autoria de Christovam Colombo dos Santos (1890-1980), como também investigar e documentar alguns aspectos de sua trajetória acadêmica e política. Estudos indicam que Theodoro Augusto Ramos (1895-1937) foi pioneiro na sistematização da temática no Brasil, contudo, indícios presentes na introdução da tese de cátedra do estudioso Christovam sinalizam que ele desenvolveu o material de Cálculo Vetorial no mesmo período. De caráter bibliográfico e documental a partir de análise em fontes primárias e secundárias já disponíveis a abordagem metodológica da pesquisa está pautada na historiografia atualizada da História da Ciência. Fatos indicam contribuições para o Cálculo Vetorial do Professor Christovam Colombo, as quais representam um avanço no ensino e na pesquisa do conteúdo matemático abrangido em sua obra e lançam luz sobre o estado de Minas Gerais, descentralizando as pesquisas da área que historicamente têm sido concentradas nos estados de Rio de Janeiro e São Paulo. Ao destacar tal contribuição, este artigo aspira contribuir significativamente para o avanço da História da Matemática e da Educação Matemática no Brasil.

Palavras-chave: Escola de Minas de Ouro Preto; História da Matemática em Minas Gerais; Historiografia da Ciência.

ABSTRACT

This article aims to present initial aspects of the ongoing research related to the work Calculo Vectorial–Licções professadas na Escola de Minas de Ouro Preto, published in 1927, by Christovam Colombo dos Santos (1890-1980), as well as to investigate and document some aspects of his academic and political trajectory. Studies indicate that Theodoro Augusto Ramos (1895-1937) was a pioneer in the systematization of the subject in Brazil, however, evidence present in the introduction of the scholar Christovam's thesis indicates that he developed the material on Vector Calculus in the same period. Of a bibliographic and documentary nature based on analysis of primary and secondary sources already available, the methodological approach of the research is based on the updated historiography of the History of Science. Facts indicate contributions to Vector Calculus by Professor Christovam Colombo, which represent an advance in teaching and research on the mathematical content covered in his work and shed light on the state of Minas Gerais, decentralizing research in the area that has historically been concentrated in the states of Rio de Janeiro and São Paulo. By highlighting such contribution, this article aims to contribute significantly to the advancement of the History of Mathematics and Mathematics Education in Brazil.

Keywords: Escola de Minas de Ouro Preto; History of Mathematics in Minas Gerais; Historiography of Science.

[1] Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista–UNESP Rio Claro. Professor do Departamento de Matemática do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET / MG). Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Departamento de Matemática, Minas Gerais, Brasil. E-mail: davidson@cefetmg.br.

[2] Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP. Professora Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: rmoura@ufrrj.br.

[3] Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista–UNESP Rio Claro. Professor Associado da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Paranaíba, Mato Grosso do Sul, Brasil. E-mail: sabrina.bonfim@ufms.br.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A Escola de Minas de Ouro Preto (EMOP), inaugurada em 1876, representa um marco na História da Educação Superior brasileira em função da relevância de seu papel no ensino e pesquisa em Mineralogia, Geologia e Engenharia de Minas. Sua importância é inquestionável, tanto no âmbito do ensino quanto na pesquisa e produção de conhecimento nessas áreas, com a matemática desempenhando um papel fundamental nesse saber.

Um dos conteúdos matemáticos essenciais a essas áreas é o Cálculo Vetorial sendo que no Brasil, até o momento atual, estudos indicam que Theodoro Augusto Ramos (1895-1937) foi pioneiro na sua sistematização (Bonfim e Nobre, 2021; Bonfim (2023a, 2023b). Entretanto, indícios presentes na introdução da tese de cátedra do professor da Escola de Minas de Ouro Preto (EMOP) Christovam Colombo dos Santos (1890-1980), sinalizam que esse professor desenvolveu o material de Cálculo Vetorial no mesmo período, conforme também é apontado pelos autores. Este fato, pontua as obras de Ramos e Santos como pioneiras acerca do Cálculo Vetorial no Brasil.

Além disso, temos por hipótese que Christovam foi influenciado por seus professores, engenheiros na Escola de Minas de Ouro Preto, sobretudo Gastão Gomes[4] a partir das aulas de Mecânica e com o resumo das operações vetoriais. Desta forma, o estudioso mineiro viria a sistematizar o Cálculo Vetorial em sua tese de catedrático no ano de 1927, fato constatado na introdução do material publicado por ele, como apresentaremos adiante.

Nosso propósito neste artigo é apresentar aspectos gerais do livro de Cálculo Vetorial de Christovam que, além de autor da referida obra, atuou como professor tanto na Escola de Minas de Ouro Preto (EMOP) quanto na Universidade de Minas Gerais (UMG). O trabalho surge como desdobramento de pesquisas mais amplas, com recorte na História da Matemática em Minas Gerais cujo foco é a Escola de Minas de Ouro Preto, principalmente.

As influências dos professores da EMOP sobre o Cálculo Vetorial, especialmente nas disciplinas como Mecânica, e suas contribuições para o desenvolvimento subsequente do Cálculo Tensorial em obras posteriores, também serão exploradas em pesquisas futuras.

Também, apresentaremos de forma sucinta, neste trabalho, acerca do surgimento e papel da Escola de Minas de Ouro Preto, seguida de uma síntese da trajetória acadêmica e política de Christovam Colombo dos Santos. Destacamos algumas de suas contribuições para o avanço do Cálculo Vetorial em Minas Gerais e no Brasil, como forma de suscitar reflexões e mais estudos de reconhecimento, tanto de quem o influenciou, quanto a quem ele influenciou. Suas contribuições sugerem que houve uma promoção da valorização da temática Cálculo Vetorial em Minas Gerais, no contexto acadêmico e científico, fornecendo subsídios para a compreensão e aprofundamento do desenvolvimento dessa área do conhecimento no país. Como resultados de nossas análises, nos restringimos a apresentar aspectos gerais da obra Cálculo Vetorial, publicada em 1927.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho surge como desdobramento de uma pesquisa com caráter qualitativo, bibliográfico e documental a partir de análises em fontes primárias e secundárias disponíveis. Além disso, a abordagem metodológica da pesquisa está pautada na historiografia atualizada da História da

[4] Até o momento não temos informação sobre as datas de nascimento e falecimento do professor Gastão Gomes.

Ciência que compreende uma abordagem multifacetada e não apologética da história como sugere Moura (2017).

A ESCOLA DE MINAS DE OURO PRETO

Fundada em 12 de outubro de 1876 a Escola de Minas de Ouro Preto, surge mediante a necessidade de mão de obra qualificada para exploração de minerais, até então abundantes no país, mas em vias de escassez. Um dos objetivos do surgimento da Escola de Minas era suprir a demanda pela formação desses profissionais no Brasil.

O primeiro diretor, Henry Claude Gorceix (1842-1919), foi um francês e um dos grandes nomes da história da Escola de Minas de Ouro Preto (Figura 1), que veio do exterior por recomendação de Auguste Daubrée (1814-1896). Contudo, segundo Oliveira e Nobre (2020), Daubrée, também francês, e a primeira escolha de D.Pedro II para ocupar o cargo, não aceitou o convite em função de estar dirigindo a Escola de Minas de Paris, recomendando Gorceix para o posto que decidiu pela instalação da escola na cidade de Ouro Preto, Minas Gerais .

Figura 1–Escola de Minas de Ouro Preto em 1927

Fonte: Dicionario Primeira República[5]

Em 1930, período em que o professor Christovam Colombo dos Santos atuou na instituição, a Escola de Minas era vinculada ao Ministério da Justiça e Interior com curso de seis anos para Engenharia de Minas e Civil dividido em oito seções com dois professores e um substituto em cada uma delas. Christovam, juntamente com Miguel Maurício da Rocha, era professor da Primeira Seção. No ano seguinte, 1931**,** a EMOP passa a ser subordinada ao Ministério da Educação e Saúde Pública, e Christovam permanece como professor da primeira seção com Miguel Maurício Rocha.

No livro clássico sobre a História da Escola de Minas de Ouro Preto, o historiador José Murilo de Carvalho (2002) classifica a trajetória da instituição em três momentos: Fundação, Consolidação da instituição e, Crise e declínio.

[5] Disponível em https://mapa.an.gov.br/index.php/dicionario-primeira-republica/773-escola-de-minas-de-ouro-preto

Nosso personagem de pesquisa transpassa dois desses momentos, iniciando como aluno no momento de Consolidação e adentrando o período de Crise já como professor da escola. Na época em que Christovam Colombo era estudante, havia na EMOP dois cursos superiores, o de Engenheiro de Minas e Civil, com duração de seis anos, e o de Químico Industrial, três anos.

O curso em que ele se formou era dividido em Curso Fundamental e Curso Especial, ambos com três anos e totalizando 27 cadeiras. Salientamos que as disciplinas que possuem alguma tangência em relação ao nosso objeto de estudo eram Álgebra Superior – Geometria Analítica (primeira cadeira, ministrada no primeiro ano), Análise Infinitesimal, Cálculo das Variações (quinta cadeira, no segundo ano) e Mecânica Geral, Mecânica Aplicada, Cinemática e Dinâmica Aplicadas (nona cadeira, ministrada no terceiro ano).

VIDA E CONTRIBUIÇÕES DE CHRISTOVAM COLOMBO–CONTEXTO

Christovam Colombo dos Santos (Figura 2) nasceu na cidade de Ouro Preto, Minas Gerais, em 1890, tendo se formado em engenharia pela Escola de Minas de Ouro Preto, no ano de 1914 e no ano seguinte, em 03 de abril de 1915, é nomeado professor substituto na EMOP.

Figura 2–Christovam Colombo dos Santos

Fonte: Costa (2012, p. 4)

Em 1919 foi designado lente substituto na Escola de Minas e, entre 1921 e 1926, atuou como Vice-Presidente da Câmara de Ouro Preto, auxiliando o presidente e agente executivo Municipal Dr. Alfredo Teixeira Baeta Neves, também Engenheiro de Minas e Civil da turma de 1897, e professor da quarta seção da EMOP. A trajetória política de Christovam se estende ao Ministério da Agricultura. Observa-se que o papel dos professores da EMOP estava estreitamente relacionado às atividades políticas.

Em 1927 Christovam Colombo dos Santos publica sua obra de Cálculo Vetorial, e em 1928 um segundo livro. As publicações do professor não se restringem ao Cálculo Vetorial, tendo em vista que ele também discute sobre a influência de matemática e cultura (1973) e música (1973):

Sabe-se que Christovam Colombo dos Santos também foi vice-diretor da Escola de Engenharia da Universidade Minas Gerais de outubro de 1948 a outubro de 1951. Nessa ocasião, o diretor era o professor Mário Werneck de Alencar Lima (novembro de 1944 a julho de 1964). Em 1962 ele é designado membro do júri de Matemática do Prêmio Moinho Santista juntamente com os professores Edison Farah e J. O. Monteiro de Camargo da Universidade de São Paulo.

Possíveis influências

Duas influências brasileiras na obra de Christovam Colombo dos Santos foram indicadas pelo próprio professor no prefácio de seu trabalho, Gastão Gomes, seu professor, e Miguel Maurício da Rocha (1901-1970), que foi seu aluno, como mencionaremos em momento oportuno.

Gastão Gomes, natural de Porto Alegre, Rio Grande do Sul, formou-se em Engenharia de Minas e Civil na turma de 1901 se tornando professor das cadeiras de Geometria Descritiva e Aplicações Térmicas. Além disso, foi diretor da instituição no período de 1921 a 1943 (Lemos, 2012). De acordo com Christovam Colombo dos Santos, as influências que ele teve foram por meio do livro de Mecânica Racional de Gastão Gomes no qual o estudioso utiliza conceitos de Cálculo Vetorial. Vale destacar que entre 1896 e 1900 cerca de cinquenta gaúchos se deslocaram para Minas Gerais para estudarem na EMOP, incluindo Getúlio Vargas, amigo pessoal de Gastão Gomes. Essa amizade auxiliou este, no período em que era diretor, quanto à obtenção de benefícios para a instituição, segundo Carvalho (2002).

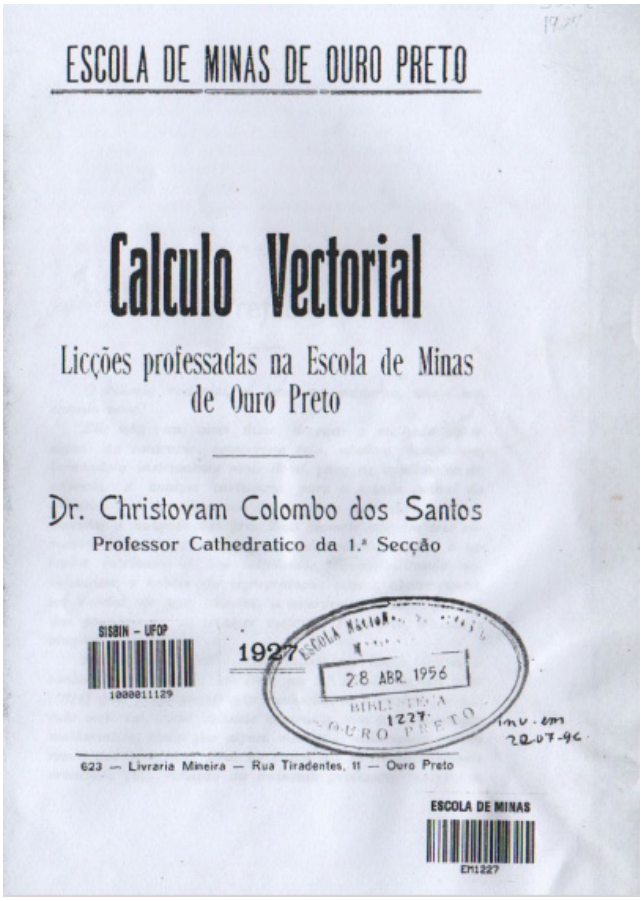
O segundo influenciador mencionado no prefácio do livro foi o alagoano Miguel Maurício da Rocha, engenheiro de Minas e Civil formado na turma de 1923, tendo se tornado professor de Cálculo Diferencial e Integral. De acordo com Lemos (2012, p. 79) ele foi "um dos mais notáveis matemáticos brasileiros, deixou trabalhos originais em pesquisa matemática e várias publicações com interpretações e evoluções inovadoras".

DESCRIÇÃO DA OBRA CÁLCULO VECTORIAL – ASPECTOS GERAIS

Até o momento, estudos publicados indicam que Theodoro Augusto Ramos foi pioneiro na sistematização do Cálculo Vetorial no Brasil, lançado em 1927 uma obra em português, posteriormente em francês, que contribuiu para a disseminação desse conhecimento.

Entretanto, como anteriormente mencionado, na introdução da tese de cátedra de 1926 do professor Christovam Colombo dos Santos, que viria a ser transformada na obra Cálculo Vetorial, publicada em 1927 pela Livraria Mineira (Figura 3), ele informa ser o autor do primeiro material acerca do tema, em solo brasileiro. Além disso, ao prefaciar o livro de Cálculo Vetorial de Edmundo Menezes Dantas, posteriormente em 1962, Christovam Colombo reitera ter publicado o primeiro livro didático do assunto no Brasil. Neste capítulo apresentaremos a obra, denominada *Calculo Vectorial–Licções professadas na Escola de Minas de Ouro Preto*, de 1927.

Figura 3–Capa do Livro de Santos (1927)



Fonte: Arquivo pessoal dos autores

Doravante chamada de Cálculo Vetorial, e compreendendo 159 laudas, a obra é iniciada por uma página denominada *Errata*, indício da preocupação de Christovam quanto a possíveis erros que dificultariam a compreensão de alguns tópicos do trabalho. De fato, no prefácio, o estudioso destaca seu entusiasmo em relação a obra ser a primeira contribuição escrita em língua portuguesa. Também, ele deixa claro seu propósito em trazer a representação visual e a interpretação da realidade dos fenômenos, como forma facilitadora aos iniciantes no estudo da temática, por considerar que a então análise cartesiana, no contexto da ciência do período "é um pouco artificial, por fragmentar a unidade das grandezas em três elementos estranhos à sua natureza, destruindo assim, o caráter intrínseco de seus atributos."(Santos, 1927, p. 1)

Parece-nos provável que Santos estava consciente de que sua empreitada não seria recomendada por autores que haviam se debruçado sobre o tema, até então. Relata que, direcionado pelos estudos de J. Coffin, que em sua 2. Edição da obra de 1914 indicava o ensino de cálculo vetorial somente para estudantes amadurecidos, escolheu também retardar a introdução do que estava então, apresentando, no curso da Escola de Minas.

Christovam enfatiza ainda que, sua mudança de posicionamento surge como consequência de sua prática, ao ministrar a disciplina facultativa no ano de 1926, aliada a anterior experiência em Lille entre 1919 e 1923. Tais vivências, em suas palavras, o convenceram da relevância e vantagens do emprego das notações e operações vetoriais, mesmo quando restrito ao campo da geometria

pura, na medida que permite tratar de modo mais elegante e fácil, uma gama de problemas e teorias no âmbito das Escolas Superiores.

O estudioso toma o cuidado de mencionar autores como Wessel, Truel, Argand, Bellavitis, Hamilton, Grassmann, Maxuel, Hearside, cujas obras sinalizam o referencial teórico de que se valeu, para elaborar seu material didático. Destaca uma fala do professor Roberto Marcolongo, no prefácio da 1. Edição de *Elementi di Calcolo Vettoriale*, de forma apologética ao tema e a Grassmann, criador do método vetorial, por ocasião do centenário de nascimento deste, na Alemanha.

Santos finaliza a apresentação de sua obra destacando a forma pessoal que imprimiu ao trabalho e agradece aos professores Miguel Maurício da Rocha, pela disponibilização de biblioteca sobre o assunto, como mencionamos anteriormente, Augusto Barbosa e Fleury da Rocha, ex-diretor e diretor, respectivamente, da então Escola de Minas de Ouro Preto, e que tornaram viável a publicação do seu trabalho, mediante o propósito de estar mais adaptada às Escolas Superiores no país.

A partir da leitura da bibliografia podemos notar que Christovan se baseou em autores franceses como Chatelet, Kampé de Fériet, Silverstein e italianos Marcolongo, Burali-Forti, Belavitis, Rossi, Tolli. Na sequência o autor elenca as obras que se pautou para o trabalho.

A OBRA *CALCULO VECTORIAL* – O CONTEÚDO

Operações elementares do Cálculo Vectorial e Diferenciação entre vetores em paralelo à Geometria Vetorial Diferencial são as duas divisões escolhidas por Christovam em sua obra Calculo Vectorial[6]. A parte I, Operações elementares do Cálculo Vectorial, é apresentada em três capítulos e a Parte II é abordada a partir de um capítulo referente à Diferenciação entre vetores e dois capítulos referentes à Geometria Vetorial Diferencial.

No capítulo I da primeira parte o estudioso apresenta quatro grupos de conceitos a saber: 1) Grandezas escalares e vetoriais, classificação de vetores, representação gráfica e analítica e equipolência; 2) Soma de vetores e identidades vetoriais; 3) Decomposição de um vetor, desenvolvimento cartesiano ou expressão linear de um vetor por meio de três vetores não coplanares e condições de equipolência e de paralelismo de dois vetores; 4) Aplicações.

Adentrando em especificidades dos conceitos, no capítulo II são abordados os tópicos: 1) Produto escalar de dois vetores e Propriedades; 2) Produto vetorial de dois vetores e Propriedades; 3) Produto misto de vetores, Propriedades e Interpretação geométrica; 4) Duplo produto vetorial e Propriedades; 5) Aplicações.

No capítulo III, última etapa da Parte I, são apresentados os tópicos: 1) Rotação de um vetor em um plano, Operador i – Complexos; 2) Aplicações; 3) Transformação de coordenadas espaciais.

Na segunda parte, somente o Capítulo I é dedicado a Diferenciação entre vetores, considerando os seguintes conceitos: 1) Ponto e vetor como funções de uma variável escalar, Equações vetoriais de uma curva reversa e de uma superfície, Derivadas de um ponto e de um vetor, Derivadas sucessivas e Interpretação geométrica da diferencial vetorial.

[6] Algumas das notações utilizadas por Christovam Colombo dos Santos podem ser vistas em Pimentel, Oliveira e Aguilar (2023).

A Geometria Vetorial Diferencial é abordada na Parte II, subdividida nos capítulos II e III. No Capítulo II Christovam se detém a: 1) Curva reversa, Tangente, Plano osculador, Plano Normal, Normal principal, Binormal, Plano Retificante, Curvaturas, Flexão e Torção e aborda o Caso em que a variável independente é um arco; 2) Caso em que a variável independente é qualquer; 3) Centro de curvatura, Esfera osculadora, Círculo osculador; 4) Evolvente e evolutas; 5) Curvas planas, Fórmula fundamental da Cinemática plana; 6) Aplicações Geométricas.

Finalizando a obra, no capítulo III são abordados os seguintes conteúdos: 1) Ponto e vetor funções de duas variáveis escalares. Equação vetorial de uma superfície. Desenvolvimentos cartesianos e em coordenadas esféricas. Derivadas parciais. Plano tangente. Normal; 2) Superfície cilíndrica, cônica e de revolução; 3) Superfícies regradas. Ponto central. Fórmula de Chasles. Parâmetro de distribuição.

Christovam salienta em nota, ainda no índice da obra, que seu propósito é publicar uma terceira parte, dando continuidade à temática, versando sobre "Noções de Homographia Vectorial. Estudo dos Operadores – Gradiente, Divergência Rotacional ou Turbilhão. Noções sobre o Cálculo Tensorial." (Santos, 1927, p. 9). De fato, este trabalho seria publicado em 1962, como capítulo da obra Edmundo Menezes Dantas, anteriormente mencionado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, espera-se lançar luz sobre o estado de Minas Gerais, descentralizando as pesquisas da área que historicamente têm sido concentradas nos estados de Rio de Janeiro e São Paulo. Ao destacar a contribuição de Christovam Colombo dos Santos e outros engenheiros e matemáticos de Minas Gerais, este artigo aspirou contribuir para o avanço da História da Matemática e da Educação Matemática no Brasil.

Essas contribuições sugerem que houve uma promoção da valorização da temática Cálculo Vetorial em Minas Gerais, no contexto acadêmico e científico, fornecendo subsídios para a compreensão e aprofundamento do desenvolvimento dessa área do conhecimento no país. Como resultados de nossas análises, nos restringimos a apresentar aspectos gerais da obra Cálculo Vetorial, publicada em 1927.

Embora tenhamos nos debruçado principalmente na apresentação da obra supra citada, temos observado nos desdobramentos deste projeto, que não se encerra neste artigo, que os conteúdos elegidos por Santos além de terem contribuído para o avanço do Cálculo Vetorial em Minas Gerais e no Brasil, sinalizam escolhas diferenciadas de seu antecessores referenciados na introdução de sua obra. Embora o autor reconheça o papel de J. Coffin, dentre outros, de forma amadurecida adentra em aspectos introdutórios relacionado ao Cálculo Vetorial, de forma distinta do que se fazia na ocasião.

Apesar de não ser o propósito desta apresentação temos observado em nossos estudos indícios de que esta escolha de tópicos prevalece em trabalhos futuros, de diferentes autores, até os dias de hoje. Tais escolhas podem, ou não terem sido influenciadas pelo trabalho de Santos, passíveis de serem exploradas em pesquisas futuras.

Assim, buscou-se popularizar a compreensão e o reconhecimento da produção matemática realizada no estado de Minas Gerais principalmente, ampliando a visibilidade das contribuições ma-

temáticas da região, no contexto nacional. Espera-se que esta pesquisa inicial não apenas enriqueça o conhecimento acadêmico sobre a História da Matemática no Brasil, mas também promova uma maior apreciação, reconhecimento e visibilidade da riqueza intelectual e científica de Minas Gerais.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais sob o código APQ01322-24.

REFERÊNCIAS

BONFIM, Sabrina Helena; NOBRE, Sérgio Roberto. Historical Mathematical Study About Vector Calculus Introduction in Brazil: First Notes. **Almagest: international journal for the history of scientific ideas,** v. 11.2, p. 84-110, 2021.

BONFIM, Sabrina Helena. **Theodoro Augusto Ramos (1895-1935): uma construção de sua trajetória acadêmica oficial baseada em Arquivos.** Anais do XV Seminário Nacional de História da Matemática, Maceió, 2023a.

BONFIM, Sabrina Helena. **Theodoro Augusto Ramos (1895-1935): De engenheiro a matemático notável.** Anais do 9º Encontro Luso Brasileiro de História da Matemática. Setúbal (Portugal), (no prelo) 2023b.

CARVALHO, José Murilo. **A Escola de Minas de Ouro Preto: o peso da glória**. 2 ed. Ver. Belo Horizonte: Editora UFMG. 2002.

COFFIN, Joseph George. **Calcul Vectoriel** traduzido por Véronnet Alex. Paris: Gauthier Villars. 1914.

COSTA, J, J. da Serra. Carneiro Felipe: Estudo Biográfico. **Revista da Escola de Minas de Ouro Preto.** Suplemento Especial n.2. jul a set. 2012.

LEMOS, Paulo (org). **A História da Escola de Minas**. Ouro Preto: Editora Graphar, 2012.

MOURA, Roseli Alves de. **Um estudo sobre a Instituzioni Analitiche de Maria Gaetana Agnesi: Álgebra e Análise na Itália setecentista.** Tese (Doutorado) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo; NOBRE, Sergio Roberto. **Arquivo Permanente da Escola de Minas de Ouro Preto:** documentação para pesquisa em História da (Educação) Matemática no Brasil. *Intermaths*, *1*(1), 20-33. 2020; https://doi.org/10.22481/intermaths.v1i1.7404

PIMENTEL, Athos de Melo; OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo; AGUILAR, Tatiana de Andrade. Altamiro Tibiriçá na Escola de Engenharia de São Carlos e o Ensino de Cálculo Vetorial. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 18, p. e2023041-16, 2023.

SANTOS, Christovam Colombo, **Calculo Vetorial: Licções Professadas na Escola de Minas de Ouro Preto**. Livraria Mineira, 1927.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

O desenvolvimento das investigações nos campos de História da Matemática e História da Educação Matemática utilizando os arquivos digitais como fonte de pesquisa: uma breve introdução

The development of research in the fields of History of Mathematics and History of Mathematics Education using digital archives as a research source: a brief introduction

Angelica Raiz[1]
Claretiano Centro Universitário de Rio Claro – CEUCLAR

Maria Maroni Lopes[2]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

RESUMO

A digitalização de arquivos tem modificado o contexto das pesquisas cientificas. Antes, o pesquisador passava horas, dias ou até meses, dentro de arquivos e bibliotecas, para encontrar as fontes necessárias para elaborar suas pesquisas. Hoje, com o advento da *Internet*, as informações tornaram-se mais acessíveis, possibilitando as consultas, sem se deslocar fisicamente. Nessa perspectiva, a era digital aparece como fundamental para a expansão das investigações científicas, beneficiada pela digitalização das fontes históricas e de sua viabilização online. Nesse sentido, este texto tem por finalidade apresentar as contribuições ao desenvolvimento das investigações científicas utilizando os arquivos digitais como fontes de pesquisas, especificamente, em História da Matemática e História da Educação Matemática. Para tanto, elaboramos alguns questionamentos, a saber: *como a era digital contribuiu/contribui para os trabalhos acadêmicos da área em História da Matemática e História da Educação Matemática? Quais os principais tipos de arquivos digitais utilizados? Em qual período essas fontes começaram a fazer parte desses trabalhos? Qual foi o avanço da utilização dessas fontes nesses trabalhos?* Assim, nos baseamos em conceitos da Arquivologia e da História Digital. Exemplificamos essas contribuições por meio da tese doutoral de uma das autoras, que utilizou fontes digitais e, também, apresentamos o repositório digital que contém produções sobre História da Matemática. Por fim, apresentamos as perspectivas dos procedimentos desta pesquisa, as quais são buscar responder os questionamentos supracitados investigando os trabalhos do Grupo de Pesquisa em História da Matemática da Unesp de Rio Claro/SP.

Palavras-chave: Era Digital; Documentos Arquivísticos; Repositórios Digitais; Historiografia.

ABSTRACT

The digitization of archives has changed the context of scientific research. Previously, researchers would spend hours, days or even months in archives and libraries to find the sources needed to develop their research. Today, with the advent of the Internet, information has become more accessible, making it possible to consult it without having to physically travel. From this perspective, the digital age appears to be fundamental for the expansion of scientific research, benefiting from the digitization of historical sources and their availability online. In this sense, this text aims to present the contributions to the development of scientific research using digital archives as research sources, specifically in the History of Mathematics and the History of Mathematics Education. To this end, we have formulated some questions, namely: *how has the digital age contributed/contributes to academic work in the area of History of Mathematics and History of Mathematics Education? What are the main types of digital archives used? In what period did these sources begin to be part of these works? What was the advancement in the use of these sources in these works?* Thus, we based ourselves on concepts from Archival Science and Digital History. We exemplify these contributions through the doctoral thesis of one of the authors, who used digital sources, and we also present the digital repository that contains productions on the History of Mathematics. Finally, we present the perspectives of the procedures of this research, which seek to answer the questions by investigating the work of the History of Mathematics Research Group at Unesp in Rio Claro/SP.

Keywords: Digital Age; Archival Documents; Digital Repositories; Historiography.

[1] Doutora em Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP-Rio Claro/SP. Professora Assistente do Claretiano Centro Universitário (CEUCLAR), Rio Claro, São Paulo, Brasil. E-mail: angelicaraiz@claretiano.edu.br.
[2] Doutora em Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP-Rio Claro/SP. Professora do Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (DCEA/UFRN/CERES), Caicó, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: maroni.lopes@ufrn.br.

INTRODUÇÃO

Os pesquisadores da área de História da Matemática e História da Educação Matemática, possuem como um de seus ofícios a coleta de dados em acervos ou arquivos, sejam eles públicos ou privados. Muitos historiadores debruçam horas ao visitar esses locais, cujo objetivo é obter um vasto material. Assim, a pesquisa com fontes documentais, faz parte da rotina de todo historiador. Nosso conhecimento sobre história, partiu de muitas pesquisas em arquivos ou acervos, onde

> [...] muito suor e trabalho foram gastos, após semanas ou meses de paciente e dedicada fase de pesquisa. O abnegado historiador encanta-se ao ler os testemunhos de pessoas do passado, ao perceber seus pontos de vista, seus sofrimentos, suas lutas cotidianas. Com o passar dos dias, ganha-se familiaridade, ou mesmo certa intimidade, com escrivães ou personagens que se repetem nos papeis. Sente-se o peso das restrições da sociedade, ou o peso da miséria, ou a má sorte de alguém, e deseja-se ler mais documentos para acompanhar aquela história de vida, o seu desenrolar. Os personagens parecem ganhar corpo, e é com tristeza que, muitas vezes, percebe-se que o horário do arquivo está encerrando, que precisamos fechar os documentos e partir, sem continuar a leitura até o dia seguinte. Essa é a vida da pesquisa: dura, cansativa, longa, mas gratificante, acima de tudo (Bacellar, 2008, p. 24).

Nesse contexto, consideramos essa tarefa do historiador não ser fácil, principalmente, com relação às visitas aos arquivos, pois o pesquisador necessita descobrir em qual local se encontram os documentos que nem sempre estão em condições adequadas para a pesquisa. Nesse sentido, ser explorador de arquivos é uma atividade provocante e encontrar os documentos relevantes à sua pesquisa "é uma sensação que todos que passaram pela experiência recordam com prazer, e os move a novamente retornar à pesquisa" (Bacellar, 2008, p. 49), muitas vezes, não importando as formas que se encontram o material a ser consultado.

Em uma determinada época, muitos arquivos continham documentos que estavam aparentemente fragilizados e que se fragmentavam facilmente. Diante disso, cogitava-se a preservação desses documentos por meio de cópias, passando para microfilmes, em mídia digital ou online. No entanto, nesse período, este tipo de procedimento tinha um elevado custo e um reduzido número de acervos o adotavam, o mais comum era o processo de microfilmagem.

Atualmente, a possibilidade desse processo torna-se mais viável devido o avanço da tecnologia. Variados acervos ou arquivos públicos estão adotando esta técnica, principalmente, com relação a preservação de documentos históricos. Além da preservação, o método de reproduzir uma fonte histórica em uma mídia digital, possibilita, também, disponibilizar o acesso online a essas fontes, modificando as formas do historiador pesquisar em arquivos.

Constatamos que, no início do século XXI, estudantes de graduação, pós-graduação, docentes e pesquisadores, utilizavam CDs, microfilmes e materiais contidos em acervos locais, já nos tempos atuais, nos deparamos com esses materiais digitalizados, disponibilizados em muitas instituições específicas de armazenamento de arquivos e fontes bibliográficas. Assim dizendo, "não só em história, mas em todas as áreas, é inegável o aumento da mediação da tecnologia digital nas pesquisas" (Mendes, 2023, p. 3). Nesse sentido, com relação a vida acadêmica, o advento das tecnologias digitais, superaram os limites encontrados ao acesso às investigações acadêmicas, sejam elas nacionais ou internacionais, e às fontes primárias, as quais para serem analisadas dependiam do deslocamento físico até os locais que se alocavam (Mendes, 2023, p. 4). Diante do exposto, "a digitalização de

fontes históricas e sua disponibilização de acesso online vem significando, dessa forma, a expansão das pesquisas e o trabalho coletivo entre instituições ao redor do mundo" (Mendes, 2023, p. 4), ou seja, possibilitando ultrapassar as limitações de informações a serem acrescentadas no trabalho.

Portanto, não causa impacto, aos pesquisadores e os historiadores, a possibilidade de trabalhar com fontes digitais. Para alguns deles, esse novo tipo de trabalhar com as fontes, acaba se tornando algo invasivo, no entanto, não se pode negligenciar de que, anteriormente, se despendia horas, dias, meses em locais fechados, como bibliotecas e arquivos. Agora, dentro da própria residência, são acessados os documentos desses locais, independentemente de seus horários de funcionamento.

Nessa perspectiva, a era digital vem contribuir com as investigações científicas em todos os campos de pesquisa. Com relação aos campos de investigação em História da Matemática e História da Educação Matemática, consideramos, analogamente, que, a digitalização de documentos e as várias formas de acessar arquivos online, remodelaram a maneira de como os pesquisadores abordam e interpretam a história.

No entanto, muitos os pesquisadores utilizam as ferramentas digitais, mas não são capazes de explicitar em suas pesquisas um roteiro teórico-metodológico a respeito desta temática. Algumas lacunas precisam ser preenchidas e estão sendo incialmente estudadas. No âmbito nacional, de acordo com Almeida (2011, p. 11),

> a quantidade de pesquisas de mestrado e doutorado em História que utilizam as fontes digitais ainda está muito aquém do potencial oferecido por este suporte documental. Certamente tal resistência está relacionada, em parte, com a herança metodológica positivista que privilegia os 'papeis' oficiais.

Para romper com esse paradigma, faz-se necessário maiores informações que indiquem o quanto são relevantes as contribuições deste formato de pesquisa no âmbito das investigações científicas, tanto em História da Matemática quanto em História da Educação Matemática.

Partindo do que foi delineado, viemos por meio deste trabalho, num primeiro momento, contextualizar de quais maneiras os arquivos digitais contribuem como fontes de pesquisa ao campo de investigação em História da Matemática e História da Educação Matemática. Por ora, exemplificamos as contribuições dos arquivos digitais, por meio da tese doutoral de uma das autoras[3] no qual, para sua elaboração, foram utilizados alguns formatos de arquivos digitais e, também, o Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat), um repositório digital, no qual contém uma vasta produção acadêmica-científica para consultas e pesquisas, tanto em História da Matemática quanto em História da Educação Matemática.

Outra finalidade é apresentar os procedimentos desta pesquisa, por meio de consulta aos trabalhos acadêmicos elaborados no Grupo de Pesquisa em História da Matemática[4], da Unesp de Rio Claro. Pretendemos analisar nessas pesquisas os tipos de arquivos ou fontes digitais utilizadas, o período que começam a surgir e, por fim, demonstrar esses dados em tabelas e gráficos, e, concluir, as contribuições dos arquivos digitais para o desenvolvimento significativo nas pesquisas[5].

[3] Para esta primeira versão, não faremos a referência do trabalho para manter o anonimato do autor.

[4] Escolhemos o Grupo de Pesquisa em História da Matemática pelas autoras serem membros do grupo. Este grupo foi criado em 1995, pelo professor Sergio Roberto Nobre e teve como colaboradores a professora Rosa Baroni e o professor Marcos Teixeira.

[5] No decorrer da pesquisa, marcaremos entrevistas com alguns autores das pesquisas, para relatar o quanto foi relevante utilizar os

Nesse contexto, enfatizaremos, de maneira geral, as expectativas desse trabalho com sua respectiva continuidade, a saber: *como a era digital contribuiu/contribui para os trabalhos acadêmicos da área em História da Matemática e História da Educação Matemática? Quais os principais tipos de arquivos digitais utilizados? Em qual período essas fontes começaram a fazer parte desses trabalhos? Qual foi o avanço da utilização dessas fontes nesses trabalhos?*

REFERENCIAL TEÓRICO

O nosso trabalho, por se tratar da utilização dos arquivos digitais nas investigações científicas, especificamente nas áreas de História da Matemática e História da Educação Matemática, foi baseado, num primeiro momento, nos conceitos e nos conteúdos que estão relacionados às áreas da Arquivologia e da História Digital[6].

Estamos passando por uma evolução tecnológica, principalmente, quando o assunto é a Internet, sobretudo, depois de 2019, quando nos deparamos com a pandemia da COVID-19, onde os espaços, considerados as principais formas de acondicionar vastas produções de consultas e fontes, como acervos, centros de memórias e bibliotecas, ficaram fechados. Assim, uma das maneiras encontrada foi tornar esses locais em ambientes virtuais, para que se consentisse uma nova maneira de trabalho aos pesquisadores, docentes e alunos.

Dessa forma, aumentaram as consultas e a utilização de fontes digitais para a escrita da história, gerando uma discussão acerca do assunto, a saber: os historiadores não estão, ainda, preocupados com reflexões metodológicas do uso dos arquivos digitais como fonte de pesquisa. Entendemos que é relevante detalhar os métodos e recursos tecnológicos empregados para elaborar a pesquisa, bem como, explicitar as suas experiências e dificuldades encontradas em seu desenvolvimento. Tal discussão se associa com a ideia de Brasil e Nascimento (2020, p. 216), visto que, para esses autores

> Os historiadores têm utilizado tantas ferramentas digitais em tão variadas etapas do processo de pesquisa, análise, escrita, assim como na elaboração de curso, aulas, palestras, *workshops,* que talvez a pergunta correta a fazer seja qual história não é digital. Por isso mesmo, acreditamos na necessidade de um "*upgrade*" teórico-metodológico entre os historiadores, tanto na pesquisa quanto na formação de novos pesquisadores e professores de história, que enfrentarão as salas de aula repleta de estudantes imersos no "mundo virtual".

No nosso caso, ao traçarmos a metodologia, investigamos referenciais teóricos que nos auxiliassem a compreender como as mídias digitais estão influenciando nas pesquisas em História da Matemática e História da Educação Matemática.

Para tanto, trataremos aqui, da História Digital, a qual tem por finalidade contextualizar o cenário no qual nosso trabalho está inserido, tendo em vista que, falar de mídias digitais como fontes de pesquisa estão presentes nesta nova perspectiva da tarefa do historiador. Poucas são as referências, cujo motivo buscamos entender por meio de Burton (2005, p. 207) *apud* Almeida (2011, p. 30) nos esclarecendo que

arquivos digitais e se sabem identificar o que/quais foram os arquivos digitais utilizados.

[6] Não abordaremos, neste texto, as concepções teóricas da História Digital. No entanto, necessitamos citá-la, uma vez que, muitas de suas diretrizes, estão presentes nesta pesquisa.

> [...] História Digital é algo mais que *scanear* artigos acadêmicos e coloca-los *online* ou publicar anotações de curso na *web.* História Digital é a revolução na profissão histórica que mudará a maneira que a história é feita em todos os níveis de estudo e ensino e através das bibliotecas e bases de dados que os historiadores usam em seu trabalho diário. Ao incorporar o tremendo poder do computador às práticas e metodologias do historiador, o resultado deve ser uma história melhor.

Embora estejamos incluindo a História Digital, a qual detém os conceitos referentes ao âmbito digital, vimos a necessidade de compreender alguns conceitos relacionados ao que pertence o contexto *analógico*. Nesse sentido, pesquisamos os termos que dizem respeito às fontes ou arquivos por meio da área da Arquivologia, tanto para o contexto *analógico* quanto para o digital. Para tanto, nos baseamos em Bacellar (2008), Almeida (2011), Dos Santos e Flores (2016), Coelho (2023), IBICIT (2022), Arquivo Nacional (2005).

De posse dessas referências, consideramos ter condições de realizar uma breve apresentação da proposta da nossa pesquisa. Tendo em vista esse número reduzido de trabalhos acerca da utilização de fontes digitais, especificamente a área de História, nos deparamos, também, com a falta de argumentos teórico-metodológicos, pois

> Os primeiros trabalhos que utilizam documentos digitais são muito recentes e, de uma maneira geral, não realizam esta tarefa. Para que que os historiadores aceitem definitivamente os documentos digitais enquanto fontes primárias, é necessária a sistematização teórica e metodológica que vai pautar esta prática. Isto só será concretizado quando houver um número significativo de pesquisas que utilizem fontes digitais. O método será construído analisando os erros e acertos efetuados nesse processo. Entretanto, a escassez de referenciais não pode justificar uma falta de preocupação com o método (Almeida, 2011, p. 11).

Nessa perspectiva, dissertaremos os procedimentos adotados para a elaboração desta investigação científica, como também as perspectivas de elaboração dos caminhos a serem percorridos para contribuições com informações relevantes a História Digital.

METODOLOGIA

O procedimento adotado para a elaboração dessa pesquisa foi procurar a existência de outros trabalhos semelhantes à nossa temática. Dessa maneira, encontramos as pesquisas intituladas *Arquivos Digitais na Pesquisa de História da Educação Matemática: possibilidade e limitação na produção curricular*[7]*; Arquivologia e História da Educação Matemática: reflexões sobre a utilização de arquivos digitais*[8]*; Autenticidade dos arquivos digitais nas pesquisas históricas da educação matemática*[9]*,* elaboradas por Domingues, Diogo Machado[10]; Domingues, Jonathan Machado[11]. Por meio destes trabalhos, nos foi possível obter as referências bibliográficas para pesquisa.

[7] História da Produção Curricular em Matemática: saberes para o ensino e formação de professores. XX Seminário Temático Internacional. Osasco – São Paulo, 25 a 27 de maio de 2022. GHEMAT-Brasil. Disponível em: <https://anais.ghemat-brasil.com.br/index.php/STI/article/view/147>. Acesso em 22 de dezembro de 2024.

[8] HISTEMAT, SBHMat, vol. 8, p. 1-17, 2022. Disponível em:<https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/482>. Acesso em 22 de dezembro de 2024.

[9] Revista Convergências: estudos em Humanidades Digitais, vol. 01, n. 01, p. 16-31, jan-abr, 2023. Disponível em: <https://periodicos.ifg.edu.br/cehd/article/view/78>. Acesso em 22 de dezembro de 2024.

[10] Graduado em Arquivologia pela Universidade Federal Fluminense (UFF).

[11] Mestre em Educação Científica e Tecnológica Da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

No decorrer dos estudos, nos deparamos com a necessidade de compreendermos alguns conceitos, os quais fazem parte da Arquivologia, a saber: o que são documentos digitais e arquivos digitais. No entanto, Bacellar (2008), nos exemplifica alguns documentos relevantes, presentes nas principais instituições arquivísticas que conservam acervos de caráter permanente. Dentre elas, este autor destaca os documentos contidos nos arquivos do Poder Executivo, Poder Legislativo, Poder Judiciário, cartoriais, eclesiásticos e privados, abrindo um leque para podermos conhecer os principais tipos de documentos existentes nessas instituições, como, também, a forma que estes se encontram nesses locais e suas principais características, nos permitindo determinar em qual nosso trabalho se estrutura, que no caso, são os arquivos privados e destacamos como sendo os documentos particulares de indivíduos, famílias, grupos de interesse ou empresas (Bacellar, 2008). Ainda de acordo com este autor

> no Brasil não há uma prática corriqueira de preservação documental privada, e as notícias de destruição de importantes conjuntos documentais infelizmente não são raras [...] muita documentação, no entanto, permanece nas mãos de famílias ou de empresas (ou acaba destruída por herdeiros desinteressados). Cabe ao historiador investigar e localizar onde estão preservados, sob a guarda de quem, e buscar contatos para tentar ter acesso a esses acervos tão preciosos (Bacellar, 2008, p. 42).

Por isso, consideramos que, nestas situações, são imprescindíveis os recursos da era digital. Os historiadores, ao resgatar tais documentos, tem a possibilidade de os transformar em mídias digitais, contribuindo para a preservação desses documentos e conservando a informação coletada à sua pesquisa.

Com a finalidade de explanar sobre a documentação digital, constatamos a necessidade de nos reportar a ideia de *documento*. Para tanto, Almeida (2011, p. 17), nos define que

> [...] o objetivo é enfatizar que o documento é o registro da expressão da experiência humana, em suas mais variadas manifestações, independente de seu suporte material. Sendo assim, podemos considerar como "documento histórico" uma enorme variedade de registros da atividade humana: escritos dos mais variados tipos, logicamente, mas também música, arquitetura, palavra oral, pintura, escultura, teatro, fotografia, cinema, iconografia, vestuário etc.

E complementa dizendo que *documento digital*

> [...] é aquele documento – de conteúdo tão variável quanto os registros da atividade humana possam permitir – codificado em sistema de dígitos binários, implicando na necessidade de uma máquina para intermediar o acesso às informações. Tal máquina é, na maioria das vezes, um computador (Almeida, 2011, p. 17).

De uma maneira mais técnica, utilizando os referenciais da Arquivologia, de acordo com o Dicionário Brasileiro de Terminologia Arquivística (DBTA) (Arquivo Nacional, 2005), definimos que *documento* e *documento digital* são, respectivamente,

> Documento: unidade de registro de informações, qualquer que seja o suporte ou formato.

> Documento Digital[12]: documento codificado em dígitos binários, acessível por meio de sistema computacional.

Observamos que tanto para Almeida (2011) quanto para o DBTA, documento e documento digital possuem definições semelhantes. Portanto, um documento digital é um documento representado em um outro tipo de formato, o qual é considerado como uma fonte primária.

A partir desses conceitos, identificamos ser relevante compreender o que é uma fonte primária, na era digital. Será que toda fonte digital é uma fonte primária? Existe diferença entre fonte digital e fonte digitalizada? Qual termo utilizar para proceder a descrição do método em uma pesquisa histórica?

Ainda assim, buscamos definir o que são as fontes digitais, e seguindo com Almeida (2011), nos informa que existem dois tipos básicos de fontes digitais em uma pesquisa histórica: as fontes primárias e as *não- primárias* e que, ainda, inserido nessas categorias, existem dois tipos de documentos: "não-primários digitais", e primários digitais, o qual é subdividido em duas subcategorias: "os documentos primários digitais exclusivos" e os documentos primários digitalizados.

Com relação às fontes *não-primárias* digitais, as quais correspondem aos documentos *não-primários* digitais, podemos dizer que são as edições eletrônicas de *Papers,* artigos, dissertações de mestrado e doutorado, revistas científicas nacionais e internacionais, que podem ser consultadas através da internet. Já o segundo tipo de fontes digitais, se relaciona com os documentos primários, os quais são classificados em *documentos primários digitais exclusivos* e os *documentos primários digitalizados*. O primeiro diz respeito àqueles documentos que o único suporte que possuem é o digital, e que as informações produzidas são disponibilizadas em formato digital e divulgadas na internet, como é o caso dos sites, blogs, chats, e-mails, redes sociais com suas postagens, plataformas de compartilhamento de vídeos etc. O segundo, está diretamente ligado aos documentos digitalizados, produzidos por meio da digitalização da documentação física contida em seus locais de armazenamento, que pode ser a avaliação de algum conteúdo matemático de um aluno de alguma instituição escolar do século XIX (Almeida, 2011).

Percorremos esses caminhos com o objetivo de expor nossas perspectivas de trabalho com relação aos arquivos digitais e contextualizar as suas contribuições como fontes de pesquisas às áreas de História da Matemática e História da Educação Matemática. Como historiadores, pertencentes a esta era digital, precisamos saber determinar as diferenças entre fontes digitais e fontes virtuais, para explicitarmos compreensivelmente a metodologia desempenhada na pesquisa.

Com a expansão digital, um novo caminho pode ser explorado pelos historiadores, de maneira que

> [...] o uso da *internet* como meio de difusão corrobora para o aumento do acesso às fontes de pesquisa, gerando maior visibilidade aos repositórios institucionais e temáticos, e consequentemente, aumentando o acesso (visualização e *download*) aos documentos arquivísticos digitais (Dos Santos; Flores, 2016, p. 125).

[12] No DBTA consta que documento digital e arquivo digital são sinônimos, possuem o mesmo significado.

Dos Santos e Flores (2016) nos apresentam um outro recurso virtual para obtermos fontes que servem de parâmetros às pesquisas acadêmicas. Esses autores estão se referindo aos repositórios institucionais, no nosso caso, os repositórios digitais[13], importantes por serem adequados na preservação dos documentos e de que "as sociedades contemporâneas têm a perspectiva de que os registros produzidos estejam acessíveis no longo prazo" (Dos Santos, Flores, 2016, p. 126). Corroborando ainda com esses autores, "o público pesquisador que frequenta as bibliotecas começa a acessar bibliotecas digitais e revistas científicas online; do mesmo modo, os pesquisadores dos arquivos estão acessando documentos digitais, sejam eles, digitalizados ou não-digitais" (p. 127-128). Os repositórios digitais fazem esse papel ao fornecer materiais acessíveis e autênticos, além de apresentar um sistema de pesquisa confiável, contribuindo significativamente às pesquisas acadêmica-científicas.

Diante do exposto, a concepção dessa investigação se desenvolveu no âmbito de compreender a relevância dos arquivos digitais como fontes de pesquisa, no sentido de que, uma das autoras, deste trabalho, na elaboração de sua tese doutoral, utilizou as fontes digitais, por meio de repositórios digitais. Sem esse recurso, seu trabalho possivelmente ficaria restrito e faltando informações. O outro objetivo desse texto, é destacar um repositório digital, o qual é útil a consultas para pesquisas científicas sobre História da Matemática e História da Educação Matemática. Dessa maneira, em seguida, evidenciamos os procedimentos adotados por essa autora e a forma que utiliza os arquivos digitais em sua pesquisa.

CAMINHOS TRILHADOS NAS PESQUISAS: RASTREANDO AS FONTES

Arquivos institucionais virtuais têm aberto um leque de possibilidades aos pesquisadores em História da Educação, História da Educação Matemática, e, em História da Matemática. Desse modo, estes arquivos têm possibilitado um aumento significativo na produção historiográfica e troca de experiências. Lopes (2020) ao estudar uma escola para moças nas primeiras décadas do século XX recorre ao repositório temático, referente à História da Educação Matemática, da Universidade Federal de Santa Catarina, especificamente, os livros textos de Matemática do supracitado período. Outro acervo institucional digital que a pesquisadora teve acesso foi o repositório do Laboratório de Imagens – Digitalização de Documentos – LABIM, arquivo institucional digital, ligado ao Departamento de História da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN, o qual conta com um rico acervo sobre a História da Educação do Rio Grande do Norte. Entre estes, os acervos das subcomunidades; como exemplo, os materiais encontrados no Instituto Tavares de Lyra, documentos do IHGRN, acervo fotográfico, documentos sobre Nestor Lima e Manoel Dantas.

A Hemeroteca da Biblioteca Nacional, disponibiliza um rico acervo digital que possibilita aos pesquisadores terem acesso a um número significativo de jornais e revistas, fotografias. Nessa direção Lopes (2019, 2020 e 2021) ressalta que os jornais presentes na Hemeroteca da Biblioteca Nacional trouxeram informações relevantes para a compreensão de como se deu a influência das missionárias presbiteriana ao ensino de Álgebra e Desenho na Escola Doméstica de Natal de 1918 a 1924. Também as relações estabelecidas entre o ensino agrícola belga e o ensino de economia do-

[13] Os Repositórios Digitais (RDs) são dados de bases online que reúnem de maneira organizada a produção científica de uma instituição ou área temática. Os RDs armazenam arquivos de diversos formatos. Ainda, resultam em uma série de benefícios tanto para os pesquisadores quanto às instituições ou sociedades científicas, proporcionam maior visibilidade aos resultados de pesquisas e possibilitam a preservação da memória científica de sua instituição. Os RDs podem ser institucionais ou temáticos. Os repositórios institucionais lidam com a produção de uma determinada instituição. Os repositórios temáticos com a produção científica de uma determinada área, sem limites institucionais (IBICT, 2022).

méstica no Brasil. A autora em seu estudo destaca várias tabelas com periódicos os quais teve acesso, como o Quadro 1, que apresenta jornais que consultou na Hemeroteca da Biblioteca Nacional.

Quadro 1 - Jornais consultados na Hemeroteca da Biblioteca Nacional

PERÍODO	JORNAIS CONSULTADOS	PERÍODO	JORNAIS CONSUTADOS
1910 – 1959	Diário de Pernambuco (PE)	1919	O Jornal (RJ)
1930 – 1939	Diário de Notícias (RJ)	1902 – 1953	O Malho (RJ)
1935 – 1952	A Ordem (RN)	1872 – 1919	A Província: órgão do Partido Liberal (PE)
1835 – 1930	Colleção das leis Proviciaes de Mato Grosso	1920 – 1929	O Paiz (RJ)
1910 – 1919	Jornal do Commercio (RJ)	1858 – 1938	Jornal de Recife (PE)
1909 – 1922	Jornal do Commercio edição da tarde (RJ)	1890 – 1930	Relatório dos Presidentes dos Estados Brasileiros (RN)
1905 – 1979	Jornal do Commercio do Amazonas (AM)	1890 – 1930	Mensagens do Governador do Rio Grande do Norte para a Assembleia (RN)

Fonte: Hemeroteca da Biblioteca Nacional.

A busca por documentos, informações e pistas, impulsiona o pesquisador a procurar indícios de seu estudo em fontes diversas. Lopes (2020) pondera em sua pesquisa que os arquivos internacionais digitais, especificamente, em Salamanca e Madrid foram de grande relevância a sua pesquisa doutoral. Assim, acessou os documentos do centro de memórias da Junta para Ampliação de Estudos e Investigações Científicas – JAE. Entre os documentos analisados constam: os anais da JAE; arquivos; exposições e, documentação referente comemoração aos 100 anos da instituição. Analisou-se alguns dos manuais escolares que constam no Centro de Investigación Manuales Escolares – Archivo MANES.

No que se refere aos arquivos internacionais digitais, apresenta-se alguns que trazem contribuições a História da Matemática, entre estes: o Repositório Documental GREDOS da Universidade de Salamanca, Espanha. O qual está estruturado em quatro grandes áreas: biblioteca digital; repositório científico; repositório docente e arquivo institucional. A biblioteca digital reúne as coleções históricas e documental de caráter patrimonial. De modo que vários manuscritos que consta na Biblioteca Histórica da Universidade de Salamanca foram digitalizados e disponibilizados no GREDOS. Entre livros raros que podemos encontrar se destaca o texto: *Elementa geometriae, versio et expositio Campani Novariensis*, Autor: Euclides. Manuscrito número 221 da Biblioteca Histórica da USAL. Data de publicação: 1201 – 1400.

Encontra-se nessa lista a Biblioteca Digital Hispánica que possibilita o acesso livre e gratuito de inúmeros documentos digitalizados, entre estes, conta com livros impressos, manuscritos, desenho, folhetos, fotografias, atlas, jornais e revistas. Destaca-se: a *DIGIVATLIB* – Coleções Digitalizadas da Biblioteca do Vaticano (Manuscritos, incunábulos, materiais de arquivo e inventários); *Gallica*–Biblioteca digital da Biblioteca Nacional da França, como podemos constatar no Quadro 2:

Quadro 2 - Revistas Consultadas na Hemeroteca da Biblioteca Nacional

Revistas	Período que circulou com notícias sobre Escola Doméstica de Natal
America Latina: Revista de Artes e Pensamentos (RJ)	1910 – 1919

Revista Nacional de Educação (RJ)	1932 – 1933
Revista de Imigração e Colonização (RJ)	1940 – 1955
Cultura Política	1941 – 1945
ABC: Política, Atualidades, Questões Sociaes, Lettras e Artes (RJ)	1915 – 1934

Fonte: Hemeroteca da Biblioteca Nacional

Este caso, podemos exemplificar como os arquivos digitais contribuem com informações e fontes de pesquisas para trabalhos acadêmicos, constando uma investigação inserida na área de História da Educação Matemática.

UM CASO DE REPOSITÓRIO DIGITAL: CONTRIBUIÇÃO DE FONTES DE PESQUISAS DIGITAIS ÀS ÁREAS DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Um outro ambiente virtual que auxilia os historiadores a encontrarem fontes de pesquisas para contribuir com informações relevantes e de confiança aos seus respectivos trabalhos acadêmico-científicos, é o repositório digital temático sobre História da Matemática e História da Educação Matemática, denominado como Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat) e

> Se constitui como um acervo de informações descritivas e analíticas sobre as produções científico-acadêmica desenvolvidas no Brasil a partir de 1990. Destacando que tais produções de História da Matemática, se subdividem em tendências como História e Epistemologia da Matemática (HEpM), História da Educação Matemática (HEdM) e História para o ensino da Matemática (HEnM) (Bracho; Mendes, 2019, p. 164).

O CREPHIMat, atualmente, possui, aproximadamente, 2100 trabalhos acadêmicos, dentre eles destacamos artigos, anais de congressos, materiais didáticos, livros de minicursos elaborados para os Seminários Nacional de História da Matemática (SNHM), produtos educacionais, teses e dissertações.

Nessa perspectiva, decidimos por exemplificar esse repositório, por possuir uma vasta quantidade de arquivos e fontes digitais que podem auxiliar em pesquisas acadêmica-científicas em História da Matemática e História da Educação Matemática, no que diz respeito às produções de pesquisadores brasileiros.

Nosso interesse, também, de apresentar o CREPHIMat, é por utilizar nessa pesquisa em estruturação. Pretendemos, por meio desse repositório digital, acessar as dissertações e teses e as analisar, identificando quando as fontes digitais começaram a ser utilizadas e, dentre elas, quais os tipos. Desta forma, a seguir, discorreremos quais são as perspectivas de continuação desse trabalho.

PERSPECTIVAS DE CONTINUIDADE DA PESQUISA: UMA BREVE DESCRIÇÃO

A finalidade desse texto, que ora apresentamos, é mostrar as perspectivas de continuidade da proposta de uma pesquisa mais abrangente sobre como os arquivos ou as fontes digitais auxiliaram no desenvolvimento das pesquisas acadêmica-científicas nas áreas de História da Matemática e da História da Educação Matemática. Nesse sentido, num primeiro momento, escolhemos selecionar os trabalhos de dissertações e teses do Grupo de Pesquisa de História da Matemática, da Unesp de Rio Claro, pelo fato das autoras serem membros desse grupo. Pretendemos analisar esses trabalhos desde o primeiro a ser defendido, e constatar quando os arquivos ou as fontes digitais, começaram a ser utilizadas e quais os tipos estão presentes. Para tanto, verificaremos os resumos e as referências, contabilizar os dados e os apresentar em forma de gráficos e tabelas.

De posse dessas informações, apresentaremos a partir de qual momento a era digital se insere no campo de pesquisa de História da Matemática e História da Educação Matemática, bem como, quais os tipos de fontes digitais ou arquivos digitais que foram utilizadas nos trabalhos. O período selecionado é desde a criação desse grupo, em 1995, finalizando em 2024, com a primeira dissertação defendida em 1997.

Selecionaremos alguns pesquisadores para os entrevistar e elaboraremos um questionário, fazendo perguntas básicas de como as mídias digitais auxiliaram em seus trabalhos, se caso utilizou. Se não utilizou, quais os impactos em sua pesquisa, se houve algum tipo de limitação e se, fosse a situação, existisse a facilidade do acesso aos arquivos ou fontes pelos meios digitais, o trabalho teria ficado mais completo. Essas são uma das perguntas que serão realizadas, e a seleção desses pesquisadores serão aqueles que ainda atuam na área e que iniciaram no grupo e, posteriormente, de alguma forma, retornaram, já que muitos realizaram mestrado e doutorado, em diferentes períodos. A cada dez anos, selecionaremos uma quantidade significativa. Para obter essas informações utilizaremos parte do repositório digital CREPHIMat e do currículo lattes, e contatos serão via *e-mail*.

Num outro momento, após realizada esta primeira parte, pretendemos fazer um levamento dos textos apresentados nos minicursos ministrados nos SNHMs e, seguir os mesmos procedimentos adotados na parte anterior.

Como esta é uma proposta inicial, não estipulamos um cronograma e um planejamento, no entanto, estamos traçando procedimentos para a realização desse estudo, já que existem poucos trabalhos sobre a História Digital, e pretendemos contribuir com informações relevantes para este tema, buscando mostrar o quanto os arquivos e as fontes digitais mudaram os paradigmas das maneiras de pesquisar dos historiadores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o advento das tecnologias, principalmente, quando o assunto são as mídias digitais, o historiador se acha com novas formas de pesquisar e, consequentemente, os procedimentos de seu trabalho serão de mais fáceis acesso as fontes, podendo, dessa forma, ampliar seus campos de investigação. Há algumas décadas, fazia-se necessário viajar e se deslocar a museus, arquivos e/ou acervos públicos, muitas vezes, passando longos períodos para coletar os dados e, muitas vezes, enfrentando a precariedade de armazenamento dos documentos ou, até mesmo, a falta deles. Atualmente, muitos desses obstáculos são enfrentados, com o que podemos chamar da era digital, onde

os historiadores se deparam com os documentos arquivísticos digitais, os quais podem ser acessados em qualquer lugar que se encontre. Porém, ir pessoalmente a um acervo ou arquivo, oportuniza experiências exclusivas, sem contar com as vivências e o quanto é fascinante ter em mãos um documento a ser analisado.

Nessa perspectiva, com esse trabalho, procuramos mostrar o quanto a era digital está adentrando na vida dos pesquisadores e modificando a forma de pesquisar, de que há uma necessidade de um debate metodológico mais detalhado quando se trata de utilizar as fontes ou os arquivos digitais como fonte de pesquisa para os trabalhos acadêmico-científicos. Apresentamos, também, que para se elaborar uma pesquisa de informações relevantes e de confiabilidade, existem os repositórios digitais, os quais auxiliam na busca de informações, além de possibilitar conhecer as produções de vários territórios, tanto nacionais quanto internacionais.

Finalizamos refletindo que, os historiadores não podem omitir a existência da presença da era digital no ambiente acadêmico-científico e de que precisam se adaptar às novas tecnologias e perceber o quanto essa nova forma de pesquisar possibilita o desenvolvimento das investigações científicas sejam elas históricas ou de outras áreas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Fábio Chang de. O historiador e as fontes digitais: uma visão acerca da internet como fonte primária para pesquisas históricas. In: **Revista Aedos**.[s.l.], v. 3, n. 8, 2011. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/index.php/aedos/article/view/16776. Acesso em: 20 dez. 2024.

ARQUIVO NACIONAL (BRASIL). **Dicionário Brasileiro de Terminologia Arquivística**. Rio de Janeiro: Arquivo Nacional, 2005. Disponível em: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.gov.br/conarq/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/dicionrio_de_terminologia_arquivistica.pdf. Acesso em 20 dez. 2024.

BACELLAR, Carlos. Uso e mau uso dos arquivos. In: PINSKY, Carla Bassanezi (org.). **Fontes Históricas**. São Paulo: Contexto, 2008, p. 23-79.

BRACHO, Luís Andres Castilho; MENDES, Iran Abreu. O CREPHIMat como um ambiente virtual sobre as pesquisas em História da Matemática. In: **REMATEC***,* Belém, v. 14*,* n. 32, p. 163–176, 2019 DOI: 10.37084/REMATEC.1980-*.* Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/159. Acesso em: 23 dez. 2024.

BRASIL, Eric; NASCIMENTO, Leonardo Fernandes. História Digital: reflexões a partir da Hemeroteca Digital Brasileira e do uso de CAQDAS na reelaboração da pesquisa histórica. In: **Estudos Históricos***.* Rio de Janeiro, v. 33, n. 69, p. 197-219, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S2178-14942020000100011. Acesso em: 20 dez. 2024.

COELHO, Fernando Mendes. Hipertexto e o trabalho do historiador: possibilidades de investigação mediante fontes virtuais. In: **Convergências: estudos em Humanidades Digitais – CONEHD**, [s.l.], v. 1, n. 3, 2023. Disponível em: https://doi.org/10.59616/cehd.v1i03.237. Acesso em: 20 dez. 2024.

CONSELHO NACIONAL DE ARQUIVOS (CONARQ). **Glossário – Documentos Arquivísticos Digitais**. 7ª versão. Rio de Janeiro: Arquivo Nacional, 2016. Disponível em: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.gov.br/conarq/pt-br/assuntos/camaras-tecni-

cas-setoriais-inativas/camara-tecnica-de-documentos-eletronicos-ctde/2016_CTDE_Glossario_V7.pdf. Acesso em: 20 dez. 2024.

DOS SANTOS, Henrique Machado; FLORES, Daniel. O documento arquivístico digital enquanto fonte de pesquisa. In: **Perspectivas em Ciência da Informação**, [s.l.], v. 21, n. 4, p. 121-137, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufmg.br/index.php/pci/article/view/23084. Acesso em: 20 dez. 2024.

INSTITUTO BRASILEIRO DE INFORMAÇÃO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA (IBICT). *Repositórios Digitais*. 2022. Disponível em: https://www.gov.br/ibict/pt-br/assuntos/tecnologias-para-a-informacao/copy_of_repositorios-digitais. Acesso em: 09 jan. 2025.

LOPES, Maria Maroni. Influência do ensino doméstico belga na formação docente da Escola Doméstica de Natal. In: DÍAZ, José María Hérnandes (org). **Influencias Belgas em la Educación Espanola e Iberoamerica**. 2ª Edição. Salamanca, v. 1, p. 463-482, 2019.

LOPES, Maria Maroni. **O Ensino de Matemática na Escola Doméstica de Natal:** contribuições para um diálogo sobre o papel da mulher norte-rio-grandense (1911?-1961). 2020. 332f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2020.

LOPES, Maria Maroni. Influência das missionárias presbiteriana no ensino de álgebra e desenho da Escola Doméstica de Natal (1918-1924). In: **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [s.l.], v. 8, n. 23, p. 550–564, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v8i23.5154. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5154. Acesso em: 8 mar. 2025.

MENDES, Caroline Garcia. Os arquivos digitais e a escrita da história a partir das fontes on-line. In: **Acervo.** [s.l.], v. 36, p. 1-13, 2023. Disponível em: https://revista.an.gov.br/index.php/revistaacervo/article/view/1978. Acesso em: 20 dez. 2024.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

I Seminário Nacional de História da Matemática: um resgate histórico

I National Seminar on the History of Mathematics: a historical review

Josinalva Estacio Menezes[1]
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Cícero Monteiro de Souza[2]
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

RESUMO

O I Seminário Nacional de História da Matemática foi um dos mais importantes eventos a nível nacional pelo fato de representar um marco para a pesquisa nas áreas história da matemática, da vida e obra de matemáticos e de história da matemática no ensino. Iniciou como um grupo de trabalho na Sociedade Brasileira de Educação Matemática, expandiu-se até tornar-se independente a partir de seus pesquisadores, completando 30 anos da sua edição em 2025. Neste trabalho, portanto, temos como objetivo geral fazer um resgate histórico do respectivo seminário, desde a concepção, passando pela estruturação até a sua realização, destacando sua importância para a comunidade acadêmica e respectivos desdobramentos. Metodologicamente, fizemos uma pesquisa bibliográfica nos documentos referentes à organização e as memórias dos pesquisadores, organizador e participante, respectivamente. Apresentaremos as origens e motivações do seminário, o conteúdo discutido no mesmo, os nomes em destaque dos participantes, e os acontecimentos posteriores a partir do evento. Concluímos fazendo um comentário sobre a importância dos seminários realizados desde o primeiro até este.

Palavras-chave: História. Matemática. Ensino. Educação. Matemáticos.

ABSTRACT

The 1st National Seminar on the History of Mathematics was one of the most important events at national level because it represented a milestone for research in the areas of history of mathematics, the life and work of mathematicians and the history of mathematics in teaching. It began as a working group at the Brazilian Society of Mathematics Education, expanded to become independent from its researchers, completing 30 years of its edition in 2025. In this work, therefore, our general objective is to provide a historical review of the respective seminar, from its conception, through its structuring to its completion, highlighting its importance for the academic community and respective developments. Methodologically, we carried out bibliographical research on documents relating to the organization and the memories of the researchers, organizer and participant, respectively. We will present the origins and motivations of the seminar, the content discussed in it, the highlighted names of the participants, and subsequent events following the event. We conclude by commenting on the importance of the seminars held from the first to this one.

Keywords: History. Mathematics. Teaching. Education. Mathematicians.

INTRODUÇÃO

Podemos considerar que a pesquisa em história da matemática no Brasil se faz presente desde a primeira metade do século passado. Desde os primeiros encontros de matemática relatados, na Bahia, Rio de Janeiro e São Paulo, a partir da década de 1930, e lembrados depois nas memoráveis edições especiais da revista Educação Matemática em Revista (EMER), a exemplo daquela concedida pela professora Maria Marta de Souza Dantas (Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2002b), esse movimento é retratado.

[1] Doutora em Educação com Pós-doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora Adjunta na Universidade Federal de Pernambuco–Centro Acadêmico do Agreste (UFPE-CAA), Caruaru, Pernambuco, Brasil. E-mail: jomene@bol.com.br.

[2] Mestre em Biometria pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Professor Adjunto do Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Pernambuco (UFRPE), Recife, Pernambuco, Brasil. E-mail: cmonteiro0507@ig.com.br.

Na segunda metade do século passado, intensificou-se o Movimento da Educação Matemática, que levou à realização dos primeiros Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) e, posteriormente, a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e as Sociedades Regionais nos estados, como a SBEM/PE, em Pernambuco.

Além dos fatos já citados, em Pernambuco, no início dos anos 1990, foi-se configurando a ideia da formação de um grupo de estudos em história da matemática liderado pelo Professor Doutor Fernando Raul de Assis Neto, que pretendia criar um programa de pós-graduação em Educação Matemática, na Universidade onde atuava, a Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), e difundir/divulgar a produção em eventos, como já vinha acontecendo com os Encontros Pernambucanos de Educação Matemática (EPEM).

O conjunto de esforços envidados culminou na realização do I Seminário Nacional de História da Matemática (I SNHM), foco deste trabalho.

Isso posto, o objetivo deste trabalho é fazer um resgate histórico do respectivo seminário, destacando sua importância para a comunidade acadêmica e os respectivos desdobramentos. Justificamos a validade desse trabalho por algumas razões.

Primeiro, o seminário agregou professores do ensino básico e outros já no contexto da universidade, tanto como acadêmicos, quanto como professores, na universidade que o realizou e em outras instituições de ensino superior (IES).

Em segundo lugar, o seminário incentivou professores e alunos a continuarem as pesquisas, o que se refletiu nos trabalhos que vêm sendo apresentados nos EPEM e em outros eventos de vulto nacional e internacional, como também locais sobre ou envolvendo história da matemática nas nuances citadas acima.

Em terceiro lugar, foi incluída na grade de disciplinas do curso de licenciatura em Matemática daquela universidade o componente curricular História da Matemática, seguida por outras universidades, institutos federais tecnológicos e faculdades, reforçando o incentivo ao uso da história no contexto matemático, tanto quanto à pesquisa como quanto ao ensino.

Finalmente, a partir daquele ano foi criado, no Departamento de Matemática da UFRPE, um programa de pós-graduação em ensino das ciências e matemática, que incluía a linha de pesquisa em história da matemática.

Assim, pretendemos fazer uma pesquisa documental com os formulários e impressos relativos ao seminário, e posterior discussão, com respeito ao conteúdo discutido no evento, e desdobramentos posteriores repercutidos em todo o Brasil.

Vamos também evocar nossas memórias de autores enquanto participante da organização, e participante do evento. Traremos finalmente, na conclusão, encaminhamentos advindos de nossa percepção sobre o tema.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Passamos agora a uma discussão das ideias principais que embasaram a pesquisa. Assim, discutiremos as duas vertentes mais ligadas à história até o tempo do evento em questão, e em seguida, as tendências da história no contexto matemático, o que inclui a história como atividade para o ensino.

A história da matemática: principais documentos agregadores da produção científica antiga

Segundo os pesquisadores Robertson e Stevenson, do site de história da matemática da Universidade de Saint Andrews, dentre os antigos documentos matemáticos conhecidos, o mais antigo deles é o papiro Rhind. Esse documento data de 1650 a.C., mas seu autor, Ahmes informa que o copiou de outro documento datado de duzentos anos antes, de modo que a estimativa é que o referido papiro tenha sido produzido em 1850 a.C. Ele correspondia a um caderno de um estudante: de um lado, continha fórmulas e símbolos matemáticos; do outro, uma lista de mais de 80 problemas envolvendo e refletindo a matemática da época. Após descoberto, teria sido comprado pelo egiptologista do Reino Unido chamado Henry Rhind, que deu o seu nome ao papiro, e mais tarde levou para o Museu Britânico em Londres.

Além de papiros feitos de linho ou pele de carneiro, a matemática registrada encontrada tem sido impressa em tábuas de argila, cascas de árvores, as próprias pedras e outros elementos disponíveis na época.

Lembremos a civilização grega, que produzia sua matemática muito ligada à necessidade de resolver problemas práticos, a exemplo dos mecanismos de defesa para as cidades gregas, e teve cinco séculos de produção matemática, registrada em destaque n'Os Elementos de Euclides e na Antologia Grega de Metrodorus.

Após essa época, a produção matemática ficou praticamente estagnada, reduzida a traduções para o latim e reprodução de textos já existentes; o conhecimento estava organizado em Aritmética e Geometria, o que durou toda a Idade Média.

Depois desse período, Montucla (1758), publicou a sua obra intitulada *Histoire des mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leurs origines jusqu'à nos jours; òu l'on expose le tableau & les développement de les principales découvertes, les contestations qu'elles ont fait nâitre, & les pricipaux traits de la vie des mathématiciens les plus célebres*, em quatro volumes, que organizou a matemática produzida até então.

Nesse contexto, vale lembrar Ozanam (1778) que lançou sua obra intitulada *Récréations Mathématiques et Phisiques* no século XVII com dois volumes, aumentada depois por Montucla para quatro volumes. A edição citada corresponde à oitava, e o seu primeiro volume é dedicado à matemática, dividido em Aritmética e Geometria. As recreações sobre aritmética incluem o problema do pagamento de terras e de trabalhos, remetendo às progressões geométricas, que hoje estão incluídas no contexto da Álgebra, especialmente no ensino médio. Já a Geometria remetia a Euclides, compreendendo Geometria Plana e Geometria Espacial.

Na primeira metade do século passado, destacamos os trabalhos liderados por Nicholas Bourbaki, os seminários Bourbaki, que buscavam acompanhar a matemática produzida no mundo. Ficou difícil, pois a produção matemática foi consideravelmente ampliada após a Idade Média e "explodiu" nos dois últimos séculos. Para se ter uma ideia, segundo Davis & Hersh (1985), em sua obra "A experiência matemática", traduzida pelo professor João Bosco Pitombeira, na década de 1980 eram demonstrados cerca de 100.00 novos teoremas matemáticos.

Jean Dieudonée (1978) publicou uma obra em dois volumes sobre o que ele chamou de *Breve História da Matemática*, compreendendo os séculos XVII e XVIII. Esta obra também tem sido referência para as pesquisas em história da matemática, sem tradução para o Português.

A partir da segunda metade do século passado, verificamos um aumento da produção de livros sobre a história da matemática que foram traduzidos para o Português, quando foi iniciada a inserção da história como disciplina nos cursos de licenciatura.

Destacamos aqui Boyer (1968), Eves (1997), mais recentemente, Katz (2010) traduzidos para o português e os brasileiros Lintz (1999, 2023), Roque (2012) e Contador (2023) com livros sobre história da matemática, adotados nos cursos de graduação.

A partir desse século, intensificaram-se os trabalhos de inserção de história como parte da atividade ensino, e também está sendo desenvolvida uma linha de pesquisa sobre história da educação matemática.

A HISTÓRIA NO ENSINO E A HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: FORMAS DE USAR A HISTÓRIA PARA AUXILIAR NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA.

Nas obras de história da matemática, constatamos que os autores têm se dedicado a descrever o desenvolvimento da produção matemática ao longo do tempo.

A partir do final do século passado, observamos uma tendência a inserir a história como parte da atividade de ensino, através da redescoberta, onde o conhecimento já adquirido pelo aluno, no sistema de ensino do qual participa, servirá de ponto de partida para chegar ao conhecimento novo para ele. Essas pesquisas têm sido compartilhadas em grupos de trabalho específicos de eventos internacionais, e eventos sobre o tema, como os Congressos Iberoamericanos de História da Matemática e os nossos Seminários Brasileiros de História da Matemática, que criou um eixo para o tema.

Mendes (2001) faz uma ampla discussão sobre o tema da história do ensino, que tem se ampliado e ganhou a adesão de outros pesquisadores, para o que podemos citar Mendes e Sá (2015), Mendes e Chaquiam (2009; 2015).

Assim, esses trabalhos têm-se feito presente em diversos eventos, o que permite aos pesquisadores e à comunidade acadêmica dedicada ao ensino de matemática novos elementos para o seu trabalho docente.

Um desses eventos foi esse que temos como tema e do qual trataremos doravante.

METODOLOGIA

De posse de documentos e depoimentos de alguns dos participantes do I Seminário Nacional de História da Matemática (I SNHM), como fichas de inscrição, folhetos e circulares de divulgação, livro de resumos e anais do evento, fizemos uma pesquisa bibliográfica documental, qualitativa exploratória descritiva, com base nas orientações teórico-metodológicas de Bodgan e Biklen (1982), e também Godoy (1995).

A justificativa para optarmos pela realização desse estudo com abordagem qualitativa, é a possibilidade de obtermos dados descritivos, no contato direto com a situação estudada, enfatizando mais o processo do que o produto, junto com a perspectiva dos participantes.

Para Liebscher (1998) essa abordagem ainda permite uma compreensão mais aprofundada com os objetos de pesquisas que estão envolvidos, incluindo uma tipologia descritiva, a qual fornece uma descrição das características de certos fenômenos.

Ainda nessa abordagem descritiva, Godoy, (1995), como uma valiosa técnica de abordagem de dados qualitativos, pode ser também utilizada para complementar informação obtida em outras fontes, e documentos de diversos tipos podem ser utilizados, visando a prover o pesquisador com dados complementares para a melhor compreensão do problema investigado (Godoy, 1995).

Descreveremos então as ideias fundamentais que levaram ao I SNHM, os contatos, a estruturação e organização, os trabalhos e autores apresentados e o conteúdo tratado. Resgatamos também imagens de alguns dos organizadores para ilustrar as informações e reforçar o trabalho. Passaremos aos resultados.

RESULTADOS

A pesquisa em história da matemática, na atualidade, tem sido divulgada, principalmente, em grupos de trabalho nos eventos de âmbito nacional e internacional. No Brasil, essas pesquisas potencialmente eram discutidas em um grupo de trabalho (GT) na SBEM.

Desse modo, um grupo de historiadores de matemática iniciou um movimento para a criação de eventos nacionais de história da matemática e posteriormente uma sociedade de história da matemática.

Os primórdios

Em Pernambuco, de acordo com as memórias de um dos autores deste trabalho, um grupo de pesquisadores incentivados pelo Professor Fernando Raul de Assis Neto, iniciou uma série de reuniões para discutir a história da matemática no Departamento de Matemática e Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Esse grupo incluía um dos autores e professores que aderiram à ideia. Vale ressaltar que neste período, o referido professor saiu para fazer o seu doutorado em história da Ciência fora do país, mas continuou as discussões da Alemanha.

Figura 1 - Foto do Professor Dr. Fernando Raul de Assis Neto

Fonte: Foto da página inicial do Currículo Lattes do Professor.

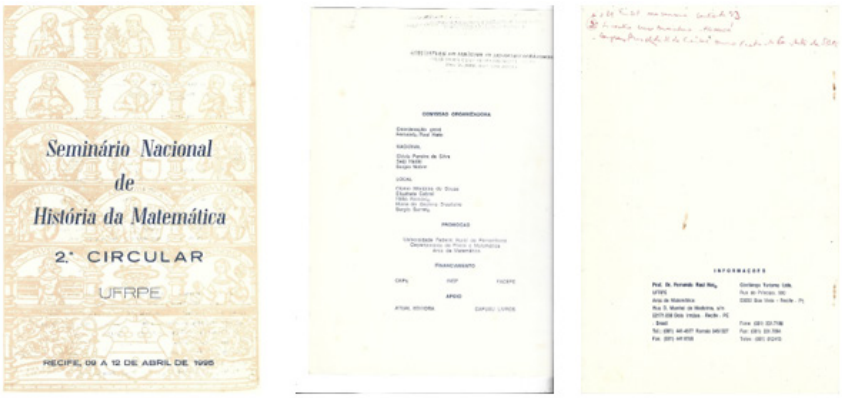
Logo após o III Encontro Nacional de Educação Matemática (III ENEM), que aconteceu em Natal/RN, a comunidade acadêmica de Pernambuco, mobilizou-se para realizar o I EPEM e, após sua terceira edição, o grupo, liderado pelo já citado professor, organizou e realizou o I Seminário Nacional de História da Matemática.

O professor também pretendia instituir na UFRPE um programa de pós-graduação na área de Educação Matemática, incluindo as pesquisas em história da matemática, e incentivava participantes do grupo a ingressarem da pós-graduação, o que veio a acontecer a partir de 1995. Isso iria demandar professores qualificados para compor o quadro docente da referida pós-graduação.

A estruturação

Novamente de acordo com a memória de um doa autores deste trabalho, para organizar o evento científico, foi instituída a comissão organizadora, sob a coordenação geral do já citado Professor Fernando Raul de Assis Neto, a comissão organizadora nacional, composta pelos Professores Clóvis Pereira da Silva, Seiji Hariki e Sérgio Nobre, a comissão local, formada pelos professores e professoras Cícero Monteiro de Souza, Elizabete Cabral, Hélio Nemésio, Maria do Socorro Brasileiro e Sergio Barreto. O evento foi promovido pela Área de Matemática do Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. A comissão também avaliou e selecionou os trabalhos.

Figura 2 - Segunda circular do evento: Capa, ficha técnica e contra-capa.



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

O evento contou com o financiamento do Conselho Nacional de Pesquisa-CNPq, o Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos (INEP) e a Fundação de Apoio à Ciência do Estado de Pernambuco (FACEPE). Teve ainda apoio da Atual Editora e a Capuxu Livros.

Como atividades, o evento teve conferências de abertura e encerramento, um coquetel de boas-vindas, duas sessões de conferências plenárias, dois minicursos, duas sessões de conferências paralelas e dois momentos livres. Foram programados ainda três seminários, correspondentes a atividades para três palestrantes renomados, os quais participariam de um debate com o público após suas falas.

Os temas gerais a serem abordados no evento foram:

- História da Matemática no Brasil
- A relação entre a História e a Pedagogia a Matemática
- História dos conceitos matemáticos

Foi programado para acontecer de 09 a 12 de abril de 1995. Em seguida, citamos os títulos e autores das atividades.

Figura 3 - Professor Ms. Cícero Monteiro de Souza (Celso) da UFRPE e da organização

Fonte: O autor.

Os Trabalhos e Os autores

De acordo com o documento correspondente à segunda circular, que trazia a programação definitiva, do evento, seguem as atividades e autores presentes no evento:

CONFERÊNCIAS:

1) 08.04.1995 (Domingo): Várious interpretations of Zenon's Paradoxes – Prof. Dr. Michael Otte – Universität Bielefeld

2) 09.04.1995 (Segunda-feira): O cálculo das variações no século XIX como fator de modernização da análise – Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio

3) 10.04.1995 (Terça-feira): A matemática no Brasil recente – Prof. Clóvis Pereira da Silva

4) 11.04.1995 (Quarta-feira): Le rapport entre mathématique et technique dans la première moitié du XVII sécle – Profª Dra. Evelyne Barbin.

MÍNICURSOS:

1) Um metro de história. Aspectos da introdução do sistema métrico no Brasil. Prof. Dr. Sérgio Hariki – IME-USP

2) A história da Geometria Analítica. Profª Drª Circe Mary Silva da Silva. Depto. de Matemática – UCSA

3) A história do cálculo infinitesimal. Prof. Dr. Sérgio Nobre. Depto de Matemática-UNESP.

4) Os Elementos de Euclides. Prof. Dr. Irineu Bicudo. Depto de Matemática-UNESP.

5) Evolução histórica para o ensino do sistema de numeração decimal. Prof. Ms. José Gattás Filho. Depto. de matemática – UFPA.

PALESTRANTES:

1) André Luis Mattedi Dias (UEFS) – Tacnicismo e Internalismo: Uma crítica aos fundamentos do ensino autoritário e reprodutivo da matemática.

2) Arlete de Jesus Brito (UNICAMP) – Arqueologia das geometrias não-Euclidianas: Um estudo histórico-pedagógico.

3) Aurino Ribeiro Filho (UFBA) – A modernização do ensino de matemática e física no Estado da Bahia

4) Cícero Monteiro de Souza (UFRPE) – A história da publicação do "Mélanges de Calcul Integral" (1882) de Joaquim Gomes de Souza (1829-1864)

5) Eduardo Sebastiani Ferreira (UNICAMP) A matemática Waimini-Atroani: tribo indígena do norte do Brasil.

6) Ednéia Poli Mignoni (UEL) – A trama ideológica do currículo: a visão do professor de matemática

7) Iran Abreu Mendes (UFPA) – A História da Matemática como suporte metodológico para o ensino – aprendizagem de matemática em cursos de formação de professores

8) John Fossa (UFRN)/Maria da Glória da S. e Silva (UFPI) – Contribuições para a história das

funções.

9) Odilon Otávio Luciano (USP) – A pirâmide inexistente, os logaritmos naturais e o teorema fundamental da Álgebra.

10) Paulo Figueiredo Lima (UFPE) – Algumas considerações sobre o conceito de grandeza.

11) Regina Flemming Damm (UFSC)/Werner Leonardo Damm (UFCS) – Epistemologia e Didática.

12) Robinson Moreira Tenório (UFBA) – O computador e o moinho: o uso da analogia na história e no ensino da informática.

13) Rosângela Nascimento (UFF) – Monumento à Matemática: A necessidade de explorar.

SEMINÁRIOS POR TEMA:

I–História da Matemática no Brasil

1) Circe Mary Silva da Silva (UCS): A Geometria Analítica nos livros – texto do Brasil do século XIX.

2) Clóvis Pereira da Silva (UFPR): Otto de Alencar Silva: um pioneiro esquecido?

3) João Bosco Pitombeira de Carvalho (PUC): Euclides Roxo e a Reforma Capanema.

4) Seiji Hariki (USP): Clairaut no Brasil

II–A relação entre a História e a Pedagogia a Matemática

1) Antônio Miguel (UNICAMP): As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores.

2) Carlos Roberto Viana (UFPR): Livros didáticos para a História da Matemática

3) John Fossa (UFRN): A História da Matemática como uma fonte de atividades matemáticas.

4) Maria Ângela Miorim (UNICAMP): O primeiro movimento modernizador no ensino de matemática.

III–História dos conceitos matemáticos

1) Fernando Raul Neto (UFRPE): A oposição entre grandezas positivas e negativas (1817) de Wilhelm August Förstermann.

2) Rubens G. Lintz (USP): Alguns problemas em aberto na matemática grega.

3) Sérgio Nobre (UNESP- Rio Claro): O conceito de grandeza infinitamente pequena.

Quanto aos conteúdos discutidos nas diversas atividades – conferências, seminários e minicursos – constatamos um total de trinta e três (33) trabalhos, nos temas gerais cabíveis. Assim, tivemos trabalhos que versaram sobre a discussão de conteúdo, outros sobre conceitos e ensino-aprendizagem e ainda outros que se debruçaram sobre as formas de ensino no aspecto histórico.

As conferências versaram sobre conteúdos tratados historicamente (3) e história da matemática no Brasil (1)

Dos cinco minicursos, quatro trataram sobre história de conteúdos matemáticos e um foi voltado para o ensino de um conteúdo ao longo da história (minicurso V).

Quanto às palestras, do total de treze, quatro versaram sobre a história da matemática no Brasil; quatro foram dedicados a discussão do desenvolvimento de conteúdo matemático e cinco foram voltados para o ensino de matemática com o auxílio da história.

Aí já notamos a existência de interesse no uso da história para além da evolução da construção do conhecimento matemático. Isso é importante, e reforçado por autores como Mendes (2001), para que a história pode ser um grande aliado para o ensino.

Finalmente, os trabalhos desenvolvidos nos seminários por tema, já foram assim organizados. Desse modo, tivemos quatro seminários voltados para a história da matemática no Brasil, focando matemática ou matemáticos, quatro voltados para história no ensino e três voltados para a história dos conceitos matemáticos.

Os resultados podem ser expressos no Quadro 1.

Quadro 1 - Distribuição dos trabalhos apresentados no I SNHM por área temática

Categoria de trabalho/Eixos temáticos	História da Matemática no Brasil	A relação entre a História e a Pedagogia a Matemática	História dos conceitos matemáticos
Conferências	1	0	3
Minicursos	1	1	3
Palestras	4	5	4
Seminários	4	4	3

Fonte: Os autores.

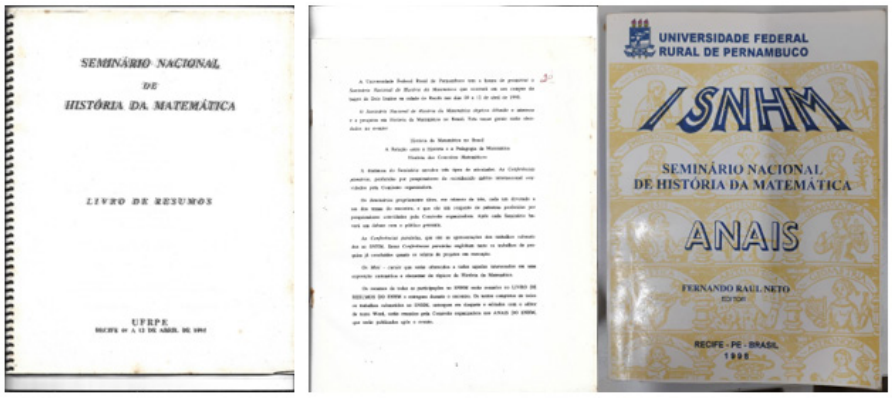
Comentando o quadro apresentado, observamos uma tendência a discutir a história da matemática no ensino, levando a um destaque quanto à importância e utilidade da compreensão do desenvolvimento histórico de conteúdo em relação à sequência daqueles presentes no currículo.

Em outras palavras, o conteúdo discutido/ensinado deve ser evocado para a compreensão do próximo, no nível de ensino no qual o estudante se encontra.

O tema tem se tornado um eixo de discussão e, como podemos ver, justifica a inserção cada vez maior do tema nos eventos científicos que divulguem a história no contexto matemático.

Mostramos em seguida os documentos que trazem os trabalhos citados acima.

Figura 4 - Livro de resumos, Página de apresentação e Capa dos anais do I SNHM.



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

O evento trouxe vários benefícios. Primeiro, permitiu uma interação entre pesquisadores relevantes, de várias partes do país, o que não seria possível no dia a dia. Essa interação traz uma troca de conhecimentos entre os que interagem, permitindo ampliar a bagagem acadêmica, trocar contatos para trabalhos e informações futuras, intercâmbios, avisos de novos eventos, e assim por diante.

Depois, os participantes de fora do Recife, tiveram a oportunidade de conhecer o local, efetuando passeios e visitas, conhecendo locais de cultura e conhecimento – inclusive histórico, pesquisar nas universidades locais e assim por diante. Finalmente, trouxe a possibilidade de trazer estímulos e novas ideias para futuros trabalhos, ou completar trabalhos relegados, às vezes descontinuados por falta de dados que os complementem.

No evento, os participantes receberam um exemplar impresso do livro dos resumos e outro exemplar dos anais, ficando os estudos compartilhados, e permitindo àqueles participantes e a outros pesquisadores consulta-los, o que pode auxiliar a gerar novos conhecimentos e estudos, ampliando o arcabouço de conhecimentos sobre História da Matemática,

CONCLUSÃO: DESDOBRAMENTOS E ENCAMINHAMENTOS

Neste trabalho tivemos como objetivo geral fazer um resgate histórico do respectivo seminário, destacando sua importância para a comunidade acadêmica e os desdobramentos. Para isso, realizamos uma pesquisa nos documentos acessados sobre o evento, e evocamos nossas memórias de participantes do evento na organização, na estruturação e na execução do mesmo.

A descrição que foi feita a partir do que os documentos revelaram mostra que o evento foi válido por ter permitido a troca de conhecimentos e experiências entre os participantes, além de promover a universidade promotora do evento como difusora do tema; nosso objetivo foi então atingido.

Após o evento, veio para o Brasil, especificamente para a UFRPE, o Professor Doutor Carlos Sanchez, de Cuba, a convite do Professor Fernando Raul, para contribuir com os trabalhos a serem realizados nessa direção. O professor lecionou no curso de Licenciatura em Matemática, e também na pós-graduação, criada logo após a realização do seminário, e após a realização de vários trabalhos e produções, foi transferido para a Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Sobre o referido componente, a disciplina história da matemática, citado no início, foi criada e implantada em 1998, no âmbito da reforma curricular na UFRPE, no curso de licenciatura em matemática, na época sob a coordenação do prof. Cícero Monteiro de Souza. Num momento seguinte houve outra reforma na qual a referida disciplina passou a fazer parte da grade curricular do curso. No momento, a citada disciplina está em processo de se tornar obrigatória, passando a ser chamada de História da Matemática e a Prática Docente. Existe uma indicação de tornar esta disciplina obrigatória.

Um dos alunos do curso de pós-graduação, Severino Barros Melo, escreveu a sua dissertação na área de História da Matemática, e posteriormente cursou o doutorado na UFRN, com a tese intitulada "Matemática e Religião em Blaise Pascal", focando a História da Matemática, sob a orientação do Prof. PhD John Fossa. Na Licenciatura em Matemática da UFRPE, foi também criada a disciplina História da Matemática, lecionada pelo Professor Ms Cícero Monteiro de Souza (Celso) e outros docentes.

Em 1997, o Professor citado por último publicou, na LULLL – Revista de la Sociedad Española de Historia de las ciências y de las Técnicas, juntamente com o Professor Dr. Carlos Sanchez, um artigo intitulado "El caso Souzinha y la polemica sobre el uso legitimo de las series divergentes em el siglo XIX." Após essa publicação, o professor Cícero recebeu um convite para participar de um seminário de doutorado na Universidade de Saragosa.

Em 30 de março de 1999, após o III SNHM, foi criada a Sociedade Brasileira de História da Matemática que promove a cada dois anos, o seu seminário brasileiro. Segundo o site, objetivo é promover levantamentos, pesquisas e estudos com vistas a divulgar dados, reflexões e informações referentes à História da Matemática. Ela promove eventos sobre o tema, edita e divulga publicações no Brasil sobre História da Matemática, História da Educação Matemática e afins. Há um site com o logo, mostrado abaixo.

Figura 5 - Logo da Sociedade Brasileira de História da Matemática

SBHMat
SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Fonte: https://www.sbhmat.org/

Reproduzimos aqui uma tabela com as datas dos seminários ocorridos até agora.

Quadro 2 - Seminários Nacionais de História da Matemática ocorridos.

I SNHM, 1995, Recife (PE)	**IX SNHM**, 2011, Aracaju (SE)
II SNHM, 1997, Águas de São Pedro (SP)	**X SNHM**, 2013, Campinas (SP)
III SNHM, 1999, Vitória (ES)	**XI SNHM**, 2015, Natal (RN)
IV SNHM, 2001, Natal (RN)	**XII SNHM**, 2017, Itajubá (MG)
V SNHM, 2003, Rio Claro (SP)	**XIII SNHM**, 2019, Fortaleza (CE)
VI SNHM, 2005, Brasília (DF)	**XIV SNHM**, 2021, Uberaba (MG)
VII SNHM, 2007, Guarapuava (PR)	**XV SNHM**, 2023, Maceió (AL)
VIII SNHM, 2009, Belém (PA)	**XVI SNHM**, 2025, Pelotas (RS)

Fonte: https://eventos.ifsul.edu.br/snhm2025/

A referida sociedade tem três publicações, cujos logos são mostrados.

Figura 6 - Logo das três revistas publicadas da SBHMat

Fonte: https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=375.

Finalmente, os Seminários Nacionais de História da Matemática continuam, em 2025 apresentando a sua 16ª adição. Tem-se ampliado os eventos voltados para a história da matemática e ensino, um deles o Primeiro Seminário Paraense de História para o Ensino da Matemática (I SPAHEM).

Tudo isso nos permite encaminhar, tanto a continuidade dos trabalhos com a História da Matemática, quanto a divulgação dos mesmos em eventos como o que focamos, contribuindo para promover a melhoria da produção de matemática e do processo de ensino e aprendizagem no Brasil.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOGDAN. R. C.; BIKLEN, S. K. **Qualitative research for education**: an introduction to theory and methods. Boston, Allyn and Bacon, 1982.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Klucher, 1968.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história.** Vol I, II, III. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

DAVIS, Philip S. & HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985. Trad. De João Bosco Pitombeira.

DIEUDONÉE, J. A. **Abregée histoire des mathématiques**: 1700-1900. Avec la collaboration de Pierra Dugac et all. Paris: Hermann, c1978.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.

FOSSA, J. A. A história da matemática como fonte de atividades matemáticas. I **SNHM**. Recife, UFRPE, 1995.

GODOY, A. S. A pesquisa qualitativa e sua utilização em administração de empresas. **Revista de Administração de Empresas**. São Paulo, v. 35, n. 4, p. 65-71, jul./ago. 1995A.

KATZ, Victor J. **História da Matemática.** Lisboa: Fundação Galouste Gulbenkian, 2010.

LIEBSCHER, P. **Quantity with quality?** Teaching quantitative and qualitative methods in an LIS master's program. 1998.

LINTZ, Rubens G. **História da Matemática, vol I**. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

LINTZ, Rubens G. **História da Matemática, vol II**. Campinas: CÇE-UNICAMP, 2023.

MENDES, Iran Abreu. **O uso de história no ensino de matemática**: reflexões teóricas e experiências. Belém: UEPA, 2001.

MENDES, Iran Abreu e SÁ, Pedro Franco de. **Matemática por atividades:** sugestões para a sala de aula. Natal: Flecha do tempo, 2006.

MENDES, Iran Abreu, CHAQUIAN, Miguel, **História nas aulas de Matemática.** Fundamentos e sugestões didáticas para professores**.** Belém: SNMat, 2015.

MENDES, Iran Abreu, CHAQUIAN, Miguel, Sá. XIII Seminário Nacional de História da Matemática. **História da Matemática para Professores.** Belém: SNMat, 2009.

MONTUCLA, J.-E. **Histoire des mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leurs origines jusqu'à nos jours;** òu **l'on expose le tableau & les développement de les principales découvertes, les contestations qu'elles ont fait nâitre, & les pricipaux traits de la vie des mathématiciens les plus célebres.** Paris: Chex Ch. Ant. Jombert, Imprimeur Librairie du Roi pou lÁrtillerie & le Génie, rue Dauphine, à l'image Notre Dame, MDCCLVIII, Avec approbation & privillege du Roi.

OZANAM, Jacques. **Récréations Mathématiques et Phisiques**. Pariz: Chez Cl. Ant. Jombert, 1778, 8. ed. Aumentada e revisada por Jean-Etienne Montucla.

ROQUE, Tatiana**. História da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. Educação Matemática Em Revista**. Ano 7, nº 8, 2001.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. Educação Matemática Em Revista**. Ano 6, nº 7, 1999.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática. **Educação Matemática Em Revista**. Ano 8, nº 9/10, 2001.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. Educação Matemática Em Revista**. Ano 9, nº 11. 2002a.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. Educação Matemática Em Revista**. Ano 9, nº 11a, edição especial, junho de 2002b.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática. **Educação Matemática Em Revista**. Ano 9 nº 12, 2002.

SOUZA, Cícero Monteiro SANCHEZ, Carlos. El caso Souzinha y la polemica sobre el uso legitimo de las series divergentes em el siglo XIX. **In LULLL – Revista de la Sociedad Española de Historia de las ciências y de las** Técnicas. Zaragoza-España, Gráficas Olimar, v. 20, p. 293-310, 1997.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Um estudo sobre o Noticiário Brasileiro de Matemática

A Study on the Noticiário Brasileiro de Matemática

Raphael Alcaires de Carvalho[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

RESUMO

Este trabalho, ainda em sua fase inicial, tem como objetivo analisar as informações contidas no boletim quadrimestral, produzido pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), cujo título era *Noticiário Brasileiro de Matemática* (NBM). Para tal empreendimento, examinaremos os boletins de 1959 até 1968, período em que eles foram editados. Essa análise se justifica pelo fato dessas revistas apresentarem conteúdos relevantes para o entendimento do desenvolvimento da matemática nesse período. A partir do NBM é possível entender a circulação de matemáticos estrangeiros que transitavam pelo Brasil bem como os brasileiros que iam para outros países. O NBM permite identificar os livros que eram produzidos no Brasil e no exterior nessa época, além dos eventos que ocorriam no país e fora dele, nos quais alguns matemáticos brasileiros participavam. As conferências, cursos, palestras e seminários oferecidos no Brasil, além de resenhas de livros, eram de pleno conhecimento dos leitores do NBM. Dessa forma, o estudo do NBM nos oferece a oportunidade de melhor compreensão da matemática brasileira no período tratado. Estamos no começo dos trabalhos, ou seja, coletando informações para uma posterior análise aprofundada sobre o tema.

Palavras-chave: *Noticiário Brasileiro de Matemática*; IMPA; Circulação de matemáticos.

ABSTRACT

This work, still in its initial phase, aims to analyze the information contained in the quarterly bulletin produced by the Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), titled *Noticiário Brasileiro de Matemática* (NBM). To undertake this project, we will examine the bulletins from 1959 to 1968, the period during which they were published. This analysis is justified by the fact that these journals contain relevant content for understanding the development of mathematics during this period. From the NBM, it is possible to understand the circulation of foreign mathematicians who passed through Brazil, as well as the Brazilian mathematicians who traveled abroad. The NBM allows us to identify the books being produced in Brazil and abroad at the time, in addition to events occurring both in Brazil and elsewhere, in which some Brazilian mathematicians participated. The conferences, courses, lectures, and seminars offered in Brazil, as well as book reviews, were well known to NBM readers. Therefore, the study of the NBM offers us the opportunity to better understand Brazilian mathematics during the period in question. We are at the beginning of the work, meaning we are currently gathering information for a subsequent in-depth analysis on the topic.

Keywords: Noticiário Brasileiro de Matemática; IMPA; Circulation of mathematicians.

INTRODUÇÃO

Neste trabalhamos investigaremos a internacionalização da matemática brasileira, por meio das notícias veiculadas no *Noticiário Brasileiro de Matemática* (*NBM*), mais especificamente coletaremos os dados referentes às bolsas recebidas por matemáticos brasileiros para irem ao exterior e as bolsas oferecidas aos estrangeiros para trabalharem ou ministrarem seminários e palestras nas instituições brasileiras. O *NBM* apresenta informações que nos permitem analisar a circulação de conhecimentos obtidos por matemáticos brasileiros por meio de cursos rápidos ministrados na América Latina na década de 1940 por cientistas locais, mas formados nos Estados Unidos e na Europa. Estudaremos como se deu a migração transnacional de matemáticos brasileiros. Segundo Levitt e Jaworsky (2007), a assimilação, aculturação e integração decorrente desta migração sugere várias trajetórias possíveis, como tornar-se parte de uma subclasse, experimentando uma queda de mobilidade. Mas,

[1] Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, UFRJ. Professor de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: raphael.carvalho@ifrj.edu.br.

também, que alguns migrantes continuavam ativos em seus países de origem, ao mesmo tempo em que se tornavam parte dos países que os recebiam.

As consequências das relações entre os indivíduos; ou entre indivíduos e comunidades; ou ainda entre uma comunidade e outra pode ser explicada por meio da dinâmica cultural, segundo D'Ambrósio (2000), pois o resultado desses encontros culturais é a geração e a organização do conhecimento. O autor ainda aponta a emigração de bons acadêmicos da periferia para os grandes centros de pesquisa das grandes nações, dando o exemplo do cooptamento de cientistas na periferia. Isso ocorre geralmente enviando cientistas de renome para a periferia para ministrar conferências, cursos rápidos, oferecendo bolsas de estudos, dando estipêndios mais altos do que os salários nacionais, enviando equipamentos, em muitos casos obsoletos ou já desgastados. Além de pagar viagens internacionais para seminários e congressos. Cita na matemática, exemplo de tais práticas: recursos das agências de pesquisa do Exército, Marinha e Força Aérea dos Estados Unidos, bem como da Fundação Nacional de Ciências dos Estados Unidos (NSF), do Centro Nacional de Pesquisa Científica da França (CNRS), do British Council, do DAAD e de outras agências. Uma pergunta que buscaremos responder é se o Brasil pode absorver e tornar esses resultados úteis para suas principais necessidades, no período aqui estudado.

Coletaremos as informações contidas no *NBM*, e mais tarde usaremos o *Prosopon*, que é uma base prosopográfica de cientistas no Brasil desenvolvida pela Coordenação de História das Ciências e da Tecnologia do Museu de Astronomia e Ciências Afins (MAST), e os documentos do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Por meio dessas informações, analisaremos os encontros culturais, as trocas de conhecimentos e a circulação de saberes entre os matemáticos brasileiros e estrangeiros.

IMPA — INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Antes de tratarmos do *Noticiário Brasileiro de Matemática*, precisamos falar sobre a criação do IMPA. Este instituto foi criado em 15 de outubro de 1952, mas sua homologação ocorreu somente em 1956. O Instituto seria presidido por um diretor e por um Conselho Orientador composto por seis membros. Suas atividades só tiveram início em 1953, e, sem uma sede própria, foram usadas salas do prédio do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) (Silva, 2009).

Antes do IMPA, já havia tentativas para a criação de um Instituto de Matemática, seja no interior da universidade ou fora dela[2], como foi o caso do Núcleo Técnico-Científico de Matemática da Fundação Getúlio Vargas (NTCM/FGV) que teve uma duração muito curta, funcionando de 1946 a 1947. Os matemáticos que constituíam o NTCM eram os mesmos do período inicial do IMPA: Lélio Itapuambyra Gama (1892–1981), que foi o diretor de 1952 até 1965, Leopoldo Nachbin (1922–1993) e Mauricio Matos Peixoto (1921–2019) (Lima, 2009; Araújo, 2009).

Parte do grupo de matemáticos que tentou se estabelecer no NTCM/FGV deu origem ao IMPA, como diz Lindolpho Dias, "(...) talvez esse fechamento [do núcleo] tenha sido a origem da criação do IMPA logo depois, porque o grupo é o mesmo" (Dias, *apud* Palis Junior *et al.*, 2003, p. 186). Mauricio Peixoto, em uma entrevista concedida a Mineiro (2011), afirma que " (...) a criação do Núcleo de Matemática da Fundação Getúlio Vargas foi um mini-IMPA". De fato, o grupo que dirigiu o instituto era composto por Leopoldo Nachbin, Maurício Peixoto (nomeado secretário-ge-

[2] Para maiores informações, ver Carvalho (2021).

ral em 20 de novembro de 1952)[3] e Lélio Gama (diretor do instituto). Outros colaboraram, mas é possível afirmar que esses foram os responsáveis pela condução dos trabalhos desde o início. Além disso, todos eles trabalharam no núcleo da FGV.

Segundo Silva (2009), os primeiros institutos criados, voltados para a pesquisa matemática, foram o Instituto Steklov (1919, São Petersburgo), o *Institute for Advanced Study* (1930, Princeton) e, em 1952, o IMPA. Alguns anteriores não tiveram sucesso, como foi o caso do *Mittag-Leffler Institute*, fundado em 1916, na Suécia.

Isso significa que o instituto brasileiro foi um dos primeiros a ser criado no mundo e continua atualmente em funcionamento. Surgiu por iniciativa dos cientistas que buscavam espaço para o desenvolvimento da ciência pura[4] no Brasil naquela época.

O IMPA foi um dos primeiros institutos criados no Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq). Em 16 de outubro de 1951, o diretor do setor de pesquisas matemáticas do CNPq, Cândido da Silva Dias, encaminhou um ofício ao diretor científico para a criação do IMPA, alegando que as pesquisas em matemática naquela época só ocorriam no CBPF, no departamento da Faculdade de Filosofia, Ciência e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo (USP) e na Faculdade Nacional de Filosofia (FNFi) da Universidade do Brasil (UB). Quase um ano depois, o projeto de criação do instituto foi aprovado pelo Conselho Deliberativo do CNPq. A criação do IMPA foi comemorada por conhecidos matemáticos como Marshall Stone e Oscar Zariski (Silva, 2004).

O diretor-geral da Divisão Técnica-Científica comunicou essa proposta no dia seguinte na sessão do Conselho Deliberativo (CD) do CNPq, onde foi discutido o anteprojeto do estatuto do IMPA. Assim, foi gerado um processo e deliberado que o mesmo deveria ser entregue para estudos à Comissão de Ciências Físicas e Matemáticas, juntamente com a Divisão Técnica-Científica.[5]

Lélio Gama, nessa reunião do CD, falou sobre a dificuldade do grupo em se manter coeso nas pesquisas matemáticas, devido à falta de espaços, e defendeu o anteprojeto lido por Cândido Dias na sessão. Acrescentou ainda que o Instituto de Matemática daria um rumo certo à pesquisa matemática no Brasil e também que só um instituto dessa natureza asseguraria o trabalho e a cooperação.[6]

O conselheiro Baptista Pereira pediu explicações sobre o instituto, pois era prática do CNPq manter os cursos criados por meio de subvenção. Cândido Dias explicou que as universidades tinham um número limitado de professores, sendo difícil contratar um de fora, pois dependia da cooperação de todos os departamentos da Congregação e do Conselho Universitário. Pereira disse que era comum a contratação de professores nacionais para a realização de cursos de extensão. Então, Dias afirmou que no Rio de Janeiro havia um grupo maior de pesquisadores fora da faculdade, o

[3] Fonte: Arquivos do IMPA.

[4] A ciência pura é entendida como aquela que trabalha com a pesquisa básica, cujo interesse está no conhecimento em si, sem se preocupar com a sua utilidade prática, imediata. Já na ciência aplicada, que já era muito praticada antes das criações dos cursos que formavam matemáticos, físicos, dentre outros profissionais das ciências, o objetivo era a aplicação para resolver problemas específicos, como por exemplo a Engenharia.

[5] Ofício nº 630, após a comunicação no CD/CNPq foi criado o processo nº 486/51. Nos anais, as 40ª e 41ª sessões do CD/CNPq não foram redigidas, as mesmas constam apenas nas atas. Fonte: Arquivo do CNPq (MAST) — Ata da 41ª sessão do CD/CNPq, T.1.2.002. O processo 486/51 foi aprovado, em 24 de março de 1952, na 75ª sessão do CD/CNPq. Fonte: Arquivo do CNPq (MAST) — Anais da 75ª sessão do CD/CNPq, T.1.2.003_1952.1TRI. Na 112ª sessão do CD/CNPq foi discutido o processo 1.278/52. Fonte: Arquivo do CNPq (MAST) — Anais da 112ª sessão do CD/CNPq, T.1.2.003_1952.3TRI.

[6] Fonte: Arquivo do CNPq (MAST) — Anais da 112ª sessão do CD/CNPq, T.1.2.003_1952.3TRI.

que, segundo ele, era o local natural para a pesquisa e que o instituto teria como objetivo principal dar uma forma estável de auxílio a esse grupo.

A opinião do conselheiro Sá Lessa era de não contratar professores estrangeiros, mas primeiro coordenar os docentes que já estavam trabalhando nas universidades. Dias refutou essa sugestão, pois segundo ele, os docentes brasileiros precisavam de auxílio e sem ajuda estrangeira seria pouco provável que houvesse desfalecimento nas pesquisas. Quando foram citados os cursos oferecidos em São Paulo, a resposta foi que lá existem mais unidades do que aqui. E o grupo que se encontrava no CBPF precisava de auxílio. O conselheiro Mario Pinto destacou a importância da criação do instituto, pois o CBPF, onde havia pesquisa em matemática, poderia ser dissolvido a qualquer momento, por não ser estável. Sá Lessa disse que era preferível conceder recursos para o professor da cadeira, além da preocupação em se criar cargos de relevância, com gastos adicionais. Então, Costa Ribeiro lembrou que a criação do instituto já havia sido aprovada, cabendo apenas à averiguação do projeto do estatuto.

Pelos relatos, é possível perceber que havia dúvidas sobre o projeto e uma tensão entre os conselheiros. Como existia no Rio de Janeiro um grupo de matemáticos atuando na FNFi e outro no CBPF, alguns não entendiam ou usavam esse argumento para se opor à criação desse instituto. Mas Cândido Lima da Silva Dias, em uma entrevista ao matemático Ubiratan D'Ambrosio (1932–2021), em 02 de julho de 1991, ou seja, 40 anos depois de ter enviado o ofício para a criação do IMPA, contou o seguinte:

> Eu me lembro bem que eu era diretor do setor de pesquisa da Matemática [do CNPq] e tive muito que ver com a formulação da proposta ao Conselho para que se criasse o Instituto. E aí, como tudo que é humano, havia uma curiosa motivação para isso. Havia uma incompatibilidade entre dois matemáticos, duas personalidades, um daqui, teve a ver com São Paulo, o Abdelhay, e a outra era o Leopoldo Nachbin. O Abdelhay... digamos que os seus amigos fechavam o campo, a possibilidade do Leopoldo Nachbin junto à Faculdade Nacional de Filosofia. Então uma das motivações, pelo menos da oportunidade disso ser feito naquela data, quer dizer no segundo semestre de 52, foi essa: criar um Instituto onde, em particular, não só ele, mas em particular ele [Nachbin] tivesse oportunidade de atuar, de reger. (Dias, *apud* D'Ambrosio, 2007, p. 270–271)

Além do argumento utilizado por Cândido Dias acima, no documento encaminhado em 16 de outubro de 1951, ele afirmou que os únicos três locais onde ocorriam pesquisas matemáticas eram: no CBPF, nos departamentos de Matemática da FFCL da USP e na FNFi da UB. Isso visava defender a necessidade de criação do instituto. Dias também foi à Europa a fim de obter livros e revistas para a biblioteca do CNPq e também para contratar matemáticos estrangeiros para a área da matemática pura e aplicada.[7]

Dias afirmou ainda, no seu documento para a criação do IMPA, que havia uma "cristalização" nas universidades, o que dificultava o trabalho com pesquisas. Isso advinha da estrutura da universidade, do fato do catedrático, em alguns casos, ter outros trabalhos e não querer o regime de tempo integral, além da falta de uma carreira para o docente universitário. Leite Lopes forneceu explicações a respeito das universidades brasileiras. Lopes (1964) fez uma crítica ao fato de a escolha do professor universitário ser realizada por concurso e não pela análise da produção e da vida científica do

[7] Para maiores informações sobre a viagem de Dias na Europa e o início do IMPA ver (Silva, 2004).

candidato à vaga (quando eram levados em conta, tinham um peso relativamente pequeno). Deu como exemplo o CBPF, que aboliu o sistema adotado nas universidades brasileiras:

> A carreira inicia-se na posição de Instrutor e continua, através de Terceiro Assistente, Segundo Assistente e Primeiro Assistente, até a de Professor Associado e Professor Titular. Os critérios fundamentais para admissão e promoção de pessoal científico do Centro são a experiência científica e de ensino, com forte ênfase nos trabalhos científicos originais realizados. [...] jovens graduados [...] enviados ao estrangeiro com bôlsas de estudo [...] têm posição de pesquisador [...] depois de terem completado cursos de doutoramento no exterior (Lopes, 1964, p. 88-89).

No início, o Instituto funcionava numa sala cedida pelo CBPF, na Avenida Venceslau Braz, 71, Botafogo, Rio de Janeiro. Foi elaborada uma minuta de acordo entre o IMPA e o CBPF para estabelecer uma cooperação entre essas duas instituições, sob as seguintes condições: o CBPF e o IMPA se comprometeriam a prestar mutuamente colaboração de caráter científico na Matemática e na Física; o CBPF franquearia as suas dependências para a instalação dos serviços do IMPA, mediante aprovação do Conselho Técnico-Científico do CBPF; as bibliotecas seriam usadas pelo pessoal de ambas as instituições, respeitando os respectivos regulamentos; os serviços administrativos seriam usados por ambas as instituições; o pessoal científico e administrativo gozaria das mesmas regalias; e as duas instituições colaborariam na criação de cursos em comum.[8]

No início do IMPA, Nachbin e Peixoto realizavam seminários para aperfeiçoar a formação dos matemáticos, como conta Lima no livro "IMPA 50 anos":

> O contato maior era no CBPF, onde o prof. Leopoldo e o prof. Mauricio tinham sob orientação alguns jovens do Rio e de outros estados do Brasil que estagiavam no Centro para aprender mais Matemática. A forma que eles utilizavam era a de seminário; não davam cursos. Eles escolhiam um livro, que os alunos deveriam estudar e depois expor em seminário; eles assistiam, naturalmente, e orientavam, davam opiniões. Havia alunos de Belo Horizonte, daqui do Rio, do Nordeste. (Lima *apud* Palis Junior *et al.*, 2003, p. 93).

Era dessa forma que os pesquisadores do IMPA, Nachbin e Peixoto, trabalhavam no início dessa instituição. Além dos seminários, eram promovidas outras atividades pelo instituto. Cursos e conferências eram realizados por professores estrangeiros. Foram enviados convites a matemáticos estrangeiros para ministrarem seminários, conferências e cursos na USP, ABC, CBPF, ITA, IMPA, Escola Técnica do Exército e Escola Politécnica de São Paulo. A forma de trabalho no início se assemelhava muito àquela que se pretendeu fazer no NTCM/FGV.

NOTICIÁRIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, NÚMERO 1

O primeiro número do *Noticiário Brasileiro de Matemática* foi publicado em 30 de abril de 1959, organizado por Chaim Samuel Hönig (1926–2018), Elon Lages Lima (1929–2017) e Paulo Ribenboim (1928–). Teve a colaboração de José de Barros Neto (1927–2020),[9] Manfredo Perdigão do Carmo (1928–2018) e Renzo Piccinini (1933–). Este periódico, em sua apresentação explica o motivo de sua existência. A ideia era divulgar as atividades matemáticas que estavam ocorrendo pelo

[8] Arquivo do IMPA.

[9] Fonte: https://math.rutgers.edu/people/department-directory/detail/343-in-memoriam/2056-barros-net-jose. Acesso em 11 de novembro de 2024.

Brasil, além de servir como um canal informativo e se prestar a orientar estudiosos isolados. Sua publicação era quadrimestral (abril, agosto e dezembro).

No primeiro número foram apresentadas informações sobre reuniões científicas, professores visitantes, doutoramentos, viagens, cursos, seminários, conferências, notícias diversas e publicações.

A maioria das notícias era sobre a FFCL-USP, a FNFi-UB e o IMPA — as principais instituições da época que possuíam bons docentes e atividades matemáticas de qualidade. Também é possível perceber a importância do CNPq para o financiamento de cursos, seminários, viagens de matemáticos e bolsas de estudos na área da matemática.

Trivizoli (2015), apresenta uma lista de matemáticos brasileiros que receberam bolsas de estudos, por meio das Fundações Rockefeller e Guggenheim e a Comissão Fulbright, para intercâmbio acadêmico entre Brasil e Estados Unidos no período de 1945 a 1980. Apresentaremos também uma lista nos nossos estudos, mas por meio de instituições cedentes como CNPq e outras Fundações.

Os professores estrangeiros que estiveram no Brasil foram o austríaco Juan Jorge Schaeffer (1930–2017), do Instituto de Matemática e Estatística de Montevidéu, que ministrou curso na FFCL-USP e conferência no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), em São José dos Campos; o chinês Kuo-Tsai Chen (1923–1987), que foi contratado, em 1958, pelo departamento de Matemática do ITA, apresentou comunicação na Academia Brasileira de Ciências (ABC) e realizou palestra no IMPA; e o eslovaco Otto Endler (1929–1988) que veio do Instituto de Matemática da Universidade de Bonn, na Alemanha, trabalhar como professor visitante do IMPA e deu conferência na Escola de Engenharia de São Carlos, em São Paulo.

O concurso para a cadeira de Complementos de Matemática chama bastante atenção pela quantidade de candidatos inscritos, o que não foi comum nos concursos anteriores. Estavam inscritos Achille Bassi, Chaim Samuel Hönig, Elon Lages Lima, Jorge Emanuel Ferreira Barbosa, José Abdelhay e Paulo Ribenboim. O primeiro, matemático italiano, já havia sido contratado pelo Governo de Getúlio Vargas, em 1939, para assumir a cátedra de Geometria, de forma temporária. Mas, terminada a Segunda Guerra Mundial, os italianos não podiam mais ocupar as cátedras da UB. Assim, a referida cátedra foi ocupada, a partir de 1946, por Ernesto Luiz de Oliveira Júnior, após realizar o concurso para a referida cadeira. Chaim era assistente do professor Edison Farah (1915–2006) na cadeira de Análise Superior, na FFCL-USP. Em 1959, Chaim trabalhou na FFCL-USP e no IMPA, a convite de Leopoldo Nachbin. Elon trabalhava no IMPA. Jorge Emanuel Ferreira Barbosa colou grau de bacharel em dezembro de 1956 e trabalhava no NEPEC. José Abdelhay era catedrático interino de Análise Matemática da FNFi, já havia se inscrito no concurso para a cátedra de Complementos de Matemática, em 1948, do qual foi eliminado; além disso, se inscreveu no concurso para a cátedra de Análise Matemática e Superior, em 1950, que acabou não ocorrendo. Paulo Ribenboim era pesquisador do IMPA. Por fim, sabemos que este foi mais um concurso da FNFi que não ocorreu.[10]

PUBLICAÇÕES

Por meio deste primeiro número do *Noticiário Brasileiro de Matemática*, obtemos a informação de que a coleção Notas Matemáticas foi iniciada em 1947 pela FNFi, por intermédio dos profes-

[10] Para maiores detalhes sobre os concursos e a FNFi, ver (Carvalho, 2021)

sores António Aniceto Ribeiro Monteiro (1907–1980) e Leopoldo Nachbin (1922–1993), sendo posteriormente publicada pelo IMPA.[11]

Qualquer publicação desta coleção deveria ser adquirida por meio de um pedido dirigido à Livraria Castelo, que estava localizada na Avenida Erasmo Braga, 227, 2º andar, no Centro do Rio de Janeiro. Ou seja, não era vendida no IMPA, que naquela época ficava localizado na rua São Clemente, em Botafogo, zona sul do Rio de Janeiro.

Os cursos oferecidos por professores estrangeiros eram redigidos e transformados em livros, publicados pelas faculdades ou pela Sociedade de Matemática de São Paulo (SMSP), criada em 1945. Na época, ainda não existia a Sociedade Brasileira da Matemática (SBM), o que ocorreu somente em 1969, durante o 7º Colóquio Brasileiro de Matemática (CBM). Além das publicações realizadas pela Sociedade Paranaense de Matemática, criada em 1953.[12] O Quadro 1 a seguir mostra essas publicações.

Quadro 1 – Publicações de livros com título, autor (es) e observações

Publicações		
Título	**Autor**	**Observações**
Análise Harmônica	Jean Dieudonné	FNFi. Editado o curso de Dieudonné. Pedidos ao Departamento de Matemática da FNFi.
Teoria das Superfícies de Riemann	Alexandre Augusto Martins Rodrigues	FFCL. Livro era distribuído. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro da FFCL.
Corpos Comutativos	Jean Dieudonné	SMSP. Publicação do curso do professor visitante. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro da SMSP.
Espaces Vectoriels Topologiques	Alexander Grothendieck	SMSP. Publicação do curso do professor visitante. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro da SMSP.
Faisceaux et Cohomologie	Jean-Louis Koszul	SMSP. Publicação do curso do professor visitante. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro da SMSP.
Variétés Kahleriennes	Jean-Louis Koszul	SMSP. Publicação do curso do professor visitante. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro da SMSP.
Álgebra Multilinear	Jean-Louis Koszul	SMSP. Publicação do curso do professor visitante. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro da SMSP.
Álgebra Linear	Alfredo Pereira Gomes	Instituto de Física e Matemática (IFM) da Universidade do Recife. Pedidos ao IFM.
Variétés Differentiables	Roger Godement	Instituto de Física e Matemática (IFM) da Universidade do Recife. Pedidos ao IFM.
Algèbres de Lie, Groupes de Lie et applications	François Bruhat	Instituto de Física e Matemática (IFM) da Universidade do Recife. Pedidos ao IFM.
Introdução à Teoria das Funções	Richard Courant	Sociedade Paranaense de Matemática, Escola de Engenharia da Universidade do Paraná, Curitiba.

[11] Os títulos completos dessa coleção, com autores e ano de publicação estão disponíveis no site do IMPA. Fonte: https://impa.br/publicacoes/notas/. Acesso em 13 de novembro de 2024.

[12] Para maiores informações sobre o início dessa Sociedade, ver http://www.spm.uem.br/spmatematica/historia.htm#:~:text=Sua%20funda%C3%A7%C3%A3o%20deu%2Dse%20no,nas%20ci%C3%AAncias%20exatas%20em%20Curitiba. Acesso em 22 de novembro de 2024.

Geometria Diferencial	Antonio Rodrigues	1º CBM. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro, SMSP.
Álgebra Muiltilinear e Variedades Diferenciáveis	Chaim Samuel Hönig	1º CBM. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro, SMSP.
Introdução à Topologia Algébrica	Carlos Benjamin Lyra	1º CBM. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro, SMSP.
Análise Funcional	Nelson Onuchic, José de Barros Neto, Domingos Pisanelli, Cândido Lima da Silva Dias e Alfredo Pereira Gomes	1º CBM. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro, SMSP.
Introdução à Teoria dos Números Algébricos e Teoria de Galois	Fernando Furquim de Almeida e Luiz Henrique Jacy Monteiro	1º CBM. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro, SMSP.
Conferências	Omar Catunda, Elza Furtado Gomide, Carlos Alberto Aragão de Carvalho	1º CBM. Pedidos ao professor Luiz Henrique Jacy Monteiro, SMSP.
Algèbres de Lie	Jacques Dixmier (redação de Alfredo Pereira Gomes)	Publicação do *Centre de Documentation Universitaire, 5 Place de La Sorbonne,* Paris.
Curso de Análise Matemática. Volumes 1-6	Omar Catunda	Pedidos à Livraria Nobel, Rua da Consolação, 49, São Paulo.
Introdução à Teoria dos Conjuntos. Séries Numéricas.	Lélio Itapuambyra Gama	Pedidos à Livraria Castelo, Avenida Erasmo Braga 227, Rio de Janeiro

Fonte: Elaboração pelo autor

NOTICIÁRIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, NÚMERO 2

No início deste segundo número do *Noticiário Brasileiro de Matemática*, foram descritas as atividades que ocorreram no 2º CBM e no *Tercer Simposio sobre algunos Problemas Matemáticos que se están estudiando em Latinoamerica*. O 2º CBM ocorreu de 5 a 18 de julho de 1959, no mesmo local do primeiro, em Poços de Caldas, Minas Gerais, sob os auspícios do CNPq e da CAPES, além do auxílio do Governo do Estado de Minas Gerais. O objetivo destas reuniões científicas, em Minas Gerais, era reunir matemáticos brasileiros, promovendo um intercâmbio entre os centros matemáticos brasileiros, por meio do oferecimento de cursos básicos, conferências, comunicações de trabalhos de pesquisas, de exposições e de debates sobre o ensino de Matemática e de uma ampla troca de informações matemáticas ou impressões referentes à situação dos estudos matemáticos no país.

Praticamente todos os professores da Comissão Organizadora pertenciam ao corpo docente da USP ou do IMPA: Carlos Benjamin Lyra (1927–1974), que era o coordenador, Alexandre Augusto Martins Rodrigues (1930–2018), Cândido Lima da Silva Dias (1913–1998), Chaim Samuel Hönig (1926–2018), Fernando Furquim de Almeida (1913–1981), Luiz Henrique Jacy Monteiro (1921–1975) e Omar Catunda (1906–1986), todos da FFCL/USP; José de Barros Neto (1927–2020) da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP; Leopoldo Nachbin (1922–1993), Elon Lages Lima (1929–2017) e Paulo Ribenboim (1928–), todos do IMPA; Lindolpho de Carvalho Dias (1930–), docente da Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil; Flávio Botelho Reis (1913–?), docente no ITA. Além dos estrangeiros, o português Alfredo Pereira Gomes (1919–2006) que trabalhava na Universidade do Recife, e o italiano Jaurès Pacifico Cecconi (1918–2012), um dos pioneiros do Departamento de Matemática da Escola de Engenharia de São Carlos.

Os professores visitantes contratados nessa época foram o matemático português António Monteiro, para trabalhar no CBPF por três meses, a partir de julho de 1959; e o matemático português José Tiago de Oliveira, para trabalhar no período de 15 de março a 15 de junho na Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia.

Sobre as viagens realizadas, temos o retorno ao ITA do professor irlandês Francis Dominic Murnaghan (1893–1976), em julho de 1959.[13] Neste mesmo mês, foi para os Estados Unidos da América o professor Flávio Botelho Reis, do ITA, por conseguir uma bolsa da Universidade de Maryland para dedicar-se ao estudo da Matemática Aplicada no *Institute for Fluid Dynamics*. No mês seguinte, Nelo da Silva Allan, também do ITA, obteve uma bolsa da CAPES e foi para os EUA estudar a teoria das funções analíticas de várias variáveis complexas, na Universidade de Chicago. Ainda nesse mês, Otto Endler, do Instituto de Matemática da Universidade de Bonn, após dois anos de permanência no IMPA, retornou à Alemanha. No mês seguinte, o matemático Paulo Ribenboim, do IMPA, por intermédio do programa de intercâmbio de pesquisadores, patrocinado pela Comissão Fulbright (Comissão Educacional dos Estados Unidos da América no Brasil), foi nomeado Professor Associado na Universidade de Illinois, em Urbana, para estudar Geometria Algébrica.

No IMPA, foram ministrados cursos pelos professores Otto Endler, Elon Lima, Manfredo do Carmo, Alberto de Azevedo, Renzo Piccinini e José de Barros Neto. No CBPF, os cursos foram realizados pelo docente Chaim Hönig. Na FNFi, Nachbin iniciou um curso. Na FFCL, um curso foi oferecido pelo matemático Alexandre Augusto M. Rodrigues. Na Escola Politécnica de São Paulo, Jaurès P. Cecconi, da EESC, estava ministrando um curso. Na EESC, foram realizados cursos pelos professores Achille Bassi, Jaurès P. Cecconi e Ubaldo Richard. No ITA, o curso foi oferecido por Francis D. Murnaghan. No Instituto de Matemática da Universidade do Rio Grande do Sul, em Porto Alegre, foi iniciado um curso por An Tzu Yang. No Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife, estavam sendo realizados cursos pelos docentes portugueses Alfredo Pereira Gomes e Manuel Augusto Zaluar Nunes (1907–1967). No Instituto Cearense de Matemática, em Fortaleza, o professor Francisco Silva Cavalcante estava ministrando um curso.

Os seminários de matemática realizados nesta época, ao longo do Brasil, também são descritos no Noticiário. No IMPA, o seminário de Geometria Algébrica foi ministrado pelos professores Alberto de Azevedo, Paulo Ribenboim e Renzo Piccinini; e de Equações Diferenciais Parciais foi ofertado pelos docentes José de Barros Neto e Leopoldo Nachbin. No Instituto de Física e Matemática, em Recife, estavam sendo realizados, desde o início do ano letivo, seminários de Estatística e Matemática pelo professor Manuel Augusto Zaluar Nunes e de Álgebras de Lie, pelo professor Alfredo Pereira Gomes. Na FFCL, foram oferecidos os seminários de Geometria Diferencial das Superfícies, pelo docente Alexandre Augusto Martins Rodrigues; de Espaços Fibrados com Grupo Estrutural, por Carlos Benjamin Lyra; e de Introdução à Topologia Algébrica, pelo matemático Gilberto Francisco Loibel (da EESC). Na EESC, estavam em andamento os seminários de Teoria das Distribuições, e de Topologia dos Espaços Métricos, ambos por Jaurès P. Cecconi; seminários de Espaços Fibrados com Grupo Estrutural, e de Introdução à Topologia Algébrica, foram dados ambos por Gilberto Francisco Loibel. Na Escola Politécnica de São Paulo, estava sendo realizado o seminário de Topologia dos Espaços Métricos, pelo docente Alésio João de Caroli.

Foram registradas as conferências sobre matemática realizadas neste período. Essas atividades foram realizadas na Academia Brasileira de Ciências (por Otto Endler, Carlos B. de Lyra, J. Cecconi, Alexandre A. M. Rodrigues e José de Barros Neto); no IMPA (Chaim S. Hönig, Carlos B. de Lyra, Frederico Gaeta, da Universidade de La Plata, Argentina, Alexandre A. M. Rodrigues, J. Cecconi, Günter Lumer (1929–2005) matemático alemão que trabalhava na Universidade da Cali-

[13] Murnaghan foi de grande importância para o desenvolvimento da matemática no ITA. Segundo Carvalho (2016), Murnaghan foi o matemático mais importante presente no início das atividades do ITA.

fórnia, nos EUA, Jean-Pierre Kahane (1926–2017) que era professor da Universidade Montpellier, na França); na Universidade de Buenos Aires (Paulo Ribenboim); no Instituto Cearense de Matemática (Nachbin); no Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife (Nachbin); na Escola de Engenharia de São Carlos (Mário Schenberg (1914–1990), José de Barros Neto e Elon Lages Lima); no ITA (Elon Lages Lima); na Escola Politécnica de São Paulo (Elon Lages Lima); na FFCL (Elon Lages Lima).

Informações diversas foram descritas no Noticiário. Em 1958, iniciou-se a publicação do boletim *Informações entre Físicos*, cujo objetivo era divulgar informações de interesse para os físicos brasileiros. Ocorreu um incêndio no Pavilhão Mário de Almeida, onde ficavam parte das dependências do CBPF, sendo destruído totalmente o laboratório de Microscopia do professor César Lattes e da biblioteca. Foi criado na Universidade do Rio Grande do Sul, um Instituto de Matemática que estava para receber auxílio da Comissão Supervisora do Plano dos Institutos (COSUPI), por meio de um convênio firmado entre essa Comissão e a referida universidade. O Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife, também por intermédio de um convênio com a COSUPI conseguiu auxílio para o melhoramento de sua biblioteca e a contratação de novos professores. Estava na Universidade de La Plata, o matemático espanhol Frederico Gaeta, contratado por essa instituição para trabalhar por três anos, desenvolvendo atividades em Geometria Algébrica. Foi contratado por seis meses, pela UNESCO, o professor Paul Dedecker, da Universidade de Liège, Bélgica, para trabalhar por três meses na Universidade de Concepción e os três seguintes na Universidade do Chile, em Santiago, na área de Geometria e Topologia. Jean Pierre Kahane, da Faculdade de Ciências de Montpellier, foi contratado, com auxílio da UNESCO, para trabalhar na Universidade de Buenos Aires, onde daria cursos e seminários de Análise Funcional. Charles Ehresmann, da Faculdade de Ciências de Paris, foi contratado pela UNESCO e pela Universidade de Buenos Aires para realizar cursos e seminários sobre Estruturas Locais e Geometria Diferencial. Alberto P. Calderón, da Universidade de Chicago, foi contratado para ser professor visitante da Universidade de Buenos Aires e para desenvolver atividades na área de Teoria das Integrais Singulares e suas aplicações às Equações Diferenciais Parciais. De 20 a 25 de julho de 1959, sob o patrocínio da CADES (Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário), ocorreu o 3º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática. De 17 a 22 de agosto de 1959, ocorreu a Primeira Semana de Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Católica de Campinas, em São Paulo.

Quadro 2 – Publica**ções** de livros com título, autor (es) e observações

Publicações		
Título	**Autor**	**Observações**
Textos de Matemática (TM)	Alfredo Pereira Gomes (direção)	Coleção iniciada em 1959 pelo Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife
TM nº1: *Elementos de Álgebra Linear e Multilinear*	Alfredo Pereira Gomes	Pedidos à Livraria Castelo
TM nº2: *Variétés Differentiables*	Roger Godement	Pedidos à Livraria Castelo
TM nº3: *Algèbres de Lie et Groupes de Lie*	François Bruhat	Pedidos à Livraria Castelo
Teoria das Conexões	Leo Huet Amaral	Distribuída essa publicação elaborada para o 2º CBM. Pedidos ao Departamento de Matemática do ITA
Curso de Análise Matemática, volume 7: *Funções Analíticas*	Omar Catunda	Pedidos à livraria Nobel, rua da Consolação, 49. São Paulo

Fonte: Elaboração pelo autor

No final do Noticiário, é apresentada uma resenha de livros. A primeira foi realizada por Manfredo Perdigão do Carmo (1928–2018), que analisou o livro *Advanced Calculus*, do autor Robert Creighton Buck, de 1956, da editora McGraw-Hill. Elon Lages Lima apresentou uma crítica do livro *An Introduction to Algebraic Topology*, do autor Andrew H. Wallace, de 1957, da *International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics*, nº 1, *Pergamon Press*, Londres.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este é um trabalho que ainda se encontra em seu estágio inicial, mas é possível perceber a quantidade de informações importantes que podem ser obtidas por meio do *Noticiário Brasileiro de Matemática*. Diferentemente da década de 1930, em que só havia curso de graduação em matemática na FFCL da USP, na Escola de Ciências da UDF (que teve uma duração muito pequena) e na FNFi da UB, em 1959 é possível observar um salto quantitativo de cursos, palestras, seminários e conferências de matemática sendo realizados em diversas instituições: Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Católica de Campinas; Escola de Engenharia de São Carlos; Instituto Cearense de Matemática; Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife; Instituto de Matemática da Universidade do Rio Grande do Sul; Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia; ITA; IMPA, além das conhecidas FFCL da USP e FNFi da UB.

A contratação de matemáticos estrangeiros é frequente no início do desenvolvimento da matemática no Brasil. Por meio do NBM, é possível encontrar nomes de matemáticos estrangeiros em algumas instituições brasileiras que recebiam bolsas para realizar cursos, conferências, seminários e palestras. Alguns desses docentes foram o austríaco Juan Jorge Schaeffer; o chinês Kuo-Tsai Chen; o eslovaco Otto Endler; os portugueses António Aniceto Monteiro que já havia trabalhado na FNFi no final da década de 1940, Manuel Augusto Zaluar Nunes, Alfredo Pereira Gomes e José Tiago de Oliveira; o irlandês Francis Dominic Murnaghan que trabalhava no ITA desde sua criação; os italianos Jaurès Pacífico Cecconi que foi um dos pioneiros do Departamento de Matemática da Escola de Engenharia de São Carlos, e Achille Bassi que trabalhou no início da FNFi; o alemão Günter Lumer; o francês Jean-Pierre Kahane. Alguns desses matemáticos eram renomados internacionalmente. Essas diferentes nacionalidades mostram o esforço desprendido pelos matemáticos brasileiros para trazer bons profissionais para trabalharem nas instituições científicas do país.

A produção científica, por meio das duas coleções Textos de Matemática e Notas de Matemática, além da publicação de livros, revela o empenho dos matemáticos brasileiros para incentivar o desenvolvimento da matemática em nosso país. As resenhas de livros são de grande importância para os leitores que ainda estavam iniciando os estudos em matemática e, portanto, precisavam de apoio para conhecer bons materiais de estudo.

Logo, a continuidade deste trabalho apresentará informações relevantes para a exposição de um cenário que retratará o desenvolvimento da matemática brasileira no período de 1959 até 1968. Como o NBM abordou informações sobre os diversos centros matemáticos que existiam no país, este trabalho poderá ser usado por diferentes pesquisas interessadas em discutir determinada instituição científica de um local específico.

FONTES:

Arquivo do CNPq (MAST)

Documentos do IMPA.

Noticiário Brasileiro de Matemática, volumes 1 e 2, IMPA, Rio de Janeiro, 1959.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, Fábio Ferreira de. **A influência e a importância de António Aniceto Monteiro para o desenvolvimento da Matemática no Brasil**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro — UFRJ, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: https://pemat.im.ufrj.br/images/Documentos/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2009/MSc_16_Fabio_Ferreira_de_Araujo.pdf. Acesso em 20 nov. 2024.

CARVALHO, Henrique Marins de. A matemática e os matemáticos do Instituto Tecnológico da Aeronáutica. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 16, n. 31, p. 21–49, 2020. DOI:10.47976/RBHM2016v16n3121-49. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/49. Acesso em: 30 nov. 2024.

CARVALHO, Raphael Alcaires de. **O ensino e a pesquisa em matemática no Rio de Janeiro em meados do século XX: a trajetória acadêmica de Carlos Alberto Aragão de Carvalho (1924–1982)**. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro — UFRJ, Rio de Janeiro, 2021. https://www.pemat.im.ufrj.br/images/Documentos/tese/2021/DSc_19_Raphael_Alcaires_de_Carvalho.pdf. Acesso em 20 nov. 2024.

D´AMBROSIO, Ubiratan. An adequate historiography for non-western mathematics. In: SELIN, Helaine (org.). **Mathematics Across Cultures. The History of Non-Western Mathematics**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000, p. 79-92.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Resgatando Oralidades para a História da Matemática Brasileira: a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 7, n. 14, p. 247–279, 2007. DOI: 10.47976/RBHM2007v7n14247-279. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/194. Acesso em: 30 nov. 2024.

LEVITT, Peggy; JAWORSKY, Bernadette Nadya. Transnational Migration Studies: Past Developments and Future Trends. **Annual Review of Sociology**, v. 33, p. 129–156, 2007.

LIMA, Suely Torres de Melo dos Santos. **Projeto para a criação do Centro de Memória do Instituto de Matemática Pura e Aplicada: uma história de competência, paixão e perseverança**. Tese de Doutorado. Fundação Getúlio Vargas — FGV, Rio de janeiro, 2009. https://repositorio.fgv.br/server/api/core/bitstreams/c513f102-6b31-4bce-b1b9-6fea478dbfaf/content. Acesso em 20 nov. 2024.

LOPES, José Leite. **Ciência e desenvolvimento**. São Paulo: Edições Tempo Brasileiro, 1964.

MINEIRO, Poncio. **Summa Brasiliensis Mathematicae: Efeito do início da institucionalização da pesquisa em Matemática no Rio de Janeiro**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro — UFRJ, Rio de Ja-

neiro, 2011. https://pemat.im.ufrj.br/images/Documentos/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2011/MSc_40_Poncio_Mineiro_da_Silva.pdf. Acesso em 20 nov. 2024.

PALIS JUNIOR, Jacob; CAMACHO, César; LIMA, Elon Lages (Ed.). **IMPA 50 Anos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

SILVA, Circe Mary Silva da. A construção de um instituto de pesquisas matemáticas nos trópicos —IMPA. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 4, n. 7, p. 37–67, 2004. DOI: 10.47976/RBHM2004v4n737-67. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/241. Acesso em: 30 nov. 2024.

SILVA, Circe Mary Silva da. O IMPA e a comunidade de matemáticos no Brasil. **Cadernos de Pesquisa**, v. 39, n. 138, p. 897–917, 2009. https://doi.org/10.1590/S0100-15742009000300011. https://www.scielo.br/j/cp/a/BJMhZqjZdDzVGHpHcxXdTkm/. Acesso em 20 nov. 2024.

TRIVIZOLI, Lucieli Maria. Intercâmbios acadêmicos matemáticos entre EUA e Brasil por meio de bolsas de estudos. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 15, n. 30, p. 49–60, 2015. DOI: 10.47976/RBHM2015v15n3049-60. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/84. Acesso em: 21 jan. 2025.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Desenvolvimento de um Centro de História e Memória em Educação Matemática no oeste do Pará

Development of a Center for History and Memory in Mathematics Education in western Pará

José Ricardo e Souza Mafra[1]
Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo central apresentar a concepção e composição inicial de um Centro de História e Memória em Educação Matemática no oeste do Pará (CHMEM). A concepção deste Centro pressupõe o entendimento de um sistema digital configurado para armazenar, recuperar e utilizar arquivos e documentos históricos relacionados à educação matemática na região Norte. Nesse sentido, a configuração de um acervo, perpassa pela necessidade de preservar a memória e subsidiar pesquisas associadas a formação de professores e o desenvolvimento de ações vinculadas as aprendizagens, relacionadas a preservação da educação matemática na região. Além disso, pretende-se com o CHMEM, com base na organização de arquivos, fotos, vídeos e outros materiais, possibilitar a configuração de um espaço de colaboração e troca de informações, objetivando a promoção de estudos e pesquisas vinculantes à compreensão da história da educação matemática. Espera-se assim, a produção de fontes de ensinamentos e aprendizagens associados a formação de professores, ensino de matemática com o suporte da história e o desenvolvimento da pesquisa em história da educação matemática, na região de influência, configurados por meio de uma matriz epistemológica de conhecimentos.

Palavras-chave: Educação Matemática; História da Educação Matemática; Formação de professores; Ensino de Matemática; Acervo digital.

ABSTRACT

The main objective of this work is to present the conception and initial composition of a Center for History and Memory in Mathematics Education in western Pará (CHMEM). The conception of this Center presupposes the understanding of a digital system configured to store, retrieve and use historical files and documents related to mathematics education in the North region. In this sense, the configuration of a collection goes through the need to preserve memory and subsidize research associated with teacher training and the development of actions linked to learning, related to the preservation of mathematics education in the region. In addition, the CHMEM intends, based on the organization of files, photos, videos and other materials, to enable the configuration of a space for collaboration and exchange of information, aiming at the promotion of studies and research linked to the understanding of the history of mathematics education. Thus, it is expected that the production of sources of teachings and learning associated with teacher training, mathematics teaching with the support of history and the development of research in the history of mathematics education, in the region of influence, configured through an epistemological matrix of knowledge.

Keywords: Mathematics Education; History of Mathematics Education; Teacher Training; Mathematics Teaching; Digital Collection.

INTRODUÇÃO

Estudos e pesquisas em educação matemática, mais especificamente em história da matemática e história da educação matemática, são desenvolvidos há mais de 30 anos, no Brasil (Miguel et al. 2004; Carvalho, 1994; Fossa e Mendes, 1998). Na Amazônia Legal Brasileira, há um número significativo de pesquisadores e bases de pesquisa que investigam a história da matemática e a educação matemática, com diversas abordagens e propósitos educacionais e de pesquisa. Assim, estas investigações, visam contribuir para a pesquisa e a formação de professores que estudam e promovem melhorias para o ensino de matemática na região.

[1] Doutor em Educação (UFRN). Docente na Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Santarém, Pará, Brasil. E-mail: jose.mafra@ufopa.edu.br.

Pesquisas sobre a educação matemática em perspectiva histórica têm avançado consideravelmente no Brasil nos últimos anos, sendo que, organizar tais indicadores, com base em diversas fontes, para a História da Educação Matemática não é algo recente. Portela (2023), comenta sobre a diversidade de iniciativas de criação de repositórios digitais para facilitar o acesso e o armazenamento de produções acadêmicas e outros dados, localizados e identificados, em diferentes instituições do Brasil. Em especial, na Região Norte o Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat) (Mendes, 2009, 2022), tem se mostrado bastante evidente e de significado simbólico para a pesquisa em educação matemática. Uma investigação centrada no conteúdo do CREPHIMat[2], nos mostra que o objetivo central desse ambiente digital é a organização e disseminação da produção de conhecimento em história da matemática, além de disponibilizar um espaço de colaboração e trocas de informação de produção acadêmica associada a História da Educação Matemática (Portela, 2023).

No contexto nacional, dois dos principais grupos de pesquisas no Brasil que se destacam na pesquisa e produção acadêmica associada a história da educação matemática, em especial, na formação de professores, é o Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática (GHEMAT) – Brasil[3] e o Grupo de Pesquisa História Oral e Educação Matemática (GHOEM)[4], conforme Mendes (2023a) aborda.

Embora o número expressivo de pesquisas desenvolvidas projete discussões relevantes associadas aos estudos históricos, evidencia-se uma amplitude ainda limitada em relação ao alcance das pesquisas, por conta da não localização e, consequentemente, estudos a serem feitos, de boa parte de fontes históricas vinculantes e, portanto, permanecem ainda por serem estudas.

A história da educação no Brasil envolve diversos aspectos, um deles é a formação de professores. Nesse sentido, investigar como se deu o processo de desenvolvimento educacional, na região, em especial a educação matemática, perpassa pela necessidade de se compreender como se deu ou como ocorria a formação de professores, em anos anteriores. Entender e compreender os momentos relacionados a história da educação e o efeito em se tratando de qualidade do professorado e a ausência quase que total de questões educacionais na região Amazônica, pode auxiliar na problematização e discussão mais contemporânea, associada aos processos formativos.

Quando se trata de escrever sobre a história de formação de professores na Amazônia paraense, ainda há lacunas principalmente no que tange a professores leigos em época anteriores. Há poucas produções que discorram sobre esses processos formativos a nível de ensino médio e superior no Pará. Sabemos que, inicialmente, ocorreu através dos programas de interiorização da Universidade Federal do Pará, pela criação dos campi em algumas cidades fora da capital e posteriormente ao surgimento de novas universidades como a Universidade Federal Rural da Amazônia (UFRA), Universidade do Estado do Pará (UEPA), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA) e das que foram criadas mais recentemente, a Universidade do Oeste do Pará (UFOPA) e a Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA). Nesse sentido, entender como se deu a educação paraense, com base em estudos históricos, principalmente na formação de professores, é uma contribuição para os estudos na história da educação matemática na região.

[2] Para mais informações, ver https://crephimat.com.br/.
[3] Para mais informações, acesse https://ghemat-brasil.com.br/sp/.
[4] Ver https://www2.fc.unesp.br/ghoem/.

Este trabalho tem como objetivo central apresentar a concepção e composição inicial de um Centro de História e Memória em Educação Matemática no oeste do Pará (CHMEM). Integra uma pesquisa em desenvolvimento, no nível de pós-doutorado, em parceria com a Universidade Federal do Pará, sob a supervisão do professor Iran Abreu Mendes (UFPA).

REFERENCIAL TEÓRICO

Recuperar e guardar as memórias de formação, localizando-as em quais contextos ocorreram, podem contribuir para o desenvolvimento formativo dos alunos graduandos, em processo de formação inicial e, entre outros aspectos, apontar possibilidades para as futuras inovações no campo da formação profissional de docentes. Assim, há necessidade de pensarmos na

> criação de um espaço ampliado de disseminação e interação profissional para contribuir na formação dos professores de Matemática e dos pesquisadores em história da Matemática, história da Educação Matemática e história para o Ensino de Matemática, em seu processo formativo como professores de Matemática (Mendes, 2023a, p. 16).

Ter um olhar para a matemática e sua história, também pode permitir uma discussão mais projetada em termos do ensinar e compreender o próprio objeto matemático, tal como D'Ambrosio (1993) afirma que, diante dessa conjuntura há uma necessidade de novos educadores, que vislumbrem uma matemática mais investigativa, mais alinhada à realidade dos alunos, que seja mais útil e que ajude a compreender e organizar a realidade em que vive, e que o aluno tenha espaço para experimentar e ser criativo. Mesmo, em um contexto bem contemporâneo, cercado e imerso por tantas informações, os alunos não veem a matemática como algo dinâmico e relacionado com elementos utilitários e voltados para a criatividade ou imaginação, de tal forma que possam participar de um canal dialógico e de pensamento.

A falta de registros e evidências detalhadas de atividades, eventos, materiais e documentos, limita a compreensão e entendimento de como uma dada ação, procedimento metodológico ou encaminhamento educacional foram realizados ou desenvolvidas em um corte temporal e geográfico situado, limitando assim o entendimento e a compreensão da importância da Educação Matemática da região, consequentemente limitando a produção de pesquisa acadêmica associada. A produção de estudos, em uma perspectiva historiográfica, pode assim representar um conjunto de informações pertinentes relacionados a um contexto de produção de conhecimento envolvendo indivíduos, práticas locais, problemas, comunidades e redes de colaboração acadêmica (Remmert *et al.*, 2019).

Compreender e entender os fatos históricos, em um ambiente de formação docente, projeta uma discussão pertinente em relação aos ensinamentos e práticas matemáticas associadas ao contexto social e cultural regional e de que forma elas se tornam presentes e necessárias, em uma dinâmica de produção de conhecimento, a serem realizadas por professores em início de carreira ou já em pleno desenvolvimento profissional (Mendes, 2023b).

Nesse sentido, o desenvolvimento desta pesquisa e sua importância, está na capacidade de subsidiar o pesquisador em história da matemática e história da educação matemática, com fontes documentais e bibliográficas, na produção de pesquisa educacional associada a educadores matemáticos, professores de matemática e instituições escolares. Assim, a principal justificativa para esta

pesquisa está na recuperação de fontes, no contexto de documentos e registros das ações realizadas – em diferentes localidades do contexto do oeste paraense.

A ausência de registros, por exemplo, escolares e didáticos associados aos educadores matemáticos da região se torna necessária evidenciar, por se tratar de produções invisibilizadas e, cujos reflexos na formação, tanto de professores quanto de alunos, em diferentes níveis e sistemas de ensino, se tornam necessários evidenciar.

OBJETIVOS E METODOLOGIA

O objetivo desta pesquisa é o de otimizar uma estrutura de suporte teórica e tecnológica para a guarda, localização, recuperação e uso de informações, associadas a fontes históricas, de documentos e arquivos, por meio da configuração de um Centro de Memória e História da Educação Matemática, no oeste do Pará.

Os objetivos específicos são o de idealizar um sistema virtual de registros e documentos históricos em Educação Matemática, como subsídio–via recursos midiáticos e produtos digitais – para a pesquisa e o estudo de investigações associadas a história da matemática e história da educação matemática, no oeste paraense. Além disso, pretendemos estratificar e organizar informações, por meio de uma estrutura hierárquica inicial, composta por uma matriz de informações históricas, associadas a formação de professores, visando a elaboração de uma epistemologia, com base em estudos investigativos relacionados a História da Educação Matemática na região oeste do Pará.

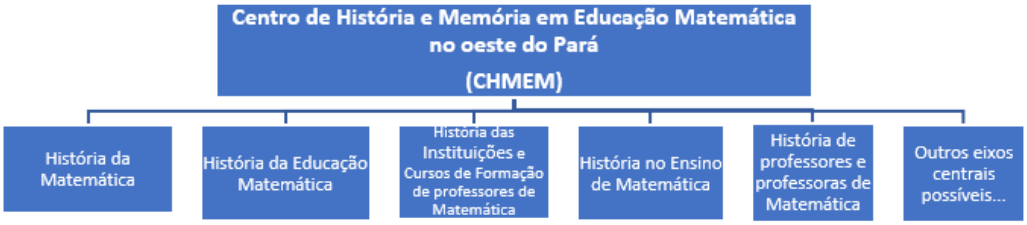
Os procedimentos metodológicos iniciais estão baseados em Lüdke e André (1996), Yin (2016) e May (2004) ao tratarem da necessidade de um levantamento de fontes de referenciais teóricos que possam subsidiar a composição estrutural de sustentação deste estudo, tendo por base indicadores teóricos de diversas áreas de conhecimento, tais como: história da matemática, história da educação matemática, historiografia digital, tecnologias contemporâneas, ciência da informação, dentre outras. Em adição, a idealização/concepção e configuração de uma estrutura tecnológica, uma espécie de Sistema Virtual de guarda, recuperação e uso de registros historiográficos, por meio de softwares e/ou programas inteligentes, perpassa pela necessidade, posteriormente, em conceber indicadores de ações possíveis, para a produção de conhecimento associada aos propósitos aqui elencados, configurando assim a organização inicial de uma matriz de informações históricas, por meio de uma tipologia inicial para o que denominamos de Centro de História e Memória em Educação Matemática no oeste do Pará (CHMEM).

O CENTRO DE HISTÓRIA E MEMÓRIA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO OESTE DO PARÁ (CHMEM)

O CHMEM está sendo concebido como um sistema de guarda, recuperação e uso de um acervo composto por documentos e arquivos organizados em comunidades idealizadas, conforme uma perspectiva de produção de conhecimento a ser desenvolvida, em estudos em desenvolvimento (Portela, 2024; Marinho Filho, 2024; Mafra, 2023) ou, posteriores.

Elencamos abaixo, na figura 1, uma estrutura hierárquica inicial pensada para o CHMEM.

Figura 1 – O CHMEM



Fonte: Autoria própria (2024)

Elencamos um breve ementário, associado as comunidades organizadas/pensadas:

1) **História da Matemática**: Trata da localização e identificação de fontes e documentos associados a produção de conhecimento matemático de destaque. Indicadores de produção de conhecimento local e/ou padrões de organização matemática, desenvolvidas e projetadas, em função de estratégias de pensamento inéditas e/ou já desenvolvidas em outros momentos históricos. Localização e produção de histórias da matemática, associadas a *experts* locais.

2) **História da Educação Matemática**: Trata da documentação, composição de acervo e registros de iniciativas locais, associada a educação matemática, na região oeste do Pará, tais como os Laboratórios de matemática e educação matemática, na região, bem como a existência de Clubes de matemática e Grupos de estudos associados a matemática e educação matemática. Além disso, trata da localização e registro (composição de acervo) de atividades associados a Grêmios Estudantis e Centros de pesquisa/ extensão vinculados ao ensino e a aprendizagem da matemática.

3) **História no Ensino de Matemática**: Trata do estudo e documentação histórica associadas ao ensino/formação e a aprendizagem matemática, evidenciadas nos propósitos institucionais, vinculados a Escolas/ Instituições Públicas, Conventos/ Escolas Religiosas na Região. Localização e estudo de acervos específicos, formatos de gestão educacional, currículo, modelos de formação associados aos professores que atuaram nestas instituições e sua vinculação com os propósitos de ensinar e aprender, a matemática.

4) **História das Instituições e Cursos de Formação de professores de matemática**: Esta comunidade trata ainda da localização, organização e documentação associada aos percursos históricos e formativos associados as Instituições promotoras de cursos que formam professores, localizadas no oeste do Pará, e que existiram ou existem atualmente. Procura assim evidenciar registros, via depoimentos em áudio e vídeo, diários pessoais e/ou de trabalho, cartas, bilhetes, mensagens, memorandos e/ou ofícios, projetos pedagógicos de curso, projetos institucionais, dentre outros, objetivando a organização de um acervo para a pesquisa em educação matemática, mais especificamente, para a história das Instituições formativas, localizadas no oeste paraense.

5) **História de professores e de professoras de matemática:** Esta comunidade trata de organizar uma memória, com base na história formativa de professores, por meio da produção e documentação de narrativas autobiográficas e histórias de vida, em que seja possível destacar o desenvolvimento formativo destes professores, seus percursos e trajetórias profissionais, suas influências e inspirações na vida de estudantes e demais professores. Além disso, é proposto a localização e a organização de arquivos pessoais destes professores, tais como Manuais escolares, Instrumentos de Ensino e de Avaliação, Atas e Diários de reuniões/trabalhos, Manuais de avaliação, Cadernos pedagógicos, Planos de aula e de ensino, Atividades em geral, certificados, diplomas e históricos escolares de conclusão de curso, dentre outros.

6) **Outros eixos possíveis...**

Nesse sentido uma configuração metodológica para esta pesquisa está sendo desenvolvida, conforme as etapas a seguir:

Desenvolvimento de meios digitais de tratamento digital de informações: trata do desenvolvimento de métodos e técnicas digitais, utilizando as tecnologias e mídias disponíveis para organizar uma sequência de ações e etapas visando a organização e tratamento de fontes de pesquisa documental. Tais fontes precisam ser rastreadas e localizadas, com um intuito claro de finalidades relacionadas com estudos históricos associados a educação matemática. Assim pode ser possível a organização e dimensionamento de estratégias digitais para a recuperação e tratamento de uma informação, por meio de um conjunto de documentos ou registros.

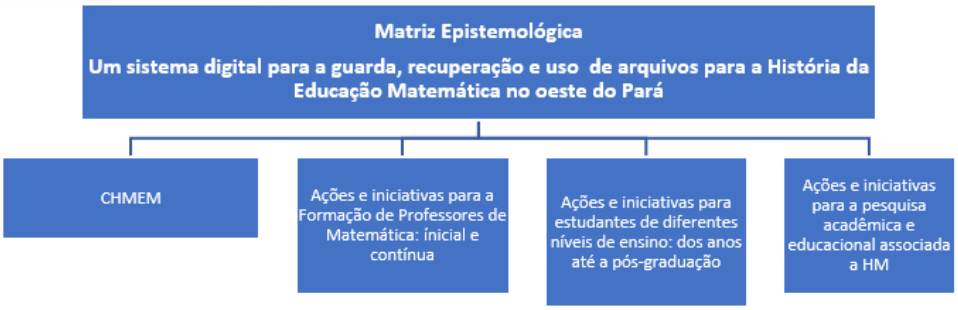
Desenvolvimento de métodos e técnicas de pesquisa digital e documental: estratégias digitais podem dar margem para a elaboração ou concepção de uma espécie de *framework*, para além da simples digitalização de documentos. A manipulação e a transformação digital, com base no desenvolvimento de uma determinada pesquisa, definirá processos, métodos e técnicas, semelhantes a uma espécie de curadoria digital, pertinentes a uma memória coletiva (social e cultural) de um conjunto de conhecimentos gerados/produzidos em um corte temporal e geográfico.

Otimização de uma estrutura hierárquica inicial para a localização de informações históricas por Instituições localizadas na região oeste do Pará: desenvolvimento de um conjunto de ações e etapas para uma organização inicial de metadados associados às informações históricas. Uma espécie de banco de dados, por meio de uma estrutura hierárquica visando a guarda, busca, recuperação e catalogação/organização de fontes históricas.

Nesta proposta estamos considerando que a matriz historiográfica a ser sistematizada converge tanto para a recuperação de fontes e informações associadas a história da educação matemática quanto à metodologia a ser pensada e configurada para a compreensão, organização e otimização de informações históricas, em um contexto mais contemporâneo e diverso culturalmente (Remmert *et al.*, 2019).

Em tese, a configuração estrutural do Centro seria aquilo que denominamos de "matriz epistemológica" para a HM/Formação de professores no oeste paraense. Uma espécie de "espinha dorsal", para a produção acadêmica associada a história da educação matemática, a ser alimentada por trabalhos futuros ou em vias de desenvolvimento, associados a diferentes níveis de ensino e diretamente relacionados com a pesquisa/formação docente de professores de matemática.

Figura 2 – Esboço estrutural de uma Matriz Epistemológica



Fonte: Autoria própria (2024)

A Matriz Epistemológica seria então, um sistema digital para a guarda, recuperação e uso de arquivos para a História da Educação Matemática no Oeste do Pará, em que o CHMEM seria o acervo principal e a indicação inicial de sua concepção projetaria diferentes ações e iniciativas associadas a formação de professores de matemática, seja ela inicial ou contínua, a ser desenvolvida por meio de cursos, oficinas, capacitações, fóruns, reuniões, conferências, palestras, entre outros. Além disso, a organização de indicadores associados a ações de aprendizagem, com foco no acervo disponível no CHMEM, pode ser desenvolvida, com estudantes, pertencentes a diferentes níveis de ensino: desde os anos iniciais até a pós-graduação.

Por fim, o acervo a ser organizado e localizado no CHMEM projeta possibilidades de investigações associadas a pesquisa acadêmica e científica, vinculadas a história da educação matemática, no oeste paraense.

Sua institucionalização é necessária e encontra-se em vias de implementação, tendo em vista seus propósitos acadêmicos e científicos, vinculados a pesquisa na grande área da Educação, em especial, a Educação Matemática, bem como as investigações a serem desenvolvidas, vinculantes a grande área Multidisciplinar, no caso a área de Ensino.

Esforços, junto a administração superior da Universidade Federal do Oeste do Pará, estão sendo envidados, para que a organização tecnológica e virtual do CHMEM, seja efetivado e a capacidade de armazenamento destinado (cerca de 2Tb) para a composição do acervo a ser configurado, seja disponibilizado o mais breve possível.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta do CHMEM vai ao encontro da preocupação permanente associada a organização de uma memória associada a história da matemática na região oeste do Pará. A organização e a disponibilização de diferentes tipologias de documentos, em diferentes formatos e composições, tais como: documentos institucionais ou pessoais, fotografias, vídeos, depoimentos, jornais, magazines, trabalhos acadêmicos, materiais de uso instrucional, relatórios de pesquisa, entre outros, se tornaria uma espécie de ambiente de preservação associadas a práticas formativas e de aprendizagens diversas que marcaram gerações de professores e alunos, ao longo das últimas décadas.

Para além dessa funcionalidade, este ambiente seria a concepção de um acervo digital em que, demais ações seriam pensadas, visando essencialmente a configuração inicial de uma estruturação de experimentação para a formação de professores e para ações vinculantes envolvendo o ensino e a aprendizagem da matemática. Mendes (2024), comenta a importância desses acervos para a pesqui-

sa acadêmica e para o desenvolvimento de uma tomada de consciência necessária para a sua função de existir, pressupondo uma convergência associada a existência de processos de ensinar e de formar professores de matemática.

A necessidade de aprofundamento de estudos e fundamentos teóricos mais contemporâneos, advindos de diferentes áreas de conhecimento, tais como a arquivologia digital, a curadoria digital de documentos, bem como pensar em técnicas historiográficas e elementos da preservação de documentos associados a ciência da informação, se torna evidente, por conta da configuração tecnológica vinculada a preservação digital, bem como da necessidade de organizarmos um pensamento associado a substratos teóricos, diretamente conectados aos estudos mais contemporâneos em história da educação matemática.

Estabelecer pontes ou conexões com estas áreas é crucial para o entendimento e a compreensão de formas, modos e caminhos possíveis para a pesquisa acadêmica e educacional em história da educação matemática, em um contexto contemporâneo de rápidos avanços tecnológicos. Nesse sentido o CHMEM assume um protagonismo nessa direção, visando a elaboração de uma discussão conectada a necessidade de compreensão teórica e de fundamentos para se pensar em ações estruturantes, que configurem uma tipologia de experimentação relacionadas as práticas associadas ao uso destes sistemas digitais. Assim, podem ser pensadas diferentes possibilidades para uma espécie de organização de conhecimentos, de tal forma que seja possível a produção e elaboração de fontes de ensinamentos, métodos e técnicas, objetivando aprendizagens para alunos, professores e demais interessados em história da educação matemática.

O CHMEM, como um centro de pesquisa e memória em educação matemática, pode e, certamente, vai enfrentar diversas limitações e desafios em sua implementação, tanto no âmbito da pesquisa e organização, quanto na interação com a comunidade. As principais limitações e desafios estão relacionados aos recursos humanos e a composição de um grupo de colaboradores, pesquisadores e simpatizantes a proposta do CHMEM, com conhecimentos em história da matemática, educação matemática e áreas afins pode ser um desafio, especialmente em regiões com menos oferta de especialistas. Os recursos financeiros, sejam eles públicos ou privados, para a manutenção do espaço, aquisição de materiais, produção das pesquisas e ações relacionadas, além da divulgação e disseminação do conhecimento. A infraestrutura necessária e a busca por um espaço inicial para o desenvolvimento das atividades de concepção, planejamento e manutenção do Centro.

A configuração esperada para a concepção do CHMEM revela a necessidade de pensarmos o conceito de memória e de história, vinculadas a problemáticas mais contemporâneas e que podem ser organizadas, via historiografia digital, para a pesquisa em educação matemática e história da educação matemática. Um desafio promissor, em termos de pesquisa acadêmica e pesquisa educacional nas próximas décadas.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, João Pitombeira de Avaliação e Perspectivas da área de Ensino de Matemática no Brasil. **Em Aberto**. Ano 14, n. 62, p. 74-88, abr./jun. 1994.

D'AMBROSIO, Beatriz **Formação de professores de matemática para o Século XXI**: O grande desafio. Pró-Posições, Campinas, n. 1993.

FOSSA, J. A.; MENDES, I. A. Tendências atuais na educação matemática: experiências e perspectivas. In: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORDESTE, 13., 1998. Natal. **Anais...**. Natal: EDUFRN, 1998 (Coleção EPEN, n. 19).

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MAY, Tim, **Pesquisa social**: questões, métodos e processos. 3 ed. Porto Alegre: Artmed, 2004

MAFRA, José Ricardo e Souza. **Desenvolvimento de uma matriz historiográfica para a formação de professores de matemática no oeste do estado do Pará**. Projeto de pesquisa PDS/CNPq, Universidade Federal do Pará, 2023.

MARINHO FILHO, Eliseu da Rocha. **Uma história digital para a educação matemática no oeste do Pará: desenvolvimento de uma plataforma de memórias digitais de professores**. 2024. 19 f. Projeto de pesquisa, doutorado em Educação (PPGE)–Universidade Federal do Oeste do Pará, 2024.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação histórica no ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MENDES, Iran Abreu. **Usos da História no Ensino de Matemática**: Reflexões Teóricas e Experiências. Livraria da Física, 2022.

MENDES, Iran Abreu. Grupos de pesquisa em história da Matemática: pensamento coletivos em comunidades de prática. **Revemop**, v. 5, p. e202314, 22 dez. 2023a. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/7053 Acesso em: 08/01/2024.

MENDES, Iran Abreu. História como um agente cognitivo de aprendizagem matemática compreensiva. **Educação, Matemática e Pesquisa**. v. 25 n.2 2023b. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/62018 Acesso em 10/01/2024.

MENDES, Iran Abreu. Arquivos e acervos institucionais como fontes para pesquisas historiográficas sobre o ensino de Matemática no Pará. **REMATEC**, Belém, v. 19, n. 49, p. e2024004, 2024. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024004.id659. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/659 Acesso em: 6 set. 2024.

MIGUEL, Antonio; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo e D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de Educação**. Set /Out /Nov /Dez 2004, n. 27.

PORTELA, Lissa Nareli. Peças de uma História: contribuições do laboratório de aplicações matemáticas (LAPMAT) da UFOPA para a educação matemática, na região oeste do Pará. **Dissertação** (Mestrado acadêmico). Programa de Pós-graduação em Educação (PPGE)/UFOPA. 2024**.**

REMMERT Volker; SCHNEIDER Martina; SORENSEN Henrik. **Historiography of Mathematics in the 19th and 20th Centuries**. Switzerland: Springer International Publishing, 2016.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim** [recurso eletrônico], tradução: Daniel Bueno, revisão técnica: Dirceu da Silva. Penso, E-PUB, 2016.

Este artigo foi produzido com apoio e financiamento do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Brasil.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

A matemática e o jogo da tômbola no contexto da imigração italiana no Rio Grande do Sul

Mathematics and the Tombola Game in the Context of Italian Immigration in Rio Grande do Sul

Delma Tânia Bertholdo[1]
Instituto Federal de Ciências e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS

RESUMO

A presença da matemática nas práticas comunitárias, herdadas e reproduzidas ao longo de gerações, permite compreender estratégias de apropriação e ensino de seus conceitos em diferentes contextos formais e não formais. Este trabalho concentra-se na análise do ensinamento dos números no jogo da tômbola enquanto prática cultural preservada por parte dos imigrantes italianos quando do seu estabelecimento a partir de 1875 na região serrana do Rio Grande do Sul. Por meio de fontes históricas, tais como atas de sociedades de mútuo socorro e relatos orais, além de pesquisa documental, são apresentadas evidências da presença e de adaptações dos jogos da tômbola promovidos pelo grupo em estudo. Para isso, articulou-se a Etnomatemática de D'Ambrosio (2002) com a História Cultural (Chartier, 2002), com interface na análise historiográfica proposta por Lübeck (2023). Considerou-se a afirmativa de Luchese (2015) de que, em função do grau de analfabetismo desses imigrantes, o jogo da tômbola foi utilizado como ferramenta para o ensino de números, associando imagens, gestos e sons, sobretudo em eventos festivos e religiosos da comunidade italiana do período inicial da imigração italiana no Brasil.

Palavras-chave: Tômbola; Números; História da matemática; Etnomatemática; Imigração italiana.

ABSTRACT

The presence of mathematics in community practices, inherited and reproduced over generations, allows us to understand strategies for appropriating and teaching its concepts in different formal and informal contexts. This paper focuses on the analysis of teaching numbers through the tombola game as a cultural practice preserved by Italian immigrants when they settled in the mountainous region of Rio Grande do Sul starting in 1875. Using historical sources such as minutes books from mutual aid societies and oral accounts, along with documentary research, evidence is presented of the presence and adaptations of tombola games promoted by the group under study. To achieve this, D'Ambrosio's Ethnomathematics (2002) was articulated with Cultural History (Chartier, 2002), with an interface in the historiographical analysis proposed by Lübeck (2023). Luchese's (2015) statement that, due to the high illiteracy rates among these immigrants, the tombola game was used as a tool for teaching numbers—associating images, gestures, and sounds—particularly in festive and religious events within the early Italian immigrant community in Brazil, was considered.

Keywords: Tombola; Numbers; History of mathematics; Ethnomathematics; Italian immigration.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No final do século XIX, a península itálica passava por um processo crescente de industrialização e, ao mesmo tempo, mantinha as estruturas fundiárias e de contratos para uso das terras. O aumento de população, sobretudo nos campos agrícolas (Stringher, 1905, pp. 131-147)[2], as famílias numerosas, a falta de terras para cultivo e a alta taxação por parte do governo levaram a tensões e conflitos sociais. No mesmo período, o Brasil, de caráter fortemente agrário, demandava trabalhadores para substituir a mão de obra escrava e dar conta da produção agrícola. Geograficamente, o sul do Brasil apresentava, dentre outras questões, vazios agrícolas e demográficos, o que levou o

[1] Mestre em Ensino da Matemática (UFRGS), 2020. Professora de Matemática no Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS), Farroupilha, RS, Brasil. E-mail: tania.bertholdo@farroupilha.ifrs.edu.br.

[2] As estatísticas de população agrícola italiana do período podem ser consultadas no boletim do Ministério da Agricultura intitulado *Notizie sull'Italia agricola*, de Vittorio Stringher (1905), exemplar consultado na biblioteca da *Accademia dei Georgofili*, Florença.

governo imperial a incentivar a ocupação permanente dessas terras[3], buscando, assim, atrair imigrantes europeus, principalmente italianos, concedendo-lhes benefícios, tais como pagamento de passagens, transporte até o local de assentamento, oferta de terras a preço subsidiado no longo prazo e ferramentas. Dessa forma, muitos italianos resolveram deixar suas terras e migrar para o Brasil.

Em 1875, foram delimitadas as três primeiras colônias oficiais no Rio Grande do Sul: Conde D'Eu, Princesa Isabel e Fundos de Nova Palmira (ou Caxias). Os lotes iam sendo ocupados à medida que os imigrantes chegavam. A rápida ocupação obrigou o governo a expandir as colônias para o noroeste e oeste (Giron e Herédia, 2007, p. 47). Essa expansão, localizada na atual Serra Gaúcha, é identificada como Região Colonial Italiana do Rio Grande do Sul (RCI/RS) e engloba 22 municípios (Bertholdo, 2021, p. 81), sendo Caxias de Sul o maior deles, com mais de 500 mil habitantes. Segundo Luchese (2015), 80% dos italianos que vieram ao Brasil nesse período e que se instalaram nas colônias da RCI/RS foram identificados como chefes de família, camponeses e artesãos.

Com o advento da República e a passagem da responsabilidade de colonização das terras para o estado, a imigração italiana continuou a acontecer com um grande fluxo à região, agora incentivada pela grave crise do café em São Paulo, pela piora da situação agrícola italiana e pelos sucessivos eventos armados na Itália. Os benefícios estaduais à imigração somente cessaram no RS atendendo ao decreto de 13 de julho de 1914 (Manfroi, 2001, pp. 58-61).

Costa (1979, p. 201) afirma que,

> As primeiras gerações de filhos de imigrantes constituíram comunidades semi-letradas, tendo a cultura notável descenso em comparação aos imigrantes, na maioria alfabetizados e com conhecimento da cultura comum italiana. A maior parte das mulheres era analfabeta pela razão de não ter responsabilidades diretas com a gerência domiciliar, com os negócios e responsabilidades sociais, atividades próprias dos homens.

Ao dizer que o imigrante tinha "conhecimento da cultura comum italiana", é importante reforçar que, à época, não estava consolidada uma única cultura italiana; cada região mantinha a própria língua (dialetos), sistemas de medidas antigos, usos e costumes. Então, havia povos (vênetos, milaneses, calabreses etc.) com fazeres cotidianos próprios, na mesma comunidade.

As características de isolamento geográfico e social, a condição de pequeno proprietário, que necessitava trabalhar para sobreviver e pagar a propriedade, a utilização de mão de obra familiar, a preservação dos hábitos e costumes de origem, a sociedade patriarcal e a relativa tranquilidade de ocupação das terras permitiram ao imigrante italiano manter na RCI/RS a "homogeneidade cultural e a preservação por longo tempo das línguas, tradições e dos costumes" (Manfroi, 1979, p. 160).

Com Ribeiro, Silva e Miarka (2023, p. 129), pode-se compreender que a comunidade italiana na RCI/RS possuía práticas construídas e transmitidas conforme suas interpretações e interações com o meio em que vivia e se relacionava. Práticas "entendidas não como um conjunto de conhecimentos, que seria transmitido como uma 'bagagem', mas que estão constantemente reatualizando-se e adquirindo novos significados, ou seja, são produtos e produtores de cultura" Knijnik *et al*.

[3] As terras do sul do Brasil eram historicamente ocupadas por tribos indígenas Kaingang, que foram perseguidas pelos enviados imperiais e obrigadas a deixar suas terras. O império criou aldeias nas regiões noroeste do atual estado do Rio Grande do Sul, que permanecem na região. Esse violento e forçado processo de expulsão explica, de algum modo, como a ocupação das terras na serra gaúcha pelos italianos a partir de 1875 ocorreu de modo pacífico (Bringman, 2010, pp. 58-60).

(2019, p. 26). Nesse sentido, pelo olhar da etnomatemática, que envolve "várias maneiras, técnicas e habilidades (ticas) de explicar, de entender, de lidar e de conviver com (matema) distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (etnos)" (D'Ambrosio, 2020, p. 65), é possível perceber estratégias desenvolvidas pelos imigrantes tanto nas habilidades matemáticas quanto nas práticas culturais.

D'Ambrosio (2005) considera como cultura um conjunto de mitos, valores, normas de conduta e estilos de conhecimento compartilhados por pessoas situadas espacial e temporalmente, o que se justifica, neste trabalho, ao tomar o programa etnomatemática[4] como norteador do fazer matemático do grupo citado a partir da prática cultural do jogo da tômbola. Historicamente, os jogos estiveram presentes nas antigas civilizações e tinham um caráter de entretenimento, diversão e ocupação das horas de lazer. Por meio do jogo, as pessoas desenvolviam seu raciocínio lógico ao compreender as regras e estabelecer relações. O jogo da tômbola pode, então, ser compreendido historicamente como uma estratégia de socialização dos imigrantes italianos que, ao mesmo tempo, proporcionava uma ação educativa de reconhecimento e associação de símbolos à números.

Na sequência, encontram-se um breve histórico do jogo da tômbola, suas características no contexto do imigrante italiano na RCI/RS, dois relatos orais, que mostram a longevidade dessa prática, uma possível interlocução com livros didáticos italianos de aritmética e perspectiva futura de pesquisas.

METODOLOGIA E DESENVOLVIMENTO

O jogo da tômbola: breve histórico

A origem da *tombola*/tômbola é incerta, mas o verbo *tombolare*, em italiano, significa tombar, rolar de cabeça para baixo, em uma alusão à movimentação das peças do jogo. Alguns mencionam ser de origem napolitana[5] a partir do jogo *Lotto* que, proibido pelas autoridades, passou a ser jogado clandestinamente. Segundo Tardio (2011), era considerado um jogo de azar, pois cada participante contribuía com uma determinada soma que, sob certas regras, servia como prêmio ao(s) vencedor(es). Para transformá-lo em uma atividade familiar, adaptaram-no e passaram a chamá-lo de *tombola*. Hoje, é mundialmente conhecido por bingo, loto, *lotteria* e/ou *housie*.

A tômbola era hábito antigo nas famílias de agricultores italianos, um típico jogo de mesa natalício, usualmente após a ceia, mas também durante dias de festa e ao término de refeições. Consistia de cartelas, de diferentes materiais, com números aleatórios distribuídos em linhas e colunas (Figura 1). Pequenas peças, geralmente de madeira e numeradas de 0 a 90, eram colocadas e misturadas em um saco. Ao ser retirada uma peça, se procedia à leitura do número em voz alta. O jogador, ao reconhecer a presença em sua cartela do número "cantado", marcava com algum grão.

[4] O programa etnomatemática referido neste trabalho é definido por Rosa e Orey (2006) como um campo de pesquisa, que pode ser descrito como o estudo das ideias e das atividades matemáticas encontradas em contextos culturais específicos.

[5] Disponível em: https://www.unina.it/-/1345491-l-origine-della-tombola-tra-mito-e-leggenda . Acesso em: 05 mar. 2025.

Figura 1 – Imagens de cartelas de tômbola italianas antigas

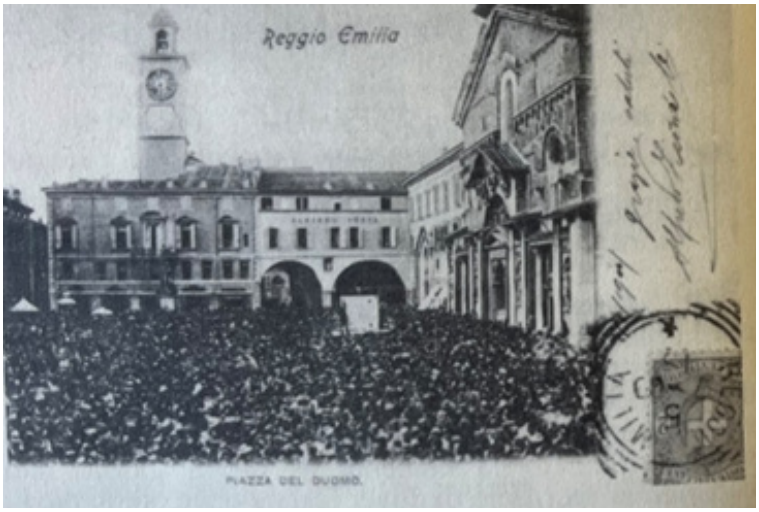
Fonte: Tardio (2011, p. 2 e 11)

Segundo Tardio (2011), as regras dos antigos jogos de tômbola italianos eram estabelecidas entre os participantes, de comum acordo, antes da partida. Eles definiam o custo da cartela e cada um comprava uma, duas ou mais cartelas (o *tabellone* equivalia a 6 cartelas), depositando o dinheiro na caixa de apostas. Os noventa números eram extraídos em sequência aleatória e as premiações possíveis eram: *ambo*, quando saíam dois números na mesma linha; *terno*, quando saíam três números na mesma linha; *quaterno*, para quatro números na mesma linha; *cinquina* ou *quintina*, para cinco números na mesma linha; dupla *cinquina* ou *quintina*, quando saíam duas séries de cinco números sobre duas linhas; e *tombola*, quando saíam todos os 15 números da cartela. Às vezes vinha atribuído o prêmio do *tombolino*, ou seja, a segunda cartela preenchida em ordem de tempo após a *tombola*. Ao longo dos anos, as regras foram adaptadas e ajustadas conforme a necessidade.

Nas diversas regiões italianas em que jogar a tômbola era hábito, havia comparações entre os nomes atribuídos a alguns números. Na pequena obra de Mussatti, *I numeri della tombola a Firenze,* de 1906, pode-se encontrar alguns exemplos de nomes para a leitura dos números que eram comuns em Florença e Veneza, tais como: o número 3, chamado de grilo por fazer *tri tri*; o número 12, soldado; o 16 refere-se às mulheres; 33 é a idade de Jesus; 47, o morto que fala; 52, a mãe; 59, a minha casa; 69, matrimônio ou cólera; 75, beijo; 83, cama. Particularmente em Florença, o número 44 é *la piena* (a cheia do rio) por causa da enchente de 1844. Em outras cidades, o número 7 seria o cutelo; o 9, as fezes em Veneza, pelo formato; o 88, óculos. Há casos que fazem referências a datas de santos. Tudo isso caracterizava a alegria e a empolgação ao "cantar a tômbola".

A tômbola mobilizava pessoas em praça pública (Figura 2), onde os números eram chamados do alto de balcões de prédios que circundavam a praça. Os eventos eram animados, mesmo com as pessoas em pé durante horas assinalando os números em suas cartelas até que fossem conhecidos os vencedores.

Figura 2 – Extração da tômbola na praça central de Reggio Emilia, Itália, 1900



Fonte: Mazzaperlini (1997, p. 18)

Para Mazzaperlini (1997, p. 20-21), as tômbolas antigas eram eventos extraordinários, de ampla divulgação, com brincadeiras no "cantar os números" e com poucas extrações por período enquanto as modernas são encontros em centros sociais duas ou mais vezes por semana com muitas extrações por período e (quase) em total silêncio. É difícil encontrar conhecedores das características gráficas ou satíricas dos 90 números, assim, o jogo foi perdendo seu aspecto original. Segundo ele (1997, p. 22),

> Essas diferenças substanciais entre a tômbola de ontem e a de hoje, a primeira ligada ao modo de dizer e a segunda baseada na velocidade de extração dos números do *sacchetto*, levaram-me a ver, mais a fundo, o papel que também tinha nosso belo dialeto na tômbola (tradução livre da autora).

Essas observações possibilitam compreender o processo de transformação do jogo na RCI/RS e as adaptações proporcionadas pelos diferentes dialetos entre os imigrantes quando da realização da tômbola nas comunidades.

O REGISTRO DE TÔMBOLAS EM LIVROS DE ATAS DE ASSOCIAÇÃO DE MÚTUO SOCORRO

Na pesquisa por evidências do uso do jogo da tômbola na RCI/RS foram localizados dois livros[6] de atas pertencentes à *Società Coloniale Artistica Italiana di Mutuo Soccorso di Donna Isabella*, antiga associação comunitária criada pelos imigrantes italianos na atual cidade de Bento Gonçalves. Identificaram-se algumas práticas culturais da época, bem como o registro da organização e das realizações de jogos da tômbola pela comunidade.

Pelas datas das atas, acredita-se que ambos os livros tenham sido preenchidos alternadamente na língua italiana pelo secretário da *Società* (Sociedade). O primeiro livro possui 466 páginas; inicia em 15 de maio de 1882 (ata da fundação) e finaliza em 5 de dezembro de 1904. Nele constam os nomes dos 14 fundadores da associação (imigrantes italianos e residentes na colônia Dona Isabel),

[6] Disponíveis no acervo do Arquivo Histórico Municipal João Spadari Adami (AHMJSA) em Caxias do Sul, RS.

os protocolos das reuniões ordinárias e extraordinárias do Conselho Administrativo da Sociedade, e vários registros de organização e realização da t*ô*mbola. O segundo livro possui 380 páginas; inicia em 16 de novembro de 1884 e finaliza em 15 de junho de 1913. Este livro era destinado às anotações das assembleias de associados, o que explica a existência de dois volumes concomitantes. Trata-se de uma fonte histórica original com informações sobre a organização da *Società* e indícios de atividades ligadas à escola e à vida dos associados.

Como são dois livros de atas que relatam eventos da mesma sociedade para a mesma época, foi elaborado o Quadro 1 com um resumo das tômbolas organizadas e/ou realizadas ao longo do período de escritura das atas. Embora o segundo livro tenha registros até 1913, não há mais menção à organização e/ou realização de tômbolas a partir de 1903. Há indícios, na ata de 04 de novembro de 1895, de que um livro–talvez o terceiro -, chamado "Arquivo Social", conteria mais informações sobre os eventos da entidade a partir de 1903, mas não foi localizado até o momento.

Percebe-se o registro de cerca de 14 tômbolas organizadas pela associação entre 1882 e 1903. Algumas delas foram adiadas, outras ficaram subentendidas de terem acontecido, e outras ainda tiveram prestação de contas–há menção até de uma "meia tômbola", sem maiores esclarecimentos sobre como seria sua organização. Havia irregularidades nas anotações referentes a esses eventos e dependia do detalhamento de quem registrava nas atas, razão pela qual essa contagem é apenas uma estimativa que permite concluir que, ao longo desse período, a tômbola tenha sido uma prática cultural corrente na comunidade.

Quadro 1 – Relação de tômbolas entre 1883 e 1903 na *Società Coloniale Artistica Italiana di Mutuo Soccorso di Donna Isabella,* RCI/RS

LIVRO	DATA	DESCRIÇÃO
1	01/01/1883	Sessão extraordinária para organização da tômbola.
1	28/01/1883	**Realização da tômbola**, cujo prêmio principal era de 200.000 réis. 60.000 réis eram para as demais premiações–não detalhadas.
1	18/06/1883	Comissão para a realização da **tômbola em 29/07/1883** às 13h.
1	06/12/1883	Proposta de realização de tômbola para a escola.
1	07/01/1884	Reunião com instruções para a realização da **tômbola no terceiro domingo de janeiro de 1884**.
1	21/7/1884	Proposta de **organização de tômbola**.
1	16/5/1887	Proposta de **"meia" tômbola** em 31/5/1887 para pagar a dívida da escola com a Sociedade. Nova tômbola marcada para 31/7/1887.
2	19/06/1887	Solicitação de dois recitais à *Società Filodramatica di Caxias* para animação da **tômbola de 31/7/1887.**
1	31/7/1887 31/8/1887	Tômbola transferida para 02/10/1887.
1	13/10/1887	Apresentação dos resultados financeiros obtidos com a **tômbola de 02/10/1887**.
1	31/8/1890	Realização de uma **tômbola** para a *Società* de Linha Eulália.
1	31/11/1891	Organização da tômbola para o **1º de ano de 1892**.
2	17/01/1892	Reunião de organização para a tômbola em benefício da Sociedade no último domingo de carnaval.
2	27/03/1892	Prestação de contas da **tômbola realizada** em 19/3/1892 com lucro de 214$500 réis.
2	11/9/1892	Organização para uma tômbola natalícia.
1	30/11/1892	Organização da **tômbola para o 1º de ano de 1893**.

1	5/8/1894	Agendamento da **tômbola para o 1º domingo de outubro** com 1500 cartelas encomendadas junto à Litografia Wiedemann & Filhos.
1	02/9/1895	Organização da **tômbola para 17/10** com a premiação de 40$000 réis para *quaterna*, 60$000 réis para *cinque* e 100$000 réis para a *tombola*. Cada cartela teve seu preço de venda estipulado em 500 réis.
1	04/11/1895	Prestação de contas da tômbola: ativo–657$000 réis; passivo–316$840 réis.
1	6/10/1902	Realização de **tômbola** em benefício da Sociedade.
2	19/1/1903	Reunião de equipe de organização da tômbola.
1	03/02/1903	Solicitação de compra de *taloni* para a **tômbola** com pedido de 50 unidades.

Fonte: AHMJSA, organização da autora, 2022; em negrito, a contagem das tômbolas

Algumas particularidades quanto à organização das tômbolas podem ser observadas nas atas, como a de 21 de janeiro de 1883, especialmente realizada para a organização da tômbola, na qual foram estipuladas premiações de 200 mil para a cartela cheia e 60 mil réis para as premiações inferiores. Criou-se uma comissão em assembleia de sócios e as despesas com a compra de cartelas foram contabilizadas pela Sociedade e somente em 29 de julho de 1883 foi realizada, em suas dependências, a primeira tômbola oficialmente registrada em ata. Assim, entre a intenção de realização da tômbola e a sua execução transcorreram seis meses. Nos registros seguintes, esse tempo vai diminuindo, indicando maior eficiência, prática e agilidade nas organizações.

Além desse registro quantitativo, algumas informações complementares podem ser identificadas nos livros, tais como a ata da reunião de 1º de janeiro de 1883, que registra a presença do cônsul italiano e a sua proposição de criação de uma escola italiana a ser mantida pela Sociedade e parcialmente subsidiada pelo Consulado. A presença dos cônsules na RCI/RS, evidenciada nesse registro e em vários trabalhos de pesquisas, indica a atenção que o governo italiano dedicou aos seus cidadãos residentes no exterior. No segundo livro, referente à ata de 08 de agosto de 1886, observa-se uma prestação de contas da escola para o período de setembro de 1884 a março de 1886. Verifica-se que a Sociedade contribuía com mais de 50% das despesas da escola. A contribuição do governo italiano representava menos de 15% do valor necessário para o funcionamento da escola. Assim, percebe-se a relevância da tômbola para a arrecadação de fundos, não somente para a realização das atividades da Sociedade, mas também para a manutenção da escola da comunidade.

Como a escola local foi criada e mantida pela Sociedade, as tômbolas eram destinadas especialmente para angariar recursos que permitissem o pagamento do professor e a compra de materiais escolares como bancos, quadros-negros, canetas tinteiros e papéis diversos. Também foram realizados jogos para outros fins, tais como o registrado na ata de 31 de agosto de 1890 para ajudar a Sociedade da comunidade de Linha Eulália. Algumas atas registram a prestação de contas das tômbolas com descrição dos valores arrecadados, das despesas decorrentes da aquisição de materiais para a realização dos jogos e das premiações estipuladas. É possível identificar que, em certa ocasião, as cartelas da tômbola foram encomendadas na Litografia Wiedemann & Filhos, em Porto Alegre/RS, pois uma ata de 1894 menciona a solicitação de encomenda de 1.500 cartelas para impressão. Não foi localizada a materialidade dessa cartela até o momento.

No segundo livro está registrada a solicitação de dois recitais à *Società Filodramatica di Caxias* para a ocasião da realização da tômbola em 31 de julho de 1887, indicando em seguida sua transferência para o dia 2 de outubro do mesmo ano. A presença de grupos musicais evidencia a mobilização e grandiosidade desses eventos para a sociedade italiana da RCI/RS à época.

Segundo Tardio (2011), a tômbola na Itália antiga também era utilizada como forma de arrecadar fundos para custear alguma obra pública, eventos e festas paroquiais. Essa prática cultural, portanto, manteve-se na colônia, conforme os registros das atas. Na Figura 3, a autora registra a divulgação de uma publicidade de extração de tômbola, afixada nos murais na cidade de Assis, Itália. No cartaz, podem ser observadas as regras, as premiações e o intuito da extração como auxílio à Associação Úmbria para a luta Contra o Câncer (AUCC).

Figura 3 – Cartaz de divulgação de extração de tômbola em Assis, Itália.

Fonte: Foto da autora, 2023

O evento foi programado para o dia 5 de outubro de 2023, uma quinta-feira, ao ar livre, na praça da comunidade. Importante observar que o dia 4 de outubro é consagrado a São Francisco de Assis, cuja basílica localiza-se nessa comunidade. Então, ainda nos tempos atuais, acontecendo próxima a uma data festiva da Igreja Católica, a extração de tômbola serve como auxílio a uma causa social.

O dia 20 de setembro, comemorativo da anexação de Roma e dos estados pontifícios em 1870 ao Reino da Itália, é mencionado várias vezes nas atas como data festiva e a tômbola é citada como sendo realizada na ocasião para festejar e congregar a comunidade. Curiosamente, essa data também é comemorativa para o estado do Rio Grande do Sul–algumas atas mencionam esse fato e se apropriam, a seu modo, desse evento festivo italiano para uma festividade conjunta. Tem-se, assim, uma prática cultural que se adapta e se transforma para acolher também a comunidade brasileira moradora da região.

RELATOS ORAIS

Não restam dúvidas sobre a importância da tômbola na sociedade formada pelos primeiros imigrantes italianos na RCI/RS, que possuíam pouca ou nenhuma instrução formal. Pelas estratégias apresentadas, até mesmo pessoas analfabetas "liam" os números da tômbola e, assim, participavam da atividade cultural ao mesmo tempo em que assimilavam o conhecimento do número escrito.

Tardio (2011, p. 20) fornece alguns indícios que permitem reforçar essa análise,

> Para fazer participar ao jogo mesmo quem não sabia ler os números, usava-se um sistema que relacionava os números aos desenhos, que eram parcialmente ligados à *smorfia* napolitana ou de outra região, e que chegavam a San Marco com as estampas vendidas nas feiras, mas também aquele de desenhar os números ligados a um objeto ou animal conhecido, de modo a associar o nome do objeto ao número. Com esse sistema de explicar os números, de fazer brincadeiras, de recordar um acontecimento ou uma história, de fazer fofocas, aumentava-se o tempo de jogo e se ampliava a socialização (tradução livre da autora a partir do original italiano).

No trabalho de Tardio (2011), realizado a partir de relatos orais dos anciãos de uma comunidade da região de San Marco in Lamis (Província de Foggia, localizada na região da Puglia, sul da Itália), observou-se a presença de imagens/desenhos (Figura 4) em cartelas de tômbola italianas antigas, o que permite compreender a estratégia do jogo dessa comunidade.

Figura 4 – Representação dos números em cartelas de tômbola

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
San Marco in Lamis	bbastóne	pàpera	serpènde	sèggia	mana	cerasa	zappetèdde	cchiale d'u pape	shóre	taralle

Fonte: Tardio (2011, p. 21)

Provavelmente os números eram "cantados", ou descritos conforme a imagem correspondente, desta forma: "E o número sorteado é *serpènde*, o três". Mesmo quem não conhecesse a representação escrita do número 3, poderia localizá-lo facilmente na cartela associando-o à imagem/ao desenho da serpente. Essa estratégia de associar números às figuras pode ter sido utilizada nas tômbolas promovidas pela *Società* de Bento Gonçalves/RS, embora não tenha sido localizada até o momento a materialidade dessas cartelas.

No Banco de Memória do Arquivo Histórico Municipal João Spadari Adami (AHMJSA), de Caxias do Sul/RS, há registros de relatos que permitem confirmar a tômbola como atividade festiva na RCI/RS.

O Sr. Júlio Sassi, aos 86 anos, relatou[7] que, por volta de 1912 e 1913, na praça central de Caxias do Sul (atual Praça Dante Alighieri) havia,

[7] Entrevista de 53 minutos concedida à Susana Storchi Grigoletto em 24 de abril de 1992. O depoimento está registrado a identificação FG 137.

> *Um coreto, né, quando era uma pedra muito grande, de números 01 a 90, que era uma espécie de tômbola, e naturalmente a igreja vendia esses carnês e iniciava-se então, aquela tômbola. Aquela tômbola ia, os números eram sorteados e o indivíduo lá cantava o número e ao mesmo tempo mostrava para a população, numa tabela que tinha lá muito grande, o número que saía. Então cada um anotava aquele número, então quando havia, digamos, os prêmios eram os seguintes: era o terno, a quadra, a quina e a tômbola, era o primeiro, segundo, terceiro, quarto prêmio. Eu me lembro disso muito bem.*

O Sr. Ruben Festugato[8], aos 84 anos, relatou memórias da época de sua primeira comunhão, provavelmente na década de 40 do século XX, em que esse acontecimento religioso importante para o imigrante italiano católico envolvia a realização de tômbolas,

> *E meu pai ia lá no Palácio Episcopal e eu ia lá ver a tômbola; tinha na praça a tômbola. A tômbola era um bingo, né, um bingo que faziam antigamente, e quem cantava era o barítono Montagutti. Esse Montagutti era italiano, ele veio pra cá numa companhia de opereta e a companhia se desfez aqui em Caxias e o seu Montagutti ficou aqui, casou aqui; nas festas de Santa Tereza era ele quem cantava a tômbola: número cinquanta, em italiano ainda.*

Apesar de os relatos acontecerem nos séculos XX e XXI, é possível perceber a presença, a importância, a longevidade e a forma do jogo da tômbola, seu local de prática e o uso da língua italiana para "cantar os números".

Trata-se de uma particularidade da cultura italiana, uma herança transposta de um país a outro, que manteve e/ou adaptou suas regras e características para o novo contexto da RCI/RS, constituindo-se uma prática cultural. Ao envolver conhecimentos matemáticos, pode-se associar essa prática histórica com a etnomatemática desse grupo dentro do proposto por Lübeck (2023, p. 3) em "consonância com as teorias que abordam o conhecimento a partir de interstícios erigidos nos limiares que envolvem a tríade sociedade, cultura e matemática, pelas aberturas decorrentes das dinâmicas dos encontros culturais e do hibridismo". Uma não exclui a outra, pelo contrário, complementam-se, dialogam, ajudam a compreender, a partir de fontes históricas, um passado que, de algum modo, possui reminiscências no presente por meio de práticas e processos que, articulados, são compreendidos como etnomatemática.

A TÔMBOLA E OS SABERES MATEMÁTICOS: UM DIÁLOGO POSSÍVEL?

A partir dessas considerações, quais saberes matemáticos e aprendizagens são possíveis diante do jogo da tômbola? Aqui se encontram os conceitos necessários para a escrita e a leitura de números inteiros e suas combinações de 0 a 90. Desse modo, não envolve matematicamente o processo de contagem ou uma operação aritmética, mas sim o reconhecimento, a escrita e a associação do número com a sua representação abstrata.

Observa-se na Figura 1 que não há nas cartelas uma ordem de disposição dos números, o que dificulta o estabelecimento da contagem como a conhecemos e a maneira usualmente ensinada nos primeiros anos do ensino primário, ou seja, mostra-se ao aluno a sequência 1, 2, 3 etc. e como se escreve. A premiação dos jogos da tômbola era realizada de acordo com o preenchimento de linhas

[8] Entrevista de 92 minutos concedida à Sônia Storchi Fries em 05 de abril de 2013. O depoimento está registrado sob a identificação CD 203 e CD 204.

e colunas em agrupamentos numéricos de sorteio aleatório, e envolvia conceitos elementares e intuitivos de reconhecimento da horizontalidade e verticalidade do posicionamento dos números.

De que forma a escola italiana do final do século XIX na RCI/RS poderia ter ensinado os números e as estratégias de leituras dos mesmos, e como esse conhecimento era apropriado no âmbito escolar? Essa relação pode ser compreendida com Escolano Benito (2017, p. 85), tanto pelo ensino formal como não formal, pois,

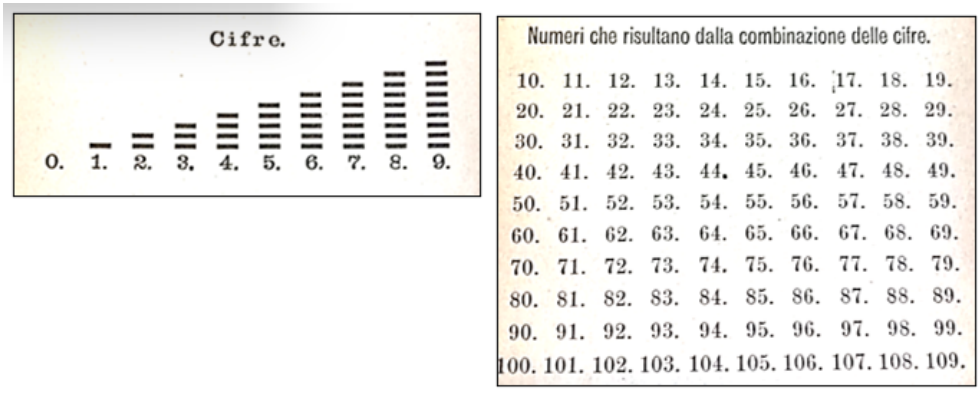
> As regras e habilidades que definem a cultura de uma arte ou ofício se transmitem de geração a geração, nem sempre–ou não somente–pela via acadêmica. A sociedade e suas microestruturas familiares ou contextuais transmitiram à escola, a partir de seus âmbitos específicos, práticas empíricas de cultura, muitas das quais passaram a fazer parte do repertório de ações que constituem as tramas do ensino e do modo de aprendizagem.

Essa mediação pode ser complementada nas atividades recreativas proporcionadas pelos eventos em que o jogo da tômbola era realizado na comunidade escolar e na presença de material didático em sala de aula. Para Chartier (2002), seu uso auxilia a compreensão das práticas escolares como dispositivos de transformação de outras práticas culturais e de seus produtos.

Um dos livros possíveis para compreender o conhecimento formal dos números na escola primária da RCI/RS foi o enviado pelo governo italiano ao Brasil: *Lezioni di Aritmetica*[9], publicado em 1889, que poderia ter sido utilizado no 1º ano primário da escola italiana no Brasil. Em sua primeira página, o número é apresentado diretamente em cifras de 0 a 9 acompanhadas de traços horizontais empilhados para indicar a sua representação (Figura 5). Em seguida, há dez colunas com dez combinações de algarismos, que resultam na sequência de 10 a 109.

Pela simplicidade da apresentação da escrita do número, sem conceitos teóricos e sem instruções complementares ao professor, percebe-se a inexistência de uma estratégia de aprendizagem que não fosse memorização e repetição. De alguma forma essa possibilidade alinha-se à estratégia apresentada por Tardio (2011), de associar um número a um símbolo; no caso do livro, a riscos horizontais e sequências combinadas.

Figura 5 – Representação dos números em livro didático italiano



Fonte: Orlandini-Grillo (1887, p. 4). Original consultado na Biblioteca Nacional Central de Florença

[9] De autoria da professora milanesa Maria Orlandini Grillo, a obra consultada é um exemplar da 4ª edição. Na relação do MAE (*Ministero Degli Affari Esteri*, b.339), consta o envio de 600 exemplares dessa obra ao Brasil para distribuição nas escolas italianas. Sobre essa obra e as demais enviadas pelo governo italiano, consultar Bertholdo (2021).

Apesar de a tômbola ter se tornado (mais) um jogo de azar, continua sendo destaque em algumas ocasiões festivas, um resquício de prática cultural. Observar formas de divulgação das extrações das tômbolas, na imprensa local ou em impressos, regras, intenções e repercussões desses eventos em comunidades italianas e da RCI/RS pode ser uma fonte de pesquisa futura.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O programa etnomatemática proposto por D'Ambrosio (2004, p. 17) "repousa sobre uma análise das diferentes teorias e práticas matemáticas em diversos ambientes culturais". A partir de fontes diversas, antigas e atuais, é possível perceber o jogo da tômbola como uma prática cultural e etnomatemática, característica de um grupo particular, no caso, o dos imigrantes na RCI/RS do final do século XIX e início do século XX.

De Certeau (2014, p. 79) explora essa característica do jogo como uma tática, pois "os jogos formulam (e até formalizam) as regras organizadoras dos lances e constituem também uma memória (armazenamento e classificação) de esquemas de ações articulando novos lances conforme as ocasiões". Diz não haver indícios de que o jogo de tômbola tenha sido utilizado no ambiente escolar em virtude de ser difícil comprovar historicamente o seu uso por parte do professor, mas possivelmente houve um entrelaçamento dos ambientes formal e não formal.

Escolano Benito (2017, p. 108) afirma que o valor da prática, aliada aos estudos etnográficos, permite extrapolar essa compreensão, pois,

> As próprias comunidades nas quais esses docentes exerciam sua profissão trasladaram para a escola formas de ensino/aprendizagem que encontram suas raízes em uma pedagogia vernácula, de tipo popular e de longa vivência. Os professores e as escolas adotaram muitas dessas práticas.

A partir disso, algumas novas perguntas podem ser feitas: qual a efetiva participação das escolas étnicas italianas da RCI/RS na organização e no processo de leitura dos números nas cartelas durante um jogo festivo de tômbola? Qual estratégia era adotada para essa leitura? Como "cantavam" e associavam os números nas antigas tômbolas da *Società di Mutuo Soccorso Donna Isabella* e em outras associações da RCI/RS? As cartelas sempre foram impressas em litografias ou havia cartelas artesanais? Como essa prática cultural se relacionava com o ensino de aritmética na segunda metade do século XIX nas escolas primárias italianas?

Mesmo diante da falta de respostas neste momento, pode-se afirmar que a prática cultural de origem italiana, longeva e típica, presente no jogo da tômbola e em suas oralidades e materialidades, permite caracterizá-la como uma prática etnomatemática ao envolver o sistema de numeração e suas representações gráficas de um grupo particular no contexto da imigração italiana na RCI/RS. Ainda hoje, em partidas comunitárias de bingo de várias cidades gaúchas, é possível ouvir alusões peculiares e divertidas no chamamento de números, que poderiam ser exploradas à luz da etnomatemática.

REFERÊNCIAS

BERTHOLDO, Delma Tânia. **Livros didáticos de aritmética na imigração italiana do Rio Grande do Sul**. Caxias do Sul: EDUCS, 2021.

BRINGMANN, Sandor Fernando. **Índios, colonos e fazendeiros:** Conflitos Interculturais e Resistência Kaingang nas Terras Altas do Rio Grande do Sul (1829-1860). 2010. 219f. Dissertação (Mestrado em História Cultural) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Florianópolis, 2010.

CHARTIER, Roger. **A História Cultural entre práticas e representações**. 2ª ed. DIFEL, 2002.

COSTA, Rovílio. Valores da imigração italiana – cem anos após. Imigração italiana: Estudos. In: Instituto Superior Brasileiro-Italiano de Estudos e Pesquisas. **Anais do I e II Fórum de Estudos Ítalo-brasileiros.** Porto Alegre: EST/UCS, 1979, p. 199-207.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Um enfoque transdisciplinar à Educação e a História da Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, p. 13-29, 2004.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa,** São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, 2005.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 6ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

DE CERTEAU, Michel. **A invenção do cotidiano**. V. 1. Artes de fazer. Petrópolis: Vozes, 2014.

ESCOLANO BENITO, Augustín. **A escola como cultura**: experiência, memória e Arqueologia. Campinas: Alinea, 2017.

GIRON, Loraine Slomp; HERÉDIA, Vania. **História da Imigração Italiana no Rio Grande do Sul.** Porto Alegre: EST, 2007.

GRILLO, Maria Orlandini. **Nozioni di aritmetica conformi ai nuovi programmi governativi per le scuole elementari.** Classe seconda. Milano: Tipografia degli Operai, 1889.

KNIJNIK, Gelsa; WANDERER, Fernanda.; GIONGO, Ieda Maria; DUARTE, Cláudia Glavam. **Etnomatemática em movimento**. (Coleção Tendências em Educação Matemática). 3ª ed. Autêntica, 2019.

LÜBECK, Marcos. Entre a história e a etnomatemática: a perspectiva historiográfica. **Anais–Seminário Nacional de História da Matemática**, [*s. l.*], v. 15, 2023. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/123. Acesso em: 23 nov. 2024.

LUCHESE, Terciane Ângela. **O processo escolar entre imigrantes no Rio Grande do Sul**. Caxias do Sul: EDUCS, 2015.

MANFROI, Olívio. Imigração alemã e italiana – Estudo comparativo. **Imigração italiana: Estudos**. In: Instituto Superior Brasileiro-Italiano de Estudos e Pesquisas. Porto Alegre: EST/UCS, 1979, p. 185-197.

MANFROI, Olívio. **A Colonização Italiana no Rio Grande do Sul:** implicações econômicas, políticas e culturais. 2ª ed. Porto Alegre: EST, 2001.

MAZZAPERLINI, Mario. ***La Tombola Reggiana.*** Reggio Emilia: Edizioni Tecnograf, 1997.

MUSATTI, Cesare. ***I numeri della tombola a Firenze***. Veneza: Tipografia Orfanotrofio di A. Pellizzato, 1905.

RIBEIRO, Rhuan Guilherme Tardo; SILVA, Josie Agatha Parrilha da.; MIARKA, Roger. A Etnomatemática presente nos artesanatos das pulseiras indígenas guarani: o indígena e a natureza. **Nova Revista Amazônica,** v. XI, n. 1, julho 2023. http://dx.doi.org/10.18542/nra.v11i1.13026.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. Abordagens atuais do programa etnomatemática: delineando-se um caminho para a ação pedagógica. **Bolema**, v. 9, n. 26, p. 19-48, 2006.

STRINGHER, Vittorio. *Notizie sull'Italia agricola.* **Boletim do Ministério da Agricultura Italiano**, p. 131-147, 1905.

TARDIO, Giuseppe. ***La tombola garganica e la tombola sammarchese***. Edizione SMiL, 2011.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Ecos matemáticos refletidos pelo Congo Capixaba: um estudo etnomatemático e histórico

Mathematical echoes reflected by Congo Capixaba: an ethnomathematical and historical study

Alexandre Maia Ferreira[1]
Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes Campus Aracruz

Ligia Arantes Sad[2]
Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes Campus Vila Velha

RESUMO

Este trabalho visa explorar a riqueza cultural do Congo Capixaba, integrando elementos de música e matemática sob a perspectiva da história da matemática e da etnomatemática. O estudo propõe uma análise interdisciplinar que investiga como os artefatos culturais das bandas de congo, bem como seus padrões rítmicos, melódicos e harmônicos presentes nas tradições musicais das toadas de congo, podem ser divulgados, interpretados e compreendidos por meio de conceitos matemáticos. Além disso, a pesquisa bibliográfica aborda como esses elementos refletem o contexto histórico e cultural das comunidades que praticam essa manifestação popular, destacando a importância da leitura etnomatemática para entender a matemática em contextos não formais e tradicionais.

Palavras-chave: Congo Capixaba; Etnomatemática; História da Matemática; Educação Matemática; Cultura e Matemática.

ABSTRACT

This work aims to explore the cultural richness of Congo Capixaba, integrating elements of music and mathematics from the perspective of the history of mathematics and ethnomathematics. The study proposes an interdisciplinary analysis that investigates how the cultural artifacts of Congo bands, as well as their rhythmic, melodic, and harmonic patterns present in the musical traditions of Congo songs, can be disseminated, interpreted, and understood through mathematical concepts. Furthermore, the bibliographic research addresses how these elements reflect the historical and cultural context of the communities that practice this popular manifestation, highlighting the importance of an ethnomathematical reading to understand mathematics in non-formal and traditional contexts.

Keywords: Congo Capixaba; Ethnomathematics; History of Mathematics; Mathematics Education; Culture and Mathematics.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O Congo é um gênero musical que na sua historicidade reúne os batuques (africano e indígena) eivados de influência da religiosidade católica luso-portuguesa. Trata-se de uma manifestação cultural tipicamente capixaba que, desde 2014, foi reconhecida como patrimônio cultural imaterial pelo Conselho Estadual de Cultura de acordo com os dados da Secretaria da Cultura do Estado do Espírito Santo (2025).

Segundo Conde e Figueiredo (2022, p. 67), as bandas de congo representam conjuntos musicais caracterizados pela presença de um mestre ou um capitão (aquele que rege a banda), os músicos (os instrumentistas de percussão) e as dançarinas (geralmente baianas que transportam os estandartes da banda). A figura 1 destaca a banda de congo Konshacinha da Serra Centro–ES. A imagem

[1] Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes). Professor pesquisador no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo (Ifes), Aracruz, Espírito Santo, Brasil. E-mail: alexandre.ferreira@ifes.edu.br.
[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Professora pesquisadora no Instituto Federal de Educação do Espírito Santo (Ifes), Vitória, Espírito Santo, Brasil. E-mail: aransadli@gmail.com.

foi produzida durante a pandemia no ciclo folclórico de São Sebastião e São Benedito em Nova Almeida, Serra–ES.

Figura 1 – Banda de congo mirim Konshacinha

Fonte: Elaborada pelos autores

Predominantemente, os músicos utilizam instrumentos como o tambor de congo, a casaca, o triângulo, a cuíca e o bumbo, entre outros (Maciel, 2016). Os desfiles são liderados por mestres que, com o auxílio de apitos, dirigem e coordenam o grupo. As canções cantadas pelas bandas de congo são conhecidas como toadas e geralmente abordam temas relacionados aos santos, ao amor e à morte.

As toadas, os ritmos e danças expressam não apenas a identidade cultural das comunidades que o praticam, mas também um complexo conjunto de saberes que transcendem o campo musical. Nesse sentido, este estudo busca investigar os "ecos matemáticos" presentes nas práticas musicais do Congo Capixaba, analisando como os padrões rítmicos, melódicos e harmônicos podem ser interpretados sob a ótica da história da matemática e da etnomatemática.

A matemática, tradicionalmente vista como um campo abstrato e universal, também se manifesta mediante leituras plausíveis, de forma substancial nas práticas culturais, refletindo a história, os costumes e a organização social de um povo. No caso do Congo Capixaba, os elementos matemáticos presentes nas suas expressões musicais não são apenas uma curiosidade acadêmica, mas uma janela para compreender como o conhecimento matemático é desenvolvido e evidenciado em contextos culturais específicos.

Este estudo propõe uma análise interdisciplinar, conectando música e matemática para revelar como a estrutura musical do Congo Capixaba pode ser compreendida por meio de conceitos matemáticos. Além disso, busca-se contextualizar historicamente esses elementos, destacando como a matemática e a música se entrelaçam nas práticas culturais das comunidades capixabas. A perspectiva etnomatemática é central para esta análise, pois permite valorizar os conhecimentos matemáticos implícitos em contextos não formais, promovendo uma visão mais inclusiva e diversa da matemática.

Ao explorar a interseção entre música e matemática no Congo Capixaba, esta comunicação científica pretende contribuir para uma compreensão mais ampla e contextualizada da matemática, destacando sua presença e relevância nas manifestações históricas da cultura local. Além disso, espera-se que os resultados possam enriquecer o ensino da matemática, tornando-o mais integrado a outros fazeres, como às realidades culturais dos estudantes.

CONGO CAPIXABA: ABRANGÊNCIA, REGISTROS ETNOGRÁFICOS E HISTÓRICOS

De acordo com Conde e Figueiredo (2022), dentre os grupos de adultos e composições exclusivamente formadas por crianças, foram catalogadas 67 bandas de congo. Embora haja uma concentração maior do número de bandas de congo na região metropolitana (Grande Vitória), encontram-se distribuídas de norte a sul do estado com maior presença na região litorânea. O município de Serra possui o maior número de bandas registradas contabilizando mais de 10 grupos em atividade.

Os primeiros registros nacionais daquilo que seria uma banda de congo primitiva remonta meados do século XIX e foi realizado nas margens do rio Doce. Segundo Neves (2008), a primeira referência impressa no Brasil foi feita pelo Padre Antunes de Siqueira por volta de 1855. Além de descrever o local, também descreveu quem eram os participantes (índios mutuns), a forma como apresentaram e os instrumentos que utilizavam (cassacos, tambores de pau cavado e cabaz cheio de caroços ou sementes).

O renomado pintor François Biard esteve no Brasil durante período similar (1858) e em 1862 fez uma publicação com um registro etnográfico (vide figura 2) a partir de um desenho daquilo que, *mutatis mutandis*, poderia ser considerado uma banda de congo numa apresentação durante a Festa de São Benedito em Santa Aracruz, Aracruz – ES (norte capixaba). Segundo Rocha (1980), o viajante francês descreveu o público participante (capitão, portador da imagem, velhas devotas e músicos) e o instrumental utilizado (tambor – pequeno tronco de árvore oco revestido por um pedaço de pele em uma de suas extremidades; reco-reco – pequeno bastão feito de um pedaço de bambu denteado).

Figura 2 – O viajante francês, em 1858, retratou a Festa de São Benedito na Aldeia Velha, atual Santa Cruz (Aracruz/ES)

Fonte: Biard (1862, p. 190)

De acordo com Neves (2008), além das duas referências citadas, destacam-se outros dois registros históricos impressos feitos pelo imperador D. Pedro II e pelo Bispo D. Pedro Maria de Lacerda. Em 1860, durante visita ao povoado da Aldeia Nova (atual distrito de Nova Almeida, Serra – ES), o imperador também descreveu algo similar à banda de congo e fez questão de anotar em seu caderno de viagem o nome (*cássaca*) e um bosquejo (desenho simplificado) do reco-reco de cabeça esculpida (vide figura 03). Note que a grafia de Vossa Majestade provavelmente tenha sido fidedigna ao que ouviu da pronúncia dos indígenas, dado que no idioma do gentio a letra s não possuía, nem possui o som de z quando colocado entre duas vogais. Já em 1880, o bispo ao passar por Nova Almeida, Fundão e Santa Cruz em missão da pastoral, registrou o conjunto musical, seus figurantes e os respectivos instrumentos (guararás, cassacos e manacás ou maçacaia).

Figura 3 – Bosquejo feito pelo imperador D. Pedro II durante visita à Aldeia Nova (atual Nova Almeida) em 1860

Fonte: Rocha (1980, p. 190)

Em todos os quatro registros apresentados, há o protagonismo marcante do indígena naquilo que seria taxado, posteriormente, de banda de congo. O único registro que sinaliza a interculturalidade no folguedo ameríndio somente foi evidenciado pelo bispo D. Pedro Maria em 1880 em Nova Almeida.

Assim como outrora concluiu o historiador e folclorista capixaba Guilherme Santos Neves, as evidências permitiram atribuir aos indígenas as origens primitivas das bandas de congo. Mas, mediante vicissitudes da história, após consultar o livro "O Rasga" escrito por José Ramos Tinhorão, eis que a tese apresentada por Neves (1980; 2008) pode ser refutada. Tinhorão (1928; 2006) apresenta dois fatos setecentistas que apontam para um protagonismo africano.

O primeiro deles consiste num registro etnográfico feito pelo soldado alemão Zacharias Wagener (1614-1668) que esteve no Brasil na primeira metade do século XVII a serviço da Holanda. Trata-se de uma gravura contendo escravizados dançando lundu na companhia de uma pequena banda musical na festividade de domingo. Na figura 4, é possível perceber a presença de dois tambores e um reco-reco. Em Angola, o povo bantu denomina os reco-recos de *dicanzá*. É provável que daí tenha originado as corruptelas canzá e ganzá, bem como a adaptação *canzaca*.

Figura 4 – Pintura de Calundu em Pernambuco retratando a dança africana trazida para o Brasil pelos escravizados angolanos

Fonte: Conde e Figueiredo (2022, p. 40)

O outro fato histórico importante encontra-se no *Folheto de Ambas Lisboas de 1730*. Neste documento, há uma descrição da Festa do Rosário dos pretos da Alfama realizada no adro da Igreja do Salvador. Na descrição de Tinhorão (2006), consta a existência de um som desagradável e dissonante de vários instrumentos, dentre os quais destacam-se: congos e canzás.

Assim como Conde e Figueiredo (2022) e Bloch (2001), entendemos que um fenômeno histórico não pode ser explicado em sua plenitude separado do seu momento de ocorrência e concordamos que, em vários casos, as pesquisas históricas podem ser contaminadas pela obsessão das origens. Nessa direção, consideramos que tenha ocorrido um compartilhamento entre negros e indígenas no desenvolvimento do congo a nível rítmico, coreográfico e adaptativo naquilo que tange aos instrumentos utilizados.

Essa resumida contextualização histórica visa, na prática docente, promover um diálogo antropológico, interdisciplinar e transversal entre matemática e história. Embora sejam enfoques empobrecidos de particularidades que valorizem os aspectos musicais atrelados ao processo, configuram-se como um recurso pedagógico de inclusão curricular do estudo das relações etno-raciais (Brasil, 2009) e valorização do estudo de história e cultura afro-brasileira e indígena, conforme garante a obrigatoriedade das leis 10.639/2003 e 11.645/2008 (Brasil, 2003; 2008).

ETNOMATEMÁTICA E SABERES ANCESTRAIS NOS INSTRUMENTOS CARACTERÍSTICOS DO CONGO

A caracterização dos instrumentos do congo capixaba, sob a perspectiva etnomatemática, oportuniza ao aprofundamento em saberes ancestrais preservados pelas comunidades negras e indígenas. Embora as bandas de congo atuais utilizem uma variedade de instrumentos, três artefatos culturais se destacam desde o período setecentista: os tambores (guararás), reco-recos (casacas) e chocalhos (maracás), vide figura 5. Esses instrumentos não apenas produzem os ritmos característicos do congo, em suas relações específicas entre matemática e música, mas também carregam em sua fabricação e uso de saberes matemáticos implícitos, como proporções, simetrias e padrões.

Figura 5 – Instrumentos característicos das bandas de congo capixaba

Fonte: Elaborada pelos autores

Com base na etnomatemática, ao explorar uma produção de conhecimentos que deles podem ser trabalhados, oportuniza-se a possibilidade de afirmação de saberes tradicionais, reconhecendo a matemática como parte presente nas práticas culturais e contribuindo para valorização das identidades culturais e diversidade epistemológica. Ao cunhar a palavra Etnomatemática, Ubiratan D'Ambrosio apresentou uma justaposição de três radicais gregos (*etno*, *matema* e *tica*) para explicar o que entendia como etnomatemática. Em suma, D'Ambrosio (1993; 2001) defende que cada grupo cultural distinto ao solucionar problemas do cotidiano precisa saber lidar com procedimentos e técnicas que sirvam de ferramentas facilitadoras no processo de resolução da problemática instaurada.

O estudo das práticas culturais aplicadas nos processos de fabricação dos instrumentos utilizados pelas bandas de congo capixabas pode ser abarcado por proposta pedagógica da etnomatemática e embasado pelo Programa Etnomatemática que, em sua essência, busca entender o saber e o fazer matemático histórico, em especial de culturas marginalizadas a partir da validação do conhecimento popular e de sua valorização em espaços institucionalizados. D'Ambrosio (2001, p. 27) descreveu a etnomatemática como um "programa de pesquisa em história e filosofia da matemática com óbvias implicações pedagógicas".

Negros e indígenas preservaram técnicas ancestrais de fabricação de tambores, reco-recos e chocalhos. Realizar pesquisas sobre tais técnicas e analisar os significados etnomatemáticos atrelados às etapas do processo é uma excelente oportunidade de ação interdisciplinar e transversal. Ao propor a descrição e diferenciação dos materiais utilizados para a confecção, bem como das ferramentas e técnicas empregadas para a elaboração dos artefatos culturais, os professores podem trabalhar a validação dos saberes tradicionais, discutir sustentabilidade, empreendedorismo e contribuir para a preservação do legado cultural capixaba. Intrínseco ao processo, é possível investigação e leitura com produção de significados e análise das formas geométricas envolvidas, dos padrões técnicos diferenciais de cada artista, de medidas não convencionais empregadas, proporções e simetrias implícitas pensadas pelos artesãos durante a fabricação (mentefatos) que são traduzidas em forma de arte (artefatos), respondendo uma necessidade local das comunidades (sociofatos), conforme ideias de Rosa e Orey (2019).

Em paralelo, é possível trabalhar a localização geográfica das matérias-primas utilizadas, caracterizar os materiais de acordo com a botânica, analisar a produção das cores vermelha e preta pelo

viés da química, bem como analisar a acústica dos instrumentos segundo os preceitos da física. O professor de Artes pode desenvolver tarefas que estimulem os estudantes a desenhar os instrumentos tanto em duas quanto em três dimensões. As letras das toadas podem ser analisadas pelos professores de literatura e língua portuguesa (rimas, métricas, entre outros). São alguns exemplos de exploração interdisciplinar que o fazer etnomatemático pode propiciar a professores e estudantes.

PADRÕES RÍTMICOS E MELÓDICOS PRESENTES NO CONGO CAPIXABA

O Congo Capixaba é uma expressão cultural que combina música, dança e tradição, resultando em uma rica composição sonora marcada por ritmos e melodias únicas. Os padrões rítmicos e melódicos que definem o congo são transmitidos de geração em geração, refletindo as influências das culturas africana e indígena, que moldaram a identidade cultural da região.

Nesta seção, serão explorados os elementos estruturais que compõem esses padrões, analisando como os ritmos sincopados, as progressões melódicas e as interações entre os instrumentos criam uma sonoridade distintiva. Além disso, a análise destacará como esses padrões rítmicos e melódicos podem ser compreendidos através de uma lente etnomatemática, destacando a presença de conceitos matemáticos subjacentes às práticas musicais do congo. Ao explorar essas interseções, buscamos valorizar e entender parte importante da complexidade cultural e matemática embutida nas tradições musicais do Congo Capixaba.

Sonoridade única e batuque marcante

Os elementos estruturais que compõem os padrões rítmicos e melódicos do Congo Capixaba são fundamentais para a sua sonoridade única e marcante. Os ritmos sincopados, caracterizados pela ênfase em tempos fracos e pela antecipação rítmica, criam uma sensação de movimento constante e dinamismo, que é uma das marcas registradas do congo. As progressões melódicas, por sua vez, frequentemente se baseiam em escalas modais e repetição de frases nas letras da composição, o que reforça a identidade musical e facilita a participação coletiva nas performances populares.

As interações entre os instrumentos, como os tambores (guararás), reco-recos (casacas) e chocalhos (maracás), são outro aspecto crucial. Cada instrumento desempenha um papel específico dentro do conjunto, criando camadas rítmicas que se entrelaçam para formar uma textura sonora complexa e envolvente. Os tambores fornecem a base rítmica, enquanto as casacas e os maracás adicionam variações e acentos que enriquecem o padrão rítmico. Essa combinação de elementos estruturais contribui para uma sonoridade distintiva, que é ao mesmo tempo enraizada na tradição e aberta à improvisação e inovação dentro das apresentações.

Matematizando o ciclo rítmico do congo dos tambores

A matematização do ciclo rítmico do congo envolve a análise dos padrões temporais e estruturais que caracterizam essa manifestação cultural, utilizando conceitos matemáticos como simetria, proporção e periodicidade. Os ciclos rítmicos do congo, muitas vezes organizados em compassos de tempo alternado e ritmos sincopados, podem ser descritos por meio de sequências numéricas e diagramas rítmicos que evidenciam a repetição e variação dentro das toadas.

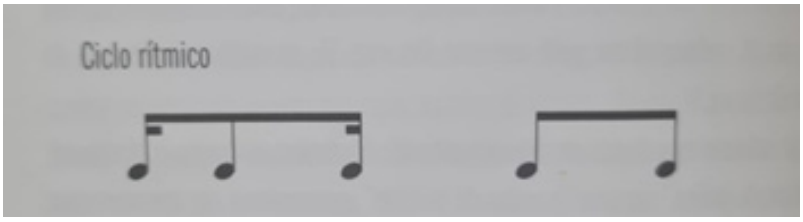
A identificação de subdivisões rítmicas e a relação entre os diferentes instrumentos, como tambores, casacas e maracás, permitem uma compreensão mais profunda de como a matemática está

intrinsecamente ligada à música. Esse processo de matematização não apenas evidencia a complexidade estrutural do congo, mas também destaca a inteligência intuitiva das comunidades que preservam essa tradição, demonstrando a presença de noções e relações matemáticas em contextos culturais não formalizados.

Lins (2009) defende que as bandas de congo atuais são fruto da evolução e processo de aculturamento sofrido pela banda de indígenas. Segundo ele, aos poucos, elementos africanos e portugueses foram inseridos no folguedo ameríndio promovendo um processo de transformação intercultural com impactos no instrumental, no formato da dança e nas composições de toadas.

De acordo com Lins (2009, p. 30), o processo de aculturamento contribuiu para alongarem-se as sílabas finais dos versos e impactou o ciclo rítmico das bandas de congo "4–pulsos time lines, componente estrutural do samba". No texto, o autor ainda complementa que este ciclo rítmico apresentado na figura 6 é de origem banta e transculturou-se mundo afora refletindo em ritmos conhecidos, tais como: frevo, maracatu, tango, rag-time e habanera cubana.

Figura 6 – Arquitetura musical rítmica das bandas de congo



Fonte: Lins (2009, p. 30)

Na imagem acima, constata-se dois tipos de figuras musicais (colcheias e semicolcheias) com duração 1/8 e 1/16 da semibreve (duração de 4 tempos), respectivamente, distribuídas num compasso binário. A interpretação deste trecho rítmico pode ser trabalhada com os estudos a partir de palmas. Neste trecho em particular, utilizaria 05 palmas simulando a expressão musical *tá-TÁ-tá--TÁ-TÁ*.

O estudo da leitura rítmica, especialmente a duração das notas, pode ser diretamente relacionada ao estudo de frações. Cada valor de nota musical representa uma fração de um compasso, onde, por exemplo, uma semibreve corresponde a uma unidade inteira, enquanto uma mínima equivale a 1/2, uma semínima a 1/4, e assim por diante. Esse relacionamento permite que conceitos matemáticos de frações sejam aplicados na compreensão e execução de padrões rítmicos, facilitando o ensino de ambos os conteúdos de maneira integrada e interdisciplinar.

A arquitetura sonora dos tambores é composta por colcheia pontuada (o ponto aumenta a figura em metade de seu valor), semicolcheia e duas colcheias. Utilizando 04 palmas para representar uma simulação obteremos algo equivalente à *TÁa-tá-TÁ-TÁ*. Lins (2009) alerta que, ao transpor tal técnica para o tambor, geralmente os congueiros reproduzem a frase utilizando as duas mãos (direita e esquerda), o que basicamente na sonoridade rítmica *TÁa-tá-TÁ-TÁ*. A combinação dos trechos com 04 e 05 notas forma um compasso quartenário característico das bandas de congo. A interpretação produziria um batuque sui generis do folclore capixaba:

TÁa-tá-TÁ-TÁ tá-TÁ-tá-TÁ-TÁ

Lins (2009) enfatiza que a sonoridade dos tambores é algo marcante, forte e vigoroso, pois é grave e solene assim como as cuícas. Numa banda de congo, tal sonoridade está relacionada com a quantidade de tambores e com as técnicas utilizadas para encourar, a escolha do diâmetro e a espessura das paredes desses instrumentos de percussão.

Além de descrever os ciclos rítmicos dos tambores e seus detalhes sonoros, Lins (2009) também utilizou ideias análogas com reco-recos e triângulos, pois estes instrumentos servem para cadenciar o ritmo das toadas. Não far-se-á a exposição neste trabalho, pois existe certa dificuldade para transcrever uma metodologia que facilite a compreensão de tal leitura rítmica, além é claro, dos limites requeridos ao texto.

Influências melódicas das toadas

As canções entoadas pelas bandas de congo do Espírito Santo, frequentemente, apresentam uma melodia tonal, refletindo uma forte influência europeia, em particular a herança musical portuguesa (Lins, 2009). Essa tonalidade, caracterizada pela organização em escalas maiores e menores, é uma das marcas do sistema musical ocidental, que foi introduzido no Brasil durante o período colonial. A presença dessa estrutura tonal nas canções de congo demonstra como as práticas musicais locais incorporaram elementos da cultura europeia, adaptando-os e ressignificando-os dentro de um contexto cultural afro-brasileiro.

Essa herança portuguesa se manifesta não apenas na tonalidade das melodias, mas também em certos aspectos da estrutura rítmica e harmônica das canções. Os cânticos e toadas do congo muitas vezes seguem formas musicais que remetem a tradições populares portuguesas, como as modas e as cantigas, integrando-as com ritmos e instrumentos típicos de origem africana e indígena. Essa fusão de elementos europeus e afro-indígena-brasileiros resulta em uma musicalidade rica e complexa, que reflete a história de intercâmbio cultural e, ao mesmo tempo, de resistência das comunidades envolvidas, pois preserva suas identidades, práticas ancestrais e respectivos registros historiográficos.

O sistema tonal ou tonalismo praticado nas toadas das bandas de congo refere-se a um sistema de organização melódica e harmônica centrado em uma nota principal, conhecida como tônica. Esse sistema tem sido predominante na música ocidental desde o final do Renascimento até o final do século XIX e continua a influenciar de forma predominante a música contemporânea, principalmente a música popular brasileira (Lins, 2009).

Simetria, proporção e sequência nos padrões rítmicos e melódicos do congo

A exploração de simetria, proporção e sequência nos padrões rítmicos e melódicos do Congo Capixaba traz realce à complexidade matemática que permeia essa manifestação cultural.

Na música do Congo Capixaba, a simetria pode ser observada nos ciclos rítmicos repetitivos, nos quais os padrões de batidas fortes e fracas se organizam de maneira harmônica, criando uma sensação de equilíbrio entre os tempos, isto é, pode ser observada nos padrões rítmicos e melódicos, em que frases musicais são repetidas ou refletidas de maneira espelhada. Em matemática, a simetria está relacionada à correspondência de formas e padrões que são idênticos em torno de um ponto, linha ou plano. Estudar esses aspectos nas toadas do congo permite identificar como estruturas musicais seguem princípios simétricos, oferecendo uma forma de visualizar essa relação matemática através do som.

A partir das ideias de Motta (1996) e Toussaint (2005), pode-se adaptar e representar o ritmo dos tambores, casacas e maracas em circunferências rítmicas, conhecidas como representação do colar ou *necklace notation*. Nelas é possível desenvolver a ideia de múltiplos e divisores ou até trabalhar com números complexos, por exemplo, bem como observar simetrias clássicas padronizadas pela teoria musical.

Já a proporção é essencial na relação entre as durações das notas e os tempos dentro dos compassos, evidenciando a divisão precisa do ritmo e a harmonia entre os diferentes instrumentos que compõem as bandas de congo. A proporção é fundamental tanto na música quanto na matemática desde estudos antigos de tradição pitagórica, ainda presentes até o século XVII, na qual predominava justificativas numerológicas, numa consideração aritmética-especulativa, segundo Abdounur (2007). No Congo Capixaba, a proporção pode ser percebida na relação entre os tempos fortes e fracos de um compasso, assim como na divisão do ciclo rítmico entre os diferentes instrumentos. Matematicamente, isso pode ser relacionado ao conceito de razão e proporção, onde a relação entre partes de um todo é estudada. Explorar essas proporções na música permite uma compreensão de como o equilíbrio e a harmonia são alcançados tanto sonoramente quanto numericamente.

A sequência, por sua vez, está presente nas progressões melódicas e rítmicas, com frases que se repetem, variam ou se desenvolvem de maneira lógica e ordenada ao longo da performance. São recorrentes nas progressões melódicas e rítmicas do congo. Na matemática escolar, exemplos de sequências numéricas como a de Fibonacci podem ser comparadas aos padrões de repetição e variação encontrados nas músicas tradicionais. A análise de sequências na música pode ilustrar como padrões previsíveis e estruturados são fundamentais para a composição e performance musical, refletindo conceitos matemáticos de ordem e progressão.

Integrar essas análises em um estudo interdisciplinar pode proporcionar uma visão rica de como a matemática se manifesta naturalmente na música e como o ensino de ambas é enriquecido ao destacar essas conexões culturais e científicas. Essa combinação de elementos matemáticos nas estruturas musicais do congo não só reflete uma organização intrínseca da música, mas também mostra como as práticas culturais podem ser analisadas por meio do pensar e fazer matemáticos, ampliando nossa compreensão tanto da música quanto da matemática em contextos não convencionais.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Um dos aspectos metodológicos centrais que direcionaram o referido estudo foi a pesquisa bibliográfica (Macedo, 1994). O levantamento de informações e sua respectiva análise de literatura existente sobre o Congo Capixaba, etnomatemática (D'Ambrosio, 2001) e história da matemática constituíram o cerne deste estudo. O levantamento de literatura envolveu a consulta a livros, artigos acadêmicos, dissertações, teses e documentos históricos que abordavam as manifestações culturais e musicais dessa tradição. Esse procedimento permitiu compreender o contexto histórico e social em que o congo se desenvolveu, em especial na região espírito-santense, bem como identificar os principais instrumentos e práticas musicais que caracterizam a expressão cultural pesquisada.

No campo da etnomatemática, a revisão bibliográfica visa explorar como a matemática está intrinsecamente ligada às práticas culturais, especialmente em contextos não ocidentais ou não tradicionais. A análise de textos relativos à história da matemática, por sua vez, ajuda a entender como saberes matemáticos evoluíram ao longo do tempo e como eles podem ser observados epis-

temologicamente nas tradições culturais como o Congo Capixaba. A combinação desses campos de estudo proporciona uma base teórica robusta para a investigação das interseções entre música, cultura e matemática, oferecendo uma perspectiva interdisciplinar, potencial e diferenciada para a compreensão dos "ecos matemáticos" destacados nas práticas do Congo Capixaba.

A história da matemática e a etnomatemática, embora interligadas, apresentam aproximações e distanciamentos significativos, especialmente quando analisadas sob a ótica da historiografia. Esta por sua vez busca compreender como, ao longo da história, as culturas sobreviveram e transcenderam em seus diversos ambientes (Levi-Strauss, 1996). Ambas buscam compreender o desenvolvimento e a aplicação da matemática, mas enquanto a história da matemática, tradicionalmente, se concentra no desenvolvimento de conceitos matemáticos dentro do contexto das civilizações mais ocidentalizadas e de uma perspectiva universalista, a etnomatemática se dedica a explorar como diferentes culturas produzem e utilizam o conhecimento matemático de modos diversos. A abordagem pluralista da etnomatemática valoriza os contextos culturais específicos e destaca a diversidade de práticas matemáticas, ampliando o escopo de investigação para incluir comunidades frequentemente marginalizadas nas narrativas tradicionais da história da matemática.

No entanto, variados distanciamentos temporais surgem quando consideramos os enfoques metodológicos e epistemológicos. A história da matemática, em fontes mais clássicas e de comum acesso no Brasil, como Boyer (1974), Struik (1989), Katz (1993), Eves (1995) e Kline (1999), tende a seguir uma linha cronológica e linear, focada em grandes marcos e figuras proeminentes, muitas vezes ignorando as contribuições matemáticas de culturas não ocidentais. A etnomatemática, por outro lado, rompe com essa visão mais eurocêntrica ao enfatizar a matemática como uma construção cultural e contextual, o que pode levar a uma (re)-significação de registros históricos e a uma valorização dos saberes locais. Contudo, esses distanciamentos não devem ser um obstáculo, mas uma oportunidade para enriquecer a historiografia da matemática, aproveitando a maior facilidade tecnológica de acessos atuais a outras fontes e promovendo uma compreensão mais inclusiva, bem como multifacetada e ampliada do desenvolvimento matemático.

RESULTADOS ESPERADOS

Espera-se que os resultados deste estudo, como uma parte integrante das pesquisas de doutorado do primeiro autor, realcem e propaguem uma interconexão promissora entre os elementos musicais do Congo Capixaba e saberes matemáticos, mostrando como práticas culturais podem ser compreendidas através de uma lente etnomatemática. A análise dos padrões rítmicos e melódicos, bem como dos processos de fabricação e uso dos instrumentos, deverá evidenciar a presença de estruturas matemáticas como simetria, proporção e sequência. Desse modo, esses resultados poderão contribuir para uma valorização acadêmica e social dos saberes tradicionais locais, mostrando como a matemática é observada de forma enraizada nas práticas culturais e, na continuidade dos procedimentos da pesquisa, como essas práticas podem enriquecer o ensino e a compreensão da matemática em contextos educacionais.

Além disso, o estudo histórico poderá oferecer uma compreensão mais ampla sobre a evolução das práticas musicais do Congo Capixaba e sua relação com os saberes matemáticos ancestrais. Ao explorar as influências africanas e indígenas, espera-se identificar como esses saberes foram transmitidos e adaptados ao longo do tempo, revelando a resiliência e a criatividade das comunidades envolvidas. Esses achados poderão fomentar novas discussões sobre a importância de incluir pers-

pectivas culturais e históricas no estudo da matemática, proporcionando uma visão mais inclusiva e diversificada do conhecimento matemático, até mesmo em termos mundiais.

Este estudo pretende instigar outras investigações direcionadas ao campo da etnomatemática e da educação matemática, que mostrem como a integração de disciplinas pode enriquecer a compreensão cultural e científica, além de promover uma educação mais inclusiva e contextualizada. Em especial, tem-se em curso uma proposta de abordagem interdisciplinar que pode abrir diferente caminho para a pesquisa e a educação, conectando a matemática, a história e a música, de maneira que respeite e valorize as tradições culturais locais.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar João. Mudanças estruturais nos fundamentos matemáticos da música partir do século XVII: considerações sobre consonância, série harmônica e temperamento. **Revista Brasileira de História da Matemática**. Especial nº 1 – *Festschrift* Ubiratan D'Ambrosio, dez. 2007, p. 369-380.

BIARD, François-Auguste. **Deux années au Brésil**. Hachette, Paris, 1862.

BLOCH, Marc. **A história, os homens e o tempo**. In: Marc Bloch. Apologia da história. Ou o ofício do historiador. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001, 51-68.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 1974.

BRASIL. **Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira". Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 10 jan. 2003.

BRASIL. **Lei nº 11.645, de 10 de março de 2008**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, modificada pela Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da rede de ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira e Indígena". Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 11 mar. 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Plano Nacional de Implementação das Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-brasileira e Africana**. Novembro de 2009.

CAPAI, Humberto (Coord.). **Atlas do Folclore Capixaba**. Espírito Santo: SEBRAE/ES, 2009.

CONDE, Bruno Santos; FIGUEIREDO, Regina Érika de. **Congo**: Patrimônio Cultural do Espírito Santo. Vitória: Secult, 2022.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática. Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer**. 2ª edição [1ª ed. 1990]. São Paulo: Ed. Atual, 1993.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática** – Elo entre as Tradições e a Modernidade. Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2001.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria de Estado da cultura. Subsecretaria de Cultura. Gerência de Memória e Patrimônio. **O Congo do Espírito Santo**: Relatório parcial do Inventário & Solicitação de Registro. Vitória: 2012-2014.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 6. ed. São Paulo: Thomson, 1995.

KATZ, Victor. Joseph. **A history of mathematics**: an introduction. 2. ed. New York: Harper-Collins, 1993.

KLINE, Morris. **História do pensamento matemático**. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1999.

LÉVI-STRAUSS, Claude. **Antropologia Estrutural**. Tradução Chaim Samuel Katz, Eginardo Pires. 5. ed. Rio deJaneiro: Tempo Brasileiro, 1996.

LINS, Jaceguay Monteiro. **O Congo do Espírito Santo**: uma panorâmica musicológica das bandas de Congo. Vitória: GSA, 2009.

MACEDO, Neusa Dias de. **Iniciação à pesquisa bibliográfica**: guia do estudante para a fundamentação do trabalho de pesquisa. São Paulo, SP: Edições Loyola,1994.

MACIEL, Cleber. **Negros no Espírito Santo**. Osvaldo Martins de Oliveira (org.). Coleção Canaã. v.22. 2. ed. Vitória: Arquivo Público do Estado do Espírito Santo, 2016.

MOTTA, Carlos Eduardo Mathias. Uma proposta transdisciplinar no ensino da matemática para deficientes visuais. In: CURY, Helena Noronha (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos e propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004, p. 407430.

NEVES, Reinaldo Santos (Org.). **Coletânea de estudos e registros do folclore capixaba**: 1944-1982. v.2. Guilherme Santos Neves. Vitória: Centro Cultural de Estudos e Pesquisas do Espírito Santo, 2008.

ROCHA, Levy. **Viagem de Pedro II ao Espírito Santo**. 2. ed. Rio de Janeiro: Revista Continente, 1980.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. Um Currículo Trivium para a matemática fundamentado nas perspectivas da etnomatemática e da modelagem. **Hipátia**, v. 4, n. 1, p. 26-37, jun. 2019. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/1088>. Acesso em 10 maio.2023.

SECRETARIA DA CULTURA DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO (SECULT ES). **Congo**: bem imaterial do Espírito Santo. Disponível em: https://secult.es.gov.br/congo-bem-imaterial-do-espirito-santo. Acesso em: 10 jan. 2025.

SEQUEIRA, Francisco Antunes de. **Esboço Histórico dos Costumes do Povo Espíritossantense**: Desde os Tempos Coloniais até os Nossos Dias. 2.ed. Vitória: Impressa Oficial, 1944.

STRUYK, Dirk Jan. **História concisa da matemática**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1989.

TINHORÃO, José Ramos. **O rasga**: uma dança negro-portuguesa. São Paulo: Editora 34. 2006.

TOUSSAINT, Godfried Theodore Patrick. **The Geometry of Musical Rhythm**. Boca Raton: Taylor e Francis Group, 2013.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Etnomatemática e corpo-território: a feitura de cestarias de uma artesã *Avá Guarani* como fonte historiográfica

Ethnomathematics and body-territory: the making of basketry by an *Avá Guarani* artisan as a historiographical source

Midiá Barbosa[1]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

Rhuan Guilherme Tardo Ribeiro[2]
Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD

RESUMO

Este artigo apresenta uma pesquisa em andamento sobre a feitura de cestarias *Avá Guarani*, estabelecendo conexões entre a etnomatemática e as historiografias da matemática. A investigação parte do conceito de corpo-território como espaço de produção e transmissão de saberes matemáticos, analisando como esses conhecimentos se manifestam ao longo do processo de feitura das cestarias. Metodologicamente, a pesquisa adota uma abordagem etnográfica e colaborativa, fundamentada na perspectiva do "Pesquisar COM", que valoriza a narração das experiências e vivências da artesã. Nessa abordagem, o conceito de corpo-território é central para a construção do conhecimento, pois evidencia a relação entre os saberes matemáticos, os gestos, os materiais e o território. Além disso, a pesquisa se constitui como fonte para a historiografia da matemática, ao documentar os saberes matemáticos presentes na prática artesanal. A análise da cestaria, desde a retirada da fibra de bananeira até a finalização do produto, revela a intrínseca conexão entre corpo, território e conhecimento matemático, ampliando as possibilidades de compreensão do pensamento matemático de forma mais plural e situada.

Palavras-chave: Corpo-Território; Saberes Indígenas; Cestaria Avá Guarani; Reterritorialização.

ABSTRACT

This article presents ongoing research on Avá-Guarani basket-making, establishing connections between ethnomathematics and the historiographies of mathematics. The investigation is based on the concept of body-territory as a space for the production and transmission of mathematical knowledge, analyzing how this knowledge manifested itself throughout the process of making baskets. Methodologically, the research adopts an ethnographic and collaborative approach, based on the perspective of "Research WITH", which values the narration of the experiences and experiences of the artisan. In this approach, the concept of body-territory is central to the construction of knowledge, as it highlights the relationship between mathematical knowledge, gestures, materials and territory. In addition, the research constitutes a source for the historiography of mathematics, by documenting the mathematical knowledge present in artisanal practice. The analysis of basketry, from the removal of banana fiber to the completion of the product, reveals the intrinsic connection between body, territory and mathematical knowledge, expanding the possibilities of understanding mathematical thought in a more plural and theoretical way.

Keywords: Body-Territory; Indigenous Knowledge; Avá Guarani Basketry; Reterritorialization.

INTRODUÇÃO

Este texto busca refletir sobre experiências de aprendizado em um espaço intercultural indígena, compartilhado entre a pesquisadora e uma artesã Avá Guarani, e construído a partir de encontros cotidianos que privilegiam a escuta, a observação e a vivência.

[1] Mestranda pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Foz do Iguaçu, Paraná, Brasil.E-mail: midiajbarbosa@gmail.com.

[2] Doutor em Educação para Ciências e Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (PCM-UEM). Professor no curso de Licenciatura Intercultural Indígena da Faculdade Intercultural Indígena–FAIND da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD), Dourados, Mato Grosso do Sul, Brasil. E-mail: rhuanribeiro@ufgd.edu.br.

A pesquisa, intitulada *Etnomatemática e Corpo-Território: a feitura de cestarias de uma artesã Avá Guarani*, tem como objetivo estudar os saberes etnomatemáticos presentes na prática da cestaria, inserindo-a no contexto holístico de um fazer coletivo e ancestral, constituído a partir do corpo-território dessa artesã.

Este estudo está sendo desenvolvido no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática (PPGEn) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), campus de Foz do Iguaçu, no oeste do Paraná.

O primeiro contato com a artesã ocorreu no início de 2023, nos corredores do Colégio Estadual Indígena *Teko* Ñemoingo, localizado no território *Ocoy*, em São Miguel do Iguaçu, Paraná. Nesse ambiente, tanto a autora quanto a artesã desempenham funções laborais: a pesquisadora, também professora de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, e a artesã como agente educacional nos anos iniciais. Foi nesse espaço que surgiu a possibilidade de a artesã indígena ensinar à professora não indígena as técnicas de cestaria de seu povo. Posteriormente, a ideia amadureceu no Programa de Pós-Graduação e se consolidou como uma pesquisa científica no campo da Etnomatemática.

Destacamos que a relação entre etnomatemáticas e histórias das matemáticas configuram um campo de estudo para compreender a forma como diferentes culturas desenvolvem e utilizam suas matemáticas em conformidade com suas necessidades cotidianas. Um aspecto relevante da matemática indígena é sua intrínseca conexão com a natureza. A observação dos fenômenos naturais e a aplicação desse saber para o planejamento de atividades, como plantio, caça e rituais, ilustram uma matemática que se fundamenta no entendimento dos seres humanos e não humanos. Esse conhecimento é transmitido de geração em geração, frequentemente por meio de práticas orais, e não requer formalização ou abstração, como ocorre na tradição matemática ocidental.

Em diálogo com a artesã, surgiram algumas questões centrais para a pesquisa que está em andamento: como ocorre a feitura das cestarias no território *Ocoy*? Quais materiais e técnicas são utilizados pela artesã para fazer os cestos?

A pergunta orienta a pesquisa em construção. Contudo, para esta comunicação, direcionamos nossos esforços para registrar nossas experiências em uma pesquisa etnomatemática e refletir sobre como ela nos ajuda a compreender a relação entre Etnomatemática e História da Matemática por meio da Historiografia[3]. Especificamente, questionamos de que forma essa pesquisa em etnomatemática pode contribuir para a ação historiográfica e, consequentemente, para as histórias do pensamento matemático.

O olhar para a prática da cestaria como um fazer etnomatemático trouxe desafios teóricos, relacionados à compreensão dos caminhos epistemológicos possíveis para a Etnomatemática, e desafios práticos, decorrentes da inexperiência da autora com o trabalho de campo. No âmbito teórico, destaca-se a impossibilidade de conduzir uma pesquisa etnomatemática epistemologicamente "neutra". Seria possível que o olhar da professora-pesquisadora ultrapassasse suas próprias concepções matemáticas? Já no aspecto prático, surgem dificuldades na delimitação do estudo: o que pode ser

[3] Quando usamos letra maiúscula para designar História da Matemática, Etnomatemática e Historiografia o fazemos por percebê-los enquanto programas de pesquisa institucionalizados. Já quando os termos estiverem escritos em letra minúscula é porque entendemos que dentro de cada programa existem definições distintas de etnomatemática, história da matemática e historiografia.

excluído (ou não mencionado) em uma pesquisa etnomatemática construída a partir do encontro intercultural de mulheres em uma comunidade indígena?

Essas reflexões levaram à adoção de conceitos e procedimentos que orientam o percurso teórico e metodológico da pesquisa em andamento. Com base no conceito de Etnomatemática de Ubiratan D'Ambrosio (1998), compreendemos o Programa Etnomatemático como a arte ou técnica de conhecer e explicar em diferentes âmbitos culturais. Para o autor, as etnomatemáticas são saberes únicos, característicos de seus locais de origem.

Partimos do entendimento de que esses saberes, além de únicos, são também singulares. Em outras palavras, há uma etnomatemática que emerge da feitura das cestarias pela artesã indígena e outra que se manifesta no olhar da professora-pesquisadora. Reconhecer a coexistência dessas percepções em uma mesma pesquisa enriquece o percurso metodológico, ao mesmo tempo que respeita as diferenças e assume as limitações do estudo.

Além disso, ao admitirmos a coexistência de diversas formas de perceber e fazer matemática, orientamos nossas ações a partir de uma visão que busca se afastar de uma norma monocultural que privilegia apenas uma única maneira de fazer matemática. Para Geni Nuñez (2021), existe uma ideologia colonial que sustenta práticas de violência em múltiplas instâncias[4], seja em relação à natureza (ecocídio), aos povos tradicionais (etnocídio), no preconceito racial (racismo) ou às violências de gênero (misoginia).

De acordo com Fumikasu Saito (2018), toda história é orientada historiograficamente, sendo a historiografia a escrita crítica da história do pensamento matemático, enquanto a história da matemática constitui uma narrativa histórica propriamente dita.

Ao traçarmos um paralelo entre os pensamentos de Geni Nuñez e Saito, fazemos isso por compreender que a escrita da história da matemática, quando orientada pela narrativa historiográfica tradicional, destaca apenas a coerência interna do saber matemático. Além disso, tem como referência a matemática que (re)conhecemos nos dias de hoje, refletindo, assim, uma história do pensamento matemático alinhada à ideologia colonial e colocando em prática a monocultura do pensamento matemático.

Isso porque "tais narrativas referem-se apenas à história daquilo que deu certo, legitimando a ideia de que só havia um único caminho para a matemática moderna." (Saito, 2018, p. 608). Dessa forma, apenas uma maneira de matematizar foi aceita como expressão legítima do pensamento matemático.

Na mesma direção, ressaltamos que, para Ole Skovsmose (2007, p. 41), "a matemática ocidental foi descrita como representante de valores ocidentais e como um modo dominante de pensamento." Em poucas palavras, quando falamos de Matemática ou de matemática moderna, estamos nos referindo a uma forma específica de fazer matemática, considerada universal, mas com raízes eurocêntricas, fundamentada na estrutura axiomática e no uso exclusivo do aparato da razão. Ela não se confunde com o pensamento matemático, que é mais amplo.

[4] Essas práticas são interconectadas e interdependentes, operam segundo o princípio da não concomitância constituindo, assim, um sistema de monoculturas: a "monocultura da fé, no monoteísmo cristão; monocultura da sexualidade, monossexismo heterocisnormativo; monocultura dos afetos, na monogamia e assim por diante" (Longhini, 2021, p.67).

Desde nossa perspectiva, a visão historiográfica atualizada, que valoriza "os contextos de elaboração, transformação, transmissão e disseminação do conhecimento matemático em diferentes épocas e culturas" (Saito, 2018, p. 608), atua na contramão do pensamento da monocultura matemática. Essa mesma característica pode ser observada nas pesquisas em etnomatemática. Para o pesquisador Marcos Lübeck (2023, p. 5), "Mesmo que se diga que a etnomatemática é uma subárea da história da matemática, suas pesquisas ainda têm no caráter etnográfico sua predominância. Eis aqui espaços para aproximações."

Assim como Lübeck (2023), acreditamos que os trabalhos em etnomatemática podem oferecer um ponto de vista epistemológico valioso para as pesquisas historiográficas. Ou seja, acreditamos que os registros e os documentos construídos a partir da etnomatemática são fontes para a historiografia e, portanto, contribuem para a formulação de novas narrativas na história da matemática.

Metodologicamente, para a pesquisa em andamento utilizamos uma abordagem etnográfica sob a perspectiva do *Pesquisar COM*[5], entendida como uma experiência científica no feminino, em que narrar, sentir e pesquisar se articulam (Morais e Quadros, 2020). Assim, buscamos realizar uma pesquisa *com* a artesã, e não *sobre* ela.

No que tange à etnomatemática da artesã, é essencial considerar que os saberes corporificados em sua prática não podem ser reduzidos a conhecimentos individuais. Por essa razão, a experiência não pode ser enquadrada como um simples estudo de caso, pois saberes ancestrais não se restringem a um contexto local (Holanda, 2021). Esses saberes, além de coletivos, são transmitidos e compartilhados no território, o que nos leva a adotar o conceito de corpo-território.

Para Lorena Cabnal (2013), mulher indígena Maya-Xinka, o território-terra não se limita a um espaço geográfico definido por leis e populações. Trata-se de um conceito integral que inclui os vínculos com a terra, as subjetividades, os afetos e os saberes. É nessa integralidade que o corpo-território encontra sua expressão. Da mesma forma, Célia Xacriabá e outros autores defendem que, mesmo quando deslocados, os corpos-territórios mantêm a capacidade de reterritorializar outros espaços, transformando-os com sua presença (Xacriabá et al., 2020, p. 84).

Entendemos o conceito de corpo-território como um enunciado político que une a luta pela defesa dos corpos femininos indígenas e dos territórios, além de funcionar como uma categoria de análise (Cruz Hernandez, 2017). A pesquisa, portanto, almeja evidenciar os vínculos entre corpo-território e etnomatemática por meio do processo de feitura das cestarias.

Especificamente na pesquisa em andamento, ao analisá-la sob o prisma da historiografia atualizada, será possível inserir no campo da história da matemática uma diversidade de corpos-territórios que produzem saberes matemáticos e que fazem etnomatemáticas. Da mesma forma, ao evidenciar as etnomatemáticas produzidas por esses corpos-territórios, fica esclarecida a necessidade de defendê-los se quisermos falar da pluralidade do pensamento matemático.

No entanto, devido à delicadeza exigida no tratamento das informações relacionadas às experiências de vida da artesã, concentramos nossos esforços, ao longo deste texto, em relatar, desde a

[5] A perspectiva PesquisarCOM é uma forma de construir conhecimento junto com as pessoas envolvidas na pesquisa, valorizando suas histórias, saberes e vivências. Diferente de um modelo tradicional, em que o pesquisador observa e analisa de fora, essa abordagem se baseia no diálogo, na colaboração e no respeito mútuo.

perspectiva da pesquisadora, os primeiros encontros dedicados à feitura das cestarias. Assim, este trabalho se limita à narração do processo de retirada e preparo da *pakova pire* (fibra de bananeira).

Reiteramos, que ao final da pesquisa de mestrado, nosso objetivo não é definir o que significa ser uma mulher *Avá Guarani* nem objetificar sua experiência de vida. Tampouco buscamos determinar o que é a Etnomatemática para o seu povo. Dito isso, buscamos registrar suas vivências e, a partir delas, compreender como os saberes etnomatemáticos presentes na produção de cestarias se relacionam com o corpo-território.

REFERENCIAL TEÓRICO

Os conceitos de Corpo-Território e Corpo que Reterritorializa surgem a partir das lutas sociais de povos indígenas, juntamente com comunidades quilombolas, ribeirinhas, caiçaras, entre outras comunidades tradicionais, que se organizam na defesa de seus territórios por toda a América Latina. Para Lorena Cabnal (2013), esses conceitos vêm sendo construídos a partir da teoria e da prática, com o objetivo de compor um novo imaginário político e de luta, no qual se destaca que o corpo da mulher é o primeiro território a ser defendido.

Podemos entender o corpo que reterritorializa como aquele que carrega em si o território, ou seja, o corpo enquanto território ampliado. Não se trata de um corpo confinado à individualidade, limitado às margens do próprio corpo, entendido como "propriedade" respaldada por direitos individuais, mas como uma matéria expandida, uma superfície extensa de afetos, trajetórias, recursos e memórias (Gago, 2020). O corpo, assim, carrega o território em si.

Para os povos tradicionais, o corpo, o território e os saberes não são partes separadas; eles formam um tecido indissociável que constitui a base de sua identidade e resistência. É a partir dessa concepção de indissociabilidade que abordamos o conceito de Etnomatemática.

De acordo com Ubiratan D'Ambrosio (1998), cada grupo tem suas próprias formas de se matematizar, enraizadas em sua cultura. A esse respeito a etnomatemática para os povos originários se manifesta nas formas de conhecimento que esses povos desenvolvem a partir da observação e interação com a natureza. Para eles, a matemática não é uma abstração de números e fórmulas, mas um saber enraizado em suas vivências e relações com o mundo ao seu redor. Em outras palavras, o pensamento matemático indígena provém da própria cultura (Ribeiro, 2022).

Entendemos o conceito de corpo-território como um enunciado político que une a luta pela defesa dos corpos femininos indígenas e dos territórios, além de funcionar como uma categoria de análise (Cruz Hernandez, 2017). A pesquisa, portanto, evidencia a partir do conceito de corpo-território os saberes matemáticos necessários à feitura das cestarias.

Neste sentido, a etnomatemática oferece pontos de vista epistemológicos sobre as manifestações do pensamento matemático. Porém, a multiplicidade dos saberes matemáticos também compõe a área de interesse da historiografia, e, portanto, a análise histórica se torna fundamental para que as etnomatemáticas não sejam representadas enquanto folclore ou crendices (Lübeck, 2023).

METODOLOGIA

A proposta da pesquisadora vai além de observar e descrever a produção das cestarias, buscando também aprender a fazê-las junto à artesã *Avá Guarani*. Assim, a metodologia adotada é a pesquisa de campo com abordagem etnográfica. Além disso, para evitar tratar a artesã como uma simples participante da pesquisa, nosso trabalho se orienta pela perspectiva do "Pesquisar COM", que visa estabelecer uma relação de colaboração.

Na perspectiva do "Pesquisar COM", há uma preocupação em permitir que o campo de pesquisa nos mostre os caminhos a serem seguidos para "reconhecê-los como parte do processo, considerando que este é um trajeto que envolve imprevisibilidades, o que nos leva a realinhar constantemente nossas ações e convocações de um fazer artesanal" (Oliveira Morais e Toledo Quadros, 2020, p. 9).

Nesse sentido, ao longo da pesquisa, ocorreram conversas informais entre a artesã e a pesquisadora, com o objetivo de organizar os dias e os locais mais adequados para os encontros. Essas conversas também permitiram um diálogo sobre os conceitos teóricos de Etnomatemática, Corpo-Território e Corpo que Reterritorializa utilizados na pesquisa, explorando como, a partir da perspectiva tanto da pesquisadora quanto da artesã, esses conceitos se relacionam com a vivência da artesã no território e com a feitura das cestarias.

Portanto, nossas escolhas metodológicas partem do entendimento de que a artesã é, simultaneamente, representante e guardiã dos conhecimentos ancestrais de seu povo sobre a cestaria, além de ser parceira ativa na pesquisa de campo, pois investiga seus saberes e práticas aplicadas a essa arte. No entanto, a pesquisa não adota como premissa o estudo de caso, pois o objetivo não é individualizar um saber que, por sua natureza, é ancestral e coletivo.

Em consonância, a escrita segue o formato de narrativa, pois implica um posicionamento de participação de quem escreve, enquanto a descrição remete a uma posição de observação. Além disso, a narrativa se alinha à forma artesanal de comunicar, em que a intenção não é simplesmente transmitir informações, mas sim conteúdos, ou seja, conjuntos de temas, argumentos e ideias que formam o texto (Ceia, 2009).

Assim, a partir desses conteúdos, transmitem-se experiências. "Dessa forma, nas narrativas, o autor não informa sobre sua experiência, mas conta sobre ela, tendo, com isso, a oportunidade de pensar algo que ainda não havia pensado" (Muylaert *et al.*, 2014, p. 194).

Em razão do caráter etnográfico da pesquisa, foram organizados encontros tanto no território Ocoy quanto na residência da pesquisadora, com o objetivo de acompanhar e auxiliar a artesã em todas as etapas do processo, desde a retirada da *pakoka yvira* (fibra de bananeira), passando pela secagem e preparo da fibra, até a feitura das cestarias.

Para registrar os encontros, foram utilizados o caderno de campo, registros fotográficos e entrevistas abertas como ferramentas. No caderno de campo, estão registrados em primeira pessoa os momentos dos encontros, as saídas para coleta dos materiais, o preparo desses materiais e a feitura das cestarias.

O campo de narração da pesquisa de cunho etnográfico oferece uma conjuntura em forma de texto. Nele, a historiografia transcorre em meio à história e à etnografia, de modo que se cria a pos-

sibilidade de construir uma história das matemáticas articulada à etnomatemática (Lübeck, 2023). Nesse sentido, a etnomatemática se apresenta não apenas como proposta historiográfica, mas também como fonte para as pesquisas historiográficas.

ANÁLISES E RESULTADOS

Primeiro Momento–Retirada da *Pakova Pire* (Fibra de bananeira)

A retirada da fibra da bananeira aconteceu em uma quarta-feira de dezembro de 2024, a primeira quarta-feira após o início das férias do ano letivo. Cheguei à casa da artesã por volta das 09h20, em um dia de muito sol. Um abraço, o compartilhamento de algumas cuias de tererê e o ato de afiar o facão foram as ações que antecederam o início do trabalho.

Com o facão em mãos, a artesã seleciona a bananeira mais comprida que encontra no pátio de sua casa, que fica em frente à escola da comunidade, garantindo, assim, que as fibras colhidas também sejam longas (Figura 1).

Figura 1 – Corte da bananeira

Fonte: Autoria própria, 2024.

Após alguns golpes na base da bananeira, a planta é derrubada, e aquilo que leigamente reconhecemos como o tronco da bananeira é, na verdade, pseudocaule[6] (Figura 2). O pseudocaule da bananeira é formado por várias capas ou camadas, cada uma com uma superfície lisa voltada para o exterior e outra voltada para o interior do caule. Essas camadas são mais finas nas laterais, onde iniciam ou terminam seu crescimento, e mais volumosas no centro (Figura 2). São essas partes lisas que são separadas uma a uma com o auxílio de uma faca.

O pseudocaule que fica aparente na planta, como uma primeira camada, é imediatamente descartado. Pergunto por que essa primeira folha não é utilizada, e a artesã explica que, ao secar, ela se torna muito dura e afiada. Nesse momento, ela recorda que já usou essa camada inicial para confeccionar um tapete encomendado por um hotel da região. Ela acrescenta, ainda, que essa parte da bananeira é mais resistente e pode ser utilizada para esse tipo de trabalho, mas não para a confec-

[6] De forma simplificada, os pseudocaules são compostos por folhas alternadas e espiraladas.

ção de cestarias, pois nestas é necessário dobrar as fibras. Após o descarte inicial, a artesã continua a demonstrar como realizar a retirada.

Enquanto observo atentamente, fotografo o processo e seguimos conversando. Não estamos sozinhas; a irmã da artesã, que vive no mesmo terreno, mas em casas separadas, nos acompanha. Ofereço minha ajuda à artesã e passo o celular para que ela continue registrando as imagens.

Figura 2 – Pseudocaule

Fonte: Autoria própria, 2025.

Com o tronco deitado, a artesã posiciona a faca horizontalmente sobre o caule da bananeira e escolhe um dos lados mais finos da camada para iniciar o corte. A faca desliza entre a parte externa e interna da camada, seguindo em direção ao final do caule. Esse procedimento é repetido até que toda a parte externa da camada seja retirada (Figura 3). Não é necessário aplicar muita força; na verdade, é a leveza do movimento que permite que a fibra seja removida integralmente. Ao final desse processo, a parte externa é transformada em tiras mais estreitas que, após a secagem, se tornam as fibras da bananeira utilizadas na confecção das cestarias (Figura 4).

Figura 3 – Corte do pseudocaule para retirada das fibras

Fonte: Autoria própria, 2024.

Figura 4 – Fibras recém cortadas secando ao sol

Fonte: Autoria própria, 2024.

Após concluir a remoção da parte externa da camada, a artesã utiliza a faca para eliminar as sobras presentes entre as superfícies lisas, nivelando-as. Em seguida, a parte lisa voltada para o interior da bananeira é retirada manualmente de forma integral, sem ser transformada em tiras mais estreitas (Figura 5).

Figura 5 – Fibras recém cortadas secando ao sol

Fonte: Autoria própria, 2024.

Após essa primeira etapa, carregamos o tronco até a frente da casa da artesã, embaixo de uma árvore, e o colocamos sobre uma mesa para facilitar a retirada das fibras. Prosseguimos com os cortes até a penúltima camada do caule, pois, segundo a artesã, a última camada contém muita água e, por esse motivo, não é adequada para a produção da fibra.

À medida que íamos retirando as fibras, a artesã as pendurava no varal em sua casa. Ali elas permaneceram até o dia seguinte. Terminamos o trabalho antes do meio-dia e, então, nos sentamos embaixo da árvore para tomar *tererê* e conversar até o horário do almoço. A artesã sabia que precisaria cortar mais uma bananeira, então sugeri que escolhêssemos uma bem comprida, com bananas verdes.

Após a refeição, preparada pela irmã da artesã, voltamos a nos acomodar debaixo da sombra para tomar *tererê*. Ao refletirmos sobre as técnicas que estávamos utilizando pela manhã, a artesã mencionou que sua avó paterna e sua mãe faziam cestarias, mas que, na época, moravam na aldeia *Acaraymi*, no território nacional do Paraguai. Foi durante nossa conversa que o período de sua infância veio à memória.

Perguntei como a artesã aprendeu, suspeitando equivocadamente que uma das mulheres poderia tê-la ensinado. No entanto, a resposta foi que ninguém a havia ensinado diretamente. Desde criança, ela observava as mulheres e, às vezes, fazia cestarias como uma forma de brincar. Nessa mesma conversa, a artesã comentou que a técnica usada por sua avó e sua mãe não era a mesma que ela utilizou hoje comigo. Ela me explicou um pouco sobre a técnica de sua avó, e eu sorri, dizendo que precisaríamos de um mais um dia inteiro para aprendê-la. Assim, seguimos alternando os assuntos sobre as cestarias e a vida da artesã até as 16h, quando retomamos o trabalho, repetindo os mesmos passos até aproximadamente às 17h30, quando saímos para buscar as *ivati pire* (palha de milho).

SEGUNDO MOMENTO–PREPARAR A *PAKOVA PIRE* (FIBRA DE BANANEIRA)

No dia seguinte à retirada das fibras, a artesã foi visitar seu irmão em uma comunidade próxima. Como o tempo indicava que iria chover, voltei à sua casa para pegar as fibras que havíamos cortado. Caso a chuva as atingisse, havia o risco de mofar ou até apodrecerem. Por isso, elas ficaram na garagem da minha casa durante aproximadamente um mês.

Passado as festas de fim de ano nos encontramos novamente na casa da artesã para reorganizar o cronograma da pesquisa. Entre outras decisões ficou estabelecido que faríamos a cesta com a *pakova pire* (fibra de bananeira) na minha casa uma vez que as fibras já estavam lá.

Voltei no dia marcado para buscá-la, mas decidimos mudar o local para a limpeza das fibras. Esse foi um momento importante para refletirmos sobre a potencialidade de reterritorialização de seu corpo-território. Assim, fomos até uma das entradas que dão acesso ao Parque Nacional do Iguaçu, que, no passado, foi território Guarani. Da minha casa até o local, levamos cerca de 30 minutos de carro. Na chegada, por volta das 10 horas da manhã, desembarcamos com nossas fibras e nosso tereré. Neste dia, meu filho, de dez anos, também nos acompanhou.

A primeira etapa do preparo das fibras consistiu em separar as tiras mais largas das mais estreitas. Após a separação, guardamos as tiras largas e iniciamos o processo de umedecer as tiras estreitas (Figura 6). Esse cuidado foi necessário porque, durante o processo de secagem, as fibras tendem a se fechar, o que exigiu que as abrissemos novamente (Figura 7).

Figura 6 – Artesã umedecendo as tiras

Fonte: Autoria própria, 2025

Figura 7 – Antes e depois do processo de desenvergar a fibra

Fonte: Autoria própria, 2025.

Para abrir as fibras, a artesã utilizou a parte não dentada de uma faca de serra. De maneira suave, ela deslizou a lâmina pela parte rugosa da fibra, preservando sua superfície lisa. Quando a fibra já apresentava uma superfície mais reta, a artesã removeu com as mãos as laterais que estavam mais finas que o restante (Figura 8). No entanto, o motivo dessa ação não ficou totalmente claro. Talvez tenha sido para garantir uma homogeneidade na espessura ou, quem sabe, para minimizar a possibilidade de a fibra envergar novamente.

Figura 8 – Retirada manual das laterais da fibra

Fonte: Autoria própria, 2025.

Enquanto preparamos as fibras, observamos que havia muitos ninhos de um pássaro conhecido como *Japu'i* (Japu), uma ave com plumagem negra, bico amarelo claro e cauda predominante de penas amarelas, seguidas por tons avermelhados. Seus ninhos, em formato de cesto, chamaram nossa atenção. A visão do pássaro e de seus ninhos despertou uma memória na artesã. Ela recordou-se da presença de sua mãe, que lhe contava que, para fazer bem as cestarias, era necessário ter, na forma de colar ou pulseira, um bico de *Japu'i*.

Uma vez concluída a limpeza das fibras, passamos para o terceiro momento: a feitura da cesta. Essa última etapa da feitura de cestaria será abordada de forma mais detalhada e divulgada posteriormente na dissertação do mestrado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora não esteja registrado neste trabalho, os encontros foram marcados por conversas leves sobre o cotidiano e diálogos profundos sobre a vida. Compartilhamos memórias felizes, mas também memórias tristes, relacionadas às violências sofridas.

O conceito de corpo-território é uma imagem poderosa, especialmente para as mulheres indígenas. É por meio desse conceito que os saberes do território-terra são transmitidos entre as gerações. O corpo-território também possui a capacidade de ser um corpo que reterritorializa, retomando espaços que foram historicamente desapropriados.

Com isso, não estamos negando a importância dos territórios-terra para as comunidades indígenas, mas destacando que proteger, defender e lutar pelos corpos-territórios é essencial. O corpo-território se configura como uma memória viva do território-terra e, portanto, carrega consigo as formas de viver no território. De forma semelhante, o território-terra é a memória que habita o corpo, criando uma conexão inseparável entre ambos.

Nesse sentido, os conhecimentos etnomatemáticos, que são singulares, mas não individuais, pertencem ao corpo-território da artesã e estão diretamente relacionados ao território-terra do povo *Avá Guarani*.

Quando a prática da cestaria ultrapassa os limites legais do que é reconhecido como território *Ocoy*, o corpo-território da artesã reterritorializa outros espaços, e os saberes, mesmo fora de seus limites geográficos, não deixam de pertencer ao seu povo. Isso fica claro quando os saberes adquiridos pela artesã em sua infância no território *Acaraymi*, cujos limites se situam no Paraguai, acompanham seu corpo-território ao longo de sua vivência.

Sua chegada ao território *Ocoy* marca outro momento de reterritorialização de seu corpo, evidenciando que o corpo-território da artesã é um espaço dinâmico que transporta consigo as memórias, os saberes e as práticas de um território para outro. Assim, a transição entre os territórios, tanto em termos geográficos quanto culturais, fortalece a continuidade e a resistência dos conhecimentos ancestrais, que não são limitados por fronteiras físicas, mas seguem vivos e atuantes nas vivências cotidianas.

Nesse contexto, o corpo-território, enquanto categoria de análise, evidencia um ponto de vista epistemológico sobre os saberes matemáticos utilizados para o preparo das fibras, na mesma direção em que expõe as manifestações políticas relacionadas ao direito e à defesa dos territórios-terra e dos territórios-corpo, dada a relevância desses para o modo de ser *Avá Guarani*.

Ao fim, acreditamos que seja possível empregar textos resultantes de pesquisas etnomatemáticas como fontes historiográficas, contribuindo para a construção de novas narrativas históricas da matemática. Notavelmente, ao utilizar a pesquisa em andamento como um prisma epistemológico, abre-se a possibilidade de refletir sobre outras lógicas possíveis para o pensamento matemático, evidenciando que a produção desse saber se dá por meio do corpo de uma mulher indígena.

AGRADECIMENTOS

De forma breve, agradeço a artesã pela confiança em compartilhar os saberes de seu corpo-território e a comunidade *Avá Guarani* por me permitir caminhar no território.

REFERÊNCIAS

CABNAL, Lorena. Defender un territorio de la minería sin defender a las mujeres de la violencia sexual es incoherencia. **Diagonal**, Madrid, maio 2013. Disponível em: https://www.diagonalperiodico.net/global/defender-territorio-la-mineria-sin-defender-cuerpos-mujeres-la-violencia-sexual-es. Acesso em: 13 jan. 2025.

CEIA, Carlos. Conteúdo. In: E-Dicionário de Termos Literários, 2009. Disponível em: https://edtl.fcsh.unl.pt/encyclopedia/conteudo#:~:text=1.,de%20assunto%20e%20de%0mat%C3%A9ria. Acesso em: 22 jan. 2025.

CRUZ HERNÁNDEZ, Delmy Tania. Una mirada muy otra a los territorios-cuerpos femeninos. Solar, vol. 12, n.1, p. 35-46, 2017. Disponível em: http://revistasolar.org/wp-content/uploads/2017/07/3-Una-mirada-muy-otra-a-los-territorios-Cuerpos-femeninos.-Delmy-Tania-Cruz-Hern%C3%A1ndez.pdf. Acesso em: 15 jan. 2025.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática:** arte ou técnica de explicar e conhecer. 4. ed. São Paulo: Ática, 1998.

GAGO, Verónica. **A potência feminista ou o desejo de transformar tudo**. São Paulo: Elefante, 2020.

HOLANDA, Marianna. Saúde coletiva e o planeta comum: o chamado das mulheres indígenas de cura pela terra. **Interritórios – Revista de Educação**, Caruaru, v. 7, n. 13, 2021. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/interritorios/article/view/250068. Acesso em: 21 jan. 2025.

LONGHINI, Geni Daniela. Da cor da terra: etnocídio e resistência indígena. **Revista Tecnologia & Cultura**, Rio de Janeiro, Edição especial, p. 65-73, 2021. Disponível em: https://observatorio-branquitude.com.br/dar-cor-da-terra-etnocidio-e-resistencia-indigena/. Acesso em: 15 jan. 2025.

LÜBECK, Marcos. Entre a história e a etnomatemática: a perspectiva historiográfica. **Anais**–Seminário Nacional de História da Matemática, [s. l.], v. 15, 2023. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/123. Acesso em: 3 mar. 2025.

MORAES, Marcia Oliveira; QUADROS, Laura Cristina de Toledo. Ciência no feminino e narrativas de pesquisa: PesquisarCOM e a artesania na pesquisa. **Revista Pesquisas e Práticas Psicossociais**, São João del-Rei , v. 15, n. 3, p. 1-14, set. 2020. Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1809-89082020000300003&lng=pt&nrm=iso. acessos em: 05 fev. 2025.

RIBEIRO, Rhuan. **A etnomatemática presente em artesanatos e adereços produzidos por uma comunidade indígena Guarani do Oeste do Paraná. 2022**. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2022.

SAITO, Fumikazu**.** A pesquisa histórica e filosófica na educação matemática. **Eventos Pedagógicos**, *[S. l.]*, v. 9, n. 2, p. 604–618, 2018. DOI: 10.30681/reps.v9i2.10087. Disponível em: https://periodicos.unemat.br/index.php/reps/article/view/10087. Acesso em: 5 mar. 2025.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

XAKRIABÁ, Vicente; XAKRIABÁ, Edvaldo; XAKRIABÁ, Célia. **Corpo-território**. In: Ana Maria R. Gomes, Deborah Lima, Mariana Oliveira & Renata Marquez (Orgs.). Mundos Indígenas. Minas Gerais: Editora UFMG, 2020. p. 78-109.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Etnomatemática, história da matemática e o ensino de trigonometria a partir da produção de vídeos

Ethnomathematics, history of mathematics and the teaching of trigonometry through video production

Juliana Batista Pereira dos Santos[1]
Escola Estadual de Ensino Médio Silva Gama

Isabel Cristina Machado de Lara[2]
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS

RESUMO

O objetivo deste texto é discutir sobre as potencialidades da articulação entre História da Matemática e Etnomatemática, realizada a partir das teorizações foucaultiana e wittgensteiniana, na produção de vídeos para o ensino de Trigonometria. Para tal, inicialmente são apresentados os pressupostos teórico-filosóficos, pautados principalmente em D'Ambrosio, Lara, Foucault e Wittgenstein. Em seguida são apresentados os aspectos metodológicos, como a proposta voltada ao ensino da Trigonometria e a ferramenta analítica realizada, a análise genealógica foucaultiana. A proposta de ensino foi realizada com 59 estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual, situada na zona norte da cidade de Porto Alegre/RS. Os resultados alcançados evidenciam que a proposta de ensino criou condições de possibilidade para que os estudantes pesquisassem sobre os processos de geração, organização e difusão dos conceitos trigonométricos, conhecessem aspectos históricos relacionados aos conceitos trigonométricos estudados em sala de aula, compreendessem os modos de matematizar de povos da antiguidade, expressos em jogos de linguagem distintos daqueles presentes na Matemática Escolar, entre outros. Conclui que a proposta de ensino apresentada pode ser vista como um movimento de resistência docente, ou seja, um ato de contraconduta frente aos jogos de linguagem presentes na Matemática Escolar.

Palavras-chave: Etnomatemática; História da Matemática; Trigonometria; Jogos de Linguagem; Poder-saber.

ABSTRACT

The objective of this text is to discuss the potential of the articulation between History of Mathematics and Ethnomathematics, based on Foucaultian and Wittgensteinian theories, in the production of videos for teaching Trigonometry. To this end, the theoretical-philosophical assumptions are initially presented, based mainly on D'Ambrosio, Lara, Foucault and Wittgenstein. Then, the methodological aspects are presented, such as the proposal aimed at teaching Trigonometry and the analytical tool used, Foucaultian genealogical analysis. The teaching proposal was carried out with 59 students in the 2nd year of high school at a state public school, located in the northern area of the city of Porto Alegre/RS. The results achieved show that the teaching proposal created conditions for students to research the processes of generation, organization and dissemination of trigonometric concepts, to learn about historical aspects related to the trigonometric concepts studied in the classroom, to understand the ways of mathematizing of ancient peoples, expressed in language games different from those present in School Mathematics, among others. It concludes that the teaching proposal presented can be seen as a movement of teacher resistance, that is, an act of counter-conduct against the language games present in School Mathematics.

Keywords: Ethnomathematics; History of Mathematics; Trigonometry; Language Games; Power-knowledge.

[1] Doutora em Educação em Ciência e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS). Professora de Matemática da Escola Estadual de Ensino Médio Silva Gama, Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: juhbpereira@gmail.com.

[2] Pós-doutora em Educação em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS). Professora da Escola Politécnica, do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: isabel.lara@pucrs.br.

INTRODUÇÃO

Estar em sala de aula, tanto na Educação Básica, como no Ensino Superior, demanda constante atualização docente, seja na seleção dos conceitos a serem abordados, nas diferentes formas de avaliação ou na metodologia adotada. Nesse sentido, são relevantes os estudos e pesquisas que relatam experiências realizadas em sala de aula sobre os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, propondo aos docentes novas formas de apresentar, tratar, abordar os conceitos matemáticos.

Partindo dessa premissa, o objetivo deste texto é discutir sobre as potencialidades da articulação entre História da Matemática e Etnomatemática, realizada a partir das teorizações foucaultiana e wittgensteiniana, na produção de vídeos para o ensino de Trigonometria. Etnomatemática e História da Matemática são tendências de pesquisas da Educação Matemática e, embora independentes, possuem confluências que criam condições de possibilidade para articulá-las. Dentre os pesquisadores que destinam seus esforços a compreender melhor tais tendências, autores como D'Ambrosio (2000, 2007), Lara (2013, 2019) e Roque (2014) vislumbram aproximações entre ambas.

Articular Etnomatemática e História da Matemática tem sido tema de estudo entre alguns dos trabalhos apresentados no Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), como evidenciou a pesquisa de Conceição e Aranha (2024). Nessa pesquisa, os autores mapearam trabalhos do SNHM que aliassem Etnomatemática e História da Matemática e que apresentassem contribuições para o ensino dos conceitos matemáticos na Educação Básica. Entre os estudos encontrados, destacam-se o trabalho de Santos e Lara sobre Logaritmos, na edição de 2021, e os trabalhos de Santos e Lara sobre Teorema de Tales e Progressões Aritméticas, na edição de 2023.

Neste texto, a articulação proposta se dá à luz das teorizações pós-estruturalistas de Michel Foucault e Ludwig Wittgenstein, dois filósofos relevantes do movimento da virada linguística devido ao modo pelo qual compreendem a linguagem. Considerando que a Matemática é uma ciência com linguagem própria, guiada por regras específicas, tais teorizações criam condições de possibilidade para refletir e discutir sobre os diferentes usos possíveis da linguagem matemática nas salas de aula da Educação Básica.

Com esses subsídios teórico-filosóficos, este texto apresenta os resultados de uma proposta para o ensino da Trigonometria, realizada com 59 estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual, situada na zona norte da cidade de Porto Alegre/RS. Para tal, inicialmente discute articulações possíveis para Etnomatemática e História da Matemática à luz das teorizações filosóficas de Foucault e Wittgenstein. Em seguida, apresenta a proposta de ensino elaborada a partir da articulação de ambas as tendências e, por fim, os resultados obtidos por meio da análise genealógica foucaultiana. Vale destacar que este estudo foi desenvolvido no âmbito do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Etnomatemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

ETNOMATEMÁTICA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: ARTICULAÇÕES POSSÍVEIS A LUZ DE FOUCAULT E WITTGENSTEIN

Autores como D'Ambrosio (2000, 2007), Lara (2013, 2019) e Roque (2014) já propuseram, implícita ou explicitamente, articulações entre Etnomatemática e História da Matemática. Contudo, pouco se pensou tal articulação a partir das teorizações de Foucault e Wittgenstein. Nesse sentido, ao longo desta seção, objetiva-se discutir acerca da articulação entre ambas as tendências da Educação Matemática adotando, para tal, as lentes pós-estruturalistas desses filósofos.

D'Ambrosio, ao longo de sua prática pedagógica e de seus estudos e pesquisas, percebeu que diferentes modos de pensar levam a diferentes formas de fazer matemática, ou ainda, a distintos modos de matematizar. Diante disso, criou o termo Etnomatemática para sintetizar, em uma única palavra, os estudos sobre as diversas formas, técnicas, estilos, para explicar, conhecer, lidar com o ambiente social, natural e cultural (D'Ambrosio, 2007).

Para D'Ambrosio a Etnomatemática é um Programa de Pesquisa sobre a "[...] geração, organização intelectual, organização social e difusão do conhecimento." (D'Ambrosio, 1998, p. 26), cuja motivação é "[...] procurar entender o saber/fazer matemático ao longo da história da espécie humana, contextualizado em diferentes grupos de interesse, comunidades, povos e nações." (D'Ambrosio, 2007, p. 17). Ao propor o termo Etnomatemática, D'Ambrosio rompeu com a visão de um modo de matematizar independente da cultura e universal, possibilitando reconhecer modos de matematizar praticados por distintos grupos culturais e laborais.

D'Ambrosio e Wittgenstein possuem confluências em seus pensamentos e teorizações, embora tenham vivido em épocas e locais distintos e tenham realizados pesquisas e estudos em diferentes áreas do conhecimento. Se, por um lado, D'Ambrosio possibilita pensar na existência de diversos modos de matematizar, por outro, Wittgenstein recusa uma linguagem (matemática, ou não) universal, pronta, finalizada. Para D'Ambrosio, o prefixo etno do termo Etnomatemática, é um conceito amplo, que inclui grupos que partilham de símbolos, códigos e mitos, bem como, formas específicas de raciocinar e inferir. De modo semelhante, Wittgenstein argumenta que as formas de vida são grupos que não se aproximam estritamente por questões biológicas, mas por partilharem da mesma linguagem, cultura e visão de mundo. Isso, pois, para o filósofo, "[...] representar uma linguagem significa representar-se uma forma de vida." (Wittgenstein, 1979, p. 15, §19).

Assim, se para D'Ambrosio cada grupo cultural, laboral ou social possui seu próprio modo de matematizar, para Wittgenstein, cada forma de vida possui seus jogos de linguagem. Os jogos de linguagem são "[..] o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está interligada" (Wittgenstein, 1979, p. 12, §7), isso pois, "O termo "jogo de linguagem" deve aqui salientar que o falar da linguagem é uma parte de uma atividade ou de uma forma de vida." (Wittgenstein, 1979, p. 18, §23, grifo do autor).

Segundo Wittgenstein, o significado de uma palavra na linguagem se dá pelo uso que dela se faz. Assim, o uso que se faz da linguagem depende do contexto na qual ela está inserida, ou seja, depende das formas de vida. Segundo Glock, as formas de vida entrelaçam cultura, linguagem e visão de mundo, pois "[...] nossos JOGOS DE LINGUAGEM estão "interligados" com atividades não linguísticas, devendo ser compreendidos dentro desse CONTEXTO." (Glock, 1998, p. 174, grifos do autor).

Percebe-se que para ambos, D'Ambrosio e Wittgenstein, a linguagem matemática não se estabelece a *priori* e independente da cultura, mas é diretamente dependente do contexto no qual se constitui, seja ele natural, laboral ou social. Frente a isso, pesquisadores como Silva e Silveira (2013) e Lara (2019), comungam da perspectiva de que não existem diferentes Matemáticas, mas sim diferentes práticas matemáticas, diferentes modos de usar a Matemática, diferentes usos. De forma semelhante, Roque (2014) assume que "[...] não há *uma* matemática, que evolui linearmente ao longo do tempo, mas várias práticas matemáticas que nem sempre podem ser traduzidas umas nas outras." (Roque, 2014, p. 167, grifo da autora). Todos esses autores possibilitam concluir que

existem diferentes práticas matemáticas, diferentes modos de matematizar, produzidos por distintos povos ou grupos, em diversos tempos e espaços.

Entre essas diversas práticas matemáticas, alguns modos de matematizar tornaram-se hegemônicos, constituindo os jogos de linguagem presentes na Matemática Acadêmica, ou ainda, na Matemática Escolar. Ao reconhecer que determinados modos de matematizar tornaram-se hegemônicos, por consequência, assume-se que outros foram marginalizados, deixados à margem no processo de constituição dos jogos de linguagem pertencentes à Matemática Acadêmica. Com lentes foucaultianas, pode-se afirmar que esse processo, que resulta em hegemonização/marginalização de modos de matematizar, é efeito de relações de poder-saber constituídas historicamente.

É possível compreender o conceito saber a partir da sua diferenciação para com o conceito conhecimento, pois, para Foucault, conhecimento e saber não são sinônimos. De acordo com Foucault (1987), o saber não pode ser considerado como um estágio anterior ao conhecimento, pois: "Há saberes que são independentes das ciências (que não são nem seu esboço histórico, nem o avesso vivido)" (p. 207). Nas palavras do filósofo:

> *En una sociedad, los conocimientos, las ideas filosóficas, las opiniones cotidianas, así como las instituciones, las prácticas comerciales y policíacas, las costumbres, todo se refiere a un saber implícito propio de esta sociedad. Este saber es profundamente distinto de los conocimientos que se pueden encontrar en los libros científicos, las teorías filosóficas, las justificaciones religiosas* [...] (Foucault, 1973, p. 9).

Já em relação ao conceito poder, para Foucault, "[...] é um feixe de relações mais ou menos organizado, mais ou menos piramidalizado, mais ou menos coordenado." (Foucault, 1979, p.248). Diante disso, pode-se definir uma relação de poder como "[...] um modo de ação que não age direta e imediatamente sobre os outros, mas que age sobre sua própria ação. Uma ação sobre a ação, sobre ações eventuais, ou atuais, futuras ou presentes." (Foucault, 1995, p. 243). É por isso que na perspectiva foucaultiana o poder é produtivo e dentre o que o poder produz está o saber.

É por esse motivo que se adota a expressão relações de poder-saber, uma vez que "[...] não há relação de poder sem constituição correlata de um campo de saber, nem saber que não suponha e não constitua ao mesmo tempo relações de poder." (Foucault, 1991, p. 30). Logo, essas relações conduzem os sujeitos, suas ações, seus modos de pensar, matematizar, de agir e se relacionar.

Compreendido que poder e saber tem entre si uma relação intrínseca, emaranhada e forte, que reflete em todos os setores da vida humana, na perspectiva foucaultiana é possível afirmar que em todos os âmbitos das sociedades existem relações de poder. Efeito disso pode-se considerar a universidade e a escola como instituições repletas de relações de poder-saber, que agem sobre o corpo, regulando-o, conduzindo-o. Isso se evidencia, por exemplo, na carga horária das disciplinas, na elaboração dos currículos, nas metodologias utilizadas pelos docentes, nas avaliações realizadas majoritariamente por meio de provas graduadas, especialmente no que tange à Matemática (Lara, 2001).

Frente à isso, Lara (2001) afirma que a Matemática possui um poder disciplinador que é exercido "[...] por meio de provas graduadas, que aborda conteúdos hierarquizados e determinados por um programa curricular." (p. 29). Logo, por meio do poder disciplinador da Matemática, busca-se uma forma de pensar, um único modo de matematizar, subjetivando, normalizando e regulando os estudantes (Lara, 2001). Observa-se que a Etnomatemática vai de encontro ao poder disciplinador

da Matemática, uma vez que emerge com o objetivo de reconhecer e valorizar distintos modos de pensar e de matematizar, enquanto o poder disciplinador só reconhece e valoriza um modo de matematizar, o hegemônico.

Contudo, sempre que há condução dos sujeitos, criam-se condições de possibilidades para que ocorram movimentos de resistência, movimentos de contraconduta, pois: "Jamais somos aprisionados pelo poder: podemos sempre modificar sua dominação em condições determinadas e segundo uma estratégia precisa." (Foucault, 1979, p. 241). Segundo o filósofo, tais movimentos

> [...] têm como objetivo outra conduta, isto é: querer ser conduzido de outro modo, por outros condutores e por outros pastores, para outros objetivos e para outras formas de salvação, por meio de outros procedimentos e de outros métodos. São movimentos que também procuram, eventualmente em todo caso, escapar da conduta dos outros, que procuram definir para cada um a maneira de se conduzir. (Foucault, 2008, p. 256-257).

Assim, por meio da História da Matemática torna-se possível, ao mesmo tempo, conhecer distintos jogos de linguagem, bem como, compreender as diversas relações de poder-saber constituídas historicamente e que contribuíram para que determinados jogos de linguagem se tornassem hegemônicos ou marginalizados. Diante disso, assume-se a História da Matemática na perspectiva d'ambrosiana como a "[...] narrativa de fatos, datas e nomes associados à geração, à organização intelectual e social e à difusão do conhecimento–no nosso caso conhecimento matemático–através das várias culturas ao longo da evolução da humanidade." (D'Ambrosio, 2000, p.241). Nesse sentido, ao narrar nomes e datas, mas principalmente, fatos relacionados às diversas formas de vida ao longo da evolução humana torna-se possível compreender o processo de construção do conhecimento matemático, bem como, as relações de poder-saber existentes. Percebe-se assim, uma relação intrínseca entre a Etnomatemática e a História da Matemática, podendo caracterizar a Etnomatemática como uma subárea da História da Matemática. Isso é corroborado por D'Ambrosio (2002, p. 27), ao afirmar que a "Etnomatemática é um programa de pesquisa em história e filosofia da matemática, com óbvias implicações pedagógicas". O autor mostra uma visão crítica da História da Matemática explicitamente sintetizada no Programa Etnomatemática: "A História da Matemática não se faz em torno de heróis e de ideias vencedoras. Interessa, e muito, saber a contribuição do homem comum à formação das ideias, as suas práticas e à teorização dessas práticas, à expropriação pela estrutura de poder e a sua difusão." (D'Ambrosio, 2005, p. 7).

Com base nos pressupostos teórico-filosóficos apresentados, na seção a seguir serão abordados os aspectos metodológicos, tais como a proposta de ensino realizada, os sujeitos envolvidos e a estratégia analítica aplicada.

ASPECTOS METODOLOGICOS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

A urgência de propor outros modos para conduzir os processos de ensino e de aprendizagem, modos esses baseados na Etnomatemática e na História da Matemática, levou à elaboração da proposta de ensino aqui apresentada. Como escolha metodológica, adotou-se a Etnomatemática como método de pesquisa e ensino e de aprendizagem na perspectiva de Lara (2019). Ao definir a Etnomatemática como método, a autora propõe três etapas: Etnografia – sensibilização/apreensão; Etnologia – compreensão/ entendimento; e, Validação – interpretação/julgamento. Em síntese, a 1ª

etapa corresponde à realização de pesquisas e investigações acerca de um tema de estudo, seja por meio de observações e entrevistas, ou, no caso desta proposta, por meio de pesquisa bibliográfica. Ao longo desta etapa, os estudantes conhecem os distintos jogos de linguagem presentes nas formas de vida estudadas, neste caso, aquelas atreladas à História da Trigonometria.

A 2ª etapa consiste na compreensão e entendimento dos jogos de linguagem percebidos ao longo da 1ª etapa. É o momento em que se vinculam os jogos de linguagem próprios das formas de vida estudadas aos jogos de linguagem presentes na Matemática Escolar (Lara, 2019). Por fim, a 3ª etapa é destinada para interpretação e julgamento, de modo que os estudantes refletirão sobre as semelhanças de família existentes entre os jogos de linguagem das formas de vida investigadas na 1ª etapa, com aqueles próprios da Matemática Escolar, apresentados pelo professor na 2ª Etapa. Nesse sentido, assumindo as três etapas propostas por Lara (2019) como referência, desenhou-se esta proposta de ensino em que o estudante é o protagonista do processo de aprendizagem.

A proposta teve, como principal objetivo, verificar de que modo os estudantes utilizam a História da Matemática para a produção de vídeos envolvendo conceitos trigonométricos. Além de: conhecer civilizações da antiguidade e as suas contribuições para o desenvolvimento da trigonometria; fomentar a pesquisa sobre a história da Trigonometria; resolver problemas históricos que envolvam conceitos trigonométricos; confrontar os estudantes com distintos jogos de linguagem históricos relacionados aos conceitos trigonométricos.

Em síntese, a proposta de ensino envolve a elaboração de um vídeo, por parte dos estudantes, que contemple a resolução de um problema trigonométrico da antiguidade. Desenhada em 10 momentos, a proposta envolveu tanto atividades em sala de aula, como atividades para serem realizadas em casa. Vale ressaltar que, em paralelo às atividades realizadas em casa, na sala de aula foram abordados os conceitos trigonométricos referentes ao conteúdo programático do 2º ano do Ensino Médio e necessários à compreensão dos problemas trigonométricos da antiguidade, trazidos pelos estudantes. No Quadro 1 é possível visualizar a proposta:

Quadro 1 – Proposta de ensino sobre Trigonometria

1° MOMENTO (1ª etapa)–Duração: 20 minutos
Apresentação da proposta. Instruir os estudantes sobre as informações mínimas que os vídeos precisam conter como, por exemplo: nomes de personagens (matemáticos/físicos/filósofos/entre outros) que contribuíram para o desenvolvimento e avanço da Trigonometria e o porquê; quais civilizações contribuíram para o desenvolvimento e avanço da Trigonometria e o porquê; datas e períodos relacionados ao desenvolvimento e aos avanços da Trigonometria; resolução de um problema histórico envolvendo Trigonometria; algumas contribuições do avanço da Trigonometria para o desenvolvimento de outras áreas e campos de conhecimento.
2° MOMENTO–Duração: 20 minutos
Apresentação das regras para a execução do vídeo. No caso desta proposta, três regras foram estabelecidas: 1) grupo com 4 integrantes, de modo que todos aparecem no vídeo em algum momento; 2) O vídeo deve conter uma introdução com as seguintes informações: nomes dos integrantes do grupo; nome da escola, nome da professora, nome da disciplina e conteúdo do vídeo; 3) O vídeo deve conter um encerramento com as seguintes informações: data/período de produção do vídeo e referências (vídeos, blogs, sites, livros) consultadas.
3° MOMENTO–Duração: 20 minutos
Quando necessário, estipular critérios de avaliação para o produto final que, nesta proposta foram: 1) Veracidade das informações apresentadas; 2) Originalidade na produção do vídeo; 3) Qualidade de som e imagem; 4) Quantidade de informações apresentadas; 5) Respeito às instruções e regras estabelecidas no 1º e 2º momentos; 6) Apresentar uma prévia na data marcada.

4° MOMENTO (1ª etapa)–Duração: 120 minutos
Disponibilizar aos estudantes livros sobre a História da Matemática em geral, bem como, sobre a História da Trigonometria. Com os livros em mãos e reunidos nos seus respectivos grupos, os estudantes têm um momento para pesquisar sobre as informações históricas necessárias à elaboração do vídeo. Cabe ressaltar que quanto mais livros forem disponibilizados para a consulta, mais ricas podem ser as produções dos estudantes. Sugere-se que o professor circule na sala, auxiliando os estudantes nas pesquisas, visto que muitos não estão acostumados com pesquisas em livros, somente na internet.
5° MOMENTO (1ª e 2ª etapas)–Duração: 120 minutos
Em uma data a ser definida no 3º momento, os grupos apresentam uma prévia do roteiro que será executado em formato de vídeo. Neste momento, o professor auxilia na interpretação e resolução do problema histórico que será apresentado com o produto final. Em paralelo, enquanto um grupo apresenta ao professor sua prévia, os demais grupos continuam suas pesquisas nos livros de História da Matemática disponibilizados pelo professor, a fim de complementar suas buscas. É neste momento que o professor identifica quais conceitos trigonométricos deverão ser trabalhados no 7º momento.
6° MOMENTO–Duração: 2 semanas
Após a realização das pesquisas e a apresentação da prévia ao professor, momento no qual há o esclarecimento sobre as eventuais dúvidas para a resolução do problema histórico que será abordado no vídeo, os estudantes passam às filmagens. Essas podem ocorrem em casa ou na escola, dependendo da realidade de cada grupo e do contexto narrado no vídeo.
7° MOMENTO (2ª e 3ª etapa)–Duração:2 semanas
Em paralelo ao 6° momento, no 7° momento há a exposição formal dos conceitos trigonométricos em sala de aula, tanto aqueles que estarão presentes nos vídeos, como outros que o professor julgar relevantes ao ensino da Trigonometria. Ao longo da exposição, o professor cria condições de possibilidade para que os estudantes reflitam sobre as semelhanças de família existentes entre os jogos de linguagem presentes nos problemas matemáticos históricos e aqueles próprios da Matemática Escolar.
8° MOMENTO–Duração:20 minutos
Entrega dos vídeos, que pode ser de forma *online* (por e-mail ou nuvem) ou via *pendrive*.
9° MOMENTO (3ª etapa)–Duração: 120 minutos
Para compartilhar com os colegas de turma, bem como, com os demais estudantes e professores da escola, organiza-se um momento para a exibição de alguns vídeos elaborados. A seleção dos vídeos pode ser feita pelo docente ou pelos próprios estudantes. Neste momento há continuação nos processos de ensino e de aprendizagem, uma vez que uns estudantes podem aprender com os outros, por meio da exibição do vídeo produzido, bem como, da interação entre os produtores do vídeo e os expectadores.
10° MOMENTO (3ª etapa)–Duração: 30 minutos
Neste momento cada estudante responde a um questionário individual, com a intenção de oportunizar momentos de reflexão sobre a atividade desenvolvida e suas aprendizagens. As questões foram elaboradas com o intuito de angariar informações sobre o desenvolvimento da proposta de ensino, criando-se assim condições de possibilidade para compreender os efeitos da proposta nos processos de ensino e de aprendizagem dos estudantes.
DURAÇÃO: aproximadamente 470 minutos em sala de aula + 2 semanas de trabalho extraclasse

Fonte: Adaptado de Santos (2020)

O Quadro 1 evidencia que o desenho da proposta de ensino, distribuída em 10 momentos distintos que se relacionam, vão ao encontro da ciclicidade proposta por Lara (2019). Isso, pois, pode-se tranquilamente ir e vir em cada uma das etapas do método, bem como, conduzir duas etapas ao mesmo tempo, conforme a necessidade discente e a intenção docente. Por isso, trata-se de um método no sentido *soft* do termo (Veiga-Neto, 2009) em que as ações docentes presentes em cada momento da proposta não são imutáveis ou aplicáveis impreterivelmente de modo ordenado. Entendem-se tais ações como as diferentes estratégias que podem ser utilizadas pelo professor, com grupos específicos de estudantes, a fim de criar condições de possibilidade para que a aprendizagem matemática dos estudantes aconteça.

A proposta foi realizada com 59 estudantes com idades entre 16 e 17 anos, alunos do 2º ano do Ensino Médio. A escola na qual a proposta se realizou é da rede estadual, situa-se na zona norte

da cidade de Porto Alegre e funciona nos três turnos, oferecendo o Ensino Fundamental e Ensino Médio a aproximadamente 888 estudantes.

Os resultados da proposta de ensino foram analisados à luz da análise genealógica discursiva, na perspectiva foucaultiana, cujo objetivo é:

> [...] compreender o enunciado na estreiteza e singularidade de sua situação; de determinar as condições de sua existência, de fixar seus limites de forma mais justa, de estabelecer suas correlações com os outros enunciados a que pode estar ligado, de mostrar que outras formas de enunciação exclui (Foucault, 1987, p. 31).

Para isso, os questionários aplicados após a proposta de ensino foram tratados como um conjunto de enunciações, produzidas por estudantes da Educação Básica.

RESULTADOS

Como resultados foram produzidos 15 vídeos, com dinâmicas e problemas matemáticos distintos. Entre os problemas trigonométricos apresentados, os mais recorrentes foram: problema 56 do Papiro de Rhind sobre como calcular o *seqt* da pirâmide; como calcular a distância entre a terra, a lua e o sol. Além desses, foram assuntos abordados nos vídeos: medir a largura de um rio; calcular a altura de uma pirâmide; determinar o valor de Pi; entre outros.

Dentre as 12 questões propostas aos estudantes no 10º momento, ocasião em que cada participante avalia a proposta de ensino e suas aprendizagens, optou-se, neste recorte, apresentar a análise de duas delas. A primeira delas versa sobre os livros de História da Matemática disponibilizados pela professora e tem o intuito de identificar se essa ação auxiliou ou não na realização da atividade solicitada. Já a segunda, objetiva coletar informações para compreender de que modo a produção de vídeos contribuiu para as aprendizagens matemáticas dos estudantes.

Das respostas fornecidas pelos estudantes à: Em determinado momento a professora disponibilizou livros sobre a História da Matemática. O material auxiliou nas suas pesquisas? De que modo?, observa-se que mais de 50 estudantes responderam positivamente.

Diversos motivos foram apontados nos enunciados dos estudantes. Entre eles, cinco merecem destaque:

> **Estudante 13:** *Sim, nas aulas ela emprestava os livros, ajudou bastante, pois foi em um dos livros que pegamos o problema matemático apresentado no vídeo.;* **Estudante 17:** *Sim nós achamos o nosso exemplo no livro também e lá explicava um pouco melhor do que na internet e dizia coisas sobre a história da trigonometria tiramos foto do livro e usamos na nossa explicação.;* **Estudante 32:** *Os livros ajudaram muito para achar informações verdadeiras, mais variedades de dados e também ajudou a achar a conta trigonométrica.;* **Estudante 38:** *Sim, muito. Tinha uma questão sobre Pi, me ajudou muito na resolução do problema histórico;* **Estudante 42:** *Sim, ela distribuiu vários livros para nos ajudar. Usamos um problema histórico da trigonometria de um livro.*

De acordo com esses estudantes, o acesso aos livros viabilizou atender uma das informações mínimas solicitadas: apresentação e resolução de um problema histórico. Isso, pois, entre os livros

disponibilizados aos estudantes, alguns apresentam e discutem os problemas ou as situações que motivaram a emergência de determinados conceitos trigonométricos.

Certamente, é possível encontrar os problemas ou as situações que motivaram a emergência de determinados conceitos trigonométricos na *internet*. No entanto, as enunciações dos estudantes evidenciam certa preferência pelo que consta no livro, como por exemplo o dito do Estudante 17. Tais afirmações trazem à tona a confiabilidade em um livro específico sobre a História da Matemática, colocando sob suspeita as informações disponíveis em *links* disponíveis da *internet.* Isso corrobora-se em outros excertos:

> **Estudante 21:** *Sim, pois tinhas várias informações valiosas que não se encontravam em lugar nenhum, inclusive o problema 56 do papiro e sua resolução;* **Estudante 45:** *Sim, a professora disponibilizou os livros que ajudou demais nas pesquisas, comparamos com explicações da internet e nenhuma se compara a explicação completa do livro que sem dúvida fez com que nosso trabalho fosse melhor apresentado.;* **Estudante 51:** *Sim e quem salvou a pesquisa para a formulação do trabalho foram os livros de fonte confiável.*

Mesmo que os estudantes façam parte de uma geração digital, habituados à instantaneidade das buscas na *internet*, à multiplicidade de fontes e à diversidade de formatos pelo quais as informações se apresentam, a tarefa proposta foi recebida positivamente e conduzida por eles de modo satisfatório. Observa-se que, para esses estudantes, a pesquisa foi produzida quase somente a partir dos livros sobre a História da Matemática.

> **Estudante 11:** *Auxiliou demais, nosso vídeo inteiro praticamente é com base nos livros.;* **Estudante 35:** *Sim muito, nosso trabalho foi quase todo baseado em um livro da professora, dando informações sobre a origem do conteúdo e mais curiosidades sobre o papiro de Rhind.;* **Estudante 43:** *Sim, todas as informações que foram passadas no vídeo teve como fonte os livros.;* **Estudante 44:** *Sim, bastante, coisas que não achamos na internet, a maioria na verdade das coisas que usamos estava nos livros.*

Em contramão a isso, uma minoria de estudantes realizou as buscas majoritariamente em sites da *internet*. Contudo, ainda assim, para alguns desses estudantes os livros foram utilizados para orientar as pesquisas realizadas posteriormente.

Os enunciados de alguns estudantes trouxeram à tona que as informações disponibilizadas na web, são confiáveis, inclusive para aprofundar uma pesquisa, como se constata nos excertos abaixo:

> **Estudante 08:** *Na verdade, auxiliaria, mas nós do grupo nos aprofundamos mesmo nas pesquisas na web;* **Estudante 23:** *Meu grupo e eu tiramos apenas uma foto de um pequeno parágrafo da introdução da trigonometria então tiramos uma ideia daquilo e nos serviu como um norte para explicar o conceito, mas mesmo assim a maior parte das fontes vêm da internet.;* **Estudante 28:** *Um pouco, não achamos muitas informações sobre astronomia.;* **Estudante 36:** *Utilizamos muito a internet como meio de pesquisa e fonte, mas pegamos trechos dos livros disponibilizadas pela professora para termos ideia de que modo começar o trabalho.;* **Estudante 55:** *Foi interessante, porém não acho que trouxe uma contribuição a mais do que os sites da internet.*

A partir dessas enunciações dos discentes é possível inferir que disponibilizar distintos livros sobre a História da Matemática criou condições de possibilidade para a realização da atividade de um modo mais organizado, com informações mais explícitas e confiáveis, como destacaram alguns estudantes. Além disso, em função da diversidade discente envolvida na proposta, foi importante

fornecer os livros de história para a realização da consulta em sala de aula pois, desse modo, criam-se meios para a realização da pesquisa por parte de todos os estudantes. Contudo, a internet ainda se constituí como ferramenta eficaz para o desenvolvimento de pesquisas.

Com o intuito de verificar de que modo a proposta de ensino contribuiu para as aprendizagens matemáticas dos estudantes, realizou-se a questão: A produção do vídeo contribuiu de algum modo para a sua aprendizagem sobre a Trigonometria? De que modo?. As enunciações dos estudantes evidenciam que, para 50 deles, a produção do vídeo contribuiu para a sua aprendizagem dos mais diversos modos.

Entre as aprendizagens citadas, vários estudantes reconheceram que a atividade possibilitou conhecer e aprender fatos históricos relacionados à Trigonometria em geral, como é possível verificar nos enunciados a seguir:

> **Estudante 01:** *Sim! Conheci fatos históricos e aprendi de uma maneira diferente. Isso meio que me "obrigou" a pesquisar e ver os vídeos sobre.;* **Estudante 16:** *Sim. Saber a história da trigonometria é sempre importante, agora se me perguntarem eu já sei o que responder.;* **Estudante 17:** *Sim eu realmente aprendi sobre a história tenho domínio sobre o assunto.;* **Estudante 25:** *Sim, pois agora sabemos um pouco sobre a história.;* **Estudante 40:** *Sim, com a pesquisa e na hora de gravar eu consegui entender não só a dinâmica da matéria como a sua história.;* **Estudante 41:** *Sim, pois fizemos diversas pesquisar sobre a história da Trigonometria e certamente acabamos aprendendo várias situações e dados sobre a antiguidade.*

De modo mais específico, alguns estudantes ressaltam que, devido ao fato de estudar a história para a elaboração do vídeo, foi possível entender como as civilizações e povos da antiguidade desenvolveram determinados conceitos trigonométricos. Isso se verifica, por exemplo, nas seguintes enunciações:

> **Estudante 14:** *Sim, entendi um pouco mais a fundo de pra que e como ele foi criado, não apenas decorar fórmulas e coisas chatas.;* **Estudante 20:** *Sim, me ajudou na compreensão do surgimento e uso do conteúdo.;* **Estudante 33:** *Sim, pois nos fez pesquisar muito não só a história da trigonometria, como a história de pessoas e povos importantes na época.* **Estudante 57:** *Sim, para entender o porquê foi criada e desenvolvida e também vimos alguns problemas para resolver.;* **Estudante 58:** *Sim, ajudou a entender o porquê de esse conteúdo existir e no que ele contribuiu e contribui na sociedade.;* **Estudante 59:** *Sim, me ajudou a entender melhor a história e o porquê da "criação da trigonometria".*

Esses ditos reiteram o caráter holístico das propostas de ensino que articulam História da Matemática e Etnomatemática, uma vez que, implicitamente ou explicitamente, objetivam confrontar os estudantes com os jogos de linguagem e as formas de vida das distintas civilizações e povos que contribuíram para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Nesse sentido, oportunizam aos estudantes conhecer os hábitos, costumes, linguagens, práticas e contextos históricos nos quais determinados conceitos foram gerados, organizados ou difundidos.

Além das questões históricas, alguns estudantes destacaram aprendizagens relativas a conceitos e cálculos trigonométricos, como pode-se verificar nos ditos a seguir:

> **Estudante 11:** *Contribuiu, por exemplo, eu descobri a fórmula de Pitágoras através desse vídeo, pois até então eu não conhecia a fórmula.;* **Estudante 36:** *Sim, consegui ter uma ideia a mais dos ângulos e pesquisar por conta própria foi bem interessante.;*

> **Estudante 38:** *Sim. Me ajudou a gostar da história e também a me interessar sobre a trigonometria, assim fica mais fácil de aprender os cálculos.;* **Estudante 56:** *Sim, no vídeo também teve desenvolvimentos de cálculos, o que aprimora a aprendizagem.*

Outros estudantes destacaram que a proposta de ensino possibilitou compreender algumas áreas de aplicação da trigonometria, alguns de seus usos, como se observa em:

> **Estudante 07:** *Sim, pude aprender bastante sobre a trigonometria. Aprendi, por exemplo, que na decolagem de um avião, há o cálculo trigonométrico.;* **Estudante 12:** *A forma que o trabalho foi executado estimulou bastante, e aprendi que a trigonometria é usada em áreas que eu nem imaginava.;* **Estudante 50:** *Como eu já disse em outra questão contribuiu para saber sobre problemas históricos etc., mas também traz uma visão diferente mostrando que a trigonometria não está só na matemática, mas em diversos lugares.*

Ainda sobre suas aprendizagens, é relevante destacar os seguintes ditos:

> **Estudante 01:** *Sim! Conheci fatos históricos e aprendi de uma maneira diferente. Isso meio que me "obrigou" a pesquisar e ver os vídeos sobre.;* **Estudante 10:** *Acho que sim porque faz a gente trabalhar mais em grupo, assim, faz com que a aula seja menos maçante, faz os alunos terem uma experiência mais divertida e ao mesmo tempo saindo um pouco daquela aula monótona de sempre e ao mesmo tempo faz com todos nós entendam melhor o conteúdo.;* **Estudante 13:** *Sim, pois gravamos o vídeo de uma forma engraçada e isso ajuda na aprendizagem do conteúdo.;* **Estudante 14:** *Sim, entendi um pouco mais a fundo de pra que e como ele foi criado, não apenas decorar fórmulas e coisas chatas.;* **Estudante 29:** *Sim, pois como precisou de muita dedicação e de várias vezes me encontrar com o grupo, fizemos bem explicadinho tudo e no final ajudou a compreender a Trigonometria de um modo mais fácil.;* **Estudante 34:** *Sim, ajudou que eu prestasse atenção e me interessasse mais pela aula.;* **Estudante 51:** *Sim. De um modo diferente. Aulas de matemática geralmente são as mais serias e maçantes e trazer uma produção de vídeo, trabalho em equipe. Isso ajudou muito para uma boa aprendizagem.*

Observa-se que esses estudantes salientam que por meio da atividade de elaboração de vídeos, foi possível aprender de forma diferente, pois, a aula se tornou menos maçante e monótona. Mais do que isso, possibilitou uma aprendizagem mais divertida, por meio de trabalhos em grupo e sem a necessidade de decorar fórmulas.

De modo semelhante, alguns estudantes ressaltaram a importância da pesquisa à sua aprendizagem:

> **Estudante 05:** *Incentivou a pesquisa sobre a matéria.;* **Estudante 18:** *Em alguns aspectos, como por exemplo, os estudos.;* **Estudante 27:** *Sim, pois as pesquisas, perguntas e respostas, e a forma de como ensaiamos para fazer a gravação nos ajudaram a aprender e memorizar o conteúdo.;* **Estudante 28:** *Um pouco, porque eu tive que estudar para poder explicar no vídeo como a trigonometria mudou ao longo dos anos e como ela é utilizada.;* **Estudante 32:** *Fazer um vídeo contribuiu na minha aprendizagem, pois me incentivou a fazer as pesquisas (lendo as informações eu aprendi muitas coisas) e também como o vídeo foi feito muito na prática eu tive que decorar várias coisas para falar.*

Verifica-se, com isso, que a produção do vídeo incentivou os estudantes a pesquisar e estudar determinados conceitos trigonométricos, dada a necessidade de apresentá-los no vídeo elaborado.

Novamente, os enunciados trazem à tona que a produção dos vídeos proporcionou outro modo para aprender determinados conceitos, em virtude dos estudos e pesquisas necessários à compreensão do que seria apresentado. Diante disso, observa-se que a proposta de ensino possibilitou a esses estudantes, movimentos de contraconduta frente às didáticas docentes ditas tradicionais, pautadas na exposição e na reprodução de conceitos, como visto na seguinte afirmação:

> **Estudante 08:** *Sim! Bastante, eu realmente consegui entender o conteúdo, acho que se todas as matérias fossem assim seria tudo mais fácil e claro.*

Percebe-se que a ideia de produzir um material no qual o estudante tenha que apresentar parte do que aprendeu, exigiu, entre outras coisas, dedicação e leitura na realização de pesquisas. Efeito disso, propicia outros modos de aprender Matemática, especificamente, Trigonometria, deixando de lado aulas expositivas e reguladas pela cópia, reprodução e ausência de reflexão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora apenas duas questões tenham sido analisadas, neste recorte, entre as 12 questões propostas no questionário individual respondido pelos participantes ao final da proposta de ensino, foi possível identificar contribuições da proposta para os processos de ensino e de aprendizagem desses estudantes. Os enunciados trouxeram à tona as potencialidades da articulação entre História da Matemática e Etnomatemática, realizada a partir das teorizações foucaultiana e wittgensteiniana, na produção de vídeos para o ensino de Trigonometria, objetivo deste texto.

A articulação entre Etnomatemática e História da Matemática se deu assumindo a Etnomatemática como um método de ensino e de pesquisa e a História da Matemática como tema central da proposta. Dessa forma, ao utilizar a Etnomatemática como um método de ensino e de pesquisa criou-se condições de possibilidade para que os estudantes conhecessem outros modos de matematizar, outros jogos de linguagem, distintos daqueles tidos como hegemônicos na Matemática Escolar. No caso desta proposta de ensino, esses outros modos de matematizar foram encontrados ao longo da história da Matemática.

Em síntese, a análise realizada evidencia que a proposta de ensino criou condições de possibilidade para que os estudantes: pesquisassem sobre os processos de geração, organização e difusão dos conceitos trigonométricos; conhecessem aspectos históricos relacionados aos conceitos trigonométricos estudados em sala de aula; compreendessem os modos de matematizar de povos da antiguidade, expressos em jogos de linguagem distintos daqueles presentes na Matemática Escolar; conduzissem suas aprendizagem de outras formas, tornando-se sujeitos ativos dos processos de ensino e aprendizagem.

A proposta de ensino aqui apresentada pode ser vista como um movimento de resistência. Isso, pois, vai de encontro à forma pela qual o conhecimento matemático é tradicionalmente abordado em sala de aula, geralmente baseado tríade definição-exemplos-exercícios e oportuniza aos estudantes, entre outras questões, outros modos para aprender Matemática. Além de outras formas de aprender a Matemática, cria condições que oportunizaram aos estudantes o contato com outros modos de matematizar, modos esses que diferem dos jogos de linguagem presentes na Matemática Escolar.

Mais do que isso, docente e discentes ambos resistiram, o docente por sair da caixa e não seguir um currículo muitas vezes pré-definido, que espera as respostas verdadeiras e um único modo de

matematizar. O discente por estar livres das amarras de um ensino que disciplina seu saber e os seus modos de pensar matematicamente.

Resultados semelhantes podem ser encontrados em outras pesquisas, que também buscam articular Etnomatemática e História da Matemática, como Santos e Lara (2021), Santos e Lara (2023a) e Santos e Lara (2023b). Segundo Santos e Lara (2021, p. 14), a proposta de ensino por eles elaborada, aplicada e analisada criou "condições de possibilidade para que os estudantes compreendam a existência de distintos modos de matematizar, contribuindo assim para a reflexão sobre a hegemonia dos jogos de linguagem presentes na Matemática Escolar.". Além disso, destacam Santos e Lara (2023b, p. 15): "considerando a Etnomatemática como método de pesquisa e ensino, [...] torna o estudante protagonista, capaz de reconhecer diferentes jogos de linguagens presentes em diferentes civilizações."

Em suma, observam-se relevantes implicações desta proposta para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática na Educação Básica, especialmente por oportunizar aos estudantes movimentos de contraconduta frente aos jogos de linguagem presentes na Matemática Escolar. Nesse sentido, como estudos futuros, pretende-se elaborar, aplicar e analisar novamente esta proposta de ensino, bem como, novas propostas que abordem outros conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

CONCEIÇÃO, Ananda Itsu Moraes.; ARANHA, Carolina Pereira. Etnomatemática e História da Matemática: um mapeamento de trabalhos do SNHM de 1995 a 2023. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática,** [S. l.], v. 11, n. 32, p. 1–19, 2024. DOI: 10.30938/bocehm.v11i32.12402. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/12402 . Acesso em: 5 jan. 2025.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática:** da teoria à prática. 4. ed. Campinas: Papiros, 1998.

D'AMBROSIO, Ubiratan. A interface entre história e matemática: Uma visão histórico-pedagógica. In: John A. Fossa (Org.). **Facetas do Diamante:** ensaios sobre educação matemática e história da matemática. Rio Claro, SP: Editora da SBHMat, p. 241-271. 2000.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Bolema, Rio Claro – SP, v. 18, n. 24, set. 2005

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade**. 2ª ed. 3ª reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FOUCAULT, Michel. **Microfísica do poder**. Organização e tradução de Roberto Machado. 7ª ed. Rio de Janeiro: Edições Graal, 1979.

FOUCAULT, Michel. Entrevista con Michel Foucault. In: BELLOUR, R. **El libro de los otros.** Barcelona: Editorial Anagrama, 1973.

FOUCAULT, Michel. **A arqueologia do saber**. Trad. Luiz Felipe Baeta Neves. 3 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1987.

FOUCAULT, Michel. **Vigiar e punir**: nascimento da prisão. Tradução de Ligia M. Pondé Vassallo. 9ª ed. Petrópolis: Vozes, 1991.

FOUCAULT, Michel. O sujeito e o poder. In: RABINOW, Paul.; DREYFUS, Hubert. **Michel Foucault, uma trajetória filosófica:** para além do estruturalismo e da hermenêutica. Trad. Vera Porto Carrero. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1995.

FOUCAULT, Michel. **Segurança, Território, População**: curso dado no Collège de France (1977 – 1978). Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Martins Fontes, 2008.

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

LARA, Isabel Cristina Machado de**. Histórias de um "lobo mau"**: a matemática no vestibular da UFRGS. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

LARA, Isabel Cristina Machado de. O ensino da matemática por meio da história da matemática: possíveis articulações com a Etnomatemática. **VIDYA**, Santa Maria, v. 33, n. 2, p. 51-62, jul/dez. 2013. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/254; Acesso em: 03 jan. 2025.

LARA, Isabel Cristina Machado de. Formas de vida e jogos de linguagem: a Etnomatemática como método de pesquisa e de ensino. **Com a Palavra o Professor**, Vitória da Conquista, v.4, n.9, p. 36-54, maio/ago. 2019. Disponível em: http://revista.geem.mat.br/index.php/CPP/article/view/445. Acesso em: 03 jan. 2025.

ROQUE, Tatiana. Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática?. **Revista Brasileira de História da Ciência**. Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 167-185, jul – dez, 2014. Disponível em: https://www.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=1955. Acesso em: 03 jan. 2025.

SANTOS, Juliana Batista Pereira dos. **Etnomatemática & História da Matemática**: movimentos de contraconduta na Educação Básica. PUCRS. Tese de Doutorado. (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

SANTOS, Juliana Batista Pereira dos; LARA, Isabel Cristina Machado de. O ensino de logaritmos a partir da articulação entre História da Matemática e Etnomatemática. In: Seminário Nacional de História da Matemática–SNHM, 14, 2021, Uberaba. **Anais eletrônicos** [...], Uberaba: UFMT, 2021. Disponível em: https://www.sbhmat.org/download/download?ID_DOWNLOAD=18. Acesso em 21 jan. 2024.

SANTOS, Juliana Batista Pereira dos; LARA, Isabel Cristina Machado de. História da matemática e etnomatemática: ações pedagógicas para o ensino de Progressões Aritméticas. **Anais–Seminário Nacional de História da Matemática**, [*s. l.*], v. 15, 2023a. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/45. Acesso em: 21 jan. 2025.

SANTOS, Juliana Batista Pereira dos; LARA, Isabel Cristina Machado de. História da matemática e etnomatemática: articulações possíveis para o ensino do teorema de tales. **Anais–Seminário Nacional de História da Matemática**, [*s. l.*], v. 15, 2023b. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/37. Acesso em: 21 jan. 2025.

SILVA, Paulo Vilhena da; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. Matemáticas ou diferentes usos da matemática? Reflexões a partir da filosofia de Wittgenstein. **Acta Scientiarum Education**.

Maringá, v. 35, n. 1, p. 125-132, Jan.-Jun., 2013. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/3033/303326113014.pdf. Acesso em: 03 jan. 2025.

VEIGA-NETO, Alfredo. Teoria e método em Michel Foucault (im)possibilidades. **Cadernos de Educação**. Pelotas, N. 34, P. 83–94, 2009. Disponível em: https://periodicos.ufpel.edu.br/index.php/caduc/article/view/1635/1518. Acesso em: 03 jan. 2025.

WITTGENSTEIN, Ludwig**. Investigações Filosóficas**. 2 ed. São Paulo: Abril Cultural, 1979. (Coleção Os Pensadores).

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

A Escola Normal de Cuiabá: o *design* de uma pesquisa histórica

The Normal School of Cuiabá: the design of a historical research

Simone Simionato dos Santos[1]
Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT

Circe Mary Silva da Silva[2]
Universidade Federal de Pelotas – UFPEL

RESUMO

O objetivo deste texto é descrever os aspectos teórico-metodológicos da pesquisa de doutorado intitulada "A Matemática Elementar na Escola Normal de Cuiabá no início do século XX". Considerando que as investigações em história da educação matemática – HEM, presumem argumentações de caráter histórico, no âmbito da educação matemática, identificamos a necessidade de elucidar o percurso teórico-metodológico da pesquisa. Nesse sentido, tratamos como '*Design* da Pesquisa', a abordagem sobre a metodologia, guiadas pelas discussões da pesquisa histórica, a cultura e a escola, o paradigma indiciário; descrevemos e sistematizamos as fontes encontradas; e, apresentamos os procedimentos adotados para a realização da análise, optando pela Análise do Discurso e a criação de Unidades Significantes, como categorias para apresentação dos resultados. O texto exibe as etapas deste percurso, no intuito de revelar a importância de produzir conhecimento e significado, e ampliar o campo multidisciplinar da HEM. A presente narrativa inclui a fundamentação teórica e os pressupostos metodológicas da pesquisa: abordagem, tipo, sujeito, lócus, instrumentos, procedimentos, técnicas utilizadas e contextos.

Palavras-chave: Cultura Escolar; História da Educação Matemática; Indiciarismo; Unidades Significantes.

ABSTRACT

The objective of this text is to describe the theoretical and methodological aspects of the Doctoral Research entitled "Elementary Mathematics in the Normal School of Cuiabá in the early twentieth century". Whereas investigations in the History of Mathematics Education – HME, presume arguments of a historical nature, in mathematics education, we identified the need to elucidate the theoretical and methodological path of the research. In this sense, we treat it as 'Research Design', the methodology approach, guided by discussions of historical research, culture and school, the indictable paradigm; describe and systematize the sources found; and we present the procedures adopted to carry out the analysis, opting for Discourse Analysis and the creation of Significant Units, as categories for presentation of results. The text displays the steps of this route, to reveal the importance of producing knowledge and meaning and expand the multidisciplinary field of HME. The present narrative includes the theoretical foundation and methodological assumptions of the research: approach, type, subject, locus, instruments, procedures, techniques used and contexts.

Keywords: School Culture; History of Mathematics Education; Indiciarism; Significant Units.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Imersos em uma proposta de investigação sobre a Matemática Elementar, posta no contexto de formação de professores das Escolas Normais; realizamos uma construção historiográfica, tendo como objeto a matemática presente na Escola Normal de Cuiabá no início do século XX, explorando e reorganizando informações contidas em múltiplas fontes históricas e bibliográficas desta escola.

A pesquisa contemplou as transformações dessa instituição, sobre como os modos de organização curricular e os programas de ensino das disciplinas da área de matemática, ao longo das pro-

[1] Doutora em Educação em Ciências e Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática na REAMEC, Polo UFMT, Cuiabá, Mato Grosso, Brasil. Professora – Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), Sinop, MT, Brasil. E-mail: simone.laier@ufmt.br.

[2] Doutora em Pedagogia pela Universität Bielefeld, Alemanha. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: cmdynnikov@gmail.com.

postas de formação da Escola Normal e as tentativas de aproximá-las dos conteúdos e abordagens didáticas no ensino primário, foram consolidadas e estiveram presentes em documentos de formação elaborados e postos em prática pela Instrução Pública de Mato Grosso.

A tese intitulada "A Matemática Elementar na Escola Normal de Cuiabá no início do Século XX, analisou o ensino da Matemática Elementar na Escola Normal de Cuiabá no período entre 1910 a 1937, considerando seus conteúdos, metodologias e implicações para a formação docente da época, definido pela seguinte questão investigativa: "Como os saberes relativos à Matemática Elementar foram mobilizados no processo de formação docente na Escola Normal de Cuiabá no período entre os anos de 1910 e 1937?".

O objetivo deste texto é descrever os aspectos teórico-metodológicos envolvidos nesta pesquisa, no campo da história da educação matemática–HEM. Concorrem neste campo, principalmente, a Educação Matemática, a História da Educação Matemática e a História da Matemática. Tudo indica que a HEM tem um objeto claro, qual seja, a história do ensino e da aprendizagem da matemática, e os estudos que a compõem focam assuntos diversos, agrupados em: "história dos conteúdos do ensino de matemática; história de professores de matemática e história dos processos de institucionalização de novos saberes matemáticos" (Valente, 2021, p. 166).

Na busca de um instrumental utilizado por historiadores, em seu ofício de produzir história, ao discutir a base teórico-metodológica de uma pesquisa em HEM, há a necessidade de esclarecer os modos de encontrar os caminhos por onde a pesquisa irá trilhar: "[...] a escrita da história, a produção histórica, modifica-se não essencialmente em seus métodos, mas nos objetos de pesquisa e em suas questões de trabalho (Valente, 2007, p. 30).

> Os inventários das pesquisas referentes à HEM indicam, como consenso, o movimento crescente de pesquisas e pesquisadores sobre a temática da Hem. Também parece ser consenso a **diversidade de abordagens ou tendências metodológicas**, assim como de aportes teóricos (Leme da Silva, 2022, p. 9).

Nesse sentido, tratamos como '*Design* da Pesquisa', a abordagem sobre a metodologia, guiadas pelas discussões da pesquisa histórica, a cultura e a escola, o paradigma indiciário; descrevemos e sistematizamos as fontes encontradas; e, apresentamos os procedimentos adotados para a realização da análise das fontes, optando pela Análise do Discurso e a criação de Unidades Significantes, como categorias de análise.

Na visão de D'Ambrosio (2011), a pesquisa histórica não necessariamente se subordina a determinadas metodologias. Considera-se o contexto maior de uma cultura; que prioriza o contexto sócio-histórico, os processos gerais e as ligações entre os fatos. "À medida que a pesquisa avança, novos vieses metodológicos vão se fazendo necessários e, sobretudo, uma ampla conceituação de fontes" (D'Ambrósio, 2011, p. 11).

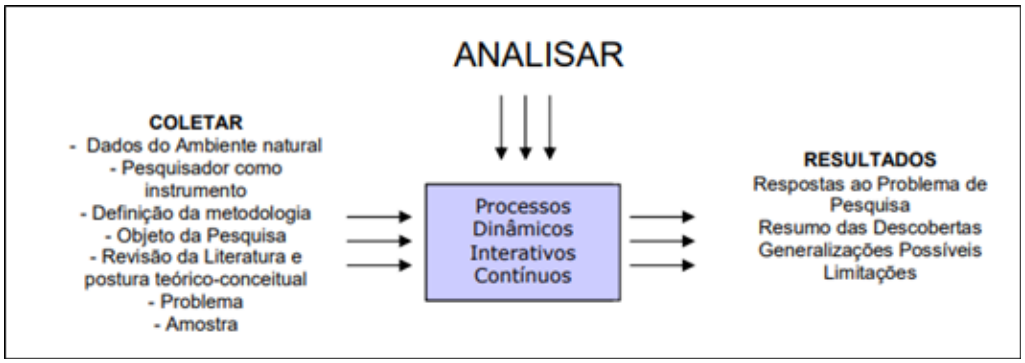
O texto exibe as etapas desta trajetória, das escolhas feitas no desenvolvimento da pesquisa, no intuito de revelar a importância de produzir conhecimento e significado, e oferecer uma contribuição em HEM. Entendemos a importância em apresentar uma fundamentação teórica sobre os pressupostos metodológicas da pesquisa realizada: abordagem, tipo, sujeito, lócus, instrumentos, procedimentos e técnicas utilizadas, contexto, ambiente etc.

O *DESIGN* DA PESQUISA

Design da pesquisa nos indica como os dados serão obtidos, analisados e interpretados. Define a sequência lógica das etapas a serem realizadas, o percurso na busca de teorias que fundamentem o estudo, e o olhar para produções que mostram o que é discutido acerca do objeto (Viana, 2006).

A Figura 1 ilustra a organização do *design* da pesquisa. A primeira etapa consiste nas informações que são levantadas, que logo após são interpretadas, podendo surgir novas questões, o que requer uma outra busca de dados; e independente da técnica de coleta de dados utilizada, para que os resultados tenham validade científica eles devem atender às seguintes condições: coerência, consistência, originalidade e objetivação (Viana, 2006).

Figura 1 - Esquema do *design* da pesquisa



Fonte: Viana (2006, p. 6)

Na perspectiva de pesquisas sobre as Escolas Normais, temos um referencial profícuo no sentido de entendermos como estas instituições se formaram e construíram uma história no campo da pesquisa educacional. Para Magalhães (2004, p. 58):

> A ideia de instituição consagra uma combinatória de finalidades, regras e normas, estruturas sociais organizadas, realidade sociológica envolvente e fundadora [...]. Conhecer o processo histórico de uma instituição educativa é analisar a genealogia da sua materialidade, organização, funcionamento, quadros imagético e projetivo, representações, tradição e memórias, práticas, envolvimento, apropriação. [...] Trata-se, portanto, de uma construção subjetiva que depende das circunstâncias históricas, das imagens e representações dos sujeitos, e que é afetada por dados de natureza biográfica e grupal.

Assim, apresentamos e discutimos neste texto, a base teórica em que a pesquisa de tese se sustentou. A metodologia assumiu caráter qualitativo, tomando a forma de uma pesquisa histórica, valendo-se da utilização das fontes para a realização de análises e a integração destas no processo de investigação. A pesquisa nessa perspectiva, deve contribuir para a compreensão de um assunto estudado, recolhendo informações, organizando-as coerentemente, para serem apresentadas como um conhecimento produzido (Both; Colomb; Willians, 2005).

Para isso, alguns referenciais foram utilizados e as etapas algumas vezes se sobrepuseram, e muitas tarefas conduziam a pesquisa por um caminho não linear. Em síntese, o *Design* da Pesquisa contemplou discussões em três eixos: a pesquisa histórica; a cultura e a escola; fontes documentais e organização da pesquisa.

A PESQUISA HISTÓRICA

> A história é uma produção científica baseada na escrita, como fonte e como informação, pelo que, quer a produção do conhecimento, quer a narrativa historiográfica devem ressentir-se dessa preocupação, socorrendo-se e cruzando o mais variado tipo de informação, mas valorizando as fontes escritas e estruturando uma narrativa que articule o rigo científico com sua inteligibilidade (Magalhães, 2004, p 142).

Toda pesquisa histórica se articula com um lugar de produção cultural, que considera as particularidades de um determinado local, e os sentidos e interpretações acerca dos fatos que se modificam a cada nova abordagem, como nos lembra Certeau (1982).

Entendemos que a pesquisa histórica faz parte de um posicionamento investigativo alicerçado às preocupações de "identificar os modos como, em diferentes lugares e momentos, uma determinada realidade social e construída, pensada, dada a ler" (Chartier, 1990, p. 16). Para o pesquisador, fica a tarefa de elaborar uma complementaridade de diversos campos do saber; um caminho disciplinar estabelecido a partir das pontes e conexões que se estabelecem com distintos referenciais. Na tríade: materialidade, representação e apropriação; o processo investigativo é promovido ao olharmos para a história de uma instituição escolar (Magalhães, 2004).

Na pesquisa histórica, há uma preocupação com os procedimentos adotados para trabalhar com as fontes, e cabe ao pesquisador, produzir um conhecimento sobre o passado, tomando-o como objeto de trabalho para sua investigação. Fatos históricos são construções feitas a partir de interrogações que fazemos, para construir um discurso, elaborando respostas às questões formuladas. A operação historiográfica, para Certeau (1982, p. 9, meu grifo), precisa considerar o lugar onde o discurso é produzido: "supõe uma descolagem entre a opacidade silenciosa da 'realidade' que ela pretende dizer, e o lugar onde produz seu discurso, protegida por um distanciamento do seu objeto, Gegenstand".

Considerando os "suportes metodológicos de construção e apresentação da realidade histórica" (Magalhães, 2004, p. 83), a historiografia de novos objetos científicos é fundada em domínios conceituais e nas práticas registradas.

Os fenômenos educativos são concebidos como campo e objeto de pesquisa, que apresentam historicidade social, cultural, pedagógica e antropológica. Assim, em um conjunto de categorias instrumentais, a história das instituições educativas, exige o olhar para três aspectos: materialidade, representação e apropriação (Magalhães, 2004).

Uma pesquisa desta natureza, que considera a história de uma instituição educativa, contempla categorias fundamentais como: o espaço; o tempo; o currículo; os manuais escolares; os professores–acesso, profissionalização, organização, formação, mobilização, histórias de vida -; públicos; dimensões didático-pedagógicas (Magalhães, 2004).

Quanto aos procedimentos, foi conveniente considerar a pesquisa indiciária, uma vez que consideramos as especificidades de cada documento encontrado. Utilizando este paradigma, o estudo do material é meticuloso e minucioso, nele rastreiam-se as fontes como num quebra-cabeça. No paradigma indiciário, Rodrigues (2006, p. 80) comenta:

> O historiador deve aprender a interrogá-las de maneira apropriada. As perguntas do historiador são apresentadas na narrativa, seja de forma direta ou indireta. De qualquer forma, essas narrações delimitam possibilidades que influem decisivamente no curso da pesquisa, por meio da mediação entre questões e fontes, e nas formas como os dados históricos são recolhidos, interpretados, descartados e narrados.

Os parâmetros do método indiciário consideram que, durante uma investigação histórica, o pesquisador pode encontrar dados que se transformam em importantes elementos para análise, exigindo novas relações e conexões com o objeto estudado. Ginzburg (2007) afirma que a construção e a reconstrução de um objeto histórico podem ser feitas por um conjunto documental ampliado, que considera eventos variados do local pesquisado.

> Creio que o acúmulo do conhecimento sempre ocorre assim: por linhas quebradas em vez de contínuas; por meio de falsas largadas, correções, esquecimentos, redescobertas; graças a filtros e esquemas que ofuscam e fazem ver ao mesmo tempo (Ginzburg, 2007, p. 111).

Toda investigação histórica se faz em um processo simultaneamente progressivo e regressivo, e a narrativa é uma interpretação da realidade identificada nos indícios de um objeto de conhecimento, representando a construção racional do contexto pesquisado.

Ginzburg (2007) valoriza a pesquisa e a análise dos aspectos minuciosos. As pistas seguem dados ou fontes consideradas não oficiais, além de fontes não escritas; o uso da iconografia, corroborando com o fato de que, a partir desses indícios, o historiador estabelece conexões, relações, paralelismos que nem sempre são diretamente documentados (Rodrigues, 2006).

O indiciarismo transfere para o interior da pesquisa, as tensões entre narração e documentação, ao valorizar aspectos específicos com o olhar voltado para o geral, nos fenômenos macro-históricos, a partir da análise dos fenômenos micro-históricos.

> A análise ginzburguiana é essencialmente indiciária. [...] Sua construção teórica resulta de um método que primeiro investiga as provas. Analisa suas convergências e divergências. Preenche as lacunas com novos dados. Infere as causas não documentadas ou comprovadas por meio dos efeitos. Monta o quebra cabeça a partir dos elementos identificados pela racionalidade e inferidos pela sensibilidade. Por fim, teoriza (Rodrigues, 2006, p 76).

Teorizar é conduzir as discussões, para obter contribuições para a metodologia da pesquisa histórica. É interrogar as fontes e indícios de maneira apropriada; com questionamentos apresentados em uma narrativa, que delimitam as possibilidades e o curso da pesquisa, mediando as questões e fontes, e como os dados históricos são recolhidos, interpretados, descartados e narrados (Rodrigues, 2006).

Dos indícios, procuramos dar um sentido histórico, para uma narrativa obtida a partir de fontes, que interpretadas, permitirão a realização de um produto científico, a elaboração de historiografia local.

A CULTURA E A ESCOLA

Um ponto de partida para entendermos a cultura escolar é considerarmos a questão proposta por Dominique Julia:

> Na análise histórica da cultura escolar, parece-me de fato fundamental estudar como e sobre quais critérios precisos foram recrutados os professores de cada nível escolar: quais são os saberes requeridos de um futuro professor?" (Julia, 2001, p. 24).

Vidal (2009) aponta que a cultura escolar tem se constituído em importante ferramenta para o estudo das relações entre escola e cultura, e no intento de sistematizá-la como objeto histórico e ferramenta de pesquisa, a autora pontua três questões sobre como concebe os aportes oferecidos para investigação acadêmica: a) a reflexão acerca da conservação e da inovação em educação; b) a atenção à cultura material como elemento constitutivo das práticas escolares; e c) a valorização dos sujeitos escolares como agentes sociais.

Ao considerarmos esses três aspectos, levantamos três questionamentos para a investigação em curso: Na Escola Normal de Cuiabá, o que foi mantido em termos de programas de matemática em relação as demais propostas brasileiras? Houve inovações? Em caso afirmativo quais? Quais os elementos constitutivos da cultura material que se evidenciam na Escola Normal de Cuiabá? Quem são os sujeitos escolares: professores da Escola normal e de aplicação? Como eles se transformam em agentes sociais no estado?

Nos competia olhar para esta instituição como produtora de uma cultura específica e como espaço de convivência de culturas, para então compreender que a cultura escolar se constitui como importante ferramenta teórica. Nessa perspectiva, a relação entre cultura e escola é interrogada na esfera da cultura escolar, inserida nas variadas possibilidades que oferece à pesquisa em educação matemática com olhares para a história das instituições escolares, e nesse campo, dialogamos com Escolano Benito (2017) para tratar da escola como cultura, a partir dos elementos da experiência, memória e arqueologia.

Escolano Benito trata da articulação entre escola e cultura e sobre a ressignificação da história-memória da escola como cidadania, para a construção teórica no campo educacional. Afirma que a história da escola está na inscrição espacial e temporal das práticas. Partindo da figura do professor, reforça a noção de experiência como contraponto à focalização externa. A constituição da práxis em cultura e da cultura em experiência são inerentes ao escolar – "Como instituição social, a escola abriga entre seus muros situações e ações de copresença, que resultam em interações dinâmicas" (Escolano Benito, 2017, p. 77). A cultura escolar congrega aspectos variados, incluindo a dimensão corporativa e a grande parte das práticas escolares integram um "[...] regime de instituição" (p. 88). A cultura empírica da escola constitui uma 'coalizão' nomeadamente entre ideais, reformas educativas, ritos e normas, práticas experiências profissionais.

Numa perspectiva sócio-histórica, a escola é uma construção cultural complexa que seleciona, transmite e recria saberes, discursos e práticas assegurando uma estabilidade estrutural e mantendo uma lógica institucional, em articulação com a cultura empírica da escola desenvolveram-se duas outras culturas: "[...] uma que ensaiou interpretá-la e modelá-la com base nos saberes (cultura acadêmica) e outra que intentou governá-la e controlá-la por meio dos dispositivos da burocracia (cultura política)" (Escolano Benito, 2017, p. 119).

É enfatizada a importância da hermenêutica no processo da pesquisa histórica, "A escola foi das instituições culturais de maior impacto no mundo moderno" (Escolano Benito, 2017, p. 202), pelo que a memória escolar é interpretação e pode ser terapia. 'Hermeneutizar' as memórias escolares, segundo ele, é retomar as pautas antropológicas de pertencimento e valorizar uma fonte de civilização.

Escolano Benito (2007) denomina 'Arqueologia da escola' ao modo sábio e fecundo de apresentar, justificar e conferir valor patrimonial e significado educativo a um Centro de Cultura e Memória da Escola. Para ele, esta arqueologia se volta para a reconstrução de uma cultura escolar baseada nas materialidades da escola, com a presença de sujeitos, que são protagonistas da vida nas instituições; na sua materialidade e na profunda razão de ser como lugar de história e antropologização da história, e como fonte de subjetivação. Toda informação material que aporte conhecimento deve ser considerada parte do patrimônio coletivo, o valor da cultura da experiência, a cultura da escola na construção de novas memórias.

A história de uma instituição escolar se traduz na construção de uma identidade, cultural e educacional, articulada por um itinerário histórico local com o modelo educacional vigente. Magalhães (2004), pressupõe que essa identidade é constituída por uma rede de histórias anteriores, das memórias e operações das múltiplas construções tecidas pela instituição.

Na pesquisa em voga, esses autores conduzem teoricamente estudos que consideram a escola primária como objeto de investigação, e norteiam metodologicamente as análises das práticas escolares enquanto práticas culturais, no viés histórico.

Compreendemos que as investigações sobre como a cultura escolar precisa considerar as dimensões da realidade educacional de um determinado local, e por isso, buscamos identificar nas fontes documentais da Escola Normal de Cuiabá, um potencial para produção de conhecimento sobre a História dessa instituição, refletindo a partir da cultura escolar, como poderíamos constituir uma narrativa sobre práticas escolares, e veiculação dos conteúdos matemáticos que aparecem no estudo histórico sobre os locais escolhidos.

FONTES DOCUMENTAIS E ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta etapa foi desafiadora. A pesquisa de cunho indiciário depende de muitos fatores, mas o principal é a localização da existência de fontes passíveis de análise, que convergem em direção ao objeto estudado: a reunião dos documentos, é considerada uma tarefa difícil, posto que se trata do momento dedicado à organização dos dados coletados, ou seja, o momento em que o historiador reúne todos os documentos que possam constituir os fatos históricos (Bloch, 2001). Sobre essa problemática:

> Frequentemente, a inexistência de um arquivo organizado, a dispersão da documentação por vários espaços e a precariedade das condições de conservação desafiam o historiador, mediante um protocolo, a intervir na construção do arquivo [...]. O ensejo de o historiador participar na inventariação e na organização de um arquivo histórico é uma situação estimulante e privilegiada [...]. Agindo por si mesmo, o historiador tende a mover-se essencialmente por lógicas de investigação (Magalhães, 2004, p. 136).

Grande parte dos documentos da Escola Normal de Cuiabá e suas adjacências, foram encontrados da sede do Arquivo Público de Mato Grosso. Utilizamos ainda, a plataforma digital *Famílias*

Casa Barão[3], que oferece documentos digitalizados das famílias Mendonça e Rodrigues. No acervo da família Rodrigues, encontramos registros de Firmo José Rodrigues, sobre sua atuação no magistério; e informações referentes às suas práticas, no período em que atuou como professor de matemática na Escola Normal de Cuiabá.

O Grupo de Pesquisa História da Educação e Memória – GEM, da UFMT tem organizado um amplo banco de dados relativo à área educacional em Mato Grosso, no qual são socializados os dados documentais coligidos pelo GEM ao longo dos anos, disponibilizando-os virtualmente e em publicações impressas[4]. Uma de suas produções mais importantes refere-se à história das instituições escolares no Estado do Mato Grosso, compreendendo a inventariação, organização e divulgação das fontes da Escola Normal de Cuiabá.

Outro recurso utilizado, foi a busca na hemeroteca digital da Biblioteca Nacional[5], feita para identificar os jornais que circularam no período e as mensagens oficiais. As matérias publicadas sobre a Escola Normal de Cuiabá e suas atribuições foram consideradas para a pesquisa. Como descritor para as buscas utilizamos: 'escola normal'; 'escola normal de Cuiabá'; 'curso normal'; 'normalista'; 'instrução pública'; 'magistério'; 'programa'; 'regulamento'. Para buscarmos publicações relacionadas à matemática, também usamos os descritores: 'matemática'; 'matemática elementar'; 'aritmética'; 'álgebra'; 'geometria', 'desenho'.

Os jornais ampliam consideravelmente as fontes que, atualmente, os pesquisadores têm acesso em seus estudos; e são documentos passíveis de análise Capelato (1988). "O documento é um produto da sociedade, que o fabricou segundo as relações de força que aí detinham o poder" (Le Goff, 1990, p. 545).

Dispomos de hemerotecas digitais que facilitam o trabalho de coleta de dados. A aproximação com a história por meio de jornais é fascinante, pois em cada página é possível conhecer um pouco da vida de pessoas que viveram outrora, "[...] assim podemos recuperar suas lutas, ideais, compromissos e interesses [...]" (Capelato, 1988, p.21).

As mensagens do governador, na pesquisa, constituíram-se em importantes fontes documentais, pois nos relatórios dos governantes e autoridades, conseguimos observar a trajetória das iniciativas para a instrução pública (Siqueira, 2005). Podem ser percebidas como:

> [...] produto da elite cultural local, evidenciados nas mensagens anuais da administração pública de Mato Grosso. Estas tornam-se fontes históricas oficiais: [...] tudo pode vir a tornar-se fonte ou documento para História [...]. Fontes tradicionais ou antigas, como relatórios, correspondência oficial, anais do poder legislativo, mensagens de governador, legislação [...], podem ser objeto de análise (Pesavento, 2012, p. 97).

Os jornais e as mensagens do governador mostraram que essas fontes podem ser consideradas documentos, que de fato trazem indícios do que a sociedade local esperava da Escola Normal e dos futuros professores, assim como evidenciaram a importância dessa instituição para o Estado no início do século XX (Santos; Silva, 2024).

[3] Famílias Casa Barão (familiascasabarao.com.br)
[4] Informações: GEM–Grupo de Pesquisa História da Educação e Memória (ufmt.br).
[5] BNDigital

A partir do que localizamos nas fontes, fez-se necessário organizar um modo de análise, considerando os elementos que constituem a História Cultural da Escola Normal de Cuiabá. Construir a identidade histórica de uma instituição é um desafio complexo, que exige a análise, integração e correlação dos objetos identificados para a pesquisa. As categorias e variáveis precisam ser criteriosamente definidas e informadas, pautadas nos recursos organizacionais, curriculares e antropológicos da escola (Magalhães, 2004).

Com base na produção de Richard (2004), optamos por indicar Unidades Significantes para categorizar as fontes, e de acordo com cada unidade, realizar então as discussões cabíveis e as relações com os referenciais adotados.

Na abordagem de Richard (2004), as perspectivas estruturais e funcionais de um determinado estudo se relacionam com a identificação de Unidades Significantes, as formas e regras de sua conexão, bem como a realização dos objetivos dessa conexão. Estas unidades são interpretadas em relação a uma referência, dando origem a novos sistemas de intepretações de um determinado contexto, e a compreensão destas unidades em cada tipo de estrutura oferece condições para analisarmos as informações.

Para a organização das Unidades Significantes, Richard (2004) descreve quatro aspectos necessários para organização da análise: enumerar todas as unidades significantes utilizadas; identificar os modos de ligação das unidades significantes às unidades de produção (teorias); esclarecer o objetivo da ligação das unidades significantes com o que está sendo analisado; apontar as regras de ligação entre as unidades. Sendo assim, organizamos seis Unidades Significantes, levando em consideração as fontes disponíveis:

1) 'A nobre missão do magistério': adotando Miguel (2008) na perspectiva de discutir o significado do trabalho do professor; Stamatto (2002) que apresenta modelos de formação para o magistério; e Vidal (2006), centrada em uma cultura escolar produzida na ação dos sujeitos sociais, sua experiência ou prática.

2) 'Feminilização do magistério': como unidades de produção teórica, trazemos Vidal (2009), que trata das identidades e culturas formadas sobre a influência nas escolhas da carreira como prática cultural–na história produzida pelas Escolas Normais, houve um movimento, em que os sujeitos da educação primária passaram a ser determinados pelo gênero; e Tambara (2012), que analisa o processo de feminilização do magistério no século XIX e início do século XX, tendo como lócus a escola normal, em que a ocupação desta instituição pelas mulheres, consistiu na melhor forma de acesso a atividade pública.

3) 'Programas de Ensino': baseando-nos em Lopes e Galvão (2005) ao investigar saberes para a formação de professores, afiram que muito pode ser dito sobre uma cultura escolar, a partir dos programas oficiais ; e Bourdieu e Passeron (2011), no debate de como a escola, ao definir seu currículo, ocupa um lugar nas transformações sociais, reproduzindo uma legitimação de uma cultura social dominante.

4) 'Os professores de matemática da Escola Normal': seguimos a perspectiva de Assis (2016), que apresenta sobre os docentes e dirigentes na Escola Normal de Natal, no tocante ao ensino da Matemática; e Escolano Benito (2017), em seu debate sobre o que ele denomina modelo empírico de docência, no movimento acadêmico normalista dos professores das novas escolas normais do final do século XIX e início do século XX.

5) 'Elementos de uma Cultura Material': fundamentado em Magalhães (2004), que abarca a comple-

xidade de elementos e relações que compõem toda a realidade educativa; Vidal (2009), na percepção de que a cultura escolar pode ser efetivada por práticas escriturais e não-escriturais (oral ou corpórea), que acionam os vários dispositivos constituintes dos fazeres da escola, no que diz respeito às lições e aos usos da materialidade posta em circulação no espaço e no tempo escolares, permitindo tomar a cultura material escolar com importante indício das práticas escolares; Burke (2004), para a análise de fotografias como elemento constitutivo das práticas escolares, que valorizam os sujeitos que fizeram parte da história desta instituição escolar.

6) 'Indícios dos conhecimentos matemáticos – a Matemática Elementar': no contexto das escolas normais brasileiras, a matemática elementar tem sido investigada por autores da História da Educação Matemática (Mendes; Stamatto, 2020), (Silva, 2016), (Ferreira; Brito; Miorim, 2012) etc., com resultados que evidenciam saberes matemáticos necessários àqueles professores que irão ensinar nos primeiros anos de escolarização. Lopes e Galvão (2005), tratam da materialidade histórica da escola, constituída como objeto e possibilidade de análises. Em relação às formas de avaliação das escolas, Bourdieu e Passeron (2011), argumenta que a instituição escolar representa os gostos, as crenças, as posturas e os valores dos grupos dominantes, dissimuladamente apresentados como cultura universal.

Estas seis unidades foram escolhidas para a pesquisa, considerando a relevância que a Escola Normal de Cuiabá ocupou diante da história cultural desta instituição, dos elementos e relações que compuseram sua realidade à época.

O PROCESSO DE ANÁLISE

Além de utilizarmos as Unidades Significantes para explorarmos e analisarmos os dados produzidos, a Análise de Discurso (Orlandi, 2009), nos ofereceu possibilidades de análise acerca de sujeitos, histórias e linguagem; elementos estes que foram explorados na pesquisa.

A reinterpretação das histórias anteriores, das memórias e do arquivo de uma instituição, possibilita uma representação sintética, orgânica e funcional; de múltiplas leituras, em que o trabalho historiográfico permite modelar, compreender e explicar a narrativa histórica, completando um percurso historiográfico em que podemos conceituar uma tese, traduzindo e representando o objeto estudado (Magalhães, 2004).

> A produção discursiva final, quando apresentada sob a forma de um relato, visa essencialmente descrever o processo investigativo, sua estruturação e suas conclusões (processo, fases e resultados), a que frequentemente se agrega uma genealogia da instituição. Todavia, a forma de discurso mais adequada à história da instituição deve corresponder a uma narrativa historiográfica, entretecendo um discurso criativo e remissivo, organizado por meio de uma trama, com espaços, tempos, ação, agentes e sujeitos (Magalhães, 2004, p. 147).

A exemplo, ao analisarmos os programas de ensino da EN de Cuiabá, que estiveram vigentes no período pesquisado, o diretor da instituição Leowigildo Martins de Mello, expôs no Relatório de 1911, que os programas de ensino eram meras enumerações de matérias a ensinar.

> A expressão programma, applicada ao ensino, oferece dous sentidos:–simples enumeração das matérias do ensino;–exposição detalhada do desenvolvimento que se deve dar a cada disciplina, isto é, proporcionar às faculdades infantis o quantum de conhecimentos a serem ministrados. Disto ressalta naturalmente a importância do programma na escola. Si em nosso meio os agentes da educação fossem oriundos de uma escola profissional,

> bastaria que o programma enumerasse unicamente as disciplinas que devem ser estudadas na escola primária. Mas, tratando-se de agentes de educação estranhos a um curso pedagógico regular, é claro que o programma deve-lhes precisar a qualidade e quantidade dos conhecimentos a ensinar. Da combinação do horário com o programma resulta a obediência a mais geral das leis pedagógicas e, ao mesmo tempo, ao fim da educação [...] (Mello, 1911, p. 6).

Leowigildo revela um discurso determinado pela noção e interpretação que ele – com uma formação na Escola Normal de São Paulo – tinha sobre as questões pertinentes aos programas de ensino. Para o diretor, o programa deveria ir além da simples enumeração dos conteúdos; de modo a priorizar a qualidade a que esses estariam sendo oferecidos. A formação deveria exceder aos conhecimentos da escola primária.

Orlandi (2009) pontua que na AD, a determinação histórica dos processos de significação de um discurso, existe e faz sentido pois se inscreve na história. Na formação discursiva, "o sentido é determinado pelas posições ideológicas colocadas em jogo no processo sócio-histórico em que as palavras são produzidas" (Orlandi, 2009, p. 42).

Para Orlandi (2009), a capacidade de significar um discurso torna possível tanto a permanência e a continuidade quanto o deslocamento e a transformação do homem na realidade em que vive. O historiador produz um conhecimento a partir do próprio texto. Não se trata somente de transmitir informações histórias, mas sim de produzir sentidos.

Adotando os princípios e procedimentos analíticos da AD, compreendemos como um objeto histórico pode produzir uma materialidade própria e significativa, desenvolvendo a noção de leitura, de interpretação, que problematiza a relação do sujeito com o sentido – do discurso com a história.

No trabalho da tese, tivemos as condições de produção a que se refere Orlandi (2009), que incluem o contexto histórico e ideológico de um objeto estudado a partir de uma época e local específico. Assenta-se no modo como as relações sociais se inscrevem na história e são regidas, explica-se os modos como os sentidos são produzidos, para compreensão do que está sendo dito. A AD flui nos seus percursos, atravessa as evidências, rompe com o que já está estabelecido e ressignifica. Em uma análise, há sempre o incompleto, que possibilita uma nova interpretação.

Na construção do nosso dispositivo de análise, a descrição e interpretação, que fazem parte da AD, estão presentes nesta pesquisa. Particularizamos as fontes, constituintes do corpus do trabalho, para compreender as práticas discursivas presentes em diferentes documentos, imagens e textos.

Vidal (2006) reforça que um estudo que tome a escola como objeto de investigação, ocupando-se do mapeamento e inventariação do que esta instituição oferece nas fontes materiais, nos oferece múltiplas possibilidades de compreender as representações da escola nas imposições de espaço e tempo, seus significados frente às transformações de elementos estruturantes de uma cultura material que produz uma cultura escolar.

Na percepção de que a cultura escolar pode ser efetivada por práticas escriturais e não-escriturais (oral ou corpórea), se acionam os vários dispositivos constituintes dos fazeres da escola, no que diz respeito às lições e aos usos da materialidade posta em circulação no espaço e no tempo escolares, permitindo tomar a cultura material escolar com importante indício das práticas escolares (Vidal, 2009).

REFLEXÕES FINAIS

O percurso da pesquisa ocorreu de modo não linear, no sentido de que cada elemento que constituiu a estrutura da tese, foi construído corroborando com os pressupostos de que um estudo historiográfico se constrói em sua globalidade.

Acompanhando as transformações que ocorreram em todo o território brasileiro, a Escola Normal de Cuiabá, gradativamente, conformou-se aos projetos políticos locais. Isso nos levou a refletir sobre como os modos de organização dessa instituição, e suas tentativas de aproximá-las dos conteúdos e abordagens didáticas, para o ensino primário que foram consolidadas, conforme os documentos elaborados e postos em vigência pela Instrução Pública de Mato Grosso.

As análises, que formaram o elemento mais particular dos resultados da pesquisa, foram feitas a partir das unidades significantes, elaboradas somente após a identificação das fontes encontradas, que orientaram as escolhas teóricas e metodológicas.

A reforma da instrução pública em Mato Grosso intencionou transformar a realidade local, e depositava a esperança de melhorar o futuro do Estado, a partir dos professores formados pela Escola Normal. Esse aspecto nos induziu a nomear como 'A nobre missão do magistério', a primeira unidade significante.

Nessa mesma perspectiva transformadora, a 'Feminilização do magistério' surge no advento das Escolas Normais, que possibilitaram à mulher avançar além de uma instrução primária e adquirirem uma profissão. O magistério primário profissionalizou uma geração de mulheres.

Documentos oficiais da instituição desde sua criação em 1910, até a extinção em 1937, que tratam das orientações, organização física e administrativa, programas de estudos, estrutura curricular e conteúdos a serem ensinados, fizeram parte da terceira unidade significante: 'Programas de Ensino'.

'Os professores de matemática da Escola Normal' como quarta unidade, intencionou na identificação, descrição e dados biográficos dos professores de matemática do período, que atuaram na instituição.

As fotografias e imagens que permitiram identificar características próprias da Escola Normal e suas particularidades, fazem parte quinta unidade, nomeada como 'Cultura Material'. A análise de fotografias contribuiu para entendermos algumas práticas escolares, que evidenciaram os sujeitos que fizeram parte da história desta instituição escolar. As imagens, assim como textos, são importantes evidências históricas; são uma forma de auxílio à história como evidência da cultura material do passado.

Os 'Indícios dos conhecimentos matemáticos – A Matemática Elementar' compõe a última unidade significante. Analisamos os vestígios de saberes matemáticos elementares que os normalistas deveriam apresentar para ingresso na EN, saberes ensinados nas escolas primárias, saberes necessários para concurso do magistério primário. A partir daí, descrevemos a identificação da matemática prescrita nos programas, na matemática ensinada e lida nos exames.

Ao olharmos para o conjunto das fontes, estas revelaram o que os documentos deixaram como vestígios, para possibilitar, no processo de investigação, a conexão entre as fontes e a historiografia da Escola Normal de Cuiabá, na produção de uma cultura escolar.

REFERÊNCIAS

ASSIS, Márcia Maria Alves de. **Matemáticas Elementares na Escola Normal de Natal:** Legislações, Programas de Ensino, Materiais Didáticos. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal – RN, 224 f., 2016. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/21819. Acesso em: out. 2024.

BLOCH, Marc. **Apologia da história**, ou, o ofício do historiador. Trad. André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.

BOOTH, Wayne. C.; COLOMB, Gregory. G.; WILLIANS, Joseph. M. **A arte da pesquisa**. Trad. Henrique A. Rego Monteiro. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

BOURDIEU, Pierre; PASSERON, Jean-Claude. **A reprodução:** elementos para uma teoria do sistema de ensino. Trad. de Reynaldo Bairão. Rio de Janeiro: Vozes, 2011.

BRAZIL, M. do C. Na República, a escola passou a ser vista como instrumento de higienização e moralização patriótica. **Notícia** – UFBR, publicada em 27 de novembro 2013. Disponível em: https://www.ufrb.edu.br/bibliotecacfp/noticias/256-na-republica-a-escola-passou-a-ser-vista-como--instrumento-de-higienizacao-e-moralizacao-patriotica. Acesso em: nov. 2024.

BURKE, P. **Testemunha Ocular:** história e imagem. Trad. de Vera Maria Xavier dos Santos. Bauru – SP: EDUSC, 2004.

CAPELATO, Maria Helena Rolim. **Imprensa e História do Brasil.** São Paulo: Editora Contexto e EDUSP, 1988.

CERTEAU, Michel de. **A escrita da História.** Tradução de Maria de Lourdes Menezes; revisão de Arno Vogel. 2 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1982.

CHARTIER, Roger. **A história cultural:** entre práticas e representações. Lisboa: Difel, 1990.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Uma síntese sociocultural da história da matemática.** 1. Ed. São Paulo: PROEM, 2011.

ESCOLANO BENITO, Augustín. **A Escola como Cultura**: experiência, memória e arqueologia. Campinas–SP: Alínea, 2017.

FERREIRA, Ana Cristina; BRITO, Arlete de Jesus; MIORIM, Maria Ângela (orgs.). **Histórias de formação de professores que ensinaram matemática no Brasil.** Campinas: Ílion, 2012.

GINZBURG, Carlo. **O fio e os rastros:** verdadeiro, falso, fictício. Trad. de Rosa Freire d'Aguiar e Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras. 2007.

JULIA, Dominique. A Cultura Escolar como Objeto Histórico. Traduzido por Gizele de Souza. **Revista Brasileira de História da Educação**, Campinas-SP, n. 1, p. 9-38, 2001.

LE GOFF, Jacques. **História e memória**. Campinas, SP Editora da UNICAMP, 1990.

LEME DA SILVA, Maria Célia. Um breve panorama sobre a História da Educação Matemática no Brasil. **HISTEMAT**, SBHMat, v. 8, p. 1-17, ISSN: 2447-6447, 2022. Disponível em: https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/download/536/441/2413. Acesso em: jan. 2025.

LOPES, Eliana Marta Teixeira; GALVÃO, Ana Maria de Oliveira. **História da Educação**. 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2005.

MAGALHÃES, Justino Pereira de. **Tecendo Nexos**: história das instituições educativas. Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco. 2004.

MENDES, Iran Abreu; STAMATTO, Maria Ines Sucupira (orgs.). **As Escolas Normais do Brasil:** espaços de (trans)formação docente e produção de saberes profissionais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

MIGUEL, Maria Elisabeth Blanck. A Escola Normal no Paraná: Instituição formadora de professores e educadora do povo. In: ARAÚJO, José Carlos Souza; FREITAS, Anamaria Gonçalves Bueno de; LOPES, Aantonio de Pádua Carvalho (orgs.). **As Escolas Normais do Brasil:** do Império à República. Campinas – SP: Alínea, 2008.

ORLANDI, Eni Puccinelli. **Análise de Discurso**: princípios e procedimentos. 8. ed. Campinas: Pontes, 2009.

PESAVENTO, Sandra Jatahy. **História e história cultural.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

RICHARD, Philippe R.; SIERPINSKA, Et Anna. Étude Fonctionnelle-Structurelle de Deux Extraits de Manuels Anciens de Géométrie. **Revue des Sciences de L'Education.** jan., 2004. Disponível em: https://www.erudit.org/fr/revues/rse/2004-v30-n2-rse1025/012674ar.pdf. Acesso em: out. 2024.

RODRIGUES, Márcia Barros Ferreira (org.). **Exercício de indiciarismo.** Vitória – ES: Universidade Federal do Espírito Santo, 2006.

SANTOS, Simone Simionato dos; SILVA, Circe Mary Silva da. A Escola Normal de Cuiabá nos jornais e mensagens do governo. **REAMEC–Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 12, p. e24055, 2024. DOI: 10.26571/reamec.v12.17360. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/17360. Acesso em: out. 2024.

SILVA, Circe Mary Silva da. A Escola Normal na província de São Pedro do Rio Grande do Sul e os saberes matemáticos para futuros professores (1869-1889). **Revista de História da Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 2, n. 3, 2016. Disponível em: https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/103. Acesso em: jul. 2023.

SIQUEIRA, Elizabeth Madureira. Reconstituindo arquivos escolares: a experiência do GEM/MT. **Revista Brasileira de História da Educação**. n° 10, jul./dez., p. 123-152, 2005. Disponível em: periodicos.uem.br/ojs/index.php/rbhe/article/view/38649/20180. Acesso em: out. 2024.

STAMATTO, Maria Inês Sucupira. A carreira do professor primário (1822-1889). **Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**. Salvador, v. 11, n. 17, p. 83-91, jan./jun., 2002.

TAMBARA, Elomar Antonio Callegado. Profissionalização, escola normal e feminilização: magistério sul-rio-grandense de instrução pública no século 19. **Revista História da Educação**, *[S. l.]*, v.

2, n. 3, p. 35–57, 2012. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/index.php/asphe/article/view/30720. Acesso em: 11 out. 2024.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática.** v. 2.2, p. 28-49, UFSC: 2007. https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12990. Acesso em: out. 2024.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da educação matemática. **Cad. Cedes**, Campinas, v. 41, n. 115, p.164-167, Set.-Dez., 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1590/CC245614. Acesso em: jan. 2025.

VIANNA, William Barbosa. O *design* da pesquisa qualitativa: questões a considerar. **XIII SIMPEP**–Bauru, SP, Brasil, 6 a 8 de Novembro de 2006. Disponível em: https://simpep.feb.unesp.br/anais/anais_13/artigos/555.pdf. Acesso em: out. 2024.

VIDAL, Diana Gonçalves. Cultura e práticas escolares: a escola pública brasileira como objeto de pesquisa. **História da Educação.** São Paulo, v. 25, p. 153-171, 2006. Disponível em: https://revistas.usal.es/tres/index.php/0212-0267/article/download/11177/pdf_6/41460. Acesso em: out. 2023.

VIDAL, Diana Gonçalves. No interior da sala de aula: ensaio sobre cultura e práticas escolares. **Currículo sem fronteiras**. v. 9, n. 1, jan./jun. 2009, p. 25-41, 2009. Disponível em: http://www.Currículosemfronteiras.org/vol9iss1articles/2-vidal.pdf. Acesso em: out. 2024.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Os números inteiros relativos durante a Matemática Moderna no ensino liceal em Portugal

The integers during Modern Mathematics in *liceus* in Portugal

Mária Cristina Almeida[1]
Universidade Nova de Lisboa – UNL

RESUMO

O movimento curricular internacional conhecido como Matemática Moderna iniciado na segunda metade do século XX visava a transformação de representações e práticas da matemática escolar. Em Portugal, a disseminação das ideias de matemática moderna dá-se a partir de 1968 para os estudantes pós-primários, chegando aos liceus em 1970. A alteração curricular é acompanhada da publicação de livros de texto. Neste texto visamos compreender como foram abordados os números inteiros relativos e as suas operações, no início do período de disseminação da Matemática Moderna, nos liceus. A nossa fonte foi o livro de texto em vigor à época. O estudo é baseado numa análise documental, de natureza descritiva e interpretativa, com uma perspetiva histórica. Observámos que a abordagem usada para introduzir números inteiros e suas operações está em sintonia com o preconizado pelas ideias da matemática moderna, no que respeita a universos numéricos e propriedades das operações. O livro de texto promove a atenção e participação dos alunos na aprendizagem, utilizando discurso simples e relacionando a matemática com a realidade dos alunos.

Palavras-chave: Ensino da Matemática; Números inteiros relativos; História da Educação Matemática; Matemática Moderna; Ensino liceal.

ABSTRACT

The international curricular movement known as Modern Mathematics that began in the second half of the 20th century aimed to transform representations and practices of school mathematics. In Portugal, the dissemination of modern mathematics ideas to post-primary students began in 1968, reaching secondary schools in 1970. The curricular change is accompanied by the publication of textbooks. In this text we aim to understand how relative integers and their operations were approached, at the beginning of the period of dissemination of Modern Mathematics, in *liceus*. Our source was the textbook published at that time. The study is based on a documental analysis, of a descriptive and interpretative nature, with a historical perspective. We observed that the approach used to introduce the integers and their operations is aligned with what is recommended by the ideas of modern mathematics, with regard to numerical universes and properties of operations. The textbook promotes the students' attention and participation in learning, using simple speech and relating mathematics to the students' reality.

Key Words: Mathematics teaching; Integers; History of Mathematics Education; Modern Mathematics; Education in *liceus*.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para compreender a história do ensino da Matemática partindo da perspetiva da história das disciplinas escolares e da cultura escolar (Chervel, 1990; Julia, 2001) devemos entender a escola não como um simples agente de transmissão de saberes elaborados fora dela, mas como uma instituição que os adapta, os transforma, criando um saber e uma cultura próprios. Chervel (1990) aponta os momentos de reforma como momentos privilegiados para estudar a história das disciplinas escolares. Neste contexto, a reforma da Matemática Moderna é um momento rico para o estudo da história do ensino da disciplina.

[1] Investigadora do Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais (CICS.NOVA), da Universidade Nova de Lisboa. E-mail: malmeida@fcsh.unl.pt.

No panorama da educação matemática, a ideia de que se tornava necessária uma renovação no ensino da disciplina, desenvolve-se no período pós 2.ª Guerra Mundial, particularmente em diversos países europeus, nos Estados Unidos da América, na União Soviética e na América Latina. Este movimento internacional conduziu a uma reforma curricular que ocorre entre a segunda metade da década de 50 e a primeira metade dos anos 70 do séc. XX, usualmente designada reforma da Matemática Moderna. Uma descrição global do movimento pode ser encontrada em Moon (1986) e as consequências do movimento para a génese do campo de educação matemática foi feita por Furinghetti, Matos e Menghini (2013). Uma discussão sobre as formas como a cultura da matemática escolar foi afetada em sistemas escolares distintos, encontra-se em De Bock (2023).

No que se refere a Portugal, a reforma ocorreu em todos os níveis de ensino, desde o primário até ao superior, envolvendo matemáticos, professores de matemática, instituições educativas e até a imprensa e sociedade em geral. Matos e Almeida (2023) discutem as múltiplas formas que a Matemática Moderna assumiu ao ser aplicada nos diferentes subsistemas educativos portugueses do ensino não superior. Almeida, Matos e Almeida (2022) compilaram as publicações sobre a Matemática Moderna nos jornais diários de Lisboa, entre 1955 e 1972. A aplicação das ideias da Matemática Moderna nas escolas portuguesas decorreu entre os anos 1960 e o final dos anos 1980. Para Matos (2009), três períodos marcaram a introdução da Matemática Moderna em Portugal: circulação de novas ideias em relação à matemática, a partir de 1957; experimentação, a partir de 1963; e a disseminação, a partir de 1968.

Entre 1948-1968, o sistema escolar português, no que respeita ao ensino não superior, compreendia o ensino primário (6-9 anos), que era obrigatório, e o ensino secundário (10-16 anos), que englobava dois ramos: o ensino liceal e o ensino técnico. O ensino liceal dividia-se em três ciclos: 1.º ciclo (10-11 anos), 2.º ciclo (12-14 anos), 3.º ciclo (15-16 anos). No 3.º ciclo, os alunos preparavam-se para estudos universitários, visando as profissões liberais e quadros técnicos superiores. As escolas técnicas não davam acesso direto às universidades e eram destinadas à formação profissional Esta estrutura altera-se em 1968 com a criação do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (CPES), que unificando ciclos iniciais do liceu e das técnicas, permitiu evitar que alunos de 10 anos fizessem uma escolha demasiado precoce entre uma das inalteradas vias (Almeida e Candeias, 2014).

Em 1968, o programa da disciplina de Matemática do CPES incorporava a inovação curricular da Matemática Moderna. Este programa introduz mudanças significativas ao nível de conteúdos e metodologias em aula. A linguagem de conjuntos assume agora um papel preponderante na abordagem da maioria dos conceitos de aritmética e álgebra. A geometria é simplificada, sendo a sua abordagem mais superficial. O tema central do CPES é o estudo dos números racionais. Consideram-se apenas números racionais absolutos, uma vez que a noção de número negativo só será introduzida posteriormente. Preconizava-se que o ensino devia adequar-se aos interesses e experiências dos alunos, à sua faixa etária e ao meio envolvente (Almeida e Candeias, 2014; Sousa, 2012).

Em 1970 chegam aos liceus os primeiros alunos que concluíram o CPES, e que tinham já sido expostos a dois anos de matemática moderna, iniciando-se assim o processo de ajuste curricular dos restantes anos do ensino liceal. No que respeita a livros de texto, no Curso Geral dos liceus, foram postas em prática alterações curriculares de carácter experimental a partir de 1970, e encontram-se publicados livros, associados a estas experiências, desde 1971, que, de início, se configuravam como livros únicos.

As dificuldades epistemológicas geradas pelo número negativo estão presentes hoje na prática do ensino de Matemática quando os professores encontram certa dificuldade dos alunos para alcançarem sua correta compreensão, interpretação e utilização (Machado e Romero, 2009), o que justifica o nosso propósito de compreender qual foi a abordagem proposta para a aprendizagem dos números inteiros relativos no início do período de disseminação da Matemática Moderna, nos liceus. A nossa fonte será o livro de texto oficial à época, ou seja, o *Compêndio de Matemática*, do 1.º ano do Curso Geral dos liceus.

ABORDAGEM TEÓRICO-METODOLÓGICA

Valente (2007) destaca o papel dos livros de texto e a sua ligação com o desenvolvimento da matemática escolar, salientando que a disciplina de matemática é uma das em que é mais evidente a relação entre os livros e o ensino. Esta relação tão próxima entre a disciplina e os livros dá-lhes um estatuto especial como fonte para a história dos saberes escolares. Valente (2019) ressalta que os manuais pedagógicos, os livros de texto e os programas de ensino são documentos de referência, de um dado tempo, para o trabalho docente, onde são fixados os saberes instituídos, ou seja, os saberes objetivados.

A análise documental é "uma operação ou um conjunto de operações visando representar o conteúdo de um documento sob a forma diferente do original, a fim de facilitar num estado ulterior, a sua consulta e referenciação" (Bardin 1977, p. 45).

A fonte documental do nosso estudo é um livro de texto, o *Compêndio de Matemática*, do 1.º ano do Curso Geral. A estrutura da análise foi adaptada de uma proposta de Machado (2005), e compreende o contexto histórico, os autores, caraterísticas da obra e abordagem aos números inteiros relativos.

Pela relevância que os livros de texto assumem no contexto de ensino e aprendizagem, o seu conteúdo e estrutura são muito importantes para a promoção de uma visão específica de currículo (Okeeffe, 2013). Para Okeeffe (2013) existem várias características dos livros de texto que podem ter impactos positivos ou negativos na aprendizagem, como a linguagem, a ciência, as técnicas de impressão ou o significado das imagens. Para a autora a análise dos livros é um meio pelo qual essas características podem ser identificadas. Okeeffe (2013) estabeleceu uma estrutura para análise que compreende quatro elementos principais: conteúdo, estrutura, expectativa e linguagem, que podemos usar para observar a abordagem dos números relativos usada no livro de texto associado à alteração curricular da Matemática Moderna. A estrutura do conteúdo inclui aspetos como formação de valor, elementos motivacionais, acessibilidade, ilustrações, guias de estudo, entre outros. A dimensão estrutura compreende como o livro de texto está organizado, a distribuição do conteúdo, as conexões entre diferentes assuntos, conhecimentos e informações e o processo de constituição. A dimensão da expectativa pode impactar a forma como os alunos lidam com os temas apresentados, se, por exemplo, o foco de um livro de matemática está na repetição e na prática, então um aluno irá inconscientemente tentar replicar um método anterior quando encontrar uma questão, sem tentar usar competências de resolução de problemas. A dimensão linguagem inclui características como tipo de discurso (narração, descrição, etc.), conectores entre frases e estruturas semânticas; para análises mais refinadas, o autor fornece três subtítulos: significantes de palavras, sinais notacionais e sinais gráficos (Okeeffe, 2013).

ANÁLISES E RESULTADOS

Contexto histórico

Como referimos na introdução, que também contextualiza historicamente, há uma experimentação iniciada em 1963. Esta experiência foi dirigida pela Comissão encarregada da actualização dos programas da disciplina de Matemática do 3.º ciclo do ensino liceal. Integravam a Comissão José Sebastião e Silva[2] (presidente), professor catedrático da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa; e, Jaime Furtado Leote,[3] Manuel Augusto da Silva,[4] António Augusto Lopes[5] (vogais), professores metodólogos[6] de Matemática. No âmbito da implementação experiência, os novos conteúdos matemáticos não eram conhecidos dos professores, pelo que nesta área, a estratégia utilizada pela Comissão foi a promoção a partir de 1964 de cursos de atualização de professores visando uma formação matemática adequada para poderem corresponder à tarefa de leccionar um novo currículo. Durante o período de férias estivais, os membros da Comissão e outros professores regiam cursos de aperfeiçoamento de professores no Liceu de Oeiras perto de Lisboa. Estes, eram referidos pelos participantes como os Cursos de Oeiras, e realizaram-se, pelo menos, até 1971 (Almeida, 2013). António Almeida Costa[7] e Alfredo Osório dos Anjos[8] foram formadores nestes cursos, para além de trabalharem em liceus onde os candidatos a professores liceais realizavam o seu estágio. (Almeida e Matos, 2021).

Essa experiência de 1963 visou a modernização do ensino da Matemática, relativamente a conteúdos e métodos e lançou as bases para as formas pelas quais a reforma foi desenvolvida posteriormente. Com efeito, as ideias reformadoras chegam, também, aos outros graus do sistema de ensino português. O ensino técnico desenvolve uma experiência a partir de 1967 e no ensino primário, embora novos programas só tenham sido adotados em 1975, as novas ideias são divulgadas através de iniciativas diversas desde o início dos anos 1960. A Telescola, iniciada em 1965, e o Ciclo Preparatório do Ensino Secundário em 1968, destinados a alunos dos atuais 5.º e 6.º anos de escolaridade, contam com programas de Matemática Moderna desde o seu início.

Apesar de existirem algumas vozes críticas da reforma (Almeida, Matos e Almeida, 2022), elas são minoritárias nesta época e não impediram a grande alteração curricular da matemática escolar que vai ocorrer a partir de 1968. O centro da reforma da Matemática Moderna já não está na preo-

[2] José Sebastião e Silva (1914-1972), era na época um matemático respeitado da Universidade de Lisboa e tinha realizado boa parte dos seus estudos doutorais em Roma. A sua estadia em Itália nos tempos conturbados da 2.ª Guerra Mundial permitiu-lhe um conhecimento pessoal muito próximo de um dos seus orientadores, Guido Castelnuovo e de sua filha Emma Castelnuovo, personagem importante na época da Matemática Moderna. Para além dos seus trabalhos em lógica e teoria das distribuições, Sebastião e Silva, que desde 1955 era delegado à International Commission on Mathematical Instruction, conhecia de perto as novas tendências curriculares e, desde 1958, sobre elas vinha realizando alguma reflexão e intervenção junto de professores das escolas secundárias.

[3] Licenciado em Matemática. Era professor da disciplina no ensino secundário e metodólogo no Liceu Normal Pedro Nunes. Foi Vice-reitor e Reitor deste liceu, em cuja qualidade integrou a Câmara Corporativa, representando o ensino secundário.

[4] Licenciado em Matemática. Era professor da disciplina no ensino secundário e autor de livros de Matemática. Era metodólogo no Liceu Normal de D. João III, em Coimbra.

[5] Licenciado em Matemática. Era professor da disciplina no ensino secundário e autor de livros de texto de Matemática para o ensino liceal. Era metodólogo no Liceu Normal de D. Manuel II, no Porto.

[6] Formadores de professores – os liceus normais, únicos responsáveis pela formação profissional dos professores liceais, localizavam-se em Lisboa, Porto e Coimbra e os metodólogos eram os responsáveis pelo acompanhamento dos futuros professores.

[7] Licenciado em Matemática. Era professor da disciplina no ensino secundário e um participante ativo na reforma da Matemática Moderna. Foi autor de livros de texto e professor metodólogo em Coimbra.

[8] Licenciado em Matemática. Era professor da disciplina no ensino secundário e um participante ativo na reforma da Matemática Moderna. Colaborou com Sebastião e Silva no âmbito dos Textos-piloto produzidos para a experiência. Foi autor de livros de texto e professor metodólogo em Lisboa.

cupação em desenvolver nos últimos anos dos liceus um curso de elite para a preparação de técnicos superiores, sendo agora tempo de levar as novas ideias à generalidade dos alunos e a outras áreas do sistema educativo. Embora a importância da Comissão tivesse diminuído, os seus membros restantes (Sebastião e Silva e Augusto Lopes) tiveram um papel central nesta nova fase, na elaboração do programa e na formação de professores do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (Bento, 2012). Nos liceus e nas escolas técnicas, as novas ideias são generalizadas depois de 1970 para alunos do Curso Geral do Ensino Liceal (correspondendo aos atuais 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade) (Almeida e Candeias, 2014; Matos, 2014).

Os autores

O *Compêndio de Matemática*, para o 1.º ano do Curso Geral do ensino liceal, é uma obra que tem dois volumes. Este livro é da autoria de António Almeida Costa e Alfredo Osório dos Anjos. Os autores eram professores de Matemática, tinham experiência acumulada em anos anteriores de aulas experimentais e como formadores nos cursos de atualização de professores no período da experimentação. Foram participantes ativos na reforma da Matemática Moderna nos liceus.

A obra e a abordagem aos números inteiros relativos

Ambos os volumes do *Compêndio* têm capa dura e com fundo preto, a capa do primeiro volume tem impressos os símbolos , , e (Figura 1), e a do segundo volume tem impressa a soma de dois vetores. Na página que antecede o prefácio dos livros está escrito: "Compêndio impresso ao abrigo do Decreto-lei n.º 47587 de 10-3-1967" (Costa; Anjos, 1971). Além disso, estes livros estão numerados e autenticados pelo Ministério da Educação e Cultura. O livro que analisámos tem o número 13602. Observando o índice podemos verificar que tem 6 capítulos (I-Revisões, II-Números racionais relativos, III-Equações em Q, IV-Relações binárias, V-Aplicações).

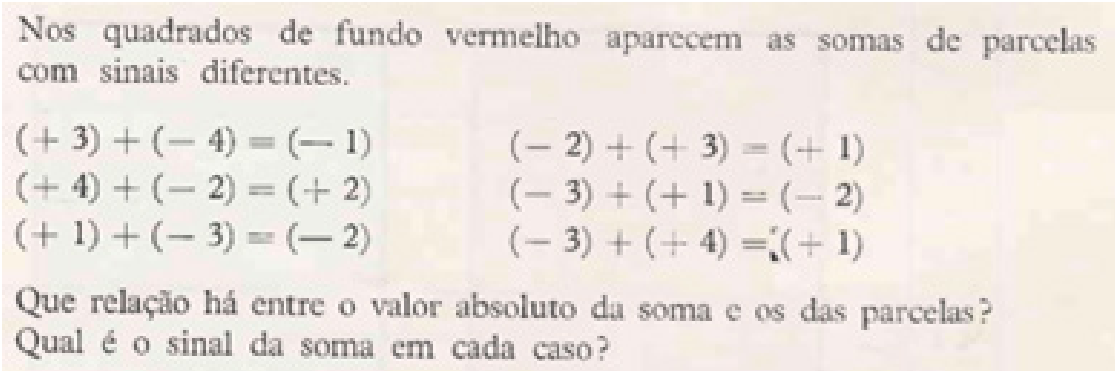
Figura 1 – Capas do Compêndio de Matemática, para o 1.º ano do Curso Geral do ensino liceal, volumes 1 e 2

Fonte: Costa e Anjos (1971)

A leitura do prefácio do livro analisado do *Compêndio* revela-nos que os livros procuraram dar resposta aos processos de modernização do ensino da Matemática. Os autores acentuam o caráter transitório de qualquer experiência de sentido pedagógico e revelam que os livros refletem do momento de indecisão em que se vivia, em termos programáticos, e a urgência do seu aparecimento. Para os autores, o desejo de uma maior clareza teria prejudicado, em alguns casos, um sentido mais definido de rigor, como é o caso "da escolha das grandezas suscetíveis de variar em dois sentidos opostos, em que se deixou na sombra o seu caráter aditivo, e da névoa inevitável da criação dos números reais." (Costa; Anjos, 1971, p. 5). Esta introdução revela as intenções dos autores e as tensões a que estiveram sujeitos.

A análise da estrutura da obra (Okeeffe, 2013) revelou que são livros impressos a duas cores, preto e vermelho, e não apresentam referências bibliográficas ou indicação de outras fontes relacionadas com assuntos matemáticos. Observámos a existência de vários exercícios de aplicação que entremeiam os textos e que, usualmente, existe uma seleção de exercícios de aplicação e respetiva solução no final de cada seção dos capítulos. Não existe um livro de exercícios associado a esta obra.

Figura 2 – Aspeto motivacional


Nos quadrados de fundo vermelho aparecem as somas de parcelas com sinais diferentes.

(+ 3) + (− 4) = (− 1)
(+ 4) + (− 2) = (+ 2)
(+ 1) + (− 3) = (− 2)

(− 2) + (+ 3) = (+ 1)
(− 3) + (+ 1) = (− 2)
(− 3) + (+ 4) = (+ 1)

Que relação há entre o valor absoluto da soma e os das parcelas?
Qual é o sinal da soma em cada caso?

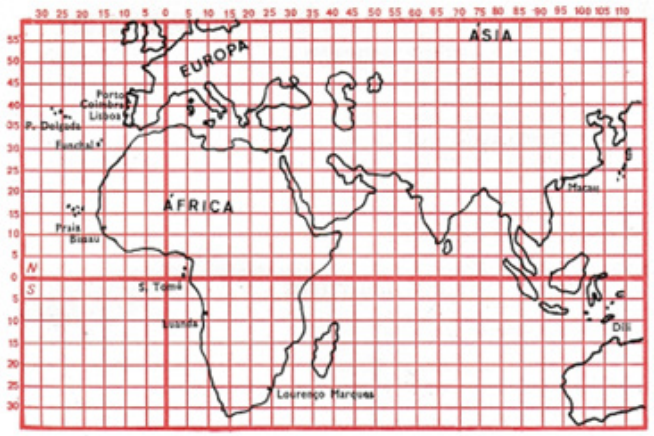
Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 52)

A análise evidenciou que na apresentação dos conteúdos existem elementos motivacionais. Há momentos em que é pedida a intervenção do aluno, por exemplo, colocando questões que tentam motivar a reflexão e orientar na obtenção de conclusões (Figura 2), ou deixando espaços em branco para o aluno completar. Isto representa que ao aluno é criada uma expectativa (Okeeffe, 2013) de aprendizagem participante.

No que respeita ao conteúdo (Okeeffe, 2013), os números inteiros relativos são abordados no segundo capítulo do primeiro volume, intitulado 'Números racionais relativos', que está organizado em cinco pontos: 1. Exemplos de grandezas que podem variar em dois sentidos opostos; 2. Números inteiros relativos; 3. Adição de números relativos; 4. Subtração de números inteiros relativos; 5. Multiplicação de números inteiros relativos; 6. Valores numéricos de expressões literais.

O capítulo começa com considerações sobre grandezas que podem variar em direções opostas. Os autores incluem vários exemplos iniciais, tais como a longitude e latitude, e uma ilustração (*Figura 3*) que respondem à necessidade de despertar um conceito.

Figura 3 – Exemplo de grandezas que podem variar em dois sentidos opostos

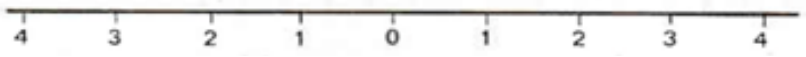


Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 41)

Os exemplos iniciais mostram que certas grandezas se avaliam em relação a referências escolhidas. Partindo da referência, os valores podem variar para um ou outro lado. Assim, ao número que dá o valor da grandeza teremos de juntar uma especificação relativa ao sentido.

A introdução aos números relativos, inicia com a noção de número negativo. Apoiando-se nos exemplos de grandezas referidos anteriormente, os autores realçam que tudo se passa como se tivéssemos uma dupla graduação a partir do zero (Figura 4).

Figura 4 – Ilustração de dupla graduação a partir do zero

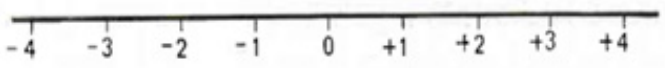


Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 42)

Como cada número aparece duas vezes, temos de distinguir se estamos falando do número da direita ou do número da esquerda. É então apresentada uma forma conveniente de diferenciá-los, que é preceder pelo sinal – os números à esquerda do zero. Indicando como designar esses números "– 3 …… menos três; – 2 …… menos dois; etc." (Costa & Anjos, 1971, p. 43). Esses novos números, caracterizados pelo sinal – para ilustrar sua posição à esquerda do zero, são chamados de números negativos.

Os autores salientam que o zero separa duas espécies de números, de um lado, os números negativos: … – 5, – 4, – 3, – 2, – 1; do outro lado os números: 1, 2, 3, 4, 5…, que, tal como o zero, não têm sinal associado, e por isso se chamam números absolutos. Para marcar bem a posição dos números é habitual preceder do sinal + os números à direita do zero (Figura 5).

Figura 5 – Ilustração da posição dos números negativos e positivos em relação ao zero



Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 43)

Os números absolutos, diferentes de zero, escritos sob esta nova forma tomam o nome de números positivos. Ou seja, "4 é idêntico a +4 (mais quatro)" (Costa; Anjos, 1971, p. 43). Em seguida, apresentam a definição de número negativo, número positivo e número relativo. Definem

o conjunto dos números inteiros relativos, designando-o pela letra Z, sendo Z={...-4, -3, -2, -1,0, +1, +2, +3, +4,...} e subconjuntos de Z: os números inteiros negativos, Z^- os números inteiros positivos Z^+, e os números inteiros não negativos, Z_0^+, sendo Z^-={..., -5, -4, -3, -2, -1}, Z^+={+1, +2, +3, +4, +5,...} e Z_0^+={0, +1, +2, +3, +4, +5...}. Os autores escrevem as igualdades $\mathbb{N} = Z^+$ e $\mathbb{N}_0 = Z_0^+$, justificando-as com conhecimentos prévios de conjuntos, é introduzida uma ilustração de Z como reunião de dois conjuntos (Figura 6).

Figura 6 – Ilustração de Z como reunião de dois conjuntos.

Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 44)

As últimas definições apresentadas, neste momento, são: valor absoluto de um número relativo e números simétricos. A representação simbólica do valor absoluto também é abordada.

Em seguida introduzem-se o 'sinal operacional' e o 'sinal posicional'. Começando por esclarecer que os sinais + e – que definem os números relativos já são os conhecidos da adição e da subtração, mas nesses números eles não representam qualquer uma dessas operações; eles servem, apenas, para conferir aos números a qualidade de positivos ou negativos. Prosseguem dizendo que para evidenciar bem que o sinal faz parte do número é costume escrever os números relativos dentro de parêntesis curvos dando exemplos, como (+3) e (–16). Diferenciando que os sinais + e – são 'operacionais' quando, por ele, se representam as operações adição e subtração, e são 'posicionais' quando, por ele, se estabelece que um número relativo é positivo ou negativo. Os autores sublinham a importância do conhecimento dos números inteiros relativos referindo que estes vão permitir simplificar a linguagem, ilustrando com exemplos do mundo que nos rodeia,

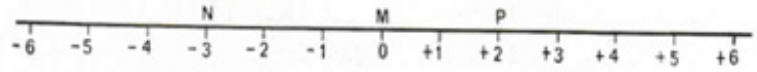
> *Falando de temperaturas:*
> *Em vez de*
> *A temperatura das penhas Douradas é de 3 graus abaixo de zero,*
> *podemos dizer*
> *A temperatura das penhas Douradas é –3 graus.*
> *b) Falando de altitudes:*
> *Em vez de*
> *A altitude do pico de Ramelau é 2963 m acima de zero,*
> *podemos dizer*
> *A altitude do pico de Ramelau é +2963 m (Costa; Anjos, 1971, p. 46).*

Depois dos exemplos, pede-se ao aluno, como exercício, que dê outros exemplos de utilização da linguagem dos números relativos.

Os autores iniciam a introdução à reta orientada, lembrando a convenção previamente acordada, se sobre uma reta fixarmos um ponto M para assinalar o zero, os números positivos sempre ficam no lado direito do zero, os números negativos sempre ficam no lado esquerdo do zero. Assim, o sentido positivo será o "da esquerda para a direita" e o sentido negativo o outro. E, a reta, como qualquer outra em que se fixou um sentido, tomará o nome de eixo ou reta orientada (Figura 7).

Numa reta orientada, cada número relativo corresponde a um ponto, que chamado de 'abcissa' desse ponto. O ponto cuja abcissa é zero é a 'origem das abcissas'**.**

Figura 7 – Reta orientada



Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 46)

Em seguida introduz-se a de relação de ordem (Figura 8).

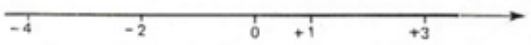
Figura 8 – Introdução à relação de ordem

Em cinco dias consecutivos do mês de Janeiro, a temperatura assinalada às 9 horas nas Penhas Douradas atingiu os valores seguintes:

DIAS	15	16	17	18	19
Temperaturas em graus centígrados	−4	−2	0	+1	+3

Em que dia a temperatura foi mais baixa?
E mais alta?
A temperatura mais baixa foi a do dia 15, aumentando sucessivamente até ao dia 19.

E se situarmos os valores num eixo



podemos convencionar que os números relativos aumentam «da esquerda para a direita.»

Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 47)

Concluindo que: entre dois números negativos, é maior aquele que tem valor absoluto menor (– 2 > – 4); zero é maior que todo número inteiro negativo (0 > – 2); todo número inteiro positivo é maior que zero (+1 > 0); entre dois números positivos, é maior aquele que tem valor absoluto maior (–+3 > +1); todo número inteiro positivo é maior que todo número inteiro negativo (+1 > – 2). São propostos exercícios de consolidação, apresentamos um exemplo "2) Diz quais das afirmações são verdadeiras e quais são falsas: a) (– 4) > (+3); b) (+4) > (+3); c) (– 2) > (+2)" (Costa; Anjos, 1971, p. 48).

A adição de números relativos é introduzida com recurso a depósitos e levantamentos, onde os números positivos são usados para mostrar o depósito de uma quantia e os números negativos são usados para mostrar o levantamento. A adição de números inteiros é contextualizada numa situação concreta para os alunos (Figura 9).

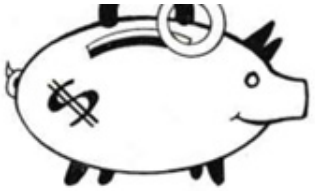
Figura 9 – Contextualização da adição de números relativos

Os pais do Paulo ofereceram-lhe um mealheiro onde ele deposita o dinheiro que vai recebendo.

Por vezes, também o abre para levantar a importância necessária a qualquer despesa que queira fazer.

Depósitos e levantamentos são as «operações bancárias» do Paulo.

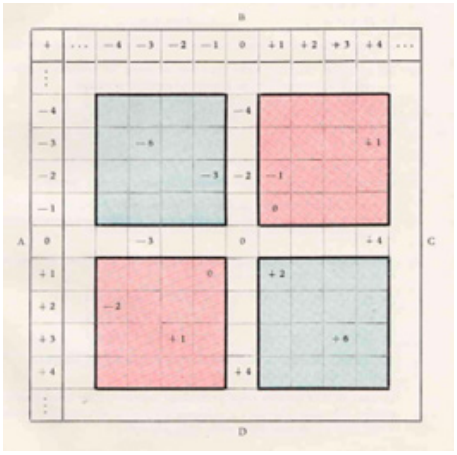
Cuidadoso, ele vai fazendo o balanço das suas economias, servindo-se do conhecimento que possui dos números relativos.



Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 48)

A introdução à adição de números relativos faz-se recorrendo à noção de ganhos e perdas. São apresentados exemplos de apuramento do saldo de alguns dias, colocando perguntas aos alunos. No final sistematizam, escrevendo as igualdades que exemplificam o apuramento de cada saldo: (+20) + (+5) = (+25); (+10) + (- 5) = (+5); (+5) + (-12) = (-7); (-5) + (-10) = (-15); (+10) + (-10) = 0; (-15) + 0 = (-15). Em seguida, fazem notar aos alunos que estes já conheciam a adição em $\mathbb{N}_0$, e agora surgia a adição em $\mathbb{Z}$, realçando que "Não se trata da mesma operação! (...) na adição números relativos há regras novas para aprender" (Costa; Anjos, 1971, p. 50, sublinhado no original). Sempre que só aparecem números positivos ou o zero a adição em $\mathbb{Z}$, mantém a tabuada de $\mathbb{N}_0$, o aparecimento de parcelas negativas e que cria a necessidade de regras novas.

Figura 10 – Quadro de tabuada da adição de números relativos

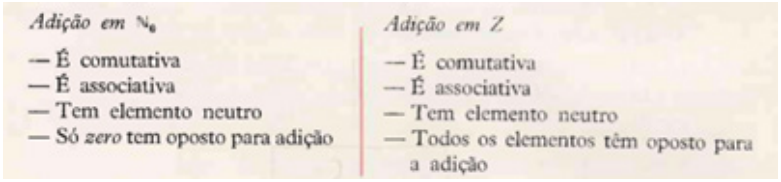


Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 51)

A tabela da figura 10 é usada para obter as regras para somar dois números relativos. Para preencher a tabela, os autores recomendam a utilização da ideia de depósitos e levantamentos, se necessário. A adição em $\mathbb{Z}$ é definida como um prolongamento da adição em $\mathbb{N}_0$.

Após introduzir a adição de números relativos, abordam-se as suas propriedades, cujo estudo é concluído apresentando uma comparação entre propriedades de adição em $\mathbb{N}_0$ e em $\mathbb{Z}$(Figura 11). Segue-se o estudo da adição sucessiva e exercícios.

Figura 11 – Estudo comparativo



Adição em $\mathbb{N}_0$	*Adição em Z*
— É comutativa	— É comutativa
— É associativa	— É associativa
— Tem elemento neutro	— Tem elemento neutro
— Só *zero* tem oposto para adição	— Todos os elementos têm oposto para a adição

Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 54)

No que respeita à subtração em $\mathbb{Z}$, ela decorre do conhecimento da adição, recorrendo à igualdade $b+x=a$, e é definida como um prolongamento da subtração em $\mathbb{N}_0$. A subtração em $\mathbb{Z}$ é a operação inversa da adição em $\mathbb{Z}$. Por meio de exemplos e tabelas para completar o preenchimento, chega-se a uma regra. Ressalta-se que a subtração é sempre possível em $\mathbb{Z}$. A seguir, apresenta-se a soma algébrica e a simplificação da escrita. Ao longo do texto são apresentados pequenos grupos de exercícios, seguidos de soluções.

Antes de prosseguir, surge um conjunto diversificado de tarefas, incluindo questões relacionadas com o reconhecimento de conceitos e alguns problemas contextualizados em situações do quotidiano.

A multiplicação em $\mathbb{Z}$ é introduzida como uma extensão da multiplicação em $\mathbb{N}_0$, mantendo-se distributiva em relação à adição e subtração. Os autores chegam às regras da multiplicação de números relativos sistematicamente e usando exemplos, começam pela multiplicação de dois números positivos (mantém-se a tabuada de $\mathbb{N}_0$). No caso da multiplicação de dois números com sinais contrários, começam por escrever a multiplicação (+4) x (-3), referindo que os alunos já sabem calcular (+4) x (+3). Vão adicionar os dois produtos (+4) x (-3) + (+4) x (+3) = (+4) x [(-3) + (+3)] = (+4) x 0 = 0. Assim, os números são simétricos. E, como (+4) x (+3) = (+12), vem (+4) x (-3) = (-12).

Escritas as regras da multiplicação de números relativos, apresenta-se a regra dos sinais da multiplicação em tabela (Figura 12). As propriedades são discutidas em seguida. Divisão e potenciação também são abordadas. Ao longo do texto são apresentados pequenos grupos de exercícios, seguidos de soluções.

Figura 12 – Regra dos sinais

Fonte: Costa e Anjos (1971, p. 71)

Este livro constitui um recurso estruturante do currículo apresentado a professores e alunos. A análise evidenciou que a apresentação dos conteúdos é expositiva, com vários momentos em que é pedida a intervenção do aluno, incluindo pequenas tarefas que o motivam a refletir e o orientam na obtenção de conclusões. Isto representa que ao aluno é criada uma expectativa (Okeeffe, 2013) de

aprendizagem participante. O livro é apresentado em linguagem (Okeeffe, 2013) simples e direta, dirigida ao aluno.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A reforma da matemática moderna trouxe profundas transformações no currículo de matemática ensinado em Portugal, em todos os subsistemas de ensino não superior. Analisámos o *Compêndio de Matemática*, do 1.º ano do Curso Geral dos liceus propósito de compreender como foram abordados os números inteiros relativos e as suas operações, no início do período de disseminação da Matemática Moderna.

A análise deste livro de texto reveste-se de um interesse particular dado que exibe metodologias de ensino que envolvem o aluno na aprendizagem, introduzem uma matemática mais formal, mas não deixam de parte a importância das aplicações. No que respeita à estrutura, o livro é redigido em duas cores, com ilustrações várias que contribuem para a compreensão dos conteúdos por parte dos alunos. Há, também, espaços em branco para completar e a palavra "Porquê?" aparece muitas vezes, motivando o aluno a refletir. Ao longo do livro encontram-se exercícios de aplicação a diferentes contextos, relacionando a matemática com a realidade dos alunos.

A introdução aos números inteiros relativos é realizada de um modo intuitivo. A linguagem de conjuntos característica da Matemática moderna, pode ser observada na criação do conjunto dos números inteiros relativos, $\mathbb{Z}$. A adição, subtração e multiplicação de números inteiros relativos são definidas como prolongamento das definidas em $\mathbb{N}_0$. Há uma enfase nas propriedades das operações, para que os alunos se familiarizassem com uma linguagem abstrata própria.

Os autores deste livro eram professores com experiência acumulada em anos anteriores na modernização do ensino da matemática. Neste sentido, não surpreende que o livro seja dirigido ao aluno e peça o seu envolvimento na aprendizagem, a par com uma formalização da matemática consistente com a reforma da matemática moderna.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projecto «UID/04647/2023» do CICS.NOVA – Centro Interdisciplinar de Ciências Sociais da Universidade Nova de Lisboa.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Mária Cristina e CANDEIAS, Rui. Os programas de matemática do ensino primário, da Telescola e do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário. In ALMEIDA, Antonio; MATOS, José Manuel (Ed.). **A matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974)** Caparica: Editora UIED e APM, 2014. p. 39-68.

ALMEIDA, Mária Cristina. **Um olhar sobre o ensino da Matemática, guiado por António Augusto Lopes**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Nova de Lisboa. 2013

ALMEIDA, Mária Cristina; MATOS, José Manuel. A avaliação da experiência de Matemática Moderna nos liceus portugueses. R**evista de Matemática, Ensino e Cultura -REMATEC,** Belém/

PA, v. 16, Fluxo Contínuo, p. 43-58, Jan-Dez., 2021. DOI: https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p43-58.id321

ALMEIDA, Mária Cristina; MATOS, José Manuel; ALMEIDA, Antonio José. **Transcrição das notícias sobre Matemática Moderna publicadas nos jornais diários de Lisboa**. Lisboa: Editora APM., 2022. https://www.apm.pt/files/files/Ebooks/Noticias_MM/ Noticias MM. pdf

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BENTO, Marta Alexandra. **A introdução da Matemática Moderna no Ciclo Preparatório do Ensino Secundário em Portugal**. Tese (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Nova de Lisboa, 2012.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, 2, Porto Alegre, Pannonica, p. 177-229, 1990.

COSTA, António Almeida e ANJOS, Alfredo Ósório. **Compêndio de Matemática**. Porto: Porto Editora, 1971.

DE BOCK, Dirk. Modern Mathematics: An International Movement Diversely Shaped in National Contexts. In DE BOCK, Dirk (Ed.) **Modern Mathematics. An International Movement?** Editora: Springer. 2023, p. 1 -12.

FURINGHETTI, Fulvia; MATOS, José Manuel; MENGHINI, Marta. From mathematics and education, to mathematics education. In CLEMENTS'S, McKenzie; KEITEL-KREIDT Christine; KILPATRICK, Jeremy; BISHOP, Alan; JEUNG, Frederick. (Ed.), **Third International Handbook of Mathematics Education** Springer, 2013, p. 273-302.

JULIA, Dominque. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**. Campinas, n.º 1, jan./jun, p. 9-43, 2001.

MACHADO, Alexander Maz; ROMERO, Luis Rico. Números negativos en los siglos XVIII y XIX: fenomenología y representaciones. **Electronic Journal of Research in Educational Psychology**, *7*(1). p. 537-554.2009. https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1343

MACHADO, Alexander Maz. **Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX,** Tese de Doutoramento, Universidade de Granada. 2005.

MATOS, José Manuel. Changing representations and practices in school mathematics: the case of Modern Math in Portugal. In BJARNADÓTTIR, Kristín; FURINGHETTI, Fluvia; SCHUBRING, Gert (Eds.), "**Dig where you stand" Proceedings of a Conference on On-going Research in the History of Mathematics Education,** Garđabær, Iceland, June 20-24. Reikyavik: University of Iceland, 2009 p. 123-137.

MATOS, José Manuel. Mathematics education in Spain and Portugal. Portugal. In KARP, Alexander; SCHUBRING, Gert (Eds.), **Handbook on the History of Mathematics Education**. Springer, 2014, p. 291-302.

MATOS, José Manuel; ALMEIDA, Mária Cristina. The Distinct Facets of Modern Mathematics in Portugal. In DE BOCK, Dirk (Ed.) **Modern Mathematics. An International Movement?** Springer, 2023, p. 169-198.

MOON, Bob. **The "New Maths" curriculum controversy**. **An international story.** Falmer Press, 1986.

OKEEFFE, Lisa. A Framework to Textbook Analysis. **International Review of Contemporary Learning Research**, v. 2. n. 1, 2013, p. 1-13 http://dx.doi.org/10.12785/IRCLR/020101

SOUSA, Cláudia Sofia. **O Ensino de Matemática no CPES. Análise de Manuais**. Tese (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Nova de Lisboa, 2012.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**. UFSC v. 2. n. 1, 2007, p. 28-49. https://doi.org/10.5007/%25x

VALENTE, Wagner Rodrigues. (2019). Saber objetivado e formação de professores: reflexões pedagógico-epistemológicas. **Revista História Da Educação**, v. 23, 2019, p 1-22. https://doi.org/10.1590/2236-3459/77747

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

O ensino de Matemática a partir de cadernos escolares: Colégio São José/RS (1905)

Teaching Mathematics from school notebooks: Colégio São José/RS (1905)

Malcus Cassiano Kuhn[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul

Silvio Luiz Martins Britto[2]
Faculdades Integradas de Taquara – FACCAT

RESUMO

O trabalho objetiva apresentar reflexões sobre o ensino de Matemática a partir de dois cadernos escolares, de 1905, pertencentes a uma ex-aluna do Colégio São José das Irmãs Franciscanas de São Leopoldo, Rio Grande do Sul. As Irmãs fundaram o Colégio São José no dia 5 de abril de 1872, atuando na formação feminina até o ano de 1970, quando passa a ofertar turmas mistas em seus cursos. Como o tema de pesquisa se insere na História da Educação Matemática, este estudo qualitativo e documental ampara-se em referenciais sobre a cultura escolar através de seus cadernos. Os 240 exercícios e problemas presentes no caderno de contas, todos encontrados no livro de Aritmética das Professoras do Colégio São José, de 1900, abordam aritmética e geometria plana. Embora o caderno contenha uma grande quantidade de exercícios resolvidos, também possui problemas associados ao dia a dia, com destaque para aplicações do sistema métrico e das medidas de superfície. Os 60 problemas presentes no caderno de geometria abordam o cálculo de área de superfície e, principalmente, de volume de sólidos geométricos. Dezoito desses problemas estão associados ao cotidiano das alunas, envolvendo cálculo de volume de sólidos em forma de prisma, cilindro, cone e tronco de cone, como cuba, poço, cisterna, funil, telhado e balde. Com base no exposto, verifica-se que os exercícios e problemas revelam uma cultura escolar que procurava instrumentalizar gerações de alunas, tanto no gerenciamento de atividades domésticas, quanto profissionais, a partir de um material didático próprio para as aulas de Matemática.

Palavras-chave: História da Educação Matemática; Cadernos Escolares; Aritmética; Geometria; Protagonismo Feminino.

ABSTRACT

This paper aims to present reflections on the teaching of Mathematics based on two school notebooks from 1905, belonging to a former student of the Colégio São José of the Franciscan Sisters of São Leopoldo, Rio Grande do Sul. The Sisters founded Colégio São José on April 5, 1872, and worked in the education of female students until 1970, when they began offering mixed-gender classes in their courses. Since the research topic is part of the History of Mathematics Education, this qualitative and documentary study is supported by references on school culture through their notebooks. The 240 exercises and problems present in the notebook, all found in the Arithmetic Book of the Teachers of Colégio São José, from 1900, address arithmetic and plane geometry. Although the notebook contains a large number of solved exercises, it also contains problems associated with everyday life, with emphasis on applications of the metric system and surface measurements. The 60 problems in the geometry notebook deal with the calculation of surface area and, mainly, the volume of geometric solids. Eighteen of these problems are related to the students' daily lives, involving the calculation of the volume of solids in the shape of prisms, cylinders, cones and truncated cones, such as tubs, wells, cisterns, funnels, roofs and buckets. Based on the above, it can be seen that the exercises and problems reveal a school culture that sought to equip generations of students, both in the management of domestic and professional activities, using teaching materials specifically designed for Mathematics classes.

Keywords: History of Mathematics Education; School Notebooks; Arithmetic; Geometry; Female Protagonism.

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil (ULBRA). Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSul), Lajeado, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: malcuskuhn@ifsul.edu.br.

[2] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil (ULBRA). Professor das Faculdades Integradas de Taquara (FACCAT), Taquara, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: silviobritto@faccat.br.

INTRODUÇÃO

O tema deste trabalho está relacionado com a Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã no Brasil, que completa 153 anos de missão religiosa e educacional no Rio Grande do Sul (RS), no mês de abril de 2025. O papel das mulheres na construção da sociedade e da história gaúcha, na multiplicidade de talentos e áreas de atuação, está sendo alvo de pesquisas. Particularmente, o protagonismo feminino no ensino da Matemática no Colégio São José das Irmãs Franciscanas de São Leopoldo/RS, nos séculos XIX e XX, constituiu temática de uma investigação financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS), desenvolvida pelos autores deste artigo, no período de 2022 a 2024, e apoiada pela Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã – Província[3] do Sagrado Coração de Jesus –, localizada em São Leopoldo.

Por ocasião de pesquisas no Centro Histórico das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã – localizado em São Leopoldo, os autores deste trabalho encontraram dois cadernos escolares de Elly Lucia Carolina Presser, do ano de 1905. Durante o processo de análise desses cadernos de contas, em um deles se observou a presença de exercícios e problemas resolvidos do livro de *Arithmetica Elementar Pratica* – Coleção de regras, exercícios e problemas metodicamente compilados pelas professoras do Collegio São José em São Leopoldo – 3ª edição correcta e augmentada – IIIª parte, publicado em 1900[4]. O outro caderno é constituído por uma série de 60 problemas resolvidos com o título "Medida dos volumes". Apesar desse caderno conter uma sequência de estudo da área de superfície e do volume dos sólidos geométricos, conforme o livro de *Arithmetica* das Professoras do Collegio São José (1900), nenhum dos problemas foram localizados no referido livro. No entanto, levanta-se a hipótese de que esse caderno é constituído por problemas sugeridos pela professora, uma vez que o livro apresenta a parte teórica e uma coleção de exercícios, sem exemplos resolvidos.

Essas fontes de estudo levaram ao seguinte questionamento: O que os exercícios e os problemas encontrados nos cadernos de contas de uma ex-aluna do Colégio São José de São Leopoldo, do início do século XX, revelam sobre a Matemática praticada nesse Colégio, voltado para a formação feminina? A partir desse problema, o trabalho se propõe a apresentar reflexões sobre o ensino de Matemática, a partir de dois cadernos escolares de 1905, pertencentes a uma ex-aluna do Colégio São José das Irmãs Franciscanas de São Leopoldo, RS. Nesse sentido, realiza-se uma investigação com abordagem qualitativa, por meio de análise documental, sendo dois cadernos escolares, do início do século passado, as principais fontes primárias desta pesquisa histórica.

Além desta introdução, o trabalho aborda a cultura escolar expressa por meio de cadernos escolares, traz um pouco da história da Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã no Brasil e do Colégio São José de São Leopoldo, apresenta as reflexões sobre os exercícios e problemas resolvidos nos cadernos escolares do ano de 1905 e as considerações finais deste estudo.

REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

Como o tema desta investigação insere-se na História da Educação Matemática do início do século XX, no RS, parte-se de Prost (2008), que considera a constituição de fatos históricos a partir

[3] Trata-se do conjunto das instituições de ensino, de saúde e de assistência social de uma ordem religiosa, dentro de uma divisão territorial, administrada por uma superiora provincial, que atua supervisionando todas as suas membras, juntamente com auxiliares em cada instituição.

[4] Esse livro de Aritmética foi localizado no Instituto Anchietano de Pesquisas da Unisinos.

de traços deixados no presente pelo passado. O autor pondera que o trajeto da produção histórica, na qualidade de interesse de pesquisa, perpassa a formulação de questões históricas legítimas, o trabalho com os documentos e a construção de um discurso que seja aceito pela comunidade. Em complemento, acerca do estudo de documentos escritos, Cellard (2008) destaca:

> O documento escrito constitui uma fonte extremamente preciosa para todo pesquisador. Ele é, evidentemente, insubstituível em qualquer reconstituição referente a um passado relativamente distante, pois não é raro que ele represente a quase totalidade dos vestígios da atividade humana em determinadas épocas. Além disso, muito frequentemente, ele permanece como o único testemunho de atividades particulares ocorridas num passado recente (Cellard, 2008, p. 295).

Entre as fontes primárias de pesquisas históricas em Educação Matemática, destacam-se os documentos textuais (documentos oficiais, livros, jornais, revistas, cadernos escolares etc.), as fontes visuais (fotografias, gravuras, entre outros) e os registros orais (entrevistas, gravações etc.). Nesse cenário, Chartier (2007, p. 13) escreve que os cadernos escolares "fornecem testemunhos insubstituíveis a respeito dos exercícios escolares, das práticas pedagógicas e do desempenho dos alunos no contexto da sala de aula". A mesma autora complementa que "os cadernos escolares podem nos ajudar a entender o funcionamento da escola de uma maneira diferente da veiculada pelos textos oficiais ou pelos discursos pedagógicos" (Chartier, 2007, p. 14). Nesse sentido, acrescenta-se que:

> A materialidade contida nos cadernos didáticos possibilita identificar especificidades relacionadas a momentos peculiares da história da educação a partir da análise do seu uso, dos conteúdos trabalhados em sala de aula e daqueles registrados pelo aluno. Ao observarmos esses objetos culturais em sua regularidade, é possível identificar a permanência na disposição de enunciados e respostas, a utilização do espaço gráfico da página para textos ou exercícios, os procedimentos que indicam o início ou encerramento de atividades, a organização do tempo por meio da data, entre outros indicadores que marcam a modelação de práticas escolares (Kirchner, 2018, p. 160).

De acordo com Chartier (2007), o caderno passou de um livro de memória, uma vitrine do trabalho escolar[5], no século XIX, para o espelho das aprendizagens em curso, em meados do século XX, quando o papel de celulose substituiu o papel de tecido, tornando os cadernos mais acessíveis com as inovações tecnológicas. Todavia, "o tempo das práticas não acompanha o tempo dos discursos, e a produção dos cadernos 'sem erros' não foi abandonada facilmente" (Kirchner, 2018, p. 161). Os cadernos escolares do século XX, apesar de se apresentarem menos padronizados do que os anteriores, trazem os avanços do aluno, não registrando, contudo, uma escrita espontânea e pessoal, mas o desempenho que se espera dele em relação ao seu período de escolarização (Chartier, 2007).

O trabalho do historiador, conforme Certeau (1982), não se limita a produzir documentos, textos em uma nova linguagem, pois no seu fazer pesquisa há um diálogo constante do presente com o passado e o produto desse diálogo consiste na transformação de objetos naturais em cultura. Nesse sentido, Julia (2001, p. 10) define a cultura escolar como:

[5] "O aluno primeiramente fazia o rascunho, e o mestre fazia a correção coletiva ou individual, para que o exercício fosse passado a limpo, fazendo com que o caderno se transformasse, de acordo com Anne-Marie Chartier, em uma vitrine do trabalho escolar" (Kirchner, 2018, p. 161).

> Um conjunto de normas que estabelecem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de pr*á*ticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos; normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar segundo às épocas.

Complementa-se que Chervel (1990) considera importante o estudo da cultura escolar para a compreensão dos elementos que participam da constituição dos saberes escolares e, em particular, da Matemática escolar e sua história. Dessa forma, busca-se por cadernos escolares de Matemática como fontes documentais primárias desta pesquisa histórica, para a constituição de indícios sobre o ensino de Matemática no Colégio São José das Irmãs Franciscanas, de São Leopoldo, no início do século XX.

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS DO ESTUDO

Esta seção do trabalho está voltada para a apresentação de resultados da pesquisa. Para tanto, na primeira subseção, descreve-se a história da Congregação das Irmãs Franciscanas e do Colégio São José, de São Leopoldo. Na segunda subseção são apresentados os cadernos escolares de 1905, para a constituição de reflexões sobre o ensino de Matemática, para o público feminino, no Colégio São José.

A Congregação das Irmãs Franciscanas e o Colégio São José, de São Leopoldo

A Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã foi fundada pela Madre Madalena Damen[6] (representada na Figura 1), na Holanda, no dia 10 de maio de 1835, sendo sancionada pela Santa Sé em 1852 (Flech, 1993). A Congregação exerceu suas atividades não apenas no país de origem, mas também na Alemanha e em outros países, como o Brasil. Em 1842, padres jesuítas se estabeleceram em São Leopoldo e assumiram a assistência religiosa junto aos imigrantes alemães. No ano de 1866, o padre jesuíta Guilherme Feldhaus, superior da missão alemã, fundada pelos jesuítas, em São Leopoldo, resolveu se dirigir à quarta Superiora Geral das Irmãs Franciscanas, Madre Aloísia Lenders, em Heythuysen, Holanda, com o pedido de enviar algumas Irmãs Franciscanas para São Leopoldo.

[6] Maria Catarina Damen nasceu no dia 19 de novembro de 1787, na Holanda. Viveu no período da Revolução Francesa, em que era proibido praticar a religião. Trabalhando na casa paroquial dos Freis Capuchinhos, conhece a Ordem Franciscana Secular. Em 1817, Catarina emite os votos como franciscana. Em 1825, se transfere para missão na cidade de Heythuysen, Holanda. Posteriormente, junto com outras três Irmãs, funda a Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã, passando a chamar-se Madre Madalena (Flesch, 1993).

Figura 1 – Madre Madalena entre meninas

Fonte: Kuhn e Britto (2024, p. 43).

No começo, bastariam duas, que se dedicassem à educação religiosa para a juventude feminina e a uma escola para meninas. Entretanto, Madre Aloísia rejeitou a proposta, pois tal número seria insuficiente para formar uma comunidade religiosa. Enquanto isso começava a imperar, na Alemanha, o *Kulturkampf,*[7] e as leis decretadas por Bismarck restringiam as atividades das religiosas nas escolas (Flesch, 1993). Diante desse contexto, Madre Aloísia reconsiderou o apelo, e seis Irmãs partiram de Kapellen, Alemanha, no dia 9 de fevereiro de 1872.

Passadas oito semanas, as seis Irmãs chegaram a São Leopoldo, no dia 2 de abril de 1872, com o objetivo de contribuir para a educação de crianças e jovens, em sua maioria, filhas de imigrantes alemães. "No dia 05 de abril, primeira sexta-feira do mês, começaram as aulas, com 23 alunas de 7 a 13 anos, número que foi crescendo de dia para dia" (Flesch, 1993, p. 45). Apesar das limitações de espaço físico, o então recém-fundado Colégio São José ofertava o curso Elementar e já tinha duas pensionistas. Ademais, no dia 1º de maio de 1872, iniciava a oferta do jardim de infância. Não havendo as salas necessárias, as aulas do jardim de infância eram dadas ao ar livre, à sombra de uma laranjeira. Embora houvesse falta de livros, cadernos e demais utensílios escolares, o número de alunas, até o final de 1872, chegou a 80 (Crônica do Colégio São José, 1872).

Com a chegada de mais Irmãs da Europa, no ano de 1874, inicia-se o trabalho missionário em Santa Cruz do Sul, RS, a partir da fundação do Colégio Sagrado Coração de Jesus, que também contou com um noviciado, para a formação de religiosas. A presença inicial das Irmãs Franciscanas nos municípios gaúchos de São Leopoldo e Santa Cruz do Sul impulsionou outras obras religiosas, educacionais e sociais no sul do Brasil. Atuaram na instrução religiosa (catequese), no serviço aos doentes em hospitais, aos idosos em asilos e às crianças em orfanatos. A partir de 1891, as Irmãs começaram atividades em hospitais, com atuação na administração das Santas Casas em diferentes municípios (Flesch, 1993).

Elas também fundaram escolas em outros importantes municípios do RS, tais como Porto Alegre, Santa Maria, Estrela e Pelotas. A sociedade católica alemã da capital gaúcha solicitou a criação de uma escola alemã em Porto Alegre, para meninas, no ano de 1881, denominado Colégio Nossa Senhora dos Anjos. Já no ano de 1886, em Porto Alegre, iniciaram a escolarização de meninas negras (Crônica do Colégio Nossa Senhora dos Anjos, 1886). O primeiro curso de formação de pro-

[7] *Kulturkampf,* ou luta pela cultura, foi um movimento anticlerical alemão do século XIX, iniciado por Otto von Bismarck, chanceler do Império Alemão, em 1872.

fessoras da Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã, no Rio Grande do Sul, começou no ano de 1904, no Colégio Nossa Senhora dos Anjos, em Porto Alegre, transferindo-se, no ano seguinte, para o Colégio Nossa Senhora do Bom Conselho, também na capital gaúcha.

Fundamental, ainda, foi o trabalho das Irmãs nas escolas paroquiais, buscando atender ao apelo da população. De acordo com Flesch (1993), com o passar dos anos, diversas religiosas se dedicaram ao ensino nas próprias paróquias e colégios locais. As escolas criadas pelas Irmãs Franciscanas no RS seguiam os princípios da Madre Madalena Damen, e sua unidade era marcada pelo pertencimento à Província, com respeito especial pela Superiora Provincial, que fazia visitas periódicas a cada unidade de ensino para supervisionar o andamento do processo pedagógico de acordo com as determinações provinciais. "Na vida de Madalena Damen, os valores não foram teorizados; a educação e a pedagogia tinham expressão prática, na convivência" (Rupolo, 2001, p. 93).

No ano de 1923, ocorreu a mudança do Colégio São José, das margens do rio dos Sinos para a Colina do Monte Alverne, onde está localizado atualmente. Aos poucos, a construção foi sendo ampliada, com novos pavilhões para acolher maior número de alunas. No Colégio São José, a formação de professoras primárias principiou em 1928, tendo suas primeiras 18 diplomadas no ano de 1932 (Crônica do Colégio São José, 1932). Nesse período, além do magistério, o Colégio São José mantinha o curso Primário e de Música. Em 1942, passou a funcionar o curso Ginasial Secundário, e, em 1958, o curso Colegial Secundário Científico e Clássico (Flesch, 1993). Até 1969, o Colégio São José atendia, exclusivamente, o público feminino, passando a ter turmas mistas no ano seguinte: o Colégio São Luís dos Irmãos Maristas, localizado em São Leopoldo, foi vendido, e todos os alunos ginasianos tiveram de procurar outras escolas. Então, o São José resolveu preencher as vagas com rapazes, e, de 1970 em diante, passou a ser misto (Crônica do Colégio São José, 1969).

Atualmente, o Colégio São José é mantido pela Associação de Educação Franciscana da Penitência e Caridade Cristã (AEFRAN-PCC), e recebe em torno de 500 alunos, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Em 2025, a Congregação das Irmãs Franciscanas completa 153 anos de ação missionária e educacional no Brasil, sendo essa mais uma razão para se resgatar suas contribuições na formação de crianças e jovens, especialmente o público feminino. Hoje, atuam no campo da educação, da saúde, da acolhida e hospedagem, da formação e espiritualidade e em projetos sociais.

O ensino de Matemática a partir de dois cadernos escolares de 1905

Ao realizar pesquisas no Centro Histórico das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã – Província do Sagrado Coração de Jesus – localizado em São Leopoldo, os autores deste trabalho localizaram dois cadernos escolares de "contas", que pertenciam à ex-aluna Elly Lucia Carolina Presser, do ano de 1905.

Com base nesses cadernos e na Lembrança da Conclusão Solemne do Anno Escolar no Collegio São José, de 1906, em que recebeu menção honrosa em diversas disciplinas, bem como o prêmio de Caligrafia daquele ano, registra-se que Elly Lucia Carolina Presser estudou nesse Colégio, ao menos, no período de 1905 a 1906. Ressalta-se que não foram localizadas mais informações sobre a trajetória escolar da aluna, pois só existem registros de matrículas dos alunos do Colégio São José, a partir do ano de 1936. Acrescenta-se que, no ano de 1908, Elly Presser integrou o primeiro grupo de ginástica feminina da Sociedade Ginástica de São Leopoldo Leopoldenser Turnvereiner (Levien, 2011).

Os cadernos da ex-aluna Elly Presser estão organizados, escritos com boa caligrafia e apresentam o desenvolvimento sequencial de exercícios e problemas. Apesar disso, verifica-se que algumas resoluções de exercícios e problemas apresentam erros em seu desenvolvimento, embora a resposta final registrada esteja correta. Isso dá indicativos de que a aluna estava preocupada em mostrar um desempenho satisfatório por meio do registro dos resultados corretos no caderno, corroborando com Chartier (2007) e Kirchner (2018).

Um dos cadernos de contas da ex-aluna Elly Presser apresenta exercícios e problemas resolvidos de aritmética e geometria plana, todos encontrados no livro *Arithmetica Elementar Pratica* – Colecção de regras, exercícios e problemas methodicamente compilados pelas Professoras do Collegio São José em São Leopoldo – 3ª edição correcta e augmentada – IIIª parte, do ano de 1900. Já o outro caderno traz tópicos de geometria espacial (poliedros e corpos redondos). De acordo com o livro das Professoras do Collegio São José (1900), os conteúdos de aritmética e geometria plana são anteriores à geometria espacial.

O primeiro caderno de contas possui 18 folhas com linhas, medindo 21 cm por 15 cm, papel de celulose e escrita a lápis nos dois lados da folha – totalizando 36 páginas –, o que prejudicou um pouco a qualidade de algumas imagens. Está com redação em língua portuguesa, apesar de o emprego do português, em substituição ao alemão, ter-se intensificado com a estratégia de nacionalização compulsória do ensino, a partir de abril de 1938, quando foi expedida uma série de decretos federais e estaduais, disciplinando a licença de professores, o material didático a ser usado e tornando o idioma nacional obrigatório para a instrução (Kuhn e Bayer, 2017). A capa do caderno de contas de Elly Lucia Carolina Presser, apresentada na Figura 2, traz uma etiqueta somente com a identificação parcial do nome da aluna, "Elly Presser".

Figura 2 – Capa do caderno de contas de Elly Presser

Fonte: Presser (1905a).

Inicialmente, fez-se a compilação e análise das atividades resolvidas no caderno de contas, os quais envolvem conteúdos de aritmética e geometria plana e cujos enunciados se encontram no livro de *Arithmetica Elementar Pratica* das Professoras do Collegio São José – IIIª parte, do ano 1900, conforme descrito no Quadro 1:

Quadro 1 – Caderno de contas de Ely Presser x livro de Arithmetica Elementar Pratica

Páginas do caderno	*Conteúdos abordados*	*Páginas do livro de Aritmética*	*Nº de exercícios ou problemas resolvidos*
1 a 4	Regra de misturas e liga, com foco na regra de mistura direta	111 a 113	Todos os 21 do livro
5 a 11	Problemas sobre frações ordinárias	39 a 42	Todos os 40 do livro
11 a 13	Problemas mistos sobre o sistema métrico	60 a 63	Todos os 47 do livro
14-15	Conversão das frações decimais em frações ordinárias, e vice-versa	43-44	Todos os 3 do livro, com vários itens
15-20	Redução de medidas antigas em medidas do sistema métrico decimal e vice-versa	63-67	Todos os 18 do livro
21	Esta página do caderno está em branco.		
22-24	Medida das superfícies (triângulos)	137-140	Todos os 26 do livro
25-29	Raiz quadrada	125-129	8 dos 10 propostos no livro
30-34	Medida das superfícies (quadriláteros)	141-146	Todos os 54 do livro
34-35	Medida das superfícies (polygonos)	146-149	Todos os 9 do livro
35-36	Problemas da regra de três simples inversa	86-88	10 dos 20 propostos no livro
36	Problemas mistos da regra de três simples direta e inversa	89	4 dos 20 propostos no livro

Fonte: Autores (2025).

No levantamento realizado, identificou-se um total de 240 exercícios e problemas do livro *Arithmetica Elementar Pratica* das professoras do Collegio São José, resolvidos no caderno de contas de Ely Presser. Esses exercícios e problemas abordam conteúdos de aritmética – frações ordinárias e decimais, sistema métrico, raiz quadrada, regra de três e mistura – e geometria plana – superfícies de triângulos, quadriláteros e polígonos. Embora o caderno contenha uma grande quantidade de exercícios, metodicamente resolvidos, também possui problemas resolvidos e associados ao dia a dia de afazeres das alunas do Colégio, com destaque para aplicações do sistema métrico e das medidas de superfície. Nessa época, esperava-se que os alunos assimilassem noções básicas de geometria nas escolas, além de conhecimentos corretos do sistema métrico (Rambo, 1994).

Apesar dessa quantidade de atividades, o caderno não traz a resolução de todos os 866 exercícios e problemas que são propostos no livro editado pelas próprias Irmãs Franciscanas. O caderno que, inicialmente, traz conteúdos de aritmética e, mais para o final, a geometria plana, apresenta somente as resoluções, sem os enunciados, exemplos, definições e regras que se encontram no livro. A ordem dos conteúdos com exercícios e problemas resolvidos no caderno, não segue a mesma sequência de estudo apresentada no livro de Aritmética.

Já o caderno escolar com problemas de geometria espacial, datado de 1905, também possui as dimensões de 21 cm por 15 cm, com 16 folhas com linhas, papel de celulose e escrita a lápis nos dois lados de cada folha (32 páginas), o que também prejudicou um pouco a qualidade de algumas imagens. Igualmente, o caderno está com redação em língua portuguesa. A capa deste caderno de Elly Lucia Carolina Presser, conforme a Figura 3, traz uma etiqueta, fazendo referência ao Ginásio Nossa Senhora da Conceição de São Leopoldo, com identificação da aluna e informação de começo em 6 de fevereiro de 1905. Ressalta-se que o Colégio São José e o Ginásio Conceição[8] tinham loca-

[8] Ressalta-se que o Ginásio Nossa Senhora da Conceição dos Jesuítas atendia, exclusivamente, ao público masculino.

lização próxima, separados apenas pela rua. Além disso, a carência de material escolar a baixo custo, na época, com predominância de existência da lousa para os registros, leva a supor que o Ginásio Conceição, frequentado por alunos de famílias de maior poder aquisitivo, poderia ter fornecido materiais para as alunas do Colégio São José, que era uma instituição com menos recursos financeiros na época (Leite, 2005).

Figura 3 – Capa do caderno de geometria de Elly Presser

Fonte: Presser (1905b).

Apesar de constar, na capa do caderno, a data de 6 de fevereiro de 1905 (segunda-feira) como o seu início, na primeira página desse caderno encontra-se registrado o dia 4 de fevereiro de 1905 (sábado) e, na sequência, o título "Medida dos volumes". De acordo com o Decreto nº 239, de 5 de junho de 1899, do Governo do Estado do Rio Grande do Sul, o programa de Geometria Prática da Terceira Classe e Segunda Seção prevê: "Conhecimento prático dos sólidos geométricos: prisma, paralelepípedo, cubo, pirâmide, cilindro, cone e esfera. Avaliação dos volumes e das suas superfícies" (Rio Grande do Sul, 1899, p. 273). Isso se aproxima do que é encontrado nesse caderno, constituindo-se um possível indício de que, nesse período, o Colégio São José seguia o programa oficial.

Durante o processo de análise desse caderno de Elly Presser, identificou-se a presença de uma série de 60 problemas resolvidos e corrigidos sobre sólidos geométricos. Observou-se que o estudo das medidas de volume de poliedros e de corpos redondos segue uma sequência, de acordo com o livro *Arithmetica Elementar Prática* – Coleção de regras, exercícios e problemas metodicamente compilados pelas Professoras do Collegio São José em São Leopoldo – 3ª edição correcta e augmentada – IIIª parte, do ano de 1900. Então, inicialmente, fez-se a compilação e análise dos 60 problemas presentes no caderno, os quais envolvem conteúdos de geometria espacial, conforme descrito no Quadro 2.

Quadro 2 – Quantitativo de problemas de geometria no caderno escolar de 1905

Sólido geométrico	*Superfície lateral/total*		*Volume*		*Total*
	Problemas com aplicação direta de fórmulas	*Problemas do dia a dia*	*Problemas com aplicação direta de fórmulas*	*Problemas do dia a dia*	
Prisma	-	-	6	6	12
Cubo	-	-	4	-	4
Pirâmide	-	-	5	-	5
Tronco de pirâmide	-	-	1	-	1
Cilindro	3	-	7	3	13
Cone	3	1	2	1	7
Tronco de cone	-	-	4	7	11
Esfera	3	-	4	-	7
Total	9	1	33	17	60

Fonte: Autores (2025).

No estudo realizado, identificaram-se 60 problemas no caderno escolar, numerados em ordem crescente de 1 a 60, sempre apresentando o enunciado e a respectiva resolução. Esses problemas abordam o cálculo de área da superfície lateral e/ou total (10 problemas) e de volume (50 problemas) de sólidos geométricos, como prisma, cubo, pirâmide, tronco de pirâmide, cilindro, cone, tronco de cone e esfera. Ressalta-se que mais de 50% desses problemas estão relacionados com prismas, cilindros e troncos de cone. A maioria desses problemas, perfazendo o total de 70%, não faz referência a contextos e a objetos da vida real, enquanto 30% possuem alguma relação com o dia a dia das alunas do Colégio São José, envolvendo, principalmente, cálculo de volume de sólidos em forma de prisma, cilindro, cone e tronco de cone.

Não se tem informações sobre a origem desses 60 problemas, ou seja, se eles foram elaborados pelas próprias professoras do Colégio ou copiados/adaptados de algum livro. Todavia, uma advertência presente no livro de aritmética das Professoras do Colégio São José, do ano de 1900, é um indício de que elas próprias possam ter criado os problemas do caderno analisado, pois passam a editar livros para o estudo prático de uma ciência (Matemática) que gerava certa aversão ao público feminino.

> Quando mandamos imprimir as regras, exercícios e problemas arithmeticos por nós compilados, tínhamos unicamente em vista, facilitar as nossas alumnas o estudo prático de uma sciência a que quasi todas as meninas mostram grande aversão; e assim nosso livrinho é exclusivamente destinado para uso das alumnas do Collegio São José (Professoras do Collegio São José, 1900, p. 2).

A partir da quantificação dos 60 problemas presentes no caderno, verificou-se que os primeiros 42 enunciados trazem aplicação direta das fórmulas de cálculo da área de superfície e do volume de sólidos geométricos. Além disso, os problemas de número 43 a 60 trazem enunciados relacionados ao dia a dia das alunas do Colégio São José no início do século XX. Constata-se que a proposta de ensino empregada começa por sólidos mais simples, dos quais derivam conceitos geométricos fundamentais para aplicação no estudo de problemas envolvendo formas geométricas espaciais mais complexas. Isso dá indicativos de uma cultura no ensino de geometria que partia de casos simples

para mais complexos. Apesar de ser um caderno voltado para o registro do estudo de conhecimentos geométricos, observou-se um único desenho de prisma em forma de paralelepípedo e de quatro figuras planas (trapézio, dois retângulos e círculo), representando superfícies, todos feitos à mão livre. Esses registros são testemunhos dos exercícios escolares e das práticas pedagógicas no contexto da sala de aula, conforme Chartier (2007).

Ao finalizar estas breves reflexões sobre o caderno de geometria da ex-aluna Elly Presser, do Colégio São José, infere-se que o estudo das medidas de volume foi realizado de forma sistemática, observando-se a aplicação de conceitos matemáticos nas resoluções de problemas. São vestígios de uma cultura escolar marcada por um processo de ensino de geometria voltado para a compreensão de conceitos e aplicação desses, buscando uma sólida formação em conhecimentos geométricos. Dessa forma, desejava-se que as egressas do Colégio colocassem em prática os conhecimentos adquiridos e propagassem a tradição do Colégio São José.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Motivadas pelo convite do superior da missão brasileira dos jesuítas no RS, as Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã chegaram ao Brasil, em abril de 1872, instalando-se no município gaúcho de São Leopoldo, com a finalidade de contribuir para a educação de crianças e jovens, em sua maioria filhas de imigrantes alemães. Sua primeira obra educacional foi o Colégio São José, em São Leopoldo, fundado no dia 5 de abril de 1872. Em seus primeiros anos de atividades, o Colégio mantinha o curso Primário e de Música, ambos voltados para o público feminino, com regência das próprias Irmãs.

Baseando-se em referenciais sobre cultura escolar, investigaram-se os exercícios e os problemas em caderno escolares de contas, do ano de 1905 e pertencente a ex-aluna desse Colégio, Elly Lucia Carolina Presser, identificando-se os conteúdos envolvidos, os procedimentos de cálculo e a associação com o dia a dia das alunas do Colégio São José, do início do século XX.

Os 240 exercícios e problemas resolvidos no caderno escolar de contas abordam conteúdos de aritmética e geometria plana. Embora o caderno contenha uma grande quantidade de exercícios resolvidos, também possui problemas resolvidos e associados ao dia a dia de afazeres das alunas do Colégio, com destaque para aplicações do sistema métrico e das medidas de superfície. Também se observou que os procedimentos de cálculo dos exercícios e dos problemas resolvidos no caderno seguem, predominantemente, as regras descritas no livro de Aritmética das Professoras do Collegio São José, do ano de 1900. Ressalta-se que esse livro descreve os procedimentos de resolução, com poucas exemplificações, ficando a critério das professoras fazer a associação com o cotidiano de suas alunas. Assim, pondera-se que as Irmãs seguiam um material didático próprio nas aulas de Matemática do início do século XX.

Já os 60 problemas presentes no outro caderno abordam área de superfície e, principalmente, volume de sólidos geométricos – prisma, cubo, pirâmide, cilindro, cone, tronco de cone e esfera. Na resolução dos problemas encontrados no caderno, predomina a aplicação direta das fórmulas para cálculo da área de superfície – lateral e/ou total – e de volume de sólidos em 42 enunciados. Outros 18 problemas estão associados com a prática diária das alunas do Colégio São José, envolvendo o cálculo de volume de sólidos em forma de prisma, cilindro, cone e tronco de cone, tais como cuba, poço, cisterna, funil, telhado e balde. Nesses problemas, são exploradas as noções de grandezas e medidas, possibilitando uma melhor compreensão de conceitos relativos aos sólidos geométricos.

Também revelam traços de uma cultura no ensino de geometria que parte de casos simples para mais complexos. Ademais, observou-se que os procedimentos de cálculo de área de superfície e de volume também seguem algumas descrições feitas no livro de Aritmética das Professoras do Collegio São José, de 1900.

Alguns traços de gênero que podem ser observados nesta investigação estão relacionados à oferta de estudos complementares de teatro, música, canto, pintura, costura, crochê e bordado, além das disciplinas curriculares. Esses traços também são evidenciados na organização do caderno da aluna, no tracejado da letra empregada, no uso do símbolo do certo ou da escrita da palavra certíssimo ao final das resoluções. Além disso, observa-se que alguns enunciados dos problemas contêm elementos que fazem parte do cotidiano das alunas (cuba, funil, poço, balde, etc.), dando indícios da preocupação com uma educação para a vida.

Os exercícios e os problemas resolvidos nos cadernos de contas dessa ex-aluna do Colégio São José de São Leopoldo, do ano de 1905, revelam uma cultura escolar, no ensino da Matemática, que procuravam instrumentalizar as gerações de alunas para o gerenciamento de atividades do lar, como cozinhar e cuidar dos filhos, e profissionais, como o magistério. Esse estudo permite resgatar um pouco da história dos 153 anos de ação missionária e educacional das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã no RS, particularmente no campo da Matemática.

AGRADECIMENTOS

Ao apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS) e ao apoio para realização da pesquisa pela Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã – Província do Sagrado Coração de Jesus, de São Leopoldo/RS.

REFERÊNCIAS

CELLARD, André. A análise documental. *In:* POUPART, Jean *et al*. **A pesquisa qualitativa:** enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008. p. 295-316.

CERTEAU, Michel de. **A escrita da História.** Tradução Maria de Lourdes Menezes. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1982.

CHARTIER, Anne-Marrie. Os cadernos escolares: organizar os saberes, escrevendo-os. **Revista de Educação Pública**, Cuiabá, MT, v. 16, n. 32, p. 13-33, set./dez. 2007. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/educacaopublica/issue/view/71 Acesso em: 25 nov. 2024.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares–reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação.** Porto Alegre, RS, n. 2, p. 177-229, 1990.

CRÔNICA DO COLÉGIO NOSSA SENHORA DOS ANJOS. São Leopoldo: Acervo Documental do Centro Histórico das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã – Província do Sagrado Coração de Jesus, 1886.

CRÔNICA DO COLÉGIO SÃO JOSÉ. São Leopoldo: Acervo Documental do Centro Histórico das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã – Província do Sagrado Coração de Jesus, 1872.

CRÔNICA DO COLÉGIO SÃO JOSÉ. São Leopoldo: Acervo Documental do Centro Histórico das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã – Província do

CRÔNICA DO COLÉGIO SÃO JOSÉ. São Leopoldo: Acervo Documental do Centro Histórico das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã – Província do Sagrado Coração de Jesus, 1969.

FLESCH, Irmã Benícia. **História da Congregação das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã no Brasil (1872-1951).** Porto Alegre: Metrópole, 1993. v. 1.

JULIA, Dominique. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**, Campinas, SP, n. 1, p. 9-43, jan./jun. 2001.

KIRCHNER, Cássia Aparecida Sales Magalhães. A análise do caderno escolar como recurso didático nas aulas de História da Educação. **Pedagogia em Foco**, Iturama, MG, v. 13, n. 10, p. 159-169, jul./dez. 2018. Disponível em: https://revista.facfama.edu.br/index.php/PedF/article/view/366 Acesso em: 25 nov. 2024.

KUHN, Malcus Cassiano; BAYER, Arno. Os exercícios de cálculo oral nas aritméticas editadas para as escolas paroquiais luteranas do século XX no Rio Grande do Sul. **Revista de História da Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 3, n. 2, 2017. Disponível em: https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/168. Acesso em: 1 mar. 2025.

KUHN, Malcus Cassiano; BRITTO, Silvio Luiz Martins. **O protagonismo feminino no ensino da Matemática no Colégio São José das Irmãs Franciscanas de São Leopoldo, Rio Grande do Sul, nos séculos XIX e XX.** 1. ed. Curitiba: Appris, 2024.

LEITE, Luiz Osvaldo. **Jesuítas cientistas no sul do Brasil.** São Leopoldo: Unisinos, 2005.

LEVIEN, Ana Luiza Angelo. **Histórias do Turnen na Leopoldenser Turnverein (Sociedade de Ginástica de São Leopoldo).** 2011. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Educação Física, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2011.

PRESSER, Elly Lucia Carolina. **Caderno de contas.** Registro nº CHC.0938. São Leopoldo: Acervo Documental do Centro Histórico das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã – Província do Sagrado Coração de Jesus, 1905a.

PRESSER, Elly Lucia Carolina. **Caderno de Contas.** Registro nº CHC.0940. São Leopoldo: Acervo Documental do Centro Histórico das Irmãs Franciscanas da Penitência e Caridade Cristã–Província do Sagrado Coração de Jesus, 1905b.

PROFESSORAS DO COLLEGIO SÃO JOSÉ. **Arithmetica Elementar Pratica** – Collecção de regras, exercícios e problemas methodicamente compilados, IIIª parte. 3. ed. correcta e augmentada. Porto Alegre: João Mayer Junior, 1900.

PROST, Antoine. **Doze lições sobre a História.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

RAMBO, Athur Blásio. **A escola comunitária teuto-brasileira católica**. São Leopoldo: Unisinos, 1994.

RIO GRANDE DO SUL. **Decreto nº 239, de 5 de junho de 1899.** Aprova o programa do ensino elementar e complementar. Leis, Decretos e Atos do Governo do Estado do Rio Grande do Sul de

1899. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handler/123456789/100095 Acesso em: 25 nov. 2024.

RUPOLO, Irani. Irmãs Franciscanas no Rio Grande do Sul e compromisso educacional. **Revista Vidya,** Santa Maria, RS, Edição Especial – 50 anos, p. 83-98, jul. 2001. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/498/488 Acesso em: 25 nov. 2024.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Um estudo das pesquisas sobre formação de professores de matemática em Mato Grosso do Sul

A study of research on mathematics teacher training in Mato Grosso do Sul

Marisa Raquel de Melo Pereira[1]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Thiago Pedro Pinto[2]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo apresentar um panorama histórico da formação de professores de matemática em Mato Grosso do Sul a partir de pesquisas de mestrado e doutorado abordando essa temática. Utilizando a revisão bibliográfica, elencamos trabalhos que apresentavam aspectos históricos sobre a formação de professores de matemática em Mato Grosso do Sul, a fim de tecer compreensões sobre como se constituiu a formação de professores na região. Os resultados mostraram a influência das relações políticas, presentes antes mesmo da criação do Estado de Mato Grosso do Sul em 1979, nas políticas educacionais de formação de professores e características regionais, como a presença marcante de professores vindos de outras regiões do país para atuarem nas instituições formadoras. Compreender os aspectos históricos da formação de professores de matemática em Mato Grosso do Sul revela a singularidade desse cenário educacional e abre espaço para refletirmos sobre formas de contribuir para a melhoria dos cursos de formação, nos ajuda a perpetuar e honrar as histórias e memórias dos atores envolvidos diretamente nesse contexto.

Palavras-chave: Formação de professores; Matemática; Mato Grosso do Sul; História.

ABSTRACT

This article aims to provide a historical overview of mathematics teacher training in Mato Grosso do Sul, based on master's and doctoral research that addresses this theme. Through a bibliographic review, we identified studies that explore the historical aspects of mathematics teacher training in the region, seeking to understand how this process has been structured over time. The findings highlight the influence of political dynamics—present even before the state of Mato Grosso do Sul was officially established in 1979—on teacher education policies, as well as regional characteristics, such as the significant presence of teachers from other parts of the country working in training institutions. Understanding the historical trajectory of mathematics teacher training in Mato Grosso do Sul sheds light on the uniqueness of this educational landscape and invites reflection on ways to enhance teacher education programs. Additionally, it helps preserve and honor the histories and memories of those directly involved in this context.

Keywords: Teacher training; Mathematics; Mato Grosso do Sul; History.

INTRODUÇÃO

Nosso trabalho busca apresentar um panorama histórico sobre os cursos de formação de professores de matemática em Mato Grosso do Sul a partir da revisão de pesquisas que investigam essa temática.

A necessidade de compreendermos este assunto decorre do desenvolvimento de nossa pesquisa de doutoramento em andamento, que irá discutir aspectos relacionados à formação de professores

[1] Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela UEM. Doutoranda em Educação Matemática na UFMS, Campo Grande, MS, BR.. E-mail: marisa.melo@ufms.br.

[2] Doutor em Educação para as Ciências (Unesp). Professor Associado da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, MS, BR. E-mail: thiago.pinto@ufms.br.

nos primeiros anos da licenciatura em matemática[3] na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, enfatizando as disciplinas de geometria. A compreensão de como algumas disciplinas são abordadas na formação inicial tem sido alvo de investigação por pesquisadores da educação matemática, dentre as quais podemos citar o trabalho de Silva e Chaquiam (2023), que discutiu as contribuições da disciplina História da Matemática na formação inicial de professores.

Buscando conhecer o contexto no qual estamos inseridos, nos debruçamos nos estudos sobre a formação de professores de matemática em Mato Grosso do Sul. Antes de compreendermos as questões educacionais, é importante entender as características peculiares do estado[4] de Mato Grosso do Sul.

O Estado de Mato Grosso do Sul foi criado em 1977 e implementado em 1979, pela Lei Complementar n.º 31, de 11 de outubro de 1977. Assim, Mato Grosso do Sul (MS) surge a partir de um desmembramento de áreas pertencentes ao Estado de Mato Grosso (MT). Antes da divisão do estado, a população do sul de Mato Grosso *uno* enfrentava problemas devido à distância que se encontrava da capital, Cuiabá, para onde convergiam os esforços do governo estadual.

Ao longo do tempo houve o desenvolvimento da região, e a chegada de migrantes fazia crescer o número de habitantes e a demanda por escolas para a escolarização de seus filhos. Marques e Irala (2017) ao buscarem registros nos acervos públicos e arquivos escolares no período de 1940 a 1977, especificando o contexto da região da cidade de Dourados, deixam claro a atuação de forças políticas na criação das escolas da região. Especificamente na região de Dourados houve iniciativas do Governo Federal, conhecida como "Marcha para o Oeste", uma política de incentivo ao povoamento da parte oeste brasileira, instituída durante o governo de Getúlio Vargas, que previa a doação de terras para os migrantes.

A partir dessa breve contextualização, podemos compreender que estudar a formação de professores em Mato Grosso do Sul, se confunde com o estudo da história da educação e da criação de escolas na região, expandindo nossa compreensão para a atuação das diversas forças que se concentraram nessa tarefa. Dessa forma, na próxima seção discutiremos de forma mais ampla a formação de professores, e suas implicações.

METODOLOGIA

Para encontrarmos trabalhos relacionados aos aspectos históricos sobre a formação de professores de matemática em Mato Grosso do Sul, utilizamos as plataformas de busca do Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações.

No Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, inserimos os termos "formação de professores", "Mato Grosso do Sul", "Matemática" e "História" e foram relacionados 35 resultados. A partir desses trabalhos listados, fizemos a leitura de reconhecimento, conforme indicado por Marconi e Lakatos (2023).

[3] Utilizaremos no texto a indicação do manual de comunicação da Secom (Secretaria de comunicação do Senado Federal), que recomenda que se se inicial minúscula para nomes de disciplinas, cursos e áreas do conhecimento. https://www12.senado.leg.br/manualdecomunicacao/estilos/disciplina

[4] No texto a palavra estado será grafada com inicial minúscula quando se referir a região geográfica, e quando se referir a instituição política, utilizaremos inicial maiúscula.

Marconi e Lakatos (2023, p. 24) pontuam algumas etapas de leitura informativa ou de estudo. Utilizamos inicialmente a leitura de reconhecimento ou prévia, "cuja finalidade é procurar um assunto de interesse, ou verificar a existência de determinadas informações". A partir da leitura dos títulos dos trabalhos e dos resumos, quando necessário, identificamos que alguns dos trabalhos relacionados não enfatizavam a formação inicial do professor de Matemática, ou enfatizavam o uso de tecnologias ou teorias específicas, ou ainda, estavam voltados para a etapa da educação básica, ou abordavam a formação intercultural de professores, e estavam fora do nosso escopo de interesse. Elencamos para as próximas etapas de leitura 7 trabalhos.

Fizemos a busca com os mesmos termos na Biblioteca Digital de teses e Dissertações (BDTD), e encontramos 38 resultados, dos quais 2 eram títulos repetidos, portanto, 36 trabalhos de teses e dissertações relacionados aos termos de busca: "formação de professores", "Mato Grosso do Sul", "Matemática", "História" na busca em todos os campos. Oito trabalhos foram selecionados após a leitura dos títulos e resumos, e entre esses, quatro já haviam sido relacionados anteriormente, portanto, tivemos um total de 11 trabalhos contemplados.

Considerando que poderia haver trabalhos nas buscas relacionados com o termo "Mato Grosso", realizamos uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, com os termos "formação de professores", "Mato Grosso", "Matemática", "história", e encontramos 68 resultados.

A partir da leitura de reconhecimento observamos que 9 trabalhos já elencados anteriormente constavam nos resultados encontrados, além disso, havia trabalhos que se relacionavam com a região do atual estado de Mato Grosso, a outros estados, às etapas de formação continuada ou que enfatizavam alguma teoria específica. Um trabalho, que ainda não havia sido relacionado, foi a tese de doutorado de Carla Regina Mariano da Silva, defendida em 2015 na UNESP, e que traz narrativas sobre as licenciaturas em ciências e matemática em Mato Grosso do Sul.

Após a etapa de seleção, fizemos a leitura completa dos trabalhos e na próxima seção detalharemos o que dizem as pesquisas sobre a formação de professores em Mato Grosso do Sul.

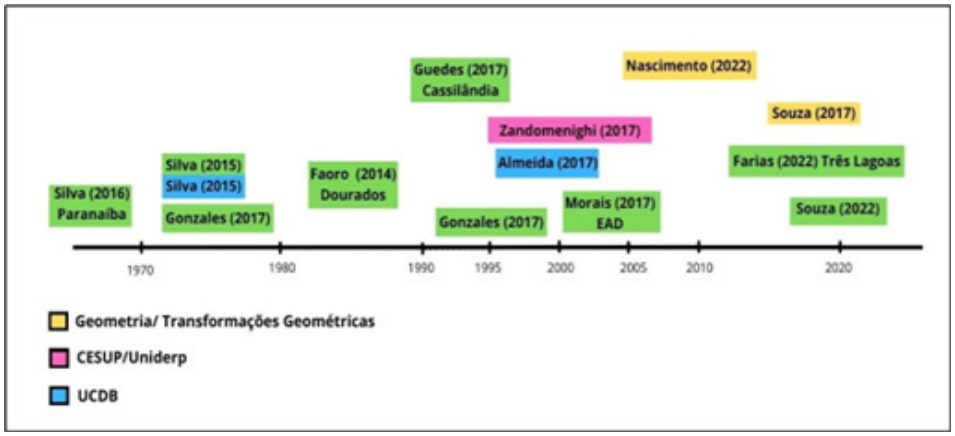
O QUE DIZEM AS PESQUISAS

Para a discussão dos trabalhos encontrados buscamos produzir um diálogo entre os próprios textos, estabelecendo conexões e distanciamento entre as pesquisas abordadas.

Ao discorrer sobre os trabalhos, buscaremos apresentá-los em uma sequência, digamos, cronológica, não no sentido do período em que foi desenvolvido e defendido, mas relacionado ao período que se refere.

Para uma visualização panorâmica, do conjunto de trabalhos analisados, pensando em uma espécie de linha do tempo, desenvolvemos a figura a seguir, que traz as indicações dos períodos ao qual cada trabalho se refere.

Figura 1 – Linha do tempo



Fonte: Elaborado pelos autores

Iniciaremos nossa descrição com as teses de Silva (2015) e Gonzales (2017) que tratam dos cursos de licenciatura curtas parceladas, e licenciatura curta em ciências com habilitação em matemática, na década de 1970 e possuem uma maior abrangência de regiões de Mato Grosso do Sul. Gonzales (2017) traz ainda o movimento das licenciaturas parceladas em matemática na década de 1990, como uma 'retomada' do modelo oferecido na década de 1970.

A tese de Silva (2015) apresenta narrativas de professores dos primeiros cursos de formação de professores que ensinam matemática em Mato Grosso do Sul. Conforme pontuado pela autora, ao iniciar as buscas por cursos de formação de professores de matemática na região do Mato Grosso do Sul, os resultados apontavam para os cursos de licenciatura em ciências com habilitação em matemática, seguindo o que era uma legislação da época. As instituições que ofereciam esses cursos eram a UEMT (Universidade Estadual de Mato Grosso), que posteriormente se tornou a UFMS (Universidade Federal de Mato Grosso do Sul) em MS, e a UFMT (Universidade Federal de Mato Grosso) em MT e a instituição privada FADAFI (Faculdade de Filosofia Dom Aquino), que posteriormente se tornou Faculdades Unidas Católicas de Mato Grosso (FUCMT) em 1976, e em Universidade Católica Dom Bosco (UCDB), em 1993.

A UEMT possuía cursos de maior prestígio na capital, Cuiabá, e alguns centros pedagógicos em cidades do interior, onde eram oferecidos cursos de licenciatura como nas cidades de Dourados, Três Lagoas, Corumbá, Campo Grande e Rondonópolis. Em sua pesquisa, Silva (2015) traz narrativas de professores que atuaram em Três Lagoas, Corumbá e Campo Grande, além das entrevistas com as professoras da FUCMT.

Ao entrevistar professores e professoras dessas instituições, os relatos confirmam que havia em meados da década de 1970 muitos professores leigos, ou de outras áreas de formação, como engenheiros, que ministravam aulas de matemática. Uma história repetida várias vezes pelos professores entrevistados é de um professor que veio do estado de São Paulo para lecionar em Campo Grande, e teria "atravessado o rio com a teoria dos números", por ser um dos primeiros, ou talvez o primeiro, com formação em matemática a chegar na região. Também aparecem nas narrativas o quanto a criação de Mato Grosso do Sul e a federalização da UEMT para UFMS foram benéficas para os professores, que tinham atrasos de salários e poucos incentivos para continuar os estudos, algo que foi fomentado após a federalização. Outro aspecto que vale destacar foi a criação do curso de licenciatura em matemática da UFMS, em 1981, a partir de uma 'brecha' na legislação, que instituía a

criação de cursos de ciência com habilitação em matemática. Uma sacada política do grupo docente que desde o início ansiava pela abertura de um curso de matemática.

Em relação à instituição particular, Silva (2015) destaca os esforços e modificações na grade curricular ao longo dos anos, a fim de tornar o curso mais atrativo e mantê-lo em funcionamento, tendo em vista a baixa demanda. Nas narrativas se destacam a proposição de um curso de matemática aplicada e computacional, em meados de 1990, e também de um curso de bacharelado em matemática, que teria sido fechado após uma visita do MEC, com a indicação de que não havia demanda na região. Além disso, havia falta de professores com qualificação para atuarem no curso.

Gonzales (2017) aborda a formação de professores no contexto das licenciaturas parceladas implementadas na década de 1970, que aconteciam nos centros pedagógicos da UEMT, nas cidades de Dourados, Três Lagoas, Corumbá e Rondonópolis e foram retomados também na década de 1990. Esses cursos de formação eram formatados para o período de férias escolares, e aconteciam de forma concentrada. Os acadêmicos das licenciaturas parceladas eram em sua maioria professores que já lecionavam e precisavam do diploma para se adequar às exigências da legislação. A partir de entrevistas, as falas dos professores e alunos ressaltam as características desses cursos, que aconteciam em parceria com as prefeituras, que cediam o espaço para as aulas, onde também ficavam alojados os estudantes. Dentre os destaques das narrativas ficam evidenciados os esforços dos alunos que deixavam suas casas e famílias para estarem em formação, os esforços dos professores que também tinham que se deslocar para ministrar aulas, enfrentando muitas dificuldades no trajeto pela falta de estrutura das estradas, também são mencionadas a união do grupo e dedicação aos estudos que na fala dos professores, eram mais dedicados que os alunos dos cursos regulares. Em relação às dificuldades enfrentadas, a falta de apoio por parte do governo estadual foi um dos fatores destacados, principalmente relacionado aos cursos da década de 1990. Nesse período, houve troca de gestão e o governador que assumiu o cargo não deu continuidade ao projeto do governo anterior. Também é destacado na fala dos professores a falta de material e estrutura nos centros pedagógicos, os materiais xerocados eram levados pelos professores e/ou usavam a lousa para abordar os conteúdos.

Seguindo a ideia de apresentar os trabalhos na ordem do período histórico ao qual se referem, o trabalho de dissertação de Faoro (2014) nos coloca no cenário de Dourados, cidade que teve um dos centros pedagógicos da UEMT na década de 1970, onde funcionou o curso de licenciatura em ciências–habilitação em matemática, iniciado em 1975 e posteriormente, em 1987, já como UFMS, foi implantado o curso de licenciatura em matemática. Faoro (2014) usa entrevistas e a metodologia da História Oral para apresentar as narrativas do contexto de criação desses cursos. Um movimento interessante destacado nas narrativas foi o "aproveitamento" de professores da educação básica para compor o quadro de professores do Centro Pedagógico, o que evidencia novamente a carência de professores com formação para atuarem no ensino superior. Também é destacada a origem migratória dos professores que fizeram parte do grupo de formadores em Dourados, sendo a maioria das regiões sul e sudeste do país. Uma dificuldade relatada pelo grupo entrevistado foi a rotatividade de professores com maior titulação, que inicialmente iam para Dourados, e posteriormente se transferiram para Campo Grande, a convite do grupo da capital ou por iniciativa própria, por questões de infraestrutura da cidade. Houve também um movimento inverso, de professores que preferiram ficar em Dourados, por estar mais próximo à região sul, ou para estar próximo aos familiares.

Dentro do período que permeia a década de 1970, o trabalho de dissertação de Silva (2016) mapeia a atuação e formação de professores de matemática em Paranaíba na segunda metade do

século XX. Paranaíba é uma cidade de Mato Grosso do Sul que faz fronteira com os estados de São Paulo, Goiás e Minas Gerais. Ao entrevistar professores que atuaram na cidade a partir da década de 1960, as narrativas apresentadas por Silva (2016) destacam o que já havia sido mencionado em outros trabalhos, a falta de professores com formação, e a atuação de professores leigos na etapa da educação básica. A maioria dos professores entrevistados fizeram sua graduação enquanto atuavam como professores, em cursos de licenciaturas curtas em cidades paulistas próximas a Paranaíba. O investimento era todo custeado pelos professores, dada a necessidade de formação e a falta de cursos na cidade. A licenciatura em matemática chegou a Paranaíba em 2001, pela UFMS, curso que levou a pesquisadora a deixar sua cidade natal no estado de São Paulo e ir residir nessa cidade. Conforme o que nos indicam as narrativas, os professores de matemática que atuaram na cidade nos anos anteriores, tiveram sua formação em outras cidades a partir de iniciativas para a capacitação de professores que já atuavam ou vieram a residir na cidade após o término da graduação.

As pesquisas apresentadas até então tratam do período que permeia as décadas de 1960 a 1980, em que as mudanças políticas ocorreram de forma intensa, tendo como ápice a criação do Estado de MS em 1977 e sua implementação em 1979, e tais mudanças no cenário político impactaram diretamente na formação de professores.

As pesquisas que serão apresentadas na sequência estão ambientadas a partir da década de 1990 e trazem um novo cenário, onde surge a Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), criada em 1993 e também se destacam instituições de ensino privadas na formação de professores.

A dissertação de Guedes (2017) nos imerge no contexto de criação da UEMS e nos indica como foi a criação e a extinção do curso de licenciatura em ciências–habilitação em matemática na cidade de Cassilândia. A UEMS já havia sido idealizada desde a criação do Estado de Mato Grosso do Sul, mas apenas em 1993 foi criada, pela Lei Estadual 1.461/1993 de 23 de dezembro de 1993. Na unidade de Cassilândia, iniciaram em 1994 os cursos de licenciatura em letras, e licenciatura em ciências–habilitação em matemática. Uma característica marcante nas narrativas apresentadas por Guedes (2017) são as forças políticas mobilizadas na criação da UEMS, e de sua permanência, visto que em 1995, o governador que havia assumido o mandato tentou fechar a Universidade. Também aparece nas entrevistas o reaproveitamento de professores efetivos da educação básica da rede estadual para comporem o quadro de professores da UEMS. Após a tentativa frustrada de fechamento da Universidade, o Estado precisou se adequar e a regularização dos profissionais a partir do primeiro concurso público, aconteceu em 1998. Nas entrevistas apresentadas por Guedes (2017), a rotatividade de professores também é destacada.

Ainda no contexto da década de 1990, a pesquisa de mestrado de Zandomenighi (2017) a partir do uso de entrevistas e da História Oral, evidencia como foram os primeiros anos do curso de matemática da CESUP-Uniderp em Campo Grande–MS. A partir da investigação de documentos, o início do curso de matemática, licenciatura e bacharelado, com ênfase em ciência da computação, foi reconhecido em 1994. Os relatos dos professores indicam que a ênfase na computação era uma forma de atrativo para os alunos, visto que já havia o curso de licenciatura em matemática na UFMS (desde 1981), de forma gratuita. Conforme os professores indicam, o bacharelado funcionou em poucas turmas, e devido à falta de absorção no mercado de trabalho dos egressos, a maioria optou pela licenciatura. O corpo docente contava com professores que lecionavam em instituições públicas, sem o regime de dedicação exclusiva, ou que já tinham se aposentado, devido à necessidade de maior titulação por parte do corpo docente. Nesse período, a instituição mudou a condição de

centro universitário para universidade, o que fez com que muitos professores permanecessem por muito tempo na casa. Um outro fato destacado em vários relatos, foi a influência que as provas externas tiveram na reputação do curso, que tirou vários "A" no Provão do MEC, em meados da década de 1990, o que serviu como boa propaganda na captação de alunos.

Ainda no contexto de instituições privadas, a pesquisa de Almeida (2017) investiga o Curso Modular de Matemática, que ocorreu no período de 1999 a 2005, nos meses de janeiro e julho, na Universidade Católica Dom Bosco–UCDB. O cenário educacional havia mudado com a implementação da nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação, LDB 9394/96, e com a formulação do Plano Nacional de Educação em 2001, que previa a formação de professores que já estavam trabalhando sem a devida formação. A pesquisadora, que também havia se formado no curso modular investigado, apresenta a partir das narrativas e da História Oral o relato de egressos, professores e idealizadores desse curso. A partir das entrevistas, são destacados os esforços desses alunos (que vinham de locais distantes, do interior do estado, e até mesmo de outros estados, como Minas Gerais). O curso havia sido divulgado pelas secretarias de educação para professores que estavam em sala de aula e, para muitos, foi a oportunidade de terem a formação exigida. Sobre o término do curso, os relatos indicam que havia uma meta que havia sido proposta pela secretaria e, alcançada essa meta, não havia porque dar continuidade a oferta do curso.

Em meados dos anos 2000, a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul iniciou os cursos na modalidade a distância. Sobre as nuances do curso de matemática, na modalidade EAD, o trabalho de Morais (2017) nos ajuda a compreender alguns aspectos. A "semente" da EAD foi plantada na ocasião das licenciaturas parceladas, e posteriormente as ideias foram amadurecidas, culminando no curso na modalidade a distância. Morais (2017) utiliza a metodologia da História Oral para realizar entrevistas com professores e demais colaboradores envolvidos na criação do curso de matemática (EAD) e apresenta sua dissertação em formato de fóruns e discussões no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), comumente nesse contexto. Os relatos destacam o caráter emergencial que as mudanças na legislação trouxeram para o âmbito da formação de professores, algumas dificuldades enfrentadas no curso, o formato em que aconteciam as disciplinas, a obrigatoriedade da presença dos alunos nos polos, onde contavam com tutores presenciais, a estrutura 'bacharelesca" do curso, que seguiu a estrutura do curso presencial, entre outros fatores.

O trabalho de Farias (2022) foi realizado no contexto da pandemia, utilizando narrativas autobiográficas com seis egressos da licenciatura em matemática da UFMS do campus de Três Lagoas, o pesquisador buscou compreender como se dá o percurso formativo de professores egressos. Temas que surgiram nas narrativas foram o perfil profissional e a indicação, na maioria dos relatos, da licenciatura em matemática como segunda opção profissional, as percepções sobre a formação e os desafios enfrentados na pandemia, entre outros. O perfil dos egressos que colaboraram com a pesquisa de Farias (2022) abrangeu tanto recém-formados, com dois ou três anos de experiência docente, como também professores com 10 e 15 anos de experiência em sala de aula. A partir da pesquisa de Farias (2022) podemos observar que além de receber a influência de professores de outros estados, a UFMS Campus de Três Lagoas também recebeu muitos alunos com origem fora de MS, particularmente do estado de São Paulo. Essa situação se dá em virtude da localização fronteiriça da cidade, o que também foi evidenciado no relato de Tatiana Guedes (2017) em Cassilândia e na pesquisa de Nathália Silva (2016) referente a Paranaíba.

Avançando em nossa linha do tempo, para um período mais recente, temos a pesquisa de Vivian Souza (2022), que buscou compreender a composição dos cursos de licenciatura em matemática dos campi da UFMS que ofertam o curso, primeiramente lançando um olhar sobre os Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) vigentes e também entrevistando os coordenadores de curso, ou professores que trouxeram em suas narrativas aspectos sobre a constituição desses documentos. Souza (2022) buscou compreender o entendimento de cada grupo docente sobre o que seria a prática como componente curricular, e destacou que geralmente ela é relacionada às disciplinas de Prática de Ensino e Estágio Curricular Supervisionado, e dificilmente relacionada às disciplinas de matemática. A pesquisadora também trouxe questões sobre a pertinência de uma matriz curricular única para os cursos dos vários campis, e as narrativas dos entrevistados evidenciaram que a diversidade existente atende melhor às necessidades de cada região, pois cada localidade tem diferentes expectativas, influenciadas pelo grupo docente disponível.

Saindo dessa 'linha do tempo', temos os trabalhos de doutorado de Rildo Nascimento (2022) e a dissertação de Mariana Souza (2021) que estão relacionados a cursos de licenciatura em matemática em Mato Grosso do Sul, mas dão um enfoque nas disciplinas relacionadas a geometria e construções geométricas.

A pesquisa de Souza (2021) traz as narrativas, por meio da metodologia da História Oral, dos professores que ministravam disciplinas relacionadas às Construções Geométricas nos campis da UFMS que ofertavam o curso de licenciatura em matemática. A partir das narrativas, pode-se perceber que, muitas vezes, essas disciplinas eram ministradas por professores temporários, que tinham uma grande quantidade de disciplinas, geralmente no início da carreira docente. Algumas dificuldades relatadas foram também a ausência desse conteúdo durante a formação na graduação e pós-graduação, o que gerava muitas vezes a insegurança no momento de lecionar. Souza (2021) a partir das narrativas, pode traçar um panorama das disciplinas de Construções Geométricas e discutir a relevância dessa disciplina/conteúdo na formação inicial de professores.

Nascimento (2022) investiga as geometrias a ensinar e para ensinar no curso de licenciatura em matemática na UEMS, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, olhando para os PPCs do curso de matemática em Dourados, e suas modificações ao longo dos anos. Com a intenção de compreender que Geometria se constituiu como ferramenta de trabalho do professor de matemática na Licenciatura em Matemática da UEMS no período de 1994 a 2019, o pesquisador discute alguns elementos de uma geometria para ensinar, como: materiais de ensino, apresentação dos objetos de ensino, processos de generalização e de aplicação prática dos conteúdos das disciplinas relacionadas à geometria. Ao comparar os projetos do curso de 1994 a 2019, são percebidas modificações como a crescente recomendação do uso das tecnologias, o alinhamento do ensino desses conteúdos a partir das tendências em Educação Matemática, a retirada da oferta da disciplina Geometria Descritiva, entre outras modificações que se faziam necessárias a partir de mudanças na legislação que regulamenta o Ensino Superior.

O QUE PODEMOS DIZER SOBRE A FORMAÇÃO DE PROFESSORES EM MATO GROSSO DO SUL

A descrição dos trabalhos elencados na seção anterior, nos permite vislumbrar a complexidade do contexto educacional e da formação de professores em MS. Dentre os doze trabalhos consultados, dez utilizaram em suas pesquisas a metodologia da História Oral e trouxeram relatos dos atores

envolvidos no contexto educacional de Mato Grosso do Sul. Silva (2015), Gonzales (2017) e Faoro (2014) fizeram entrevistas com professores das instituições formadoras, que atuaram em meados da década de 1970, e nos permitiram vislumbrar as características e dificuldades encontradas na implementação de cursos de licenciatura, destacando as licenciaturas curtas e parceladas, e as licenciaturas em ciências com habilitação em matemática. Os relatos indicam a presença de muitos professores leigos atuando nas escolas da educação básica, e o público alvo desses cursos de formação abrangia majoritariamente esses profissionais.

O trabalho de Silva (2016) apresenta os relatos de professores da educação básica que atuaram na região de Paranaíba, cidade fronteiriça. Os relatos destacam novamente a atuação de professores leigos e a necessidade de buscar formação em cidades do estado de São Paulo, próximas à região de Paranaíba.

O trabalho de Guedes (2017), ao trazer relatos de professores formadores que atuaram na UEMS em Cassilândia, indica a influência das forças políticas na criação da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul. O aproveitamento de professores da rede estadual de ensino para compor o quadro inicial de docentes da UEMS nos faz inferir que mesmo após a implementação de cursos de formação de professores desde meados de 1970, por parte da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, ainda havia uma defasagem na década de 1990, e essa se estendia até ao ensino superior. Esse 'reaproveitamento' de professores da educação básica de ensino para compor o grupo de professores formadores, também foi verificado no trabalho de Faoro (2014) referente a um período anterior a década de 1990. Outra semelhança nos trabalhos de Faoro (2014) e Guedes (2017) são os relatos que indicam a alta rotatividade de professores nessas cidades longe da capital do estado.

Os trabalhos de Zandomenighi (2017) e Almeida (2017) nos mostram aspectos das iniciativas privadas para a formação de professores, o que também já havia sido abordado por Silva (2015). Abordando respectivamente os cursos das instituições UNIDERP e Universidade Católica Dom Bosco, podemos verificar as iniciativas dessas instituições para manterem a oferta de cursos de formação. Seja buscando um curso de licenciatura com ênfase em computação, aproveitando em seu quadro profissional docentes das instituições públicas, ou ainda oferecendo o curso modular, essas instituições marcam a história da formação de professores de matemática em Mato Grosso do Sul.

O trabalho de Morais (2017) nos permite compreender os primeiros passos da educação a distância na UFMS e evidencia a dificuldade da quebra de paradigmas sobre o que seria necessário para um curso de formação de professores nessa modalidade.

Os trabalhos de Farias e Vivian Souza, ambos defendidos em 2022, mostram diferentes pontos de vista. Farias (2022) traz as narrativas autobiográficas de professores egressos do curso de licenciatura em matemática de Três Lagoas e Souza (2022) entrevista coordenadores e professores do curso de licenciatura em matemática dos campis da UFMS sobre o entendimento e formulação do projeto de curso. O trabalho de Farias (2022) mostra os anseios e dificuldades dos professores após a sua formação inicial e início da docência. Por outro lado, o trabalho de Souza (2022), ao levantar questionamentos sobre a formulação do documento norteador do curso, esbarra em questões como, por exemplo, a rotatividade de professores nas cidades distantes da capital, a característica singular que cada curso oferece no campus em que está instalado, a oferta de disciplinas nos cursos atrelada ao quadro docente existente no local, dentre outras.

Por fim, os trabalhos de Mariana Souza (2021) e Nascimento (2022) abordam a formação de professores pelo viés das disciplinas de Construções Geométricas e Geometria, respectivamente. Souza (2021) opta por entrevistar os professores dessas disciplinas nos cursos de licenciatura em matemática dos campis da UFMS, e Nascimento (2022) analisa os projetos pedagógicos do curso de licenciatura em matemática da UEMS em Dourados, de 1994 a 2019. Os relatos de Souza (2021) indicam a incumbência das disciplinas de Construções Geométricas a professores recém-chegados ao grupo docente, ou ainda a professores contratados, visto que os professores efetivos, em sua maioria, optam por lecionar disciplinas que são consideradas mais importantes. Além disso, muitas vezes há na formação inicial docente, e mesmo em cursos de pós-graduação, uma defasagem na abordagem desses conteúdos.

Nascimento (2022) ao analisar os projetos do curso de licenciatura em matemática e suas modificações, consegue explicitar o que mudou e o que permaneceu no entendimento do grupo de docentes formadores sobre qual a geometria deveria ser ensinada na graduação e qual seria a geometria como ferramenta de trabalho do professor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dos trabalhos nos permitiu ter uma visão panorâmica do cenário histórico de formação de professores de matemática em Mato Grosso do Sul. Podemos perceber que mesmo antes da criação do Estado de Mato Grosso do Sul, as políticas de povoamento da região influenciaram a criação de escolas e posteriormente de cursos de formação.

A história da educação em Mato Grosso do Sul indica a atuação de muitos professores leigos no estado por várias décadas, e iniciativas para suprir essa defasagem. Nem sempre houve uma continuidade nas políticas públicas para a formação de professores, os relatos das dificuldades dos egressos dos cursos de licenciatura parcelada, evidenciados na pesquisa de Gonzales (2017) e a tentativa de fechar a Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, conforme Guedes (2017), são exemplos que indicam que nem sempre houve o empenho do poder público nas políticas educacionais e na formação de professores de matemática.

Por outro lado, os atores da educação: os professores, formadores e em formação, muitas vezes fizeram esse investimento. Seja buscando formação em outras cidades, como os relatos do grupo de Paranaíba, ou investindo em cursos modulares de instituições privadas, como o caso dos relatos da UCDB, ou ainda dispondo de tempo em período de férias escolares, conforme mostram os relatos de egressos e professores das licenciaturas parceladas.

Esperamos que a partir desse panorama sobre o contexto educacional na área de matemática em Mato Grosso do Sul, possamos compreender os aspectos envolvidos na formação de professores e direcionar esforços para melhoria dessa realidade. Para além destes aspectos mais gerais, para nossa pesquisa de doutorado, é possível delinear algumas indagações como por exemplo: Qual a formação dos professores que compuseram o corpo docente da licenciatura em matemática da UEMS em sua primeira década de funcionamento? Como eram abordados os conteúdos das disciplinas de Geometria? Quais mudanças a criação da licenciatura em matemática da UEMS trouxe ao cenário educacional de Mato Grosso do Sul? Dentre tantas outras que não conseguiremos esgotar com nossa pesquisa, mas que nos servirão como direcionamento.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Ana Maria de. **Inventar e se reinventar em meio a narrativas históricas:** uma trajetória de pesquisa sobre o curso modular de matemática em Campo Grande-MS. 2017. 226 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017.

BRASIL. Lei Complementar nº 31, de 11 de outubro de 1977. Dispõe sobre a Criação do Estado de Mato Grosso do Sul. Diário Oficial da União, Brasília, 11 out. 1977. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/lcp/lcp31.htm. Acesso em: 21 jan. 2025.

FAORO, Tiaki Cintia Togura. **A formação de professores de matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul:** um olhar sobre os anos iniciais da licenciatura em Dourados.2014. 236f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

FARIAS, Gerson dos Santos. **Narrativas autobiográficas do percurso formativo de egressos da Licenciatura em Matemática da UFMS/CPTL**.2022. 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2022.

GONZALES, Kátia Guerchi. **Formar professores que ensinam Matemática:** uma história do movimento das Licenciaturas Parceladas no Mato Grosso do Sul. 2017. 534f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência)–Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, Bauru, 2017.

GUEDES, Tatiana. Rozália. **Entre a necessidade e o jogo político:** uma história sobre a criação e a extinção do curso de ciências da UEMS em Cassilândia. 2018. 204 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica.** Atualização da edição João Bosco Medeiros–9. ed. – [2. Reimpr.].–São Paulo: Atlas, 2023.

MARQUES, Inês Velter; IRALA, Clovis. Acervos públicos e arquivos escolares: fontes para o estudo da história das instituições educativas no sul de Mato Grosso (1940-1977). In: PINTO, Adriana Aparecida; FURTADO, Alessandra Cristina (org.). **A História da Educação em Mato Grosso Do Sul: temas e abordagens**: temas e abordagens. Dourados: UFGD, 2017. p. 31-50.

MORAIS, Ana Cláudia Lemes de. **Licenciatura em matemática da UFMS**: movimentos precursores e implantação de um curso a distância. 2017. 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017.

NASCIMENTO, Rildo Pinheiro. **Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul:** Uma Geometria a e para ensinar na Licenciatura em Matemática (1994-2019). 2022. 135 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2022.

SILVA, Carla Regina Mariano da. **Uma, nove ou dez narrativas sobre as Licenciaturas em Ciências e Matemática em Mato Grosso do Sul.** 2015. 369 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2015.

SILVA, Edna Machado da; CHAQUIAM, Miguel. CONTRIBUIÇÕES DA DISCIPLINA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA À AUTOEFICÁCIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES. **Anais–Seminário Nacional de História da Matemática**, [*s. l.*], v. 15, 2023. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/66. Acesso em: 22 jan. 2025.

SILVA, Natália Cristina da. **Cenas sobre a formação e atuação de professores de matemática de Paranaíba/MS na segunda metade do século XX.** 2016. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

SILVA, Stella Sanches de Oliveira; PESSANHA, Eurize Caldas. LICEU CUIABANO: proposta para o ensino secundário em Mato Grosso (séculos XIX e XX). In: PINTO, Adriana Aparecida; FURTADO, Alessandra Cristina (org.). **A História da Educação em Mato Grosso Do Sul: temas e abordagens**: temas e abordagens. Dourados: UFGD, 2017. p. 15-30.

SOUZA, Mariana Duarte de. **Construções geométricas na formação de professores de Matemática na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul**. 2021. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2021.

SOUZA, Vivian Campos Martins de. **Entre Projetos e Entrevistas:** exercitando "um novo olhar" para as Licenciaturas em Matemática da UFMS. 2022. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2022.

ZANDOMENIGHI, Renata Aparecida. **Uma história acerca da constituição do curso de graduação em Matemática da Universidade para o desenvolvimento do Estado e da região do Pantanal (UNIDERP/CESUP)**. 2017. 195f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Histórias, memórias e consolidação do curso de licenciatura em matemática do CERES: quarenta e quatro anos formando docentes na região do Seridó/RN

Stories, memories and consolidation of the bachelor's degree in mathematics at ceres: forty-four years training teachers in the Seridó/RN region

Maria Maroni Lopes[1]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Angélica Raiz[2]
Claretiano Centro Universitário de Rio Claro – CEUCLAR

RESUMO

Este texto discute aspectos de uma de pesquisa em andamento que objetiva estudar o processo de criação e implementação, consolidação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ensino Superior do Seridó, CERES, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN. Busca-se compreender em que contexto o referido curso contribuiu/contribui com a formação e prática dos Docentes que ensinam matemática na supracitada região. Para tanto, apoia-se em autores nacionais e internacionais que discutem história e memória escolar. As respostas, estão sendo construídas ao longo da investigação, por meio dos documentos analisados nos arquivos inventariados. Especificamente, trata-se, neste artigo, do estudo do currículo, ementa das disciplinas e Projetos Pedagógicos do Curso. De maneira que em nossa pesquisa, entrelaçamos os dados interpretados nos documentos, e, em histórias/narrativa, por meio de entrevistas com docentes e egressos. Os resultados nos possibilitaram evidenciar que o curso de Licenciatura em Matemática do CERES teve como embrião o curso de Licenciatura Curta em Ciências, criado em 1979. As mudanças curriculares iniciaram em 1980 com a criação da habilitação em matemática, e em 1981 passa a ser Licenciatura Plena em Matemática com uma nova readequação do currículo. Ocorreu uma restruturação do curso em 1985, em 1996 mediante a Lei de Diretrizes da Educação Nacional foi realizada mudanças curriculares na perspectiva de melhorar a qualidade da formação de professores. A partir de 2001 o curso passa a ter projeto pedagógico, que traz uma compreensão do perfil do egresso, ou seja, do profissional que pretende formar.

Palavras-chave: Licenciatura em Matemática. Formação Docente. Memória escolar. Projeto Pedagógico.

ABSTRACTS

This text discusses aspects of an ongoing research project that aims to study the process of creation, implementation and consolidation of the Mathematics Degree course at the Centro de Ensino Superior do Seridó, CERES, of the Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN. The aim is to understand in what context the course contributed/contributes to the training and practice of teachers who teach mathematics in the aforementioned region. To this end, it relies on national and international authors who discuss history and school memory. The answers are being constructed throughout the investigation, through the documents analyzed in the inventoried archives. Specifically, this article deals with the study of the curriculum, syllabus of the disciplines and Pedagogical Projects of the Course. Thus, in our research, we interweave the data interpreted in the documents, and in stories/narratives, through interviews with teachers and graduates. The results allowed us to demonstrate that the CERES Mathematics Degree course had its origins in the Short Degree in Science course, created in 1979. The curricular changes began in 1980 with the creation of the mathematics major, and in 1981 it became a Full Degree in Mathematics with a new curriculum readjustment. The course was restructured in 1985, and in 1996, through the National Education Guidelines Law, curricular changes were made with the aim of improving the quality of teacher training. From 2001 onwards, the course began to have a pedagogical project, which provides an understanding of the graduate profile, that is, of the professional it intends to train.

Keywords: Degree in Mathematics. Teacher Training. School memory. Pedagogical Project.

[1] Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Professora, Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Caicó, RN, Brasil. E-mail: maroni.lopes@ufrn.br.

[2] Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Professora, Centro Universitário Claretiano, Rio Claro, SP, Brasil. E-mail: angel_raiz@yahoo.com.br.

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa busca, entre outros objetivos, estudar o projeto de criação, implantação, e consolidação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ensino Superior do Seridó, CERES, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN. E, compreender de que modo o referido curso tem contribuído com a formação e prática dos docentes que ensinam matemática na supracitada região. Assim, para realizar a nossa pesquisa historiográfica, fundamenta-se em argumentos teóricos de autores que tratam da história das instituições de ensino, e em procedimentos metodológicos de interpretação de variadas fontes: documentais escritas (atas, boletins informativos, convites de formaturas, decretos, portarias, resoluções, relatórios semestrais do curso, periódicos locais e nacionais, teses, dissertações e artigos), fontes iconográficas (fotos, imagens e placas de formados) e orais (narrativas dos sujeitos envolvidos).

Nessa perspectiva, formar professores de matemática em uma região como o Seridó, no Rio Grande do Norte, é um evento de relevância acadêmica e social. Investigar este processo permite compreender como iniciativas acadêmicas podem impactar positivamente a formação de professores de matemática, essenciais para a educação na região. De modo que o estudo busca entender de que maneira o curso contribuiu e continua contribuindo para a formação dos docentes que ensinam matemática no Seridó. Isto é de grande relevância para avaliar o potencial do curso na preparação de profissionais qualificados e engajados com as necessidades educacionais locais. Outro ponto relevante em nosso texto se refere a escolha de uma metodologia que combina abordagens qualitativas e quantitativas, a qual permite uma análise profunda e abrangente dos fenômenos estudados. A utilização de documentos históricos, entrevistas com docentes, técnicos administrativos e ex-alunos, bem como a análise de dados quantitativos proporciona uma visão multifacetada do impacto do curso ao longo do tempo, o que pode vir a trazer aportes significativos para a compreensão, da comunidade acadêmica e em geral, de como se deu ao longo do tempo o processo de formação docente, bem como as políticas de investimentos na educação pública.

Como posto o projeto também se propõe a contribuir para a preservação da memória e história do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ensino Superior do Seridó, RN, criando um memorial educativo. Isso não apenas valoriza a trajetória da instituição e do curso, mas também serve como recurso educacional e informativo para futuros estudantes, pesquisadores e a comunidade em geral. De modo que os resultados esperados, incluindo o memorial educativo com as informações inventariadas, contribuam com o potencial para produzir conhecimento científico relevante e favoreça a divulgação acadêmica por meio de trabalhos de conclusão de cursos, dissertações e artigos. Essa divulgação amplia o impacto do estudo, beneficiando tanto a academia quanto a comunidade educacional local. Portanto, o projeto não só visa investigar um evento significativo na educação do Seridó, mas também busca documentar, analisar e divulgar os resultados de forma a enriquecer o campo acadêmico e educacional, fortalecendo a base de conhecimento sobre a formação de professores de matemática em contexto regional específico.

Nesse sentido, os documentos, já analisados, nos evidenciam que na década de 70, do século XX, foi iniciado, na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN, o processo de interiorização da instituição, o que culminou com a criação das unidades de ensino nas cidades de Macau, Nova Cruz, Santa Cruz, Currais Novos e Caicó, tendo estas unidades a oferta de diversos cursos de graduação. Com a ampliação dos cursos, criou-se em Caicó o curso de Licenciatura em Matemática em 1979. Vale destacar que as referidas unidades de ensino se constituíram nos chamados Campi Avançados, tendo assim os seus dirigentes nomeados pelo reitor da universidade. Nessa direção o

Campus Avançado de Caicó–RN, iniciou suas atividades no ano de 1974. No ano de 1995, após o processo de reestruturação das unidades de ensino do interior, consequência de mudanças na política de interiorização da UFRN, foi criado o Centro de Ensino Superior do Seridó–CERES, abrangendo as unidades de ensino, instaladas nas cidades de Caicó e Currais Novos.

Conforme os documentos analisados, o Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ensino Superior do Seridó (CERES) teve como embrião o Curso de Licenciatura Curta em Ciências, o qual iniciaou suas atividades em 1979. No ano de 1980, pela Resolução no 89/80–CONSEPE, de 19/06/1980 foram abertas 25 vagas, por meio de concurso vestibular, para o Curso de Matemática–Licenciatura Plena com estrutura curricular idêntica à do Curso de mesmo nome oferecido pelo Campus Central. Em 1985, por meio da Resolução no 089/85–CONSEPE, de 18/06/1985 foi realizada uma nova reforma curricular, contudo se observa que o curso de Matemática de Caicó continuou com a mesma estrutura curricular do Curso do Campus Central e permaneceu nesse formato até o ano de 1996. O currículo do curso teve mais algumas mudanças, as quais objetivavam atender as demandas do mercado, e seguindo a vigência da Lei de Diretrizes de Bases da Educação Nacional, datada de 20 de dezembro de 1996. Assim, cabe destacar que a última atualização curricular aconteceu em 2012.

Nessa perspectiva, as leituras, e interpretações dos documentos, conversas informais, nos trouxeram algumas inquietações, entre estas: a Licenciatura em Matemática do CERES teve influências do curso em Natal ao longo de quanto tempo? Os Docentes do Campus Central faziam visitas sistemática ao campus em Caicó? Havia um diálogo constante entre os professores dos diferentes campi? Quando se percebeu a necessidade de mudanças no currículo de modo a atender as demandas da região? Diante das diferentes inquirições, e com base no exposto anteriormente, surge a nossa pergunta norteadora: *Por que criar um curso de Licenciatura em Matemática, em Caicó, na região do Seridó RN? Para tanto, objetiva-se compreender: o processo de criação, implementação e consolidação Licenciatura em Matemática do Centro de Ensino Superior do Seridó. E, em que contexto o referido curso contribuiu/contribui com a formação e prática dos Docentes que ensinam matemática na supracitada região.*

ARGUMENTOS TEÓRICOS: CULTURA ESCOLAR E FORMAÇÃO DOCENTE

O nosso texto, cuja ênfase situa-se nos domínios da historiografia das instituições de ensino e, em suas práticas formativas, fundamenta-se, entre outras contribuições, nas teorizações de Justino Magalhães (2004), quanto ao seu entendimento de que a história de uma instituição educativa é permeada por interesses públicos e pelas normas e compromissos sociais com a realidade a que essa instituição se destina. Essa perspectiva teórica se expressa de modo relacional e multidimensional, conforme nos esclarece o referido autor:

> compreender e explicar a realidade histórica de uma instituição [...] é integrá-la de forma interativa no quadro mais amplo do sistema educativo, nos contextos e nas circunstâncias históricas, implicando-a na evolução de uma comunidade e de uma região, seu território, seus públicos e zonas de influência. A sistematização e a (re) escrita do itinerário histórico de uma instituição educativa na multidimensionalidade e na construção de um sentido encontram nessa relação a sua principal base de informação e de orientação (Magalhães, 2004, p. 133–134).

Compreende-se que ao tratar da história do curso de Licenciatura em Matemática do CERES/ UFRN, campus de Caicó – RN, discute-se, entre outras questões, a instituição de ensino que o mantém, as suas concepções de ensino, as políticas de expansão dos *campi* do interior, as resoluções e normativas. Nessa perspectiva, as concepções do supracitado autor nos auxiliaram/auxiliam na seleção e análise das fontes documentais, em especial no esclarecimento das múltiplas nuances que permeiam as relações entre história da educação, história das instituições de ensino e práticas educativas.

Magalhães, (2004) assume em seu texto alguns conceitos, como o de *instituição,* que em sua forma escolar, estabelece relação com propósitos formativos, dá significado a uma visão de mundo, gera afinidades e constitui fator de identidade; *materialidade*, que se ativa em instâncias objetivas e de funcionamento: espaços, meios didáticos e pedagógicos, modos de organização, regulamentos, currículos; *representação e apropriação,* que estão relacionadas com as memórias, normas e agentes, ativados pelo grau de mobilização e de aplicação; enquanto que a *apropriação,* na perspectiva do autor, refere-se ao ideário, a construção da identidade dos sujeitos e da instituição, as dimensões materializadas em aprendizagens, expectativas e concepções de vida.

Em nosso estudo, evidenciou-se algumas conexões entre as concepções de Justino Magalhaes com a História Cultural compreendida por Michael de Certeau, (2002) e Roger Chartier (1990, 2007, 2009 e 2014). Os autores nos chamam atenção à articulação da história com o lugar social, tomando isto como condição ímpar para uma análise da sociedade. Desse modo, ao estudar a cultura escolar e as práticas educativas de uma instituição de ensino, não podemos tratá-las de modo desvinculado da sociedade que as produziu. Nessa direção, Certeau (2002) compreende que toda pesquisa histórica se articula como um lugar de produção social, político, econômico e cultural e está submetido a imposições ligadas a privilégios enraizados, de certo, em particularidades próprias. De igual modo, Chartier (2007 e 2012) em seus textos que remetem à preocupação com os diferentes tipos de livros, advoga que a escrita é o resultado da leitura, o texto existe na perspectiva do leitor que a interpreta de acordo com as suas vivências culturais e sociais. Os autores nos trouxeram luz na escrita do currículo da Licenciatura em Matemática o que diz respeito à cultura local, a cultura da instituição de ensino, e a cultura dos docentes que ali estavam vinculados.

Entende-se que é preciso ter em vista, antes de tudo, que o presente estudo se inscreve na área da história da educação, especificamente da história da educação matemática, tendo como cerne a perspectiva da história social e cultural.

(RE) CONSTRUÇÃO DA HISTÓRIA DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: FOCO NO CURRICULO DO CURSO

Como posto, objetiva-se com este estudo compreender a criação, implementação e consolidação do curso de Licenciatura em Matemática do CERES, bem como analisar algumas das contribuições deste na formação e prática docente na região do Seridó. De modo que adotamos uma abordagem qualitativa e quantitativa para a pesquisa, tendo como perspectiva realizar uma intepretação mais efetiva dos dados analisados. No entanto, no presente texto, se optou por uma análise interpretativa dos dados, inserindo o estudo na abordagem de cunho qualitativo, o que conforme Garnica (2004) este é um meio fluído, dinâmico, que não apresenta regras e resultados pré-estabelecidos. O autor defende que o pesquisador não é neutro ao realizar suas compreensões e conclusões.

"A não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar" (Garnica, 2004, p.86).

Desse modo, o rastreamento das fontes se deu ao longo de 2024, e terá sua continuidade em 2025. Consultamos alguns arquivos localizados, principalmente, no acervo da Licenciatura em Matemática do CERES, Caicó – RN, arquivos do Memorial Padre Tércio, Caicó – RN, Laboratório de Documentação Histórica – LABORDOC/UFRN – Caicó, entre estes: Atas do colegiado do curso de Matemática, avaliação do curso, convocação e pauta de reunião, correspondências expedidas e recebidas, documentos referentes ao currículo do curso e os planos de cursos de cada componente curricular, memorandos, ofícios, portarias, resoluções, relação de concluintes por ano de conclusão, entre outros.

De acordo com Duarte e Villela (2014), os arquivos institucionais físicos e virtuais abrem um leque de possibilidades aos pesquisadores. Em história da educação matemática, estes arquivos têm possibilitado um aumento significativo na produção historiográfica e a troca de experiências entre diferentes pesquisadores. Além dos arquivos físicos acessamos os documentos do repositório do Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática, CREPHIMat. Outro acervo institucional digital que tivemos a possibilidade de pesquisar foi o do Laboratório de Imagens – Digitalização de Documentos – LABIM/UFRN, o qual conta com uma rica coleção sobre a História da Educação do Rio Grande do Norte.

Assim, para esse texto optamos por trazer a história do movimento de criação e implementação da estrutura curricular do curso. Inicialmente, buscou-se nos arquivos indícios das disciplinas que eram ofertadas desde a idealização do curso até os dias atuais. Existe nos arquivos do CERES documentos que tratam da descrição das disciplinas que foram ofertadas, ou que estão nos documentos oficiais como ofertadas. De modo que é de grande relevância o diálogo entre fontes para compreendermos as mudanças ocorridas e o que consta à exemplo na matriz curricular do curso e no histórico dos discentes em cada período.

Buscamos auxílio no entendimento do historiador Jacques Le Goff, quando afirma que "devemos fazer o inventário dos arquivos do silêncio, e fazer a história a partir dos documentos e das ausências de documentos" (2003, p. 109). Fizemos, desse modo, o diálogo entre as fontes encontradas, as que nos foram possíveis analisar ressaltando em nosso texto as dificuldades e ausências dos documentos. Compreendemos documento como apontado por Febvre *apud*, Le Goff (2003), enquanto tudo que a nossa habilidade, observação e análise consegue captar na construção historiográfica.

Não obstante, o documento, na perspectiva de Le Goff, "não é qualquer coisa que fica por conta do passado, é um produto da sociedade que o fabricou segundo as relações que aí detinham o poder" (2003, p. 520). De fato, o que sobrevive é aquilo que foi tido como prioridade, à época, dependendo de como se concebia o que era essencial. Nessa direção, Marc Bloch, em Apologia da História ou o ofício do historiador, ressalta que é um equívoco considerar que a cada problema histórico corresponde um tipo de documento. Nessa direção, a escrita do presente texto foi sendo delineada a partir das análises de fontes que nos foram possíveis de catalogar. Recorremos aos vestígios das fontes pesquisadas, próprias da cultura escolar, por estarmos em consonância com o que defende o pesquisador Wagner Valente (2012), quando este pondera que:

> esses vestígios por circunstâncias as mais variadas, podem ser encontradas ao lado de toda normatização oficial que regula o funcionamento da escola, como leis, decretos portarias etc. há toda uma série de produção da cultura escolar: livros didáticos, cadernos de alunos de professores, diários de classe, provas etc. (Valente, 2012, p. 11).

Desse modo, as publicações dos históricos dos alunos e alunas no Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas, SIGAA, UFRN, nos possibilitou realizar o diálogo entre as disciplinas que constam na matriz curricular do curso e as que estão presentes no histórico dos/das discentes. Assim, conforme análise do documento intitulado: Plano de Curso Licenciatura Plena em Matemática, data: 12 de setembro de 1980. O referido plano ressalta que para a obtenção do grau de Licenciatura Plena em Matemática, o aluno deverá perfazer um total de 150 créditos equivalentes a 2310 horas de carga horária efetiva, integralizada em uma média de quatro anos. Sendo exigida a prática de Educação Física. Os componentes curriculares eram divididos em oito níveis, o que pode ser compreendido, atualmente, como sendo os oito semestres letivos. O Quadro 1 apresenta as disciplinas do primeiro nível do curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Quadro 1 - Disciplinas do primeiro nível do curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Código	Disciplina	Créditos	Carga horária
MAT – 1003	Fundamentos de Matemática	06	90h
FIS. 1001	Elementos de Física	05	75h
QUI. 1002	Fundamentos de Química	06	90h
LET. 1001	Língua Portuguesa	04	60h

Fonte: Arquivo do pesquisador editado do currículo do curso de Matemática de 1980.

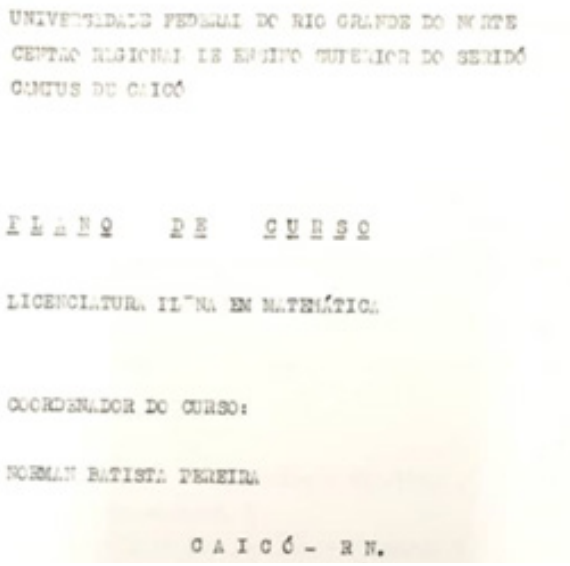
O diálogo entre fontes, como posto anteriormente, nos trouxe a compreensão que efetivamente o currículo descrito nos documentos era o mesmo que aparece no histórico do aluno que teve entrada em 1982 com saída em 1986.

PRIMEIROS INDÍCIOS: COSNTRUÇÃO E ANÁLISES DOS DADOS

Como posto, o nosso objeto de pesquisa é o curso de Licenciatura em Matemática, LM, do Centro de Ensino Superior do Seridó – CERES, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN. Para esse texto buscamos entender as mudanças implementadas no currículo do supracitado curso, e como estas mudanças implicam na formação e na prática dos docentes da região.

Evidenciou-se, com base nos documentos analisados, que o curso de LM do CERES foi criado em 1979, com a expansão da UFRN, quando esta instituição criou campus avançados no interior. Após seis anos de funcionamento, foi idealizado e implementado o curso de Matemática, no entanto, foi criado primeiro a Licenciatura Curta em Ciências tendo como perspectiva a Licenciatura Plena em Química, Física e Matemática. Em virtude do interesse dos discentes que estavam matriculados no curso dede 1979 ser por Matemática, optou-se por criar a habilitação em Matemática. Assim, no documento intitulado Plano de Curso, Figura 1, apresenta alguns indícios de como se deu o planejamento das atividades do curso.

Figura 1 - Capa do Plano de Curso da Licenciatura em Matemática



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO REGIONAL DE ENSINO SUPERIOR DO SERIDÓ
CAMPUS DE CAICÓ

P L A N O D E C U R S O

LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

COORDENADOR DO CURSO:

NORMAN BATISTA PEREIRA

C A I C Ó - R N.

Fonte: Arquivo da pesquisadora

O documento ressalta o total de componentes curriculares os quais os alunos necessitavam cursar para seja concedido o grau de licenciado em matemática. Ou seja, 145 créditos, equivalentes a 2310 horas. Integralizando o mínimo de 03 (três) anos, máximo 05 (cinco) anos, com t**é**rmino médio de 04 (quatro) anos. Destaca-se no Quadro 2 as disciplinas do currículo do curso descritas no documento. Ao realizar o diálogo entre as fontes: disciplinas que constam no plano de curso atualizado em 1982 e o histórico de uma aluna que ingressou na Licenciatura em Matemática em 1985.1[3], tendo concluído em 1988.2, as disciplinas são as mesmas. O que pode ser observado no Quadro 2 e na Figura 2.

Quadro 2 - Disciplinas do currículo atualizado em 1982.

Código	Disciplinas	Créditos	Carga horária
MAT 1057	CÁLCULO I	06	90
FIS 1001	FÍSICA I	04	90
QUI1002	FUNDAMENTOS DE QUÍMICA	06	90
MAT1001	DES. GEOMÉTRICO E GEOMETRIA PLANA	06	90
MAT1058	CÁLCULO II	06	90
FÍS 1002	FÍSICA II	06	90
QUI 1003	QUÍMICA GERAL I	06	90
MAT1064	ÁLGEBRA LINEAR I	06	90
MAT1059	CÁLCULO III	04	60
FÍS 1003	FÍSICA III	06	90
MAT1040	PROGRAMAÇÃO I	03	45
ARQ1004	GEOMETRIA DESCRITIVA	05	75
MAT1060	CÁLCULO IV	04	60
FIS 1004	FÍSICA IV	06	60
MAT1081	CÁLCULO NUMÉRICO	06	90

[3] Primeiro semestre de 1985.

MAT1019	FUNDAMENTOS DE ESTATÍTICA	06	90
	CARGA HORÁRIA TOTAL	86	1290

Fonte: Quadro construída com base nos arquivos analisados.

As disciplinas/componentes curriculares destacado no Quadro 1 eram consideradas do primeiro ciclo. No que se refere as disciplinas do segundo ciclo estas eram descritas como sendo de caráter profissionalizante. Desse modo, o Quadro 3 apresenta as referidas disciplinas.

Quadro 3 - Disciplinas do currículo atualizado em 1982.

Código	Disciplinas	Créditos	Carga horária
MAT1065	ÁLGEBRA LINEAR II	06	90
MAT1009	ÁLGEBRA I	06	90
EDU1401	PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO	04	60
EDU1001	INTRODUÇÃO A EDUCAÇÃO	04	60
EDU1123	T.A.V.E	02	30
EDU1121	DIDÁTICA II	04	60
EDU1314	EST. FUNC. ENS. 1º E 2º GRAU	04	60
FHG1301	ESTUDOS DOS PROB. BRASILEIRO I	02	30
EEU1242	PRÁTICA DO ENS. DA MATEMÁTICA	03	135
FHG1302	ESTUDO DOS PROB. BRASIL II	02	30
	CARGA HORÁRIA TOTAL	37	675

Fonte: Quadro construído om base nos arquivos analisados.

Vale destacar que Prática de Ensino da Matemática correspondia ao Estágio Curricular Obrigatório. De modo que os créditos obrigatórios eram 125 tendo como carga horária total obrigatória 1965. Consta 26 disciplinas complementares, as quais os discentes optavam por cursar, dependendo da oferta do curso. A Figura 2 traz parte do histórico de uma discente, como posto anteriormente, e a Figura 3 a continuidade do referido histórico.

Figura 2 - Componentes curriculares cursados pela discentes em 1985.1

Ano/Período Letivo		Componente Curricular		Hora Aula	CH	Turma
1985.1		FIS0001	FISICA I	60	60	85
1985.1		MAT0001	DESENHO GEOMETRICO E GEOMETRIA PLANA	90	90	85
1985.1		MAT0057	CALCULO I	90	90	85
1985.1		QUI0002	FUNDAMENTOS DE QUIMICA	90	90	85
1985.2		ARQ0001	GEOMETRIA DESCRITIVA	75	75	85
1985.2	*	EPB0001	ESTUDO DE PROB BRASILEIROS I	30	30	85
1985.2		MAT0058	CALCULO II	90	90	85
1985.2		MAT0064	ALGEBRA LINEAR I	90	90	85
1986.1		DIM0038	PROGRAMACAO I	45	45	86
1986.1	*	EPB0002	ESTUDOS DE PROB BRASILEIROS II	30	30	86
1986.1		FIS0002	FISICA II	90	90	86
1986.1		MAT0059	CALCULO III	60	60	86
1986.1		MAT0065	ALGEBRA LINEAR II	90	90	86
1986.1		QUI0003	QUIMICA GERAL I	90	90	86
1986.2	*	DEF0001	EDUCACAO FISICA I	30	30	86
1986.2		DIM0040	CALCULO NUMERICO	90	90	86
1986.2		EDU0401	PSICOLOGIA DA EDUCACAO IV	90	90	86
1986.2		FIS0003	FISICA III	90	90	86
1986.2		MAT0060	CALCULO IV	60	60	86
1986.2	*	QUI0004	QUIMICA GERAL II	90	90	86
1987.1		EDU0001	INTRODUCAO A EDUCACAO	60	60	87

Fonte: Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas, SIGAA.

Figura 3 - Componentes curriculares cursados pela discentes em 1985.1

Ano/Período Letivo	Componente Curricular			Hora Aula	CH	Turma
1987.1		EDU0123	TECNICAS AUDIO-VISUAIS DE ENSINO	30	30	87
1987.1		EDU0314	ESTRUTURA E FUNCIONAMENTO DO ENS. DE 1° E 2° GRAUS	60	60	87
1987.1		MAT0065	ALGEBRA LINEAR II	90	90	87
1987.2	*	CON0119	MATEMATICA COMERCIAL E FINANCEIRA	60	60	87
1987.2	*	DEF0002	EDUCACAO FISICA II	30	30	87
1987.2		EDU0121	DIDATICA II	60	60	87
1987.2		EST0202	FUNDAMENTOS DE ESTATISTICA	90	90	87
1987.2		MAT0009	ALGEBRA I	90	90	87
1987.2	*	MAT0055	HISTORIA DA MATEMATICA	90	90	87
1988.1		ARQ0001	GEOMETRIA DESCRITIVA	75	75	88
1988.1	#	EDU0511	FILOSOFIA DA EDUCACAO	90	90	88
1988.1		FIS0004	FISICA IV	90	90	88
1988.1	*	FIS0107	HISTORIA DA CIENCIA	60	60	88
1988.2		EDU0242	PRATICA DE ENSINO DE MATEMATICA	0	135	88
1988.2	*	MAT0015	EQUACOES DIFERENCIAIS ORDINARIAS	90	90	88
1988.2	*	MAT0217	FUNDAMENTOS DE MATEMATICA ELEMENTAR	90	90	88

Fonte: Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas, SIGAA.

Com base nos dados inventariados, e até o presente analisados, compreende-se que o curso de Licenciatura em Matemática, LM, do Centro de Ensino Superior do Seridó, CERES, iniciou suas atividades em 1979, com a criação do curso de Licenciatura curta em Ciências. Contudo, não foi possível, encontrar dados do currículo inicial nos documentos até agora inventariados, bem como nos históricos do Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas, SIGAA. Ou seja, estes não trazem os dados dos discentes que realizaram Licenciatura curta em Ciências.

Conclui-se que o curso de LM do CERES teve seu primeiro currículo direcionado ao ensino de ciências, no entanto, houve mudanças implementadas em 1980 e logo em seguida em 1981, e estas permaneceram até 1986. Assim, foi realizada a inserção de novas disciplinas e retirada outras, tendo como direcionamento aproximar os licenciandos da formação do professor para atuar na área de matemática na educação básica, ou seja, formar o professor de matemática do primeiro e segundo grau4.

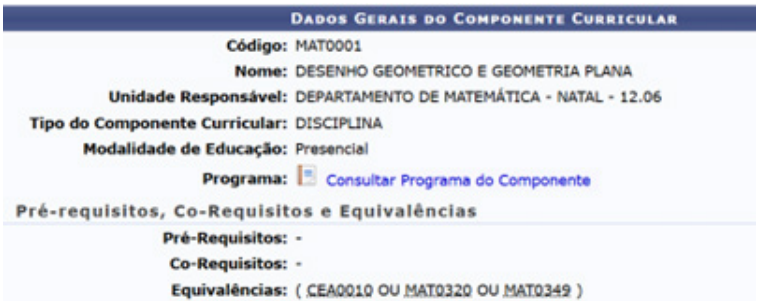
Em 1998 acontece uma mudança na matriz curricular do curso, tendo os componentes curriculares novos códigos, à exemplo, Cálculo I era MAT0057 e passou a ser CEA0002, sendo equivalente a MAT0057. A carga horária obrigatória passou para 2325, tendo a carga horária de optativas 330h. As mudanças se deram tanto no âmbito da formação didático-pedagógico quanto em relação a matemática, desse modo, retirou-se três componentes curriculares da área da química, e outra mais próxima ao ensino de ciências. Foi acrescida, entre outras, a disciplina de Libras, DED0600 – Língua Brasileira de Sinais – 90h. Conforme Souza (2024) a formação inicial docente no Brasil tem maior relevância após a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDBEN, (Lei nº 9394/96). O que impulsionou mudanças nas orientações sobre os cursos de graduação voltados a formação docente.

Direcionando o olhar a uma das nossas inquirições: a Licenciatura em Matemática do CERES teve influências do curso em Natal ao longo de quanto tempo? As interpretações nos fazem concluir que até o ano de 1998 o currículo da LM do CERES era semelhante ao do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Terra, CCET – Natal. O que pode ser comprovado por meio dos códigos e ementas das disciplinas/componentes curriculares. Ressalta-se na Figura 4 e no Quadro 4 os componentes, Desenho Geométrico e Geometria Plana, com código MAT 0001, com carga horária 90h, e, Programação I, código DIM0038, tendo carga horária 45.

[4] Hoje, Ensino Fundamental, anos finais e Ensino Médio.

Unidade responsável pela oferta era, respectivamente, o Departamento de Matemática – Natal e o Departamento de Informática e Matemática Aplicada do campus central em Natal.

Figura 4 - Disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Plana do currículo da Licenciatura do CERES de 1986.



Fonte: Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas, SIGAA.

Quadro 4 - Disciplinas que compunha o currículo da Licenciatura em Matemática do CERES de 1986.

Código	Disciplinas	Créditos	Carga horária
FIS0001	FÍSICA I	04	60
MAT0001	DESENHO GEOMÉTRICO E GEOMETRIA PLANA	06	90
MAT0057	CÁLCULO I	04	60
ARQ0001	GEOMETRIA DESCRITIVA	05	75
DIM0038	PROGRAMAÇÃO I	03	45
DEF0001	EDUCAÇÃO FÍSICA I	02	30
EDU0242	PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMATICA–135h		135

Fonte: Estrutura curricular da Licenciatura em Matemática do CERES que consta no SIGAA.

Assim, sabe-se que a LM do CERES tinha os componentes curriculares ofertados pelos Departamentos do Campus Central da UFRN, tais como: Departamento de Física; Departamento de Arquitetura; Departamento de Educação; Departamento de Educação Física; Departamento de Informática e Matemática Aplicada e Departamento de Matemática. Infere-se que o curso de LM do CERES funcionava sob orientações do campus central seguindo o currículo da Licenciatura em Matemática de Natal, mesmo estando vinculado a um campus do interior. De modo que somente em 1998 as disciplinas passaram a ser de responsabilidade dos docentes vinculados ao Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, DCEA, e ao Departamento de Estudos Sociais e Educacionais do CERES.

Em 2002, foi criado o primeiro Projeto Pedagógico do Curso, sendo este um plano estratégico, o qual definia os direcionamentos pedagógicos e administrativos da Licenciatura em Matemática do CERES. Este estava pautado na Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional, nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica e nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Houve atualizações no referido projeto e a cada atualização culminou com mudanças na estrutura curricular.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa objetivou estudar o projeto de criação, implantação, e consolidação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ensino Superior do Seridó, CERES, da Univer-

sidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN. E, compreender de que modo o referido curso tem contribuído com a formação e prática dos Docentes que ensinam matemática na supracitada região.

Cumpre lembrar que as respostas aos questionamentos, a pergunta norteadora da pesquisa e aos objetivos estão sendo construídas ao longo da investigação, por meio dos documentos analisados nos arquivos inventariados. Especificamente, tratou-se, neste artigo, como posto ao longo do texto, de um olhar direcionado, especificamente, ao estudo do currículo, ementa das disciplinas e Projetos Pedagógicos do Curso. De maneira que em nossa pesquisa, entrelaçamos os dados interpretados nos documentos, e, em histórias/narrativa, por meio de entrevistas com docentes e egressos. Os resultados nos possibilitaram evidenciar que o curso de Licenciatura em Matemática do CERES teve como embrião o curso de Licenciatura Curta em Ciências, criado em 1979. As mudanças curriculares iniciaram em 1980 com a criação da habilitação em matemática, e em 1981 passa a ser Licenciatura Plena em Matemática com uma nova readequação do currículo. Ocorreu uma restruturação do curso em 1985, com base na Resolução no 089/85 – CONSEPE, tendo entrado em vigor em 1986. Em 1996 mediante a Lei de Diretrizes da Educação Nacional foi realizada mudanças curriculares na perspectiva de melhorar a qualidade da formação de professores.

A partir de 2002, embasado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, o curso passa a ter projeto pedagógico, que traz uma compreensão do perfil do egresso, ou seja, do profissional que pretende formar. De acordo com Damasceno *et al.* (2002), após decorridos mais de quinze anos, sob enormes críticas, e tendo em vista os avanços das tecnologias voltadas ao ensino, e necessidades locais, reconhece-se que o currículo do curso não mais atendia as condições necessárias ao desenvolvimento das novas competências e habilidades necessárias à formação de um profissional de Matemática para atuar na educação básica. É nessa perspectiva que o projeto pedagógico do curso foi implementado em 2002, atualizado em 2008, 2010 e 2012.

REFERÊNCIAS

BARROS, José D'Assunção. **O Campo da História** – especialidades e abordagens, Petrópolis: Vozes, 2004.

BORGES, Maria Célia; AQUINO, Orlando Fernández; PUENTES, Roberto Valdés. Formação de professores no Brasil: história, políticas e perspectivas. Revista **HISTEDBR** On line, v. 11, n. 42, p. 94-112, 2011.

BRASIL. Lei nº 9394/96. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em: 01 jan. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Resolução CNE/CP nº 1, de 18/02/2002**. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Brasília: 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf. Acesso em: 01 jan. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parecer CNE/CES nº 1.302, de 06 de novembro de 2001**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília: 2002b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 01 jan. 2025

BRITO, Arlete de Jesus. A produção de Fontes de Pesquisas para a História da Educação Matemática no Brasil. In: VALENTE, W. R. (org.). **História da Educação Matemática no Brasil**. São Paulo: LF Editorial. Editora Livraria da Física, 2014. p. 173 – 176.

BURKE, Peter. **História de Teoria Social**. Tradução Klauss Brandini Gerhardt e Roneide Venâncio Majer. São Paulo: Ed. UNESP, 2002.

CHARTIER, Roger. ¿**La muerte del libro**? 1. ed. Santiago, Chile: LOM Ediciones, 2010.

CHARTIER, Roger. **A mão do autor e a mente do editor**. Tradução George Schlesinger. 1. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2014. CHARTIER, Roger. Inscrever e apagar: cultura, escrita e Literatura. Tradução Luzmara Curcino Ferreira. São Paulo: Editora Unesp, 2007.

CHARTIER, Roger. **A História Cultural**: entre práticas e representações. Tradução Maria Manuela Galhardo. Lisboa: DIFEL; Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1990.

CHOPPIN, Alain. ‘’O historiador e o livro escolar”. **História da Educação** n.° 11, 2002: 5-24.

DAMASCENO *et al*. **Projeto Político-Pedagógico** do Curso de Matemática, Natal, 2002.

DELMAS, Bruno. **Arquivos para quê**? Textos escolhidos. São Paulo: Instituto Fernando Henrique Cardoso, 2010.

GINZBURG, Carlo. Mitos, **Emblemas, Sinais**: Morfologia e História. São Paulo: Companhia das Letras, 2003. (Tradução: Federico Carotti.)

LE GOFF, Jacques. **História e memória**. Tradução Bernardo Leitão... [et al.]. – 5° ed. – Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2003.

MAGALHÃES, Justino. **Tecendo nexos**: história das instituições educativas. Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2004.

SAITO, Fumikazu. **Curso de análises historiográficas de textos originais**. Formato remoto. PUC –SP, 2020.

SOUSA, Edson Silva de. **Uma análise das diretrizes curriculares nacionais e da base nacional comum para a formação inicial de professores da educação básica a partir da hermenêutica de profundidade**. 2024. 146 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET, Natal, 2024.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **A matemática escolar**: perspectivas históricas. São Paulo: PUC, SP, 2012.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Disciplina Didática na Licenciatura de Matemática da Ufes: trajetórias de constituição e polêmicas (1960 a 2002)

Didactics in the mathematics teaching degree at UFES: trajectories of constitution and controversies (1960–2002)

Célio Moacir dos Santos[1]
Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo – SEDU

Lígia Arantes Sad[2]
Instituto Federal do Espírito Santo – IFES

RESUMO

Este artigo investiga as transformações e permanências da disciplina Didática no contexto da formação de professores de Matemática, considerando o trajeto do campus Vitória ao campus São Mateus da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes). A questão central consiste em compreender de que maneira as vivências e percepções dos docentes influenciaram a trajetória da Didática ao longo de diferentes contextos históricos e regionais. A pesquisa fundamenta-se na análise de narrativas, as quais foram coletadas por meio de entrevistas realizadas com ex-docentes que atuaram na área durante o período investigado. A abordagem teórica apoia-se nas contribuições de Jerome Bruner, especialmente no que se refere à construção subjetiva da realidade e ao papel das narrativas na educação. Os resultados indicam que a disciplina Didática enfrentou resistência por parte dos estudantes, que frequentemente priorizavam as disciplinas de conteúdo específico, revelando uma perspectiva que privilegia o domínio do conteúdo em detrimento da formação pedagógica. Adicionalmente, a elevada rotatividade de professores comprometeu a continuidade e aprofundamento das discussões na disciplina. Contudo, as experiências práticas e a reflexão sobre a prática docente foram reiteradamente destacadas como elementos fundamentais para a formação de professores.

Palavras-chave: Didática; Formação de Professores; Educação Matemática; Narrativas; Prática Docente.

ABSTRACT

This article investigates the transformations and continuities of the Didactics discipline in the context of mathematics teacher education, considering the trajectory from the Vitória campus to the São Mateus campus of the Federal University of Espírito Santo (Ufes). The central question is to understand how teachers' experiences and perceptions have influenced the trajectory of Didactics across different historical and regional contexts. The research is based on the analysis of narratives collected through interviews with former faculty members who taught the subject during the investigated period. The theoretical framework draws on the contributions of Jerome Bruner, particularly regarding the subjective construction of reality and the role of narratives in education. The findings indicate that the Didactics discipline faced resistance from students, who often prioritized subject-specific courses, reflecting a perspective that favors content mastery over pedagogical training. Additionally, the high turnover of faculty members hindered the continuity and deepening of discussions within the discipline. However, practical experiences and reflections on teaching practice were consistently highlighted as fundamental elements in teacher education.

Keywords: Didactics; Teacher Training; Mathematics Education; Narratives; Teaching Practice.

INTRODUÇÃO

O presente texto é um recorte da pesquisa de doutorado defendida em novembro de 2024 no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação do Espírito Santo (Ifes). O estudo e investigação tem como objetivo central a análise da dis-

[1] Doutor em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes). Professor de Matemática na Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo (SEDU), Vitória, Espírito Santo, Brasil. E-mail: moacircelio@gmail.com.

[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Professora de Matemática e Educação Matemática no Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), Vitória, Espírito Santo, Brasil. E-mail: aransadli@gmail.com.

ciplina Didática, abordando sua constituição, funcionamento e finalidades em curso específico de Licenciatura de Matemática. Parte-se do pressuposto de que o estudo histórico das configurações de uma disciplina, desde sua emergência até suas transformações e permanências, é fundamental para compreender os fatores históricos que impactaram diretamente sua prática. Nesse contexto, Viñao (2006) destaca a natureza dinâmica das disciplinas, descritas como organismos vivos em constante transformação. Para Burke (2015), as disciplinas, institucionalizadas em profissões, podem ser comparadas a nações com territórios e tradições próprias, evidenciando sua autonomia e dinamicidade.

Inserindo-se no campo da História da Educação Matemática, a pesquisa adota uma perspectiva regional ao investigar a formação inicial de professores de Matemática no Espírito Santo, com ênfase na trajetória histórica da disciplina Didática. O recorte temporal inicia-se em 1964, com a criação do primeiro curso de Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Espírito Santo (FAFI), e se estende até 2002, marco da consolidação das Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Licenciatura.

Simões, Franco e Salim (2009) ressaltam a relevância de pesquisas regionais na história da educação, pois elas revelam características e sujeitos frequentemente negligenciados em análises nacionais. Nesse sentido, a pesquisa investiga a trajetória da disciplina Didática no curso de Licenciatura em Matemática, especialmente no câmpus de Vitória e no câmpus de São Mateus, durante o período de funcionamento do atual Centro Universitário Norte do Espírito Santo (Ceunes). Embora o foco recaia sobre o câmpus São Mateus, considera-se o percurso histórico iniciado nos anos 1960 como essencial para compreender as continuidades e rupturas que marcaram o desenvolvimento da disciplina Didática.

Estudos como os de Gatti Júnior (2002) reforçam a importância de conectar instituições específicas e a história das disciplinas escolares, oferecendo uma nova perspectiva para a história da educação brasileira. No contexto dos cursos de formação de professores, Libâneo (2002) salienta que a Didática investiga os fundamentos e as práticas de ensino, assumindo papel essencial na formação docente. Hofstetter e Schneuwly (2017) comparam a Didática à medicina, ao destacar sua função de sistematizar saberes e práticas necessários ao próprio exercício profissional. Fiorentini (2005), como pesquisador no campo da formação de professores de Matemática, define a Didática como o campo que analisa as relações entre professor, aluno e conteúdo.

Na interface entre Didática e Educação Matemática, a disciplina assume um papel central, contribuindo para a construção de práticas pedagógicas voltadas ao ensino de Matemática na educação básica. Autores como Ponte (1995, 2000) e Machado (1999) também destacam a relevância das conexões entre saberes pedagógicos e disciplinares no processo formativo.

Nesse sentido, a pesquisa de doutorado se fundamenta em três instâncias metodológicas: análise documental, narrativas de professores e produção de um site. No entanto, para o trabalho em voga utilizamos apenas o trato com as narrativas. Ao enfatizar as narrativas de professores, constituídas a partir de entrevistas com aqueles que atuaram na disciplina Didática durante o período investigado, a questão central consiste em compreender de que maneira as vivências e percepções dos docentes influenciaram a trajetória da Didática ao longo de diferentes contextos históricos e regionais.

AS NARRATIVAS COMO FONTE DE INVESTIGAÇÃO

Ao longo da pesquisa, buscou-se identificar sujeitos que, de alguma forma, desempenharam um papel significativo na construção histórica da disciplina Didática, com ênfase especial nos professores. As narrativas desses participantes foram coletadas e analisadas com base nas contribuições teóricas de Jerome Bruner. O autor, defensor da psicologia cultural, adota uma abordagem histórica e interpretativa, sendo amplamente reconhecido por suas reflexões sobre a construção das narrativas e sua capacidade de atribuir significado às experiências vividas e às memórias individuais.

Segundo Bruner (1998), a realidade é moldada a partir de uma construção subjetiva, influenciada pelo ambiente cultural e pelos instrumentos que possibilitam o discurso comunicativo. Um dos elementos centrais das narrativas, de acordo com Bruner (2001), está nas intenções, na diversidade e na imprevisibilidade humana, que tornam o discurso narrativo uma forma de expressão singular e complexa.

O discurso narrativo, como aponta Bruner (1997), desempenha um papel crucial ao organizar a experiência em histórias, permitindo uma leitura do passado e oferecendo novas formas de compreendê-lo, ou seja, "estamos agora tentando convencer-nos através de nossas reconstruções da memória […] recordar o passado serve a uma função dialógica" (p. 56). O autor reforça a ideia de que a memória não é um simples registro estático, mas um processo ativo e dinâmico, no qual reconstruímos o passado de maneira dialógica, ou seja, em diálogo com nossas necessidades, contextos e interlocutores no presente. Assim, a narrativa não apenas preserva o passado, mas também o transforma, permitindo que ele seja constantemente reavaliado e recontextualizado.

Na obra "Atos de Significação", Bruner (1997) destaca três aspectos essenciais da narrativa: a sequencialidade, que envolve a organização intencional de eventos encadeados; a verossimilhança, que permite desvincular a narrativa de uma adesão estrita à realidade; e a capacidade de explorar estados intencionais singulares, possibilitando distanciamentos das normas culturais estabelecidas.

Desse modo, a fim de compreender os significados expressos nas narrativas das memórias individuais dos atores sociais e consoante as análises paradigmáticas e narrativas de Bruner (1998), optou-se por criar categorias advindas das leituras das entrevistas realizadas, bem como observar em sua dimensão mais ampla as histórias que foram sendo construídas, utilizando-se também das análises narrativas. Salienta-se que o objetivo principal é propor uma análise enredada, utilizando categorias, mas tomando cuidado para não menosprezar as particularidades de cada relato. O intuito é combinar elementos do pensamento paradigmático e do pensamento narrativo para elaborar histórias mais completas e envolventes. Assim procedendo, identificou-se quatro categorias e seus respectivos núcleos de sentido mais representativos, a saber: (i) Memória; (ii) Prática docente; (iii) Formação de professores de Matemática e (iv) Disciplina Didática.

Destaca-se que as categorias estabelecidas não possuem caráter rígido ou compartimentalizado, permitindo que uma mesma narrativa possa dialogar com mais de uma categoria, e, reciprocamente, que uma única categoria abarque múltiplas perspectivas narrativas. Essa característica evidencia a complexidade intrínseca ao processo investigativo, ao mesmo tempo em que enfatiza as experiências singulares dos sujeitos envolvidos, ressaltando suas contribuições a uma história plural.

Figura 1 – Dimensões paradigmáticas e narrativas

Fonte: Santos (2024, p. 115)

Assim, na primeira etapa são definidos os elementos principais da narrativa, como eventos, acontecimentos e ações. Esse passo organiza as categorias que vão estruturar a história, permitindo que os dados sejam reunidos e compreendidos dentro de um contexto específico.

Na segunda etapa, após a definição dos elementos, ocorre a análise dos padrões e significados que compõem a narrativa. Essa etapa busca estabelecer conexões entre os elementos identificados, gerando uma compreensão mais profunda na leitura do enredo e possibilitando uma visão coerente sobre a sequência dos eventos.

A última etapa do processo é a resolução ou conclusão da narrativa, em que se apresentam os resultados da análise, fornecendo pontos específicos sobre as situações estudadas. Esse momento culmina no entendimento das particularidades da narrativa e suas implicações à pesquisa.

Na tentativa de mostrar que as vidas humanas e, nelas, as produções de significados, são reflexos da cultura e história, Bruner (1998) toma as narrativas em uma análise paradigmática, elabora categorias e forma um sistema de relações entre elas, para então contar uma história. Ao passo que, para a análise narrativa propriamente dita, busca-se em primeiro plano situar, dentro de um contexto histórico e cultural, a valorização da experiência humana.

Para a análise de narrativas, são utilizadas as falas dos participantes da pesquisa como fonte principal, depois de transcritas e realizada a devolutiva por cada um deles. De maneira mais ampla, a narrativa é compreendida como um elemento central, possibilitando a investigação e uma constituição narrativa da realidade (Bruner, 1987, 2001). Afinal, como em outras técnicas de análise de dados, a análise de narrativas segue etapas sistematizadas para viabilizar uma compreensão prática dessa ação. Conforme destacam Bauer e Gaskell (2008, p. 90), "as narrativas se consolidaram como um método amplamente utilizado nas ciências sociais".

AS NARRATIVAS E SUAS CATEGORIAS

A fim de compreender os significados presentes nas narrativas de memórias individuais dos depoentes que, de alguma forma, participaram desse processo, a escolha foi por uma fundamentação teórica com base em análises paradigmáticas e narrativas propostas por Bruner (1998). Nesse sentido, optou-se pelo desenvolvimento de categorias a partir das entrevistas realizadas. São, portanto, elaborados quadros que apresentam recortes das categorias, acompanhados das respectivas narrativas dos depoentes, conforme apresentados adiante.

Na análise das narrativas, destacam-se dois entrevistados de relevância central, que participaram organicamente do processo histórico em estudo e possuem uma relação direta com recorte do trabalho do presente artigo. Ressalta-se que, para este trabalho, a limitação de espaço levou a seleção desses dois participantes, como representantes; mas reconhecendo, contudo, que as contribuições dos demais envolvidos também foram significativas para a compreensão dos processos e transformações ocorridas na disciplina Didática.

Assim, no processo de entrevista, foi elaborado um termo de aceite, que foi apresentado aos entrevistados para garantir sua concordância e participação voluntária no estudo. As narrativas coletadas foram cuidadosamente transcritas e, posteriormente, devolvidas aos depoentes para que pudessem revisar o conteúdo, sugerir alterações ou confirmar a fidelidade de suas falas. Esse procedimento visou assegurar a precisão e a autenticidade dos relatos, respeitando as perspectivas e vozes dos participantes.

Destacamos que, ao longo do processo de entrevistas, foi possível registrar depoimentos de professores que atuaram em diferentes décadas. Em especial, ressalta-se a entrevista com o Sr. Frederico Bussinger, filho da professora Nicéa Moreira Bussinger (1926-2024), a primeira docente responsável pela disciplina Didática na Ufes. Formada em Matemática, a professora Nicéa iniciou sua atuação na disciplina na década de 1960, desempenhando um papel pioneiro na história da formação docente na instituição.

O primeiro participante selecionado é o professor Ubiratan Silva Castro, que ingressou no curso de Matemática da Ceunes – campus UFES em São Mateus – ES, em 1995, concluindo sua graduação em 1999. No mesmo ano, iniciou sua trajetória como docente no curso de Matemática do referido campus, ministrando disciplinas como Didática, Prática de Ensino I e Prática de Ensino II. A segunda, é a professora Isabel Cristina Rabelo Gomes, também graduada em Matemática, que lecionou as disciplinas de Didática e Prática de Ensino no curso de Matemática, tanto no campus de Vitória quanto no campus de São Mateus. A docente exerceu suas atividades na Ceunes ao longo da década de 1990, contribuindo para o desenvolvimento e consolidação da disciplina Didática.

Quadro 1 – As categorias utilizadas na narrativa

Categoria: memória
Depoente: Ubiratan da Silva Castro - Me lembro, me lembro sim. É... sim, o Alexandre, ele era um professor que procurava estimular a gente dentro de tudo isso, né? E eu acho que o professor também sentia um pouco da nossa resistência na época, assim, pra ficar com mais seriedade devido às outras matérias, né? Então, ele até relevava algumas coisas, eles procuravam entender essa nossa necessidade também. Então, contrabalanceava, assim, né? Ele dizia ... vamos fazer o curso, eu entendo a demanda que vocês têm do outro lado, mas ele não deixava de dar os conteúdos que eram necessários para a matéria fluir, e o conteúdo fluir. Tanto em didática quanto em prática ensino I e II. Ele era professor contratado"(Castro, entrevista concedida em 2023). - Então, assim, os professores que davam aula pra gente das disciplinas exatas, eram efetivos da Ufes e os da disciplina didática, a maioria deles eram professores contratados. Então, às vezes, estavam sempre trocando esses professores […]" (Castro, entrevista concedida em 2023). *Depoente: Isabel Cristina Rabelo Gomes* - Fui ao curso de matemática para ver o que eles tinham. Foi lá que encontrei um grupo dentro do curso, composto por professores com um excelente domínio do conteúdo, assim como os professores que tive na UFMG. Eles já pensavam em educação matemática. Lembro da professora Lígia, da professora Dora da professora Ana Lucia e do professor Fábio, acho que eram os professores do grupo. Além deles, havia outros dois professores simpatizantes da ideia, mas que estavam mais focados no conteúdo e no modo de ensino tradicional, onde o conteúdo tem papel predominante em relação à metodologia. Esse grupo de professores já tinha estabelecido uma parceria com professores de escolas públicas de ensino fundamental e médio, concursados, não necessariamente alunos do curso de matemática, mas alguns alunos também participavam. Eles tinham um espaço dentro do prédio da matemática, onde se encontravam e se preparavam para oferecer formação continuada para os professores da rede estadual" (Gomes, entrevista concedida em 2023). - Portanto, essa oportunidade foi única. Eu adorei o curso e tive o Dr. Rising como meu orientador. O curso era oferecido pela universidade, mas ele me indicou quais disciplinas eu deveria cursar. Lembro-me de uma em particular que eu não consegui fazer. Ele insistiu muito para que eu fizesse filosofia, pois considerava essencial que um professor conhecesse essa disciplina. Então, me matriculei, mas era o primeiro semestre e não consegui acompanhar. A filosofia era muito abstrata para mim naquela época, e ainda tinha a barreira da língua, pois o vocabulário da disciplina não fazia parte da minha cultura e nem do vocabulário em inglês que eu dominava. Acabei trancando a disciplina. Falei com o professor e ele entendeu. Depois disso, não tive coragem de me matricular novamente, porque percebi que meu inglês não era suficiente para aquele contexto" (Gomes, entrevista concedida em 2023).
Categoria: prática docente e formação de professores de Matemática
Depoente: Ubiratan da Silva Castro - Eu acho que é isso, o processo de ensino e aprendizagem é a gente aprende também dando aula, né. Então assim, foi uma experiência muito boa, assim, sabe. Muito gratificante. A gente aprende muito mesmo, a experiência com o aluno do ensino superior é muito bacana. A gente aprende muito, acrescenta demais. Eu tenho muito a agradecer. E mudei minha prática em sala de aula com as aulas que eu fui dando aqui. A minha prática é muito reflexiva" (Castro, entrevista concedida em 2023). *Depoente: Isabel Cristina Rabelo Gomes* - Assim, considero que os estudos do meu mestrado e a prática profissional, foram fundamentais para que eu percebesse que estava me tornando uma professora e uma pessoa melhor […] Foi nesses encontros que conheci o Professor Ubiratan D´Ambrosio, que veio a ser uma referência em minha vida profissional, em minhas aulas de Didática e de estágio de Prática de Ensino, para o curso de Matemática. Assim, quando o conheci pessoalmente no primeiro Encontro Nacional de Educação Matemática de que participei, pude me apresentar e virei sua fã. Seu livro *Da Teoria à Prátic*a trazia formas de avaliar que utilizei como professora e que meus alunos conheceram como conteúdo tanto em Didática, quanto em Prática de Ensino (Gomes, entrevista concedida em 2023). - Eu tenho que envolver mais pessoas com a minha formação. Deu para perceber que havia muitas pessoas interessadas no uso da tecnologia na escola. Após o primeiro ano trabalhando como cargo comissionado, houve um concurso na Prefeitura de Vitória. Eu fiz o concurso e fiquei em primeiro lugar, mas não fui para a escola. Continuei trabalhando dentro da secretaria com o mesmo projeto, foi apenas para deixar o cargo comissionado. Então eu tinha uma turma, onde eu ia ensinar alguma coisa. E eu aprendi muito trabalhando para levar luzes sobre as dificuldades que os professores da ativa, do Ensino Fundamental I e II tinham, de conteúdo e de ferramentas" (Gomes, entrevista concedida em 2023).

Categoria: disciplina Didática
Depoente: Ubiratan da Silva Castro - É, lá então eu fui contratado pra dar aula na época na Ceunes. E no contrato dizia que eu poderia estar pegando aula aqui também. Então lá eu fui trabalhar com o curso de Matemática e Pedagogia […] Agora dar aula no curso de Pedagogia, conteúdo de metodologia e eu fiquei meio assim[...] Matemática eu lecionava as disciplinas de Didática, Prática de Ensino I e Prática de Ensino II" (Castro, entrevista concedida em 2023). *Depoente: Isabel Cristina Rabelo Gomes* - "A disciplina Didática torna-se um espaço dedicado à descoberta, exploração e aprendizado das ferramentas documentadas ao longo da história da educação. (...) Por exemplo, a aula de didática para o curso de matemática. Então eu ia lá dar aula de didática. O dia que não se usava o material concreto, desenvolvíamos os temas como trabalhar, as metodologias de ensino, o perfil do aluno, as formas de avaliação. Era uma aula mais teórica, mas com as ferramentas que eu tinha praticado e estudado nos textos do "Problem Posing and Solving", nas aulas de Didática do Mestrado e nos Seminários de Guy Brousseau, na França. Aqui no Brasil, tinha o livro do professor Ubiratan D´Ambrosio, "Educação Matemática: Da Teoria à Prática" (Gomes, entrevista concedida em 2023). - "Em minhas aulas de Didática, introduzi também a leitura de livros. Tinha que ler pelo menos um livro por semestre, fazer o trabalho do livro – resumo e apresentar em seminário. Assim todos liam um e pelo menos ouviam o nome do livro, do autor e o assunto de mais quatro outros autores referência em didática. Porque o que eu fazia era dar-lhes oportunidade, nas aulas de Didática e de Pratica de Ensino, para conhecer os autores e suas teorias" (Gomes, entrevista concedida em 2023).

Fonte: Elaborado pelos autores

AS NARRATIVAS E SEUS NÚCLEOS DE SENTIDO

Além de identificar e organizar categorias relacionadas à pesquisa, realizou-se uma análise que integrou tanto a estrutura categorial quanto as singularidades presentes em cada relato. Buscou-se articular elementos do pensamento paradigmático e narrativo, com o objetivo de construir narrativas mais abrangentes e contextualizadas sobre a disciplina de Didática, sem negligenciar as especificidades de cada contribuição individual. Dessa forma, foram elaborados quadros que apresentam os núcleos de sentido associados às respectivas categorias, a partir dos quais foram feitas inferências relacionadas às falas dos depoentes, visando uma compreensão mais aprofundada e articulada dos dados coletados.

Quadro 2 – Núcleos de sentido presentes nas narrativas

Núcleo de sentido: memória
Depoente: Ubiratan da Silva Castro - Nesse relato, o professor Ubiratan da Silva Castro rememora o período em que foi aluno do curso de Matemática na Ceunes, destacando a atuação do professor Alexandre Luis Carreira Domiciano, responsável, à época, pela disciplina Didática e Prática de Ensino. A narrativa de Ubiratan revela uma percepção de certo desinteresse reinante em relação à disciplina Didática, indicando que os estudantes demonstravam, aparentemente, resistência às disciplinas de caráter pedagógico. - Em outro relato, o professor Ubiratan descreve uma situação frequente na época: a alta rotatividade de docentes responsáveis pela disciplina Didática, decorrente da natureza temporária de seus contratos. Essa característica contrastava com a estabilidade dos professores das disciplinas de Ciências Exatas, que geralmente possuíam vínculos efetivos. Podemos inferir que para Ubiratan, essa constante troca de docentes na área pedagógica não era ideal, refletindo desafios na continuidade do ensino da disciplina. *Depoente: Isabel Cristina Rabelo Gomes* - A fala da professora Isabel reflete uma visão histórica sobre o ambiente acadêmico do curso de Matemática e a atuação de um grupo de professores que buscava integrar os aspectos do ensino de matemática à formação docente e à prática educacional. A narrativa evidencia a presença de um coletivo engajado não apenas com a excelência do conteúdo, mas também com a promoção de uma abordagem voltada para a educação matemática, sinalizando uma preocupação relacionada ao ensino tradicional arraigado, caracterizado pelo predomínio do conteúdo sobre a metodologia. A professora ressalta a articulação desse grupo com professores da educação básica, incluindo docentes de escolas públicas de ensino fundamental e médio, bem como alguns estudantes do curso de Matemática, em um esforço de cooperação que visava à formação continuada. Essa parceria, segundo a narrativa, era viabilizada por um espaço físico dedicado dentro do curso de Matemática, onde ocorriam encontros e planejamentos. Ainda, a fala da depoente traz reflexões relevantes de desafios enfrentados no âmbito acadêmico, particularmente, no contexto de uma pós-graduação realizada em um país estrangeiro. A professora rememora sua experiência durante o curso de mestrado nos Estados Unidos, enfatizando os processos de adaptação necessários, tanto no aspecto acadêmico quanto no cultural e linguístico.

Núcleo de sentido: prática docente e formação de professores de Matemática
Depoente: Ubiratan da Silva Castro - Como professor da disciplina de Didática, Ubiratan compartilha as experiências adquiridas ao lecioná-la. Reconhecendo sua relevância, ele destaca ter transformado sua prática docente, buscando constantemente refletir sobre sua postura profissional e o impacto de seu trabalho. Para ele, a disciplina Didática é fundamental, pois representa a essência da profissão docente e sua importância na formação de professores. *Depoente: Isabel Cristina Rabelo Gomes* - As reflexões da professora expressam a integração de experiências acadêmicas e profissionais como elementos transformadores em sua trajetória como educadora e formadora de professores. Ao rememorar seu percurso, ela destaca a relevância dos estudos realizados durante o mestrado e da prática profissional no processo de construção de sua identidade docente. A interlocução com o professor Ubiratan D'Ambrosio, uma figura de destaque na Educação Matemática, demonstra como referenciais teóricos podem influenciar a prática pedagógica e abordagens adotadas no ensino de disciplinas como Didática e Prática de Ensino. Ainda, a professora relembra sua atuação como formadora de professores na Secretaria Municipal de Educação de Vitória–ES. Ao descrever seu trabalho, ela enfatiza a necessidade de compreender as dificuldades enfrentadas pelos professores da educação básica, tanto no domínio do conteúdo quanto no uso de ferramentas tecnológicas. No contexto da formação de professores, essas narrativas destacam a importância da vivência acadêmica, aliada ao engajamento prático. Além disso, a experiência da professora reflete um compromisso com o ensino como processo contínuo e dinâmico, em que cada etapa da formação, inicial e continuada, contribui para o aprimoramento pessoal e profissional, tanto dos formadores quanto dos formandos.
Núcleo de sentido: disciplina Didática
Depoente: Ubiratan da Silva Castro - Na entrevista, o professor Ubiratan compartilha que, ao ser contratado para atuar na Ceunes, assumiu a responsabilidade de ministrar disciplinas tanto no curso de Matemática quanto no de Pedagogia, demonstrando a preocupação em diversificar sua atuação para além do campo específico da Matemática. Ele ainda ressalta que seu contrato permitia a possibilidade de lecionar em outras localidades. No curso de Matemática, em especial, foi responsável por disciplinas como Didática, Prática de Ensino I e Prática de Ensino II, evidenciando sua contribuição para a formação pedagógica e a prática docente. *Depoente: Isabel Cristina Rabelo Gomes* - A fala da professora revela uma visão integrada da disciplina Didática, evidenciando seu esforço em transformar as aulas em um espaço de reflexão, prática e produção de conhecimento. A professora destaca a Didática como uma disciplina que supera o simples repasse de metodologias, enfatizando-a como um meio de explorar ferramentas teóricas e práticas desenvolvidas ao longo da história da educação. Ao mencionar suas aulas de Didática, a professora ressalta a importância de diversificar as estratégias pedagógicas, incluindo o uso de materiais concretos e a discussão de temas essenciais, como metodologias de ensino, perfis de alunos e estratégias avaliativas. Essas práticas mostram sua preocupação em alinhar a teoria com a prática, tornando as aulas próximas da realidade escolar. Ademais, a professora introduziu a leitura e análise de livros como uma estratégia para ampliar o repertório teórico dos alunos, incentivando a autonomia e o diálogo com diversas perspectivas da Didática.

Fonte: Elaborado pelos autores

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisar as narrativas dos depoentes Ubiratan da Silva Castro e Isabel Cristina Rabelo Gomes, à luz das categorias "Memória", "Prática Docente e Formação de Professores de Matemática" e "Disciplina Didática", algumas considerações podem ser levantadas, uma vez que foram também reforçadas por outras narrativas aqui não exibidas. Primeiramente, observa-se que a disciplina Didática enfrentava resistência por parte dos alunos do curso de Matemática. Conforme apontado por Ubiratan, o interesse dos estudantes concentrava-se, predominantemente, nas disciplinas de conteúdo específico, evidenciando um menor envolvimento com as disciplinas pedagógicas. Essa perspectiva pode refletir, possivelmente, uma visão ainda presente em alguns contextos acadêmicos, nos quais o domínio do conteúdo da ciência do curso (no caso a matemática) é considerado suficiente para o exercício da docência, relegando descaso a formação pedagógica, posta em um segundo plano.

Além disso, a elevada rotatividade de professores na disciplina Didática, mencionada por Ubiratan, pode ter comprometido a continuidade e o aprofundamento de discussões de temas abordados pela disciplina. Segundo o depoente, a predominância de professores contratados temporariamente gerava instabilidade, especialmente quando comparados aos docentes efetivos das áreas de

exatas. Em contrapartida, ambos os entrevistados destacam a relevância das experiências práticas e da reflexão sobre a prática docente como elementos centrais na formação de professores.

Ademais, a disciplina de Didática é descrita, particularmente pela professora Isabel, como um espaço que deve ir para além de uma mera transmissão de métodos e técnicas de ensino. Para ela, a Didática deve ser compreendida como um campo de diálogo entre teoria e prática, promovendo a produção de conhecimento com base integrada de modo articulado na experiência e na reflexão crítica. Dessa forma, a disciplina Didática, já no século XXI, se consolida como um espaço potencialmente transformador em meio às constantes inovações científicas e práticas, tanto para os futuros docentes quanto para a Educação Matemática como um todo.

Nesse sentido, existe nas narrativas dos docentes entrevistados colocações que podem corroborar o pensamento atual, que defende a importância da disciplina Didática na formação de professores de Matemática. Contudo, é importante salientar que as considerações aqui apresentadas se baseiam nas narrativas de apenas alguns depoentes de determinada época. E, para uma análise mais abrangente, seria imprescindível considerar outros relatos e outros contextos, ampliando a compreensão histórica de desafios e potencialidades na formação de professores no curso de Licenciatura em Matemática da referida instituição.

REFERÊNCIAS

BAUER, Martin W.; GASKELL, George. Social representations theory: A progressive research programme for social psychology. **Journal for the theory of social behaviour**, v. 38, n. 4, p. 335-353, 2008.

BRUNER, Jerome. **Atos de significação.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

BRUNER, Jerome. **Realidade mental, mundos possíveis.** (M. A. G. Domingues, Trad.). Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 1998.

BRUNER, Jerome. **A Cultura da Educação**. (M. A. G. Domingues, Trad.). Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

BURKE, Peter. **O que é história cultural?** Tradução de Sergio Goes de Paula. 2. ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed, 2008.

FIORENTINI, Dario. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, n. 18, 2005.

GATTI JUNIOR, Décio. A história das instituições educacionais. In: JUNIOR GATTI, Décio & ARAÚJO, José Carlos Souza (Orgs). **Novos temas em história da educação brasileira.** Campinas: Autores Associados, 2002.

HOFSTETTER, Rita; SCHNEUWLY, Bernard. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. **Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores**, v. 1, p. 113-172, 2017.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática:** velhos e novos temas. Goiânia. Edição do Autor. 2002.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. Educação Matemática: uma introdução. **São Paulo: EDUC**, 1999.

PONTE, João Pedro. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In J. P. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, & C. Loureiro (Eds.), **Desenvolvimento profissional de professores de Matemática:** Que formação? 1995, p. 193-211.

SANTOS, Célio Moacir. **Trajetórias da Disciplina Didática no Curso de Licenciatura em Matemática da UFES**: do câmpus Vitória a São Mateus (1960 a 2002). 2024. 295 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Doutorado em Educação em Ensino de Ciências e Matemática. Instituto Federal de Educação, Vitória–ES, 2024.

SIMÕES, Regina Helena Silva; FRANCO, Sebastião Pimentel e SALIM, Maria Alayde Alcantara (Orgs.). **História da educação no Espírito Santo:** vestígios de uma construção. EDUFES, 2009.

VIÑAO, Antonio. A história das disciplinas escolares. **Revista Brasileira de História de Educação**, v. 8, n. 3, p. 173-215, 2008.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Thomas Hood e sua contribuição para o desenvolvimento das matemáticas na Inglaterra Elizabethana

Thomas Hood and his contribution to the development of mathematics in Elizabethan England

Lívia Bezerra de Alencar[1]
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Ana Carolina Costa Pereira[2]
Universidade Estadual do Ceará –UECE

RESUMO

Por meio do recorte temporal e geográfico do século XVI em Londres, na Inglaterra, diversos estudiosos desenvolveram trabalhos em prol da resolução de problemas do cotidiano, que envolviam o comércio, a navegação e a astronomia, por exemplo. Diante disso, durante o período do reinado da rainha Elizabeth I, o financiamento em torno de desenvolvimentos científicos se fez presente para fortalecer a nação inglesa, assim como para a conquista de novas terras. Dessa forma, em torno do centro comercial londrino, vários estudiosos, artesãos e professores contribuíram para a propagação de conhecimentos matemáticos, seja por meio da imprensa ou da ministração de aulas e/ou palestras. É o caso do praticante de matemáticas Thomas Hood, que, mesmo não possuindo reconhecimento na historiografia tradicional na História da Matemática, foi o primeiro professor nomeado na Inglaterra e contribuiu significativamente para o desenvolvimento da astronomia, geometria e construção de instrumentos. Dessa forma, esse trabalho objetiva descrever algumas contribuições do autor para o desenvolvimento das matemáticas na Inglaterra Elizabethana, a partir de documentos históricos e fontes secundárias que versam sobre os conhecimentos que circulavam em suas produções. Para isso, apropriou-se de uma metodologia qualitativa, bibliográfica e documental. Por meio disso, pôde-se compreender a relevância dos trabalhos de Thomas Hood para o período, assim como a reverberação de conhecimentos matemáticos por meio do que ele desenvolveu enquanto atuava como professor.

Palavras-chave: Desenvolvimento científico de Londres; Thomas Hood; Praticantes de matemáticas; História da Matemática.

ABSTRACT

In the context of the 16th century in London, England, several scholars developed works to solve everyday problems, such as trade, navigation and astronomy. In view of this, during the reign of Queen Elizabeth I, funding for scientific developments was provided to strengthen the English nation, as well as to conquer new lands. In this way, around the commercial center of London, several scholars, artisans and teachers contributed to the dissemination of mathematical knowledge, whether through the press or by giving classes and/or lectures. This is the case of the mathematician Thomas Hood, who, despite not being recognized in traditional historiography in the History of Mathematics, was the first professor appointed in England and contributed significantly to the development of astronomy, geometry and instrument construction. Thus, this work aims to describe some of the author's contributions to the development of mathematics in Elizabethan England, based on historical documents and secondary sources that deal with the knowledge that circulated in his productions. To this end, a qualitative, bibliographical and documentary methodology was used. Through this, it was possible to understand the relevance of Thomas Hood's work for the period, as well as the reverberation of mathematical knowledge through what he developed while working as a teacher.

Keywords: Scientific development of London; Thomas Hood; Mathematics practitioners; History of Mathematics.

[1] Mestranda em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE), Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: livia.alencar@aluno.uece.br.

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Discente do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE), Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: carolina.pereira@uece.br.

INTRODUÇÃO

A constituição do que conhecemos hoje como Matemática perpassou por diversas construções e desconstruções até que se estruturasse como área (Beltran; Saito; Trindade, 2014). Desde a Idade Média até o renascimento científico, muitos acontecimentos ocorreram, corroborando com a disseminação dos conhecimentos em torno das chamadas "matemáticas".

No contexto da Inglaterra, entre os séculos XVI e XVII, essas matemáticas[3] eram exploradas no ensino, a partir de estruturas preexistentes (como as das sete artes liberais), dentre elas o *quadrivium*, que reunia conhecimentos em torno da astronomia, geometria, aritmética e música (Saito, 2015). É também nesse recorte temporal em que a coroa inglesa passou a investir nos desenvolvimentos científicos para promover a fortificação de sua nação, assim como para a exploração de novas terras.

Com a expansão comercial e marítima, a Londres do século XVI se tornou uma das cidades mais influentes em torno da Europa (Harkness, 2007), constituída através do Rio Tâmisa, e do comércio local que o circundava. É por meio dessa necessidade de expandir-se, que a partir da articulação entre a teoria e a prática, nações como a Inglaterra suscitaram cenários promissores para que diversos estudiosos desenvolvessem estudos, obras e aulas sobre conhecimentos matemáticos.

Com isso, surge Thomas Hood (1556-1620), um estudioso das matemáticas, inglês, formado em Cambridge, que desenvolveu tratados, instrumentos, ministrou palestras e aulas, além de ter sido titulado pela coroa e seus conselheiros como o primeiro professor de matemática da Inglaterra.

Ao longo da historiografia tradicional na História da Matemática, compreendida através das grandes narrativas, entende-se que "essas histórias narram sobre a vida e as obras dos grandes nomes da matemática, verdadeiros gênios solitários, que são considerados "pais" ou "precursores" de teorias e conceitos modernos (Saito, 2015, p. 24). Logo, por mais que Thomas Hood não seja um personagem marcante nessas narrativas tradicionais, sua atuação como estudioso das matemáticas contribuiu para os desenvolvimentos científicos do período, colaborando para a propagação de conhecimentos matemáticos no período.

Dessa forma, esse trabalho objetiva descrever algumas contribuições no ensino das matemáticas de Thomas Hood para Londres, no contexto do reinado da Rainha Elizabeth I, a partir de documentos históricos (como tratados) e fontes secundárias que versam sobre os conhecimentos que circulavam em suas produções.

Para atingir esse objetivo, foi necessário apropriar-se de uma metodologia qualitativa, bibliográfica e documental, tendo em vista a necessidade de descrever fenômenos em torno das contribuições científicas de Thomas Hood, a partir de fontes secundárias e de documentos originais.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

Durante o período dos séculos XVI e XVII, Londres presenciava um cenário promissor para o desenvolvimento do comércio, da navegação e da educação. Harkness (2007) menciona que nesse recorte temporal existia uma "sensibilidade urbana" eminente, que se relacionava à busca da popu-

[3] Saito (2015, p. 29) denomina essa nomenclatura pois "[...] a "matemática" como área autônoma e unificada de "conhecimentos matemáticos" só surgiu em finais do século XIX. Antes disso, esses conhecimentos matemáticos encontravam-se "pulverizados" e eram parte integrante de outros segmentos de conhecimento, tais como a astronomia, a música, a agrimensura etc., que eram conhecidas como "matemáticas" (isso mesmo, no plural)".

lação londrina em contribuir com o crescimento da nação, por meio das relações comérciais, do investimento na ciência e do ensino das matemáticas, por exemplo.

Sobre a disseminação de conhecimentos matemáticos no período (sejam em oficinas, por meio de tratados ou relações comérciais), a Londres do século XVI estava sendo fortalecida por meio da "alfabetização matemática", o qual era propagada com a intenção de estabelecer uma instrução matemática para edificar as atividades dos londrinos do período. Sobre isso, Harkness (2007) afirma:

> Após a edição de Billingsley-Dee dos *Elementos* de Euclides que foi publicada em 1570, no entanto, professores elizabetanos, juntamente com os autores matemáticos e fabricantes de instrumentos, começaram a esclarecer os benefícios que a instrução matemática poderia trazer para os comerciantes, pedreiros e outros cidadãos e para o mercado que a alfabetização a um preço que estava ao alcance do consumidor médio (p. 116).

Logo, com a tradução de obras clássicas para a língua vernácula (como o caso do tratado Elementos de Euclides), com a propulsão da imprensa e a disseminação de conhecimentos antigos, as bases científicas de Londres se fortaleceram a partir da instrução matemática.

É diante do contexto da necessidade de reestruturar os saberes que estavam em circulação, aliada às práticas emergentes do período, que os instrumentos matemáticos começaram a ganhar notoriedade (Johnston, 2006). Esses artefatos foram desenvolvidos a partir dos novos métodos matemáticos e experimentais do período, contribuindo para a investigação da natureza e da resolução de problemas do dia a dia (Saito, 2015).

Com isso, esse conjunto de estudiosos disseminavam os seus trabalhos diante das matemáticas práticas em suas oficinas, construindo instrumentos, ministrando aulas e/ou palestras e movimentando o cenário educacional das ciências do período (Taylor, 1968). Entretanto, maioria desses estudiosos não foram reconhecidos ao longo da escrita da História da Matemática.

A escrita da história pode ser compreendida como historiografia, sendo ela influenciada pelos saberes, dogmas e crenças de quem a escreve (Saito, 2015). Frequentemente, a História da Matemática é descrita a partir de uma historiografia tradicional, que possui caráter presentista e é construída com base na matemática que existe nos dias de hoje.

Ela possibilita que o historiador se aproprie apenas do que lhe é familiar, a partir do olhar moderno, "deixando de lado outros aspectos do desenvolvimento do conhecimento matemático" (Saito, 2015, p. 23). A conivência existente nesse modo de escrever a história, faz com que muitos estudiosos sejam esquecidos e desprivilegiados em detrimento da atribuição da valorização à grandes personagens que se destacaram ao longo do tempo.

Em contraposição, a vertente historiográfica atualizada procura explorar o passado baseado nas referências do período (sociais, econômicas e políticas), para assim, buscar compreender o presente (e não o movimento contrário). Com isso, compreende-se que nessa vertente "o historiador evita julgar o conhecimento do passado comparando-o com o do presente. Além disso, na medida que o conhecimento matemático do passado é contextualizado "no passado", o historiador passa a ter acesso ao seu processo de construção" (Saito, 2015, p. 27).

Dessa forma, a partir dos indícios de obras, documentos e instrumentos históricos, pode-se perceber diversos praticantes de matemáticas que foram influentes na construção dos conhecimentos matemáticos, no período do século XVI na Inglaterra, mas que não tiveram sua memória preservada ao longo do tempo nas grandes narrativas da História da Matemática. É o caso do estudioso Thomas Hood, cuja menção não é tão frequente em fontes bibliográficas (Alencar, 2023).

Com isso, a partir da exploração de tratados do autor, busca-se descrever nesse trabalho, a partir de uma perspectiva de uma historiografia atualizada, as contribuições do praticante de matemáticas no que concerne a difusão de conhecimentos para o século XVI, em Londres. Esses tratados históricos podem ser compreendidos como fontes primárias, sendo elas "formas de registros de conhecimentos sobre a natureza e as técnicas gravadas sobre diferentes suportes" (Beltran; Saito; Trindade, 2014, p. 25). A partir dela que se pode resgatar vestígios do passado, para compreender-se sobre a episteme do desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, por exemplo.

METODOLOGIA

Para alcançar o objetivo proposto para esse estudo, do ponto de vista da forma de abordagem do problema, foi necessário apropriar-se de uma metodologia qualitativa, tendo em vista que nela:

> há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Esta não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave (Prodanov; Freitas, 2013, p.70).

Ela pode ser caracterizada dessa forma, pois se busca descrever qualitativamente sobre as contribuições de Thomas Hood para o desenvolvimento das matemáticas, no contexto de Londres no século XVI, a partir de interpretações subjetivas encontradas nas descrições de documentos originais. Além disso, do ponto de vista de seus objetivos, ela é compreendida também como descritiva, uma vez que "os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem" (Prodanov; Freitas, 2013, p.70).

Ademais, como a descrição do fenômeno estudado tem como base tratados históricos do século XVI desenvolvido por Thomas Hood, do ponto de vista dos procedimentos técnicos, esse estudo também se caracteriza como uma pesquisa documental, uma vez que "a fonte de coleta de dados está restrita a documentos, escritos ou não, constituindo o que se denomina de fontes primárias. Estas podem ser feitas quando o fato ou fenômeno ocorre, ou depois" (Marconi; Lakatos, 2003, p.173).

Além disso, para a compreensão do cenário educacional e científico influenciado pelo autor, foi necessário embasar-se de fontes secundárias, para fomentar discussões de autores que estudaram o período e o estudioso. Com isso, baseia-se também em uma pesquisa bibliográfica, tendo em vista que:

> A pesquisa bibliográfica, ou de fontes secundárias, abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, material cartográfico etc., até meios de comunicação orais: rádio, gravações em fita magnética e audiovisuais: filmes e televisão. Sua

> finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto [...] (Marconi, Lakatos, 2003, p.182).

Portanto, como percurso metodológico desse trabalho, primeiramente mapeou-se tratados históricos desenvolvidos por Thomas Hood, em seguida traduziu-se as partes iniciais dos documentos históricos (a fim de compreender as influências e contribuições do praticante de matemáticas para o período) e por fim, realizou-se uma busca sobre autores que discutissem desenvolvimentos de Thomas Hood para a Inglaterra Elizabethana, tendo em visa a escassez de fontes secundárias sobre o autor.

ANÁLISES E RESULTADOS

O contexto histórico da Inglaterra e o ensino das matemáticas

Em meio às transformações que a Europa passara durante os séculos XV e XVI, o renascimento se constituiu como um processo de modificações sociais, culturais e econômicas, impactando o modo como a ciência e as técnicas eram desenvolvidas. Essa transformação pode ser compreendida "como um processo social em que todos os aspectos de cultura, incluído evidentemente a ciência e as técnicas, são afetados" (Beltran, 2017, p. 11).

Nesse sentido, a partir da expansão marítima, comercial e territorial, as nações obrigaram-se, a buscar novas formas de pensar e agir, através de técnicas e procedimentos nunca explorados antes. Diante desses acontecimentos, entre os séculos XVI e XVII a nação inglesa também se situa com bases nessas mudanças e renovações científicas.

Com isso, durante o período do reinado de Elizabeth I, no século XVI na Inglaterra, a coroa buscava fortificar suas terras, seus soldados, assim como expandir as suas relações comerciais, através dos desenvolvimentos científicos, em prol do crescimento da nação. É nesse contexto que se instituía a Inglaterra Elizabethana, termo cunhado por Harkness (2007) para denominar o momento histórico que o país passou em torno das mudanças científicas, culturais e sociais, influenciadas pelas demandas do período.

Durante o seu período vigente, a Rainha Elizabeth I fomentou o cenário de desenvolvimentos científicos, seja por meio de patrocínios para estudos, ou mesmo pela propagação de palestras e aulas para os seus militares. Tudo o que pudesse favorecer o crescimento da nação inglesa, poderia ter um grande potencial de interesse de investimento da coroa. A seleção das pessoas beneficiadas para esses patrocínios era feita a partir de um denso corpo de conselheiros privados que estavam ao lado da rainha durante suas decisões.

Em suma, esses conselheiros eram cavalheiros ou membros da alta classe social, assim como grandes comerciantes vinculados à nobreza. Eles averiguavam projetos e estudos, assim como autorizava benefícios e patrocínios a eles. Para serem dignos desses investimentos, os desenvolvimentos em vista deveriam possuir relevância para a coroa, seus conselheiros, assim como para o desenvolvimento da Inglaterra (Harkness, 2007).

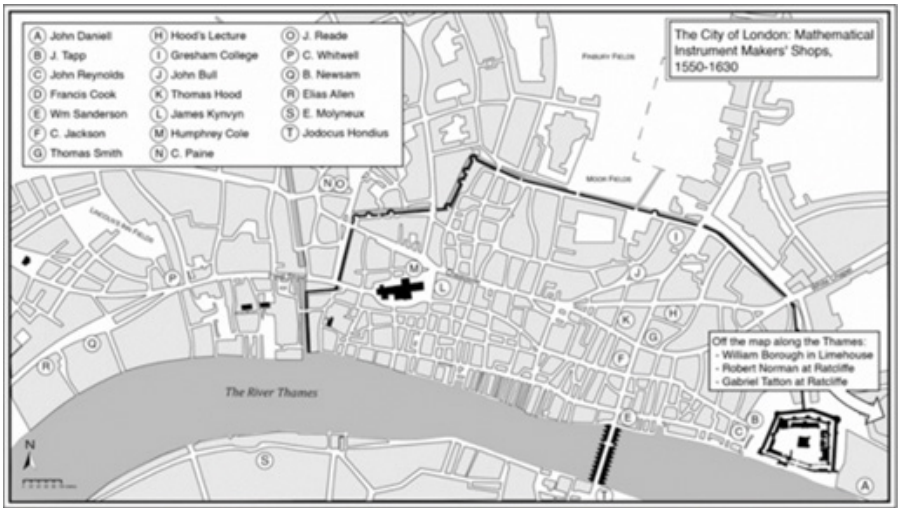
Dentre os projetos que eram considerados pelos conselheiros da rainha, muitos deles estavam relacionados a desenvolvimentos em torno da artilharia, agrimensura, navegação e astronomia, tendo em vista o interesse da coroa em desenvolver-se cientificamente. Muitos dos estudiosos que

buscavam por esses patrocínios para o desenvolvimento desses trabalhos em torno das matemáticas eram denominados como praticantes de matemáticas, compreendidos como:

> grupo de estudiosos ingleses que se dedicavam às matemáticas práticas, fabricando instrumentos e escrevendo tratados. Esses praticantes de matemática não tinham, em sua maioria, formação universitária. Muitos deles mantinham estreito contato com eruditos e pessoas próximas a príncipes e governantes (Saito, 2015, p. 172).

Com isso, esse conjunto de estudiosos disseminavam os seus trabalhos diante das matemáticas práticas em suas oficinas, construindo instrumentos, ministrando aulas e/ou palestras e movimentando o cenário educacional das ciências do período (Taylor, 1968). Tanto os praticantes de matemáticas como os seus trabalhos poderiam ser encontrados em suas oficinas em torno do centro comercial de Londres (Figura 1), localizado próximo ao Rio Tâmisa, assim como em igrejas e em suas próprias residências.

Figura 1 – Oficinas de construtores de instrumentos matemáticos no século XVI



Fonte: Cormack, Walton, Schuster (2017, p.80).

Na figura anterior podem ser observadas localizações em que diversos praticantes de matemáticas exerciam seus ofícios como artesãos, professores, livreiros, dentre outros. Com isso, uma vasta rede comercial e educacional era instituída a partir das parcerias e propagações de conhecimentos entre esses estudiosos, como, Leonard Digges (1515-1559), Thomas Digges (1546-1595), William Oughtred (1574-1660), Elias Allen (1588-1653), Charles Whitwell (1568-1611) e Thomas Hood (1556-1620).

Em meio a propagação da imprensa, a valorização das artes mecânicas e da modificação social que os artesãos sofreram durante o século XVI, esses praticantes de matemáticas buscaram resgatar antigos saberes e associá-los à necessidade de articulação entre teoria e a prática (Beltran; Saito; Trindade, 2014). Por meio disso, desenvolveram os mais diversos tratados sobre geometria, aritmética, música, astronomia, navegação, artilharia e agrimensura, por exemplo.

Em suma, grande parte desses tratados traziam a descrição do uso e/ou construção dos chamados instrumentos matemáticos, que podem ser definidos como:

> artefatos ferramentas utilizadas para o desenvolvimento de práticas laboratoriais, para fazer observações e/ou realizar experimentos; ou como um aparato para realizar cálculos aritméticos, medição de comprimento, altura, profundidade, peso, entre outros; para o cálculo de distâncias lineares e angulares; ou ainda para compreender fenômenos naturais, tais como pressão, temperatura, volume, força, etc (Ribeiro; Pereira, 2023, p. 3-4).

Muitos desses instrumentos foram fabricados e utilizados em navegações, trocas comerciais, atividades bélicas ou mesmo na construção de mapas, enquanto outros foram apenas idealizados, não possuindo evidências históricas de que realmente foram usados. Nem sempre um único praticante de matemáticas idealizava o instrumento e o confeccionava, muitas vezes, esse era um trabalho colaborativo, realizado por mais de um autor.

O praticante de matemáticas Thomas Hood

A partir da rede colaborativa entre praticantes de matemáticas discutida anteriormente, existiram aqueles que proferiam aulas e palestras no centro comercial londrino, disseminando seus estudos, tratados e artefatos científicos para a instrução matemática na cidade de Londres.

Esse processo, executado fortemente durante o reinado da rainha Elizabeth I, foi propagado a partir de professores de matemáticas, fabricantes de instrumentos e autores de tratados, que respondiam às necessidades das demandas urbanas do período, uma vez, que não só a instrução matemática, mas também a instrumental, beneficiava a inventividade, astucia e rapidez para resolver problemas do cotidiano (Harkness, 2007).

Nesse cenário, a partir de ameaças bélicas à Inglaterra na década de 1580, advindas das tropas espanholas, a coroa inglesa preocupou-se quanto a sua proteção e fortificação, a partir de seus militares que estavam à frente da defesa da nação. Foi nesse cenário que:

> Tais ameaças eram frequentes meio século antes de 1600, especialmente nos anos que antecederam e depois da grande batalha naval da Armada Espanhola em 1588, quando rumores de perigo iminente se espalharam como fogo nas ruas da cidade. A maioria das ameaças estrangeiras resultou dos contínuos antagonismos religiosos entre a Inglaterra protestante e os seus vizinhos católicos, Escócia, França e Espanha (Harkness, 2007, p.6, tradução nossa).

Diante dessas circunstâncias, era eminente a necessidade da tropa inglesa de atualizar-se quanto aos conhecimentos científicos em torno das atividades bélicas e de navegação, por exemplo, para a proteção de sua nação. Com isso, a coroa inglesa, juntamente ao corpo de conselheiros que a ajudava, escolheram o praticante de matemáticas Thomas Hood, para tornar-se o primeiro professor de matemática nomeado pela rainha, na Inglaterra.

Esse acontecimento foi possível, diante das relações preexistente entre o praticante e alguns membros do conselho, como Sir Thomas Smyth (1558-1625) e John Lumley (1533-1609), que instituíram uma cátedra de matemática em Londres (Higton, 2004). A partir dessa nomeação e do apoio dos comerciantes que o escolheram para esse cargo, Thomas Hood recebeu patrocínio para ministrar suas aulas aos militares, o que ocorreu por menos de uma década (Johnston, 1942).

Ele possuía formação em Cambridge, o qual obteve título de bacharel em artes, assim como em mestre em artes. No ano de 1585, a universidade lhe concedeu uma licença para praticar medicina, que só poderia ser executada na cidade de Londres mediante a aprovação ao *Royal College of Phisicians*[4]. O então médico não passou no exame, a princípio e se dedicou até o final do século XVI às matemáticas práticas (Alencar, 2023).

A primeira palestra que Thomas Hood ministrou foi no ano de 1588, na casa de Sir Thomas Smyth, direcionada para militares e comandantes navais, o qual explorou elementos da geometria prática, assim como suas aplicações na astronomia, navegação e topografia (Johnston, 1942). Em seu discurso inaugural como professor (publicado meses após a primeira palestra), Thomas Hood se mostra empolgado em representar esse cargo, assim como fala sobre sua admiração pelas ciências matemáticas e de sua importância (Hood, 1588).

A partir de sua atuação como professor, ele passou a desenvolver notas de ensino e livros "didáticos" para os seus alunos, que descreviam a construção e o uso instrumentos, assim como de mapas para a navegação (Taylor, 1968). As palestras de Thomas Hood tiveram seus pagamentos cessados aproximadamente no ano de 1594, pois as ameaças espanholas já haviam acabado.

Além disso, com a previsão da construção de uma instituição educacional, o *Gresham College*, a partir de recursos advindos do testamento de Thomas Gresham (1519-1579), o cenário educacional tornou-se menos propício para a propagação das palestras de Thomas Hood, sendo desnecessário que a coroa investisse em seu trabalho, já que uma outra instituição seria capaz de ofertar os mesmos benefícios que ele (Johnson, 1942).

Com isso, adquirindo a licença médica para exercer a profissão no ano de 1597, pela *Royal College of Physicians,* aos poucos Thomas Hood foi deixando de exercer atividades enquanto praticante de matemáticas, concentrando-se apenas na medicina até o final de sua vida, em 1620 (Higton, 2004).

Algumas contribuições científicas de Thomas Hood

A partir de sua atuação enquanto professor nomeado da Inglaterra e de suas palestras proferidas na cidade de Londres, Thomas Hood esteve em um cenário proeminente para os estudos sobre as matemáticas, assim como para sua atuação como praticante (Alencar; Santos, 2021).

Além de médico e professor, o praticante de matemáticas também se dedicava ao trabalho de cartografia, o qual obteve trabalhos em torno da confecção de mapas e da exploração do globo terrestre. A partir desse outro ofício, sua ligação com a astronomia, geografia e a navegação o fizeram desenvolver maioria de seus trabalhos, sendo eles: guias de navegações, mapas contendo conteúdos astronômicos e terrestres, assim como instrumentos que envolviam a geometria.

Diante disso, alguns tratados foram publicados entre os anos de 1590 e 1598 (Quadro 1), o qual refletiam a afinidade do autor com as matemáticas, assim como com o desenho e a elaboração de instrumentos. Além de trabalhos autorais, Thomas Hood desenvolveu outras contribuições para a geometria e agrimensura[5], assim como corrigiu trabalhos de navegação como o tratado de William

[4] Instituição criada no século XVI para regulamentar médicos autorizados a praticarem a medicina na cidade de Londres.
[5] Como mostram os trabalhos de Alencar (2023), Alencar e Pereira (2024), Alencar e Pereira (2023), Alencar e Santos (2021).

Bourne (1535-1582), intitulado de *A regiment for the sea* (em português: regimento para o mar), publicado no ano de 1601.

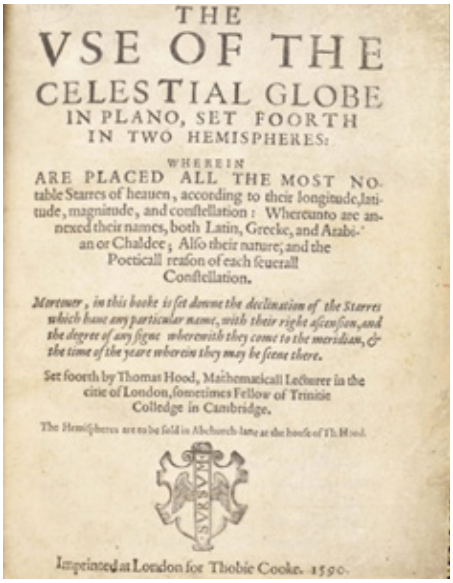
Quadro 1 – Tratados sobre astronomia e navegação desenvolvidos por Thomas Hood

Tratado	Ano de publicação
The Use of the Celestial Globe in Plano, set forth in two hemispheres	1590
The use of both globes, Celestial, and Terrestriall	1592
The use of the two mathematicall instruments, the crosse staffe... And the jacobs Staff	1596
The marriner guide	1596

Fonte: Elaborado pelas autoras (2025).

Um dos seus primeiros trabalhos foi o tratado *The Use of the Celestial Globe in Plano, set forth in two hemispheres* (Figura 2), que descreve o uso do globo celestial planificado, estabelecido em dois hemisférios. Esse estudo foi publicado em Londres, no ano de 1590, por Tobie Cooke (1577-1599), um impressor londrino. Hood (1590) menciona conhecimentos sobre latitude, longitude, constelações e mapas desenhados pelo próprio autor. Os mapas contidos nessa obra também poderiam ser vendidos na própria casa de Thomas Hood, o qual disseminava o seu trabalho como cartógrafo (Comarck, 2017).

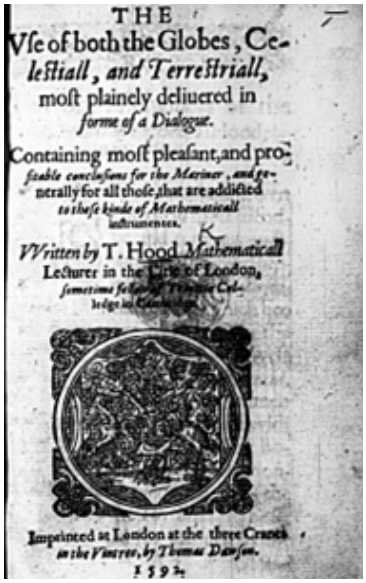
Figura 2 – Frontispício do tratado *The Use of the Celestial Globe in Plano, set forth in two hemispheres*


THE
VSE OF THE
CELESTIAL GLOBE
IN PLANO, SET FOORTH
IN TWO HEMISPHERES:
WHEREIN
ARE PLACED ALL THE MOST NOtable Starres of heauen, according to their longitude, latitude, magnitude, and constellation: Whereunto are annexed their names, both Latin, Greeke, and Arabian or Chaldee; Also their nature; and the Poeticall reason of each seuerall Constellation.
Moreouer, in this booke is set downe the declination of the Starres which haue any particular name, with their right ascension, and the degree of any signe wherewith they come to the meridian, & the time of the yeare wherein they may be seene there.
Set foorth by Thomas Hood, Mathematicall Lecturer in the citie of London, sometimes Fellow of Trinitie Colledge in Cambridge.
The Hemispheres are to be sold in Aldchurch lane at the house of Th. Hood.
Imprinted at London for Thobie Cooke. 1590.

Fonte: Hood (1590).

O outro tratado sobre astronomia e navegação, *The use of both globes, Celestial, and Terrestriall* (Figura 3), correspondia ao uso do globo, tanto no que ele refere como "celestial" como terrestre. Tanto esse trabalho como o anterior, são frutos de publicações a partir de palestras ministradas pelo autor. Assim como em suas palestras, os tratados trazem influências das crenças do autor sobre a teoria do heliocentrismo, de Nicolau Copérnico (1473-1543), o qual Kanas (2007) menciona que Thomas Hood corroborou com a popularização dela na Inglaterra.

Figura 3 – Frontispício do tratado *The use of both globes, Celestial, and Terrestrial*


THE
Vse of both the Globes, Ce-
leſtiall, and Terreſtriall,
moſt plainely deliuered in
forme of a Dialogue.
Containing moſt pleaſant, and pro-
fitable concluſions for the Mariner, and ge-
nerally for all thoſe, that are addicted
to theſe kinde of Mathematicall
inſtruments.
Written by T. Hood Mathematicall
Lecturer in the Citie of London,
ſometime ſellow of Trinitie Col-
ledge in Cambridge.
Imprinted at London at the three Cranes
in the Vintree, by Thomas Dawſon.
1592.

Fonte: Hood (1592).

A seguir, no ano de 1596 foi desenvolvido por Thomas Hood o tratado intitulado *The use of the two mathematicall instruments, the crosse staffe... And the jacobs Staff* (Figura 4), que menciona o uso de dois instrumentos, o *cross staffe* e o *jacobs staff, o qual* o autor faz menções a usos diferenciados daqueles já atribuídos aos instrumentos em publicações anteriores sobre navegações.

O segundo deles, o *jacobs Staff,* já havia sido mencionado pelo autor em um panfleto publicado no ano de 1590, porém, com a propulsão de suas palestras a respeito do instrumento, posteriormente ele veio a publicar um tratado mais completo, contendo também o uso do instrumento *cross staffe.* Esse estudo foi publicado também em Londres, impresso e vendido pelos impressores e livreiros, Richard Field (1579-1624) e Robert Dexter (?), respectivamente.

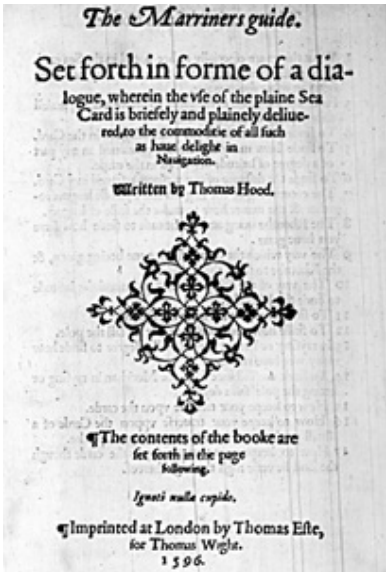
Nesse tratado, Hood (1596) menciona trazer usabilidades de ambos os instrumentos matemáticos em um diálogo para o direcionamento de suas funções aos marinheiros e para os agrimensores. Nesse sentido, no que diz respeito ao *cross staffe*, ele discorre sobre conhecimentos a partir da astronomia e da navegação.

Figura 4 – Frontispício do *The use of two Mathematicall instruments, the Crosse Staffe… and Jacobs Staffe*

Fonte: Hood (1596).

Um dos últimos tratados de Thomas Hood a respeito da astronomia, o qual se possui registro, é a obra intitulada *The marriner guide* (Figura 5), publicado no ano de 1596 e vendido pelo livreiro Thomas Wight (1580-1608). A partir de um diálogo entre um mestre e um leitor, assim como muitas de suas obras, Hood (1596) traz considerações sobre "cartas do mar" para guiar os marinheiros.

Figura 5 – Frontispício do tratado *The marriners guide*



Fonte: Hood (1596)

A partir dessas cartas direcionadas à marinheiros, Hood (1596) versa sobre os conhecimentos de navegação, a obtenção de latitudes, distâncias entre duas localizações, distâncias entre estrelas, assim como problemas que relacionavam a astronomia com os mais diversos problemas que a navegação poderia possuir. Ainda que Thomas Hood tenha desenvolvido outros diversos tratados e

instrumentos, como o seu *Sector* (Alencar; Pereira, 2024), esses são alguns dos principais trabalhos do autor que estão relacionados à navegação e astronomia.

CONCLUSÕES

Por meio das discussões trazidas nesse estudo, pode-se constatar, a partir das evidências históricas presentes nas fontes originais, que diversas contribuições científicas e matemáticas foram exploradas por Thomas Hood, no período da Inglaterra Elizabethana. Ainda que ele seja esquecido diante da historiografia tradicional (não possuindo muita propagação de seus feitos nas grandes narrativas), o autor obteve papéis significativos perante o contexto social, econômico e científico da cidade de Londres, no final do século XVI.

Seja como professor, ou na propagação da arte de navegação e astronomia, Thomas Hood dedicou-se com diversos trabalhos que refletiam as demandas do período, disseminando conhecimentos tanto em suas palestras e aulas, como em seus trabalhos ou em instrumentos matemáticos.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior–Brasil (CAPES)–Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Lívia Bezerra de. **A construção da escala de cordas a partir do sector de Thomas Hood (1556-1620) para a compreensão de aspectos geométricos na formação inicial de professores**. 2023. 96 f. TCC (Graduação)–Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2023.

ALENCAR, Lívia Bezerra de; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Estudos iniciais sobre o sector de Thomas Hood (1556-1620). **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática,** *[S. l.]*, v. 9, n. 26, p. 345–358, 2022.

ALENCAR, Lívia Bezerra de; SANTOS, Andressa Gomes dos. O Setor de Thomas Hood (1556-1620) como objetivo de estudo na interface entre a história e o ensino de matemática. In: PEREIRA, Ana Carolina Costa; BATISTA, Antônia Naiara de Sousa; OLIVEIRA, Gisele Pereira. **Pesquisas sobre ensino de matemática no GPEHM junior**: construindo uma prática investigativa. Fortaleza: Quipá, 2021. Cap. 1. p. 14-24.

ALENCAR, Lívia Bezerra de; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Uma proposta de atividade envolvendo inscrições de polígonos em circunferências por meio do sector (1598). **Revista História da Matemática para Professores**, *[S. l.]*, v. 10, n. 1, p. 1–8, 2024. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/111. Acesso em: 26 fev. 2025.

ALENCAR, Lívia Bezerra de; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Uma proposta de atividade para o ensino de desenho geométrico a partir da construção do Sector (1598) (1598). In: PEREIRA, Ana Carolina Costa; ALMEIDA, Jeniffer Pires de; BATISTA, Verusca Alves (org.). **Pesquisas sobre Ensino de Matemática no GPEHM Júnior**: construindo uma prática investigativa–volume 2. 2. ed. Fortaleza: Uniesmero, 2024. Cap. 5. p. 58-69.

CORMACK, Lesley B. Introduction: Practical Mathematics, Practical Mathematicians, and the Case for Transforming the Study of Nature. In: CORMACK, Lesley B.; WALTON, Steven A.; SCHUSTER, John A. (ed.). **Mathematical Practitioners and the Transformation of Natural Knowledge in Early Modern Europe**. 45. ed. Cham: Springer, 2017a. (Studies in History and Philosophy of Science).

HARKNESS, Deborah E. **The Jewel House:** Elizabethan London and the Scientific Revolution. London: Yale University Press, 2007.

HOOD, Thomas. **The marriners guide.** 1ªEdição. Londres: Thomas Este, 1596.

HOOD, Thomas. **The use of two mathematicall instruments, crosse staffe… and Jacobs Staffe.** 1ªEdição. Londres: Richard Field, 1596.

HOOD, Thomas. **The use of the celestial globe in plano set forth in two hemispheres**. Londres: Thobie Cooke, 1590.

HOOD, Thomas. **The use of both globes, Celestial, and Terrestriall**. Londres: Thomas Dawson, 1592.

JOHNSTON, Stephen. Mathematical Practitioners and Instruments in Elizabethan England. **Annals of Science**, Londres, 48, p. 319-341, agosto, 2006.

JOHNSON, Francis. Thomas Hood's Inaugural Address as Mathematical Lecturer of the City of London (1588). **Journal Of The History Of Ideas.** Filadélfia, p. 94-106. jan. 1942.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2003. 310 p.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do Trabalho Científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Editora Feevale, 2013.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SANTOS, Andressa Gomes dos. **Os aspectos matemáticos relacionados à média geométrica que emergem a partir da manipulação da escala dos números (1623) elaborada por Edmund Gunter com licenciandos em Matemática**. 2022. 222 f. Dissertação (Mestrado)–Curso de Curso de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2022.

TAYLOR, Eva Germaine Rimington. **The mathematical practitioners of Tudor and Stuart England. Cambridge**: At The University Press, 1968.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Conceituando o Laboratório de História da Matemática na formação de professores a partir das vivências do GPEHM

Conceptualizing the History of Mathematics Laboratory in teacher training based on the experiences of the GPEHM

Ana Carolina Costa Pereira[1]
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Joelma Nogueira dos Santos[2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo apresentar um debate inicial sobre o conceito de Laboratório de História da Matemática (LHM) a partir das experiências vivenciadas pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) vinculado a Universidade Estadual do Ceará (UECE), ressaltando a importância na preparação do futuro professor, com base no conceito de experimento como eixo norteador. Para isso, é adotada uma metodologia de pesquisa exploratória descritiva, no qual foi realizada a descrição e a comparação das ideias de práticas laboratoriais envolvendo problemas históricos de matemática propostas por autores brasileiros e desenvolvidas no grupo de pesquisa. Em seguida, é apresentada a concepção, a estrutura e algumas considerações didáticas sobre o LHM a partir das ideias do GPEHM. Dessa forma, com estudo foi possível perceber a importância do LHM para a formação inicial de professores que ensinam matemática na relação entre a teoria e a prática possibilitada pela construção e manuseio de instrumentos matemáticos históricos, como elemento propulsor para a construção de conceitos e para a reflexão das ações educativas propostas pelo GPEHM.

Palavras-chave: Laboratório de História da Matemática. Instrumentos Matemáticos. Formação de Professores que ensinam Matemática.

ABSTRACT

This work aims to present an initial debate on the concept of the History of Mathematics Laboratory (LHM) based on the experiences of the Research Group on Education and History of Mathematics (GPEHM) linked to the State University of Ceará (UECE), highlighting the importance of preparing future teachers, based on the concept of experiment as a guiding axis. To this end, an exploratory descriptive research methodology was adopted, in which the ideas of laboratory practices involving historical mathematics problems proposed by Brazilian authors and developed in the research group were described and compared. Next, the conception, structure and some didactic considerations about the LHM are presented based on the ideas of the GPEHM. In this way, with this study it was possible to perceive the importance of the LHM for the initial training of teachers who teach mathematics in the relationship between theory and practice made possible by the construction and handling of historical mathematical instruments, as a driving element for the construction of concepts and for the reflection of the educational actions proposed by the GPEHM.

Keywords: History of Mathematics Laboratory. Mathematical Instruments. Training of Teachers who teach Mathematics.

INTRODUÇÃO

A história da matemática tem se consolidado, nas primeiras décadas do século XXI, como uma fonte rica de recursos pedagógicos. Essa constatação decorre da aplicação de um tratamento didático que possibilita sua utilização no ensino de matemática, especialmente nos cursos de formação

[1] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (PPGE/UECE), Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: carolina.pereira@uece.br.

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professora do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituo Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Caucaia, Ceará, Brasil. E-mail: joelma.santos@ifce.edu.br.

inicial e continuada de professores. No entanto, tais recursos são frequentemente usados de maneira anacrônica, sem promover uma reflexão aprofundada sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático.

Nesse contexto, é essencial destacar que a formação dos conceitos matemáticos deve ser desenvolvida a partir de um processo histórico que permita ao sujeito refletir sobre o significado de um objeto matemático e construir seu próprio conceito. Essa perspectiva está alinhada ao pensamento de Lins (1994), para quem o conceito matemático se relaciona diretamente com o que o indivíduo pensa matematicamente sobre algo.

Conceituar um objeto matemático por meio de uma abordagem histórica requer considerar diferentes perspectivas filosóficas que auxiliem o sujeito na reflexão durante a formação do conceito (Chevallard; Bosch; Gascón, 2001). Esse processo envolve uma dinâmica de pensamento que dá significado ao objeto matemático antes de defini-lo formalmente. A construção do conhecimento matemático, quando situada historicamente, demanda a integração de informações amplas, respeitando a visão epistemológica, matemática e suas aplicações.

Adotar uma abordagem que articule história da matemática e ensino requer evitar anacronismos e a mera reprodução de situações históricas que desmobilizem o propósito pedagógico. É igualmente fundamental examinar o papel da história da matemática na elaboração e produção do conhecimento matemático. Como aponta Saito (2015, p. 26), tal análise deve ser realizada "por meio de acurada investigação, não só das diferentes técnicas e conteúdos matemáticos, mas também das circunstâncias nas quais tais técnicas e conteúdos foram elaborados."

Nesse sentido, torna-se relevante estruturar um espaço para transformações didáticas e históricas, direcionado à experimentação e à integração de aspectos contextuais, historiográficos, epistemológicos e matemáticos desenvolvidos ao longo da história. Essa abordagem requer considerar a relação entre a matemática acadêmica e a matemática escolar, refletindo sobre o que, como, quando, por que e para quê ensinar por meio de um processo histórico.

Essas reflexões são especialmente pertinentes à formação de professores de matemática. Nesse cenário, o Laboratório de História da Matemática (LHM) surge como um elemento central, contribuindo não apenas para superar dificuldades no ensino, mas também para promover novas aprendizagens.

Dessa forma, esse trabalho busca apresentar um debate inicial sobre o conceito de Laboratório de História da Matemática (LHM) a partir das experiências vivenciadas pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), ressaltando a importância na preparação do futuro professor, com base no conceito de experimento como eixo norteador. Para isso, é adotada uma metodologia de pesquisa exploratória descritiva, no qual inicialmente é realizada uma descrição e comparação das ideias de práticas laboratoriais envolvendo problemas históricos de matemática propostas por Ferreira (2001) e desenvolvidas no grupo de pesquisa. Em seguida, apresenta-se a concepção e a estrutura do Laboratório de História da Matemática (LHM) a partir das ideias do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), para no final tecer algumas considerações o laboratório de história da matemática no contexto do grupo de pesquisa.

A CONCEPÇÃO DE LABORATÓRIO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA DESENVOLVIDA PELO GPEHM

No cenário brasileiro de pesquisa acadêmica, a primeira concepção exposta envolvendo o Laboratório de História da Matemática (LHM) pode-se ser encontrada em Ferreira (2001, 16), no qual ele o direciona a um é o método experimental de quatro etapas fundamentado em René Thom que escreve especificamente sobre a pesquisa como um fato científico, adaptando seus passos para a utilização do LHM, uma vez que "os problemas históricos na matemática são experimentos científicos, e, como tal reprodutíveis".

Dentre os grupos de pesquisa em História da Matemática no Brasil, o Educação e História da Matemática (GPEHM)[3] vinculado a Universidade Estadual do Ceará (UECE) realiza estudos teóricos e práticos de temas relacionados à construção de interfaces entre a História e o ensino de matemática por meio de instrumentos matemáticos antigos.

Fazendo um paralelo entre a ideia de Ferreira (2001) e as ações vivenciadas pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) percebe-se vai além do que a visão desse autor argumenta sobre a ideia do Laboratório de História da Matemática (LHM). Porém, ao comparar apenas o modo de proceder nas práticas laboratoriais envolvendo problemas históricos de matemática, já é possível ver uma diferença considerável (Quadro 1).

Quadro 1 – Comparação de atividade laboratorial com o instrumento histórico no LHM

FERREIRA (2001)	GPEHM (UECE)
Escolha do local para a realização do experimento. O espaço pode ser a sala de aula, a biblioteca ou o laboratório de informática.	Escolha da concepção de laboratório que será atrelada ao LHM que também tem uma concepção estruturada pelo GPEHM.
Escolha do material que fará parte do experimento. O material pode ser concreto ou não.	O trabalho se dá com as fontes históricas como tratados, instrumentos e problemas matemáticos.
No experimento...faz relação do passado com o presente em uma visão anacrônica.	No experimento... a visão epistemológica prevalece para a compreensão do conceito e de como o conhecimento foi construído.
Momento do inventário. Os sujeitos que experimentaram a atividade devem descrever e listar a experiência,	A atividade laboratorial tem uma orientação estruturada a partir do tratamento didático que é dado à fonte histórica estudada.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2025).

No quadro comparativo, percebe-se que o trabalho desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) tem um direcionamento que substância o processo de ensino para a aprendizagem, além de que na organização da prática laboratorial com o uso do instrumento histórico, é realizado um tratamento didático com a ferramenta matemática explorada a partir de uma organização composta com alguns elementos que compõem esse trato que a ela é dado. Nele, no que se refere a organização da prática, a partir do instrumento histórico utilizado e da finalidade da atividade laboratorial, aplicam-se comandos por meio de uma ação cognitiva para que se observe a estrutura do recurso explorado, suas potencialidades didáticas, suas limitações,

[3] O Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), vinculado à Universidade Estadual do Ceará (UECE), foi criado em 2013, no intuito de "realizar pesquisas sobre o desenvolvimento teórico e prático de temas ligados à História e a Educação Matemática, principalmente incentivando a sua incorporação como estratégia na formação de professores de Matemática e na Educação Básica" (Pereira, 2020, p.18). Dentre diversas ações que são propostas pelo grupo, publicação do Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (BOCEHM); organização do Seminário Cearense de História da Matemática (SCHM) e das Jornada de Estudos do GPEHM; o Programa de Formação Docente (PFD); grupo de estudo do GPEHM Júnior e GPEHM Avançado; ele divulgar e publicar estudos da Interface entre História e Ensino de Matemática (IHEM).

características que o ligam ao conhecimento matemático e outras ideias que surgem à medida que o instrumento é manipulado. Considera-se também que os resultados dos experimentos, não ficam apenas anotados. Eles precisam ser analisados a partir dos elementos acima que foram listados para validar a finalidade da atividade laboratorial.

É pertinente considerar que esses elementos é que legitimam o trabalho do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) desenvolvido no Laboratório de História da Matemática (LHM) e que subsidiam a formação do conceito para a compreensão da ideia matemática e que, posteriormente, auxilia na construção do conhecimento matemático, por exemplo, a perspectiva epistemológica em que a atividade é explorada e que possibilita a compreensão sobre como um determinado objeto matemático é elaborado e produzido. Daí a importância da interface entre o ensino e a história. Nesse aspecto, o Laboratório de História da Matemática (LHM)apresenta-se propício na formação do professor no intuito de contribuir com os fundamentos matemáticos assim como os didático-pedagógicos.

Outro elemento importante que se evidencia na concepção do Laboratório de História da Matemática (LHM) estruturada pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) é o tratamento didático dado aos instrumentos históricos explorados nas investigações, ou seja, os recursos passam por um estudo que envolve a instrução e a aquisição de informações. Pois, quando se pensa na ideia de tratamento percebe-se um conjunto de ações que se realiza com o objetivo de se alcançar um resultado e que podem ser desenvolvidas no intuito de se chegar a 'conhecer o desconhecido', por isso envolve diversos procedimentos que coadunam em busca de um resultado.

E quando se considera o didático conclui-se que o trabalho envolvendo essas ações tem a ver com um estudo cuja finalidade está relacionada com a relação ensino-aprendizagem. A seguir, três exemplos de investigações realizadas por integrantes do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) em que o tratamento didático foi considerado conforme o Quadro 2.

Quadro 2 – Exemplos de investigações realizadas pelo GPEHM com o uso de instrumentos históricos submetidos a um tratamento didático

AUTOR(A)	ESTUDO
ALVES (2018)	Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred.
BATISTA (2018)	Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso da balhestilha, inserida no documento *Chronographia, Reportorio* dos Tempos..., aplicado na formação de professores.
OLIVEIRA (2019)	Um estudo sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2025).

É possível perceber no Quadro 2 que os estudos realizados pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) são voltados para a preparação do professor de matemática e estão inseridos no Programa de Formação Docente (PFD)[4], instituído pelo próprio grupo de pesquisa.

[4] O Programa de Formação Docente (PFD/GPEHM) foi criado em 2018 e que tem por objetivo desenvolver um conjunto de ações e produções tais como eventos (locais, regionais, nacionais e internacionais), palestras, workshop, feiras, oficinas, minicursos e cursos de extensão, exposições, entre outros, aos professores de Matemática, em formação inicial ou continuada, desenvolvendo competências pedagógicas, didáticas e epistemológicas, com ênfase em abordagens contextualizadas historicamente.

Ferreira (2001) defende a importância da história na formação do estudante porque dá a ele a visão científica e humana da matemática, por isso atrela um método educacional à ideia do laboratório. Para o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), é necessário incorporar outras ideias que fundamentam o laboratório, a história e a matemática e as características de cada um desses termos que substanciam a mobilização dos instrumentos históricos inseridos nos problemas de matemática historicamente construídos.

A CONCEPÇÃO DE LHM JÁ EXISTE NO GPEHM

O envolvimento da História da Matemática com o ensino e a formação de professores é realidade cada vez mais vivenciada no contexto do Grupo de Pesquisa em Educação e História da matemática (GPEHM), vinculado à Universidade Estadual do Ceará (UECE). As atividades que contemplam esse campo de conhecimento se estruturam no ensino e nas investigações realizadas na graduação e na pós-graduação por meio do Programa de Formação Docente (PFD) implementado pelo grupo no intuito de estabelece e garantir a conexão.

Ao mencionar a contribuição do PFD na relação que a História da Matemática estabelece com o ensino e a formação docente no contexto do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), Santos e Pereira (2024) destacam a validação dos recursos que auxiliam a preparação do futuro professor por meio de interfaces que possibilitam a identificação das potencialidades didáticas (Alves, 2019) existentes nos artefatos históricos e nas ações que são realizadas.

Nessa afirmação, é possível perceber a autonomia do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) na estrutura da pesquisa com os instrumentos matemáticos que vão desde a escolha do recurso, considerando o contexto em que foi produzido assim como sua elaboração, transmissão e a transformação dos conceitos matemáticos em uma perspectiva epistemológica com o cuidado de não usar anacronismos. Com base nessa afirmação, compreende-se que ele caminha para a consolidação enquanto grupo de pesquisa com as produções acadêmicas como resultados de estudos densos sobre a conexão que a História da Matemática faz com o a sala de aula e a formação do professor de matemática.

Para o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM), a ideia de Laboratório de História da Matemática está atrelada ao uso do instrumento matemático historicamente produzido. Essa crença não é apenas defendida, mas vivenciada pelos pesquisadores que se utilizam dos estudos para promover estruturação do Laboratório de História da Matemática (LHM). A evidência do trabalho desenvolvido pelo grupo e que dá sinais da concepção desse laboratório é confirmada por Pereira, Batista e Silva (2017, p.174) ao defender a ideia da construção de interfaces "a partir da articulação entre história da matemática em ensino". Para Santos e Pereira (2024, p. 5), o trabalho dos membros do grupo "aponta para atividades que podem ser caracterizadas como próprias do Laboratório de História da Matemática (LHM)".

As autoras ainda relacionam a conexão da História da Matemática e com o Laboratório de Matemática e Ensino (Pereira; Santos; Pinheiro, 2022) por meio do uso de instrumentos (Figura 1).

Figura 1 – Conexão LME com HM por meio do uso de instrumentos históricos

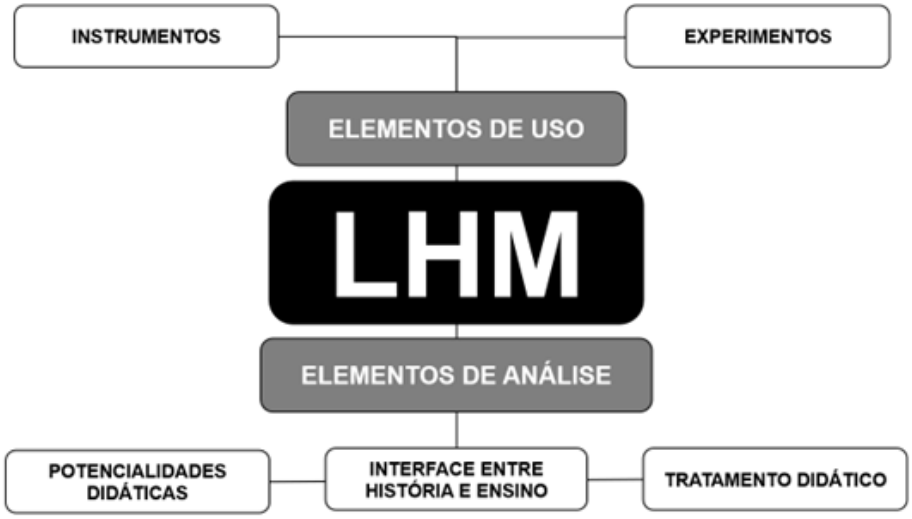
Fonte: Santos e Pereira (2024).

É importante ratificar que a concepção de Laboratório de História da Matemática (LHM) germinada e desenvolvida no contexto do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) não desvincula o ensino e a formação de professores nem o laboratório. Se o uso dos artefatos históricos, caracterizados como instrumentos matemáticos já é indício do Laboratório de História da Matemática (LHM). A evidência se concretiza quando se observa o trabalho desenvolvido dentro de um laboratório.

A estrutura da concepção do LHM no contexto do GPEHM

A estrutura do LHM no contexto do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) envolve dois tipos de elementos: os de uso, composto pelas ideias de instrumento e experimento. Os elementos de análise são potencialidade didática, tratamento didático, interface entre HM e LME (Figura 2).

Figura 2 – A concepção de Laboratório de História da Matemática no GPEHM



Fonte: Elaboração das autoras (2025).

No que se referem aos *elementos de uso*, pode-se aqui entender os instrumentos e os experimentos e aos *elementos de análise*, apresentam-se as potencialidades didáticas, a interface entre ensino e história e o tratamento didático como mostra a Figura 2. Os primeiros, quando considerados a partir de uma perspectiva histórica, são definidos instrumentos matemáticos históricos (Pereira; Saito, 2018, p. 112). Com isso, um instrumento pode ser definido como "uma ferramenta ou aparato utilizados em laboratório para realizar observações e experimentos; ou ainda, como uma ferramenta que nos permite medir comprimento, peso, e outros fenômenos naturais, tais como pressão, temperatura, força, etc" (Saito, 2016, p. 4).

A estrutura da concepção apresentada aqui não se esgota nesse estudo, sendo inclusive passível de mais elementos que podem constitui-la. Seja no campo do ensino, da pesquisa ou da extensão, o Laboratório de História da Matemática (LHM) está vinculado ao caminho didático, mesmo perpassando uma perspectiva histórica.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES O LABORATÓRIO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO CONTEXTO DO GPEHM

Este estudo mostrou uma ideia inicial sobre a concepção de Laboratório de História da Matemática (LHM) ressaltando sua importância na preparação do futuro professor, com base no conceito de experimento como eixo norteador. Os argumentos utilizados têm como base os trabalhos desenvolvidos pelo Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) vinculado à Universidade Estadual do Ceará (UECE) por meio da análise de trabalhos envolvendo o uso de instrumentos históricos. Percebeu-se que os estudos além de submetidos a um elemento do LHM que é o tratamento didático, eles têm pontos comuns como serem caracterizados como trabalhos de investigação e com aplicação no Programa de Formação Docente (PFD/GPEHM).

Nesse sentido, é importante considerar o papel do Laboratório de História da Matemática (LHM) em relação não apenas ao uso de fontes históricas, mas como essas fontes estão sendo exploradas nas pesquisas do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM). Além disso, foi mostrada a relevância do uso do instrumento histórico em um ambiente propício para estudá-lo. Ou seja, o Laboratório de História da Matemática, em sua visão mais amplificada por este grupo de pesquisa mostra-se favorável para explorar a história e o ensino a partir de ações educativas. E aqui se pergunta que mais pode ser apontado como elemento do Laboratório de História da Matemática (LHM)? Mais investigações precisam ser realizadas, para evidenciar a concepção já vivenciada pelo próprio Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM).

REFERÊNCIAS

ALVES, V. B. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred**. 2019. 156 f. Dissertação (Mestrado)– Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2019.

BATISTA, A. N. de S. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso da balhestilha, inserida no documento Chronographia, Reportorio dos Tempos..., aplicado na formação de professores**. 2018. 114f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GÁSCON, J. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

FERREIRA, E. S. **Laboratório de História da Matemática**. Natal: SBHMat, 2001.

Lins, R. C. O modelo teórico dos campos semânticos*:* uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Revista Tecno-Científica**, Blumenau, v. 3, n. 7, p. 29-39, abr./jun. 1994.

OLIVEIRA, F. W. S. **Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor**

de matemática. 2019. 199f. Dissertação (Mestrado Profissional)–Universidade Federal do ceará, centro de Ciências, Programa e Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, Ceará, 2019.

PEREIRA, C. C. C.; SAITO, F. Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática: compreendendo o cenário nacional nos últimos 10 anos. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**. v. 5, n. 14, p. 109–122, 2018.

PEREIRA, A. C. C.; SANTOS, J. N. dos; PINHEIRO, A. C. M. Prática de Laboratório de Matemática: concepções de licenciandos na construção de saberes docentes. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM)**. v. 12, n. 4, p. 1-17, set./dez. 2022.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. (Coleção história da matemática para professores).

SAITO, F. Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. **Ensino da Matemática em Debate**. v. 3, n. 1. p. 1-17. 2016

SANTOS, J. N. dos; PEREIRA, A. C. C. Introduzindo as ideias iniciais do LHM Com argumentos na formação docente e na vivência do Laboratório de Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 11, n. 32, p. 1–15, 2024.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Lewis Carroll enquanto matemático e educador matemático: olhares sobre "Pillow Problems"

Lewis Carroll as a mathematician and mathematics educator: perspectives on Pillow Problems

Roger Minks[1]
Instituto Federal Sul-Rio-Grandense – IFSUL

Rafael Montoito[2]
Instituto Federal Sul-Rio-Grandense – IFSUL

RESUMO

O artigo explora a atuação de Lewis Carroll como matemático e educador, com ênfase em suas contribuições no campo da Matemática, muitas vezes obscurecidas por sua notoriedade como escritor literário. Por meio de uma breve biografia, são discutidos aspectos de sua formação acadêmica e prática docente, destacando o papel dessas experiências na gênese de sua criatividade matemática e pedagógica. O foco central recai sobre o livro *Pillow Problems*, uma coletânea de 72 problemas matemáticos concebidos pelo autor, os quais refletem tanto seu rigor analítico quanto sua abordagem pedagógica. A obra é contextualizada no panorama das produções matemáticas de Carroll, considerando influências contemporâneas ao autor e conexões com outros escritos carrollianos. Além disso, o artigo aponta algumas investigações, oriundas de uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico, realizadas a partir de *Pillow Problems* em estudos que se inserem nos campos da Educação Matemática, da História da Matemática e da Matemática Pura. Ao integrar biografia, análise de obra e perspectivas de pesquisa, este estudo busca contribuir para uma compreensão mais ampla da produção matemática de Carroll. Ainda, intentamos contribuir para a divulgação do livro *Pillow Problems* na comunidade acadêmica, pois se trata de uma obra pouca conhecida e sobre a qual poucas pesquisas têm se dedicado, especialmente no Brasil.

Palavras-chave: Lewis Carroll; *Pillow Problems*; Obras carrollianas de matemática.

ABSTRACT

This article explores Lewis Carroll's role as a mathematician and educator, with an emphasis on his contributions to the field of mathematics, which are often overshadowed by his literary fame. Through a brief biography, we discuss aspects of his academic background and teaching practice, highlighting the role these experiences played in shaping his mathematical and pedagogical creativity. The central focus is on the book *Pillow Problems*, a collection of 72 mathematical problems conceived by Carroll, which reflect both his analytical rigor and his pedagogical approach. The work is contextualized within the broader scope of Carroll's mathematical writings, considering contemporary influences on the author and connections with his other works. Additionally, the article presents several investigations, based on a qualitative bibliographic study, conducted from *Pillow Problems* within the fields of Mathematics Education, the History of Mathematics, and Pure Mathematics. By integrating biography, work analysis, and research perspectives, this study aims to contribute to a broader understanding of Carroll's mathematical production. Furthermore, we seek to promote *Pillow Problems* within the academic community, as it is a little-known work that has received limited scholarly attention, particularly in Brazil.

Keywords: Lewis Carroll; *Pillow Problems*; Carrollian mathematical works.

[1] Licenciado em Matemática pelo Centro Universitário Claretiano (CEUCLAR). Aluno de mestrado em Educação e Tecnologia no Instituto Federal Sul-Rio-Grandense (IFSUL), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: roger.minks@gmail.com.

[2] Doutor em Educação para a Ciência pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação e Tecnologia do Instituto Federal Sul-Rio-Grandense (IFSUL), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: xmontoito@gmail.com.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste artigo[3] tecemos apontamentos sobre Lewis Carroll enquanto matemático e educador matemático, trazendo considerações de sua obra para além da literatura ficcional pela qual é amplamente conhecido. Embora as contribuições de Carroll à literatura tenham um reconhecimento consolidado, algumas de suas produções no campo da Matemática permanecem pouco estudadas em nosso país, sobretudo no contexto da Educação Matemática e da História da Matemática.

Assim, organizamos os nossos apontamentos a fim de apresentar ao leitor deste artigo: uma breve biografia do autor, com foco em sua formação e atuação como educador; considerações sobre o livro carrolliano *Pillow Problems*, uma coletânea de 72 problemas matemáticos, pontuando alguns estudos já realizados a partir desse livro e apontando outras possíveis abordagens que vislumbramos.

Portanto, ao elencar *Pillow Problems* dentre as obras matemáticas de Carroll, o artigo busca refletir sobre novas possibilidades de pesquisa, a partir desse livro, que dialoguem com os campos da Educação Matemática e da História da Matemática. Para tanto, aspectos da obra são contextualizados, considerando influências contemporâneas e conexões com outros escritos do autor. Esse enfoque pretende expandir a compreensão sobre a contribuição de Carroll à Matemática e à Educação, bem como ressaltar a relevância de suas produções para além do universo literário. Ao destacar especialmente *Pillow Problems* também queremos, em um desdobramento possível, contribuir para a divulgação desse interessante livro na comunidade acadêmica, pois se trata de obra pouca conhecida e sobre a qual poucas pesquisas têm se dedicado, especialmente no Brasil. As seções que se seguem são oriundas de uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico que mobilizou escritos de e sobre Carroll cotejando-os com referenciais que se inserem no campo da Educação Matemática e da História da Matemática.

LEWIS CARROLL: ALGUNS ENCONTROS COM A MATEMÁTICA

Falar ou escrever sobre quem foi Lewis Carroll não é uma tarefa das mais simples. Este inglês que viveu durante o reinado da Rainha Vitória foi várias coisas: clérigo, fotógrafo (numa época em que esta arte recém florescia), professor de matemática e, dentre ainda outras ocupações, literato. Porém, o Carroll literato, devido à enorme celebridade alcançada a partir de *Alice no País das Maravilhas*, acabou por involuntariamente eclipsar as obras dos "outros Carrolls" – como, por exemplo, o livro de problemas matemáticos que apresentamos na próxima seção deste artigo, intitulado *Pillow Problems*.

Destarte, consideramos pertinente nesta oportunidade apontar alguns dados biográficos deste autor, a fim de melhor apresentá-lo àqueles que pouco conhecem Carroll para além do "pai de Alice[4]", evidenciando especialmente o Lewis Carroll matemático/educador matemático. Destacamos, para tanto, alguns fatos de sua infância e juventude, entendendo esse período como fundamental para uma compreensão da multiforme vida e obra do autor, bem como aspectos de sua formação acadêmica e sua atuação como professor de Matemática na Universidade de Oxford. Nossa principal fonte para esse recorte de vida e obra foi *Lewis Carroll – Uma biografia* (Cohen, 1998), de

[3] Este trabalho apresenta considerações que comporão a dissertação de mestrado do primeiro autor.

[4] Nos referimos, é claro, a Lewis Carroll enquanto autor da Alice ficcional das obras *Alice no País das Maravilhas* e *Alice Através do Espelho*. Entretanto, a personagem foi inspirada em uma Alice real, Alice Liddell (1852-1934), filha de Henry George Liddell (1811-1898), reitor entre 1855 e 1891 de Christ Church, *college* da Universidade de Oxford, onde Carroll foi professor de matemática de 1855 até o fim da vida. Carroll frequentemente fotografava, com anuência, os filhos do reitor, e acabou por tornar-se amigo do casal Liddell e de seus filhos, em especial de Alice.

Morton N. Cohen, estudioso que dedicou trinta anos de sua vida a produzir essa sua monumental biografia de Carroll.

Em realidade, *Lewis Carroll* é um pseudônimo de Charles Lutwidge Dodgson; mas, como acabou por se convencionar na maior parte dos escritos sobre este autor, privilegiaremos o consagrado pseudônimo ao longo do artigo. Ele nasceu em 27 de janeiro de 1832 no presbitério de Daresbury, em Cheshire, Inglaterra, filho de Charles Lutwidge Dodgson, o pároco, e sua prima Frances Jane Lutwidge. Carroll foi o terceiro filho, mas o primeiro menino, dos onze filhos do casal Dodgson. O biógrafo de Carroll, Morton Cohen, especula que a "consanguinidade [dos pais] merece algum crédito pelo gênio criativo de Lewis Carroll, [mas] talvez também seja a culpada pela gagueira endêmica de Charles [Carroll] e da maioria de seus irmãos" (Cohen, 1998, p. 24). Os Dodgson, extremamente religiosos, não eram miseráveis, mas tampouco usufruíam de luxos:

> [eles] exemplificavam a fatia da sociedade vitoriana conhecida como classe média alta, que se insere entre aqueles que trabalhavam com as próprias mãos e aqueles que simplesmente não trabalhavam. Na falta de títulos aristocráticos, heranças, terras ou outras propriedades, somente podiam aspirar a algum tipo de ascensão desenvolvendo o espírito – exatamente o que faziam. O dinheiro, de modo geral, representava uma preocupação constante, mas nunca chegava a sobrepujar o fervor religioso dessa gente, sua dedicação às causas sociais, sua busca do saber e seu zelo pela melhora da condição humana. O pai [do pequeno Carroll] levava uma vida inteiramente obscura em Daresbury, uma pequena comunidade filiada a uma paróquia maior. O reverendo Charles Dodgson recebera o posto de Christ Church, Oxford, em 1827, seis anos após ganhar a nota máxima com distinção em duas disciplinas: letras clássicas e matemática. Daresbury, um pequeno povoado a dez quilômetros de Warrington e 21 de Liverpool, com 143 habitantes e trezentos hectares bem localizados, em meio à agradável paisagem da província, ficava praticamente perdido no panorama campestre. O presbitério [...] gozava de um bucólico isolamento, onde "até mesmo a paisagem de uma carroça era motivo de grande interesse" (Cohen, 1998, p. 25).

As sementes que anos depois germinariam o mundialmente famoso escritor[5] Lewis Carroll foram plantadas já nos primeiros anos de sua infância interiorana. "Daresbury lançou sementes profundas na mente fértil de Charles[6] durantes os onze anos em que ele morou lá, e seus apontamentos, esboços e primeiras incursões na poesia inspiraram-se naquele período. As lembranças de Daresbury também colorem sua obra madura" (Cohen, 1998, p. 25). As paisagens idílicas e a ausência de acontecimentos dignos de nota naquela pacata vida rural sustentaram os voos da fértil imaginação do pequeno Carroll.

Apesar de uma rotina de disciplina e horários rígidos, a vida familiar certamente foi muito estimulante para o despertar artístico e intelectual de Carroll. A casa dos Dodgson era repleta de livros e muitas horas do dia eram reservadas a estudos e leituras. Como muitas famílias vitorianas, os Dodgson editavam uma revista familiar com recortes de jornais e revistas, trechos de literatura inglesa em poesia e prosa, conselhos práticos para a vida cotidiana, gravuras, e até mesmo escritos e desenhos autorais. A mais antiga dessas revistas é um pequeno livreto de título *Useful and Instructive Poetry*[7], composto por 16 poemas acrescidos de ilustrações, realizado integralmente por Carroll por

[5] Utilizaremos o substantivo "escritor" sempre como sinônimo de literato, escritor de literatura ficcional.

[6] Trata-se de uma escolha do biógrafo de Carroll, Morton N. Cohen: "Alguns leitores criticarão meu uso do nome de batismo de Lewis Carroll, Charles, ao longo do livro. Preferi assim simplesmente porque me pareceu mais apropriado em uma obra que aborda sua vida na intimidade" (Cohen, 1998, p. 11-12). Como pontuamos anteriormente, quando as palavras forem nossas, usaremos, sem qualquer distinção, o pseudônimo Carroll.

[7] Em tradução livre do inglês, "Poesia Útil e Instrutiva".

volta de 1845, quando ele tinha apenas 13 anos. A última dessas revistas seria *Mischmasch*[8], concluída no verão de 1855. Sobreviveram aos nossos dias quatro de um total de oito revistas produzidas. Em todas, o precoce escritor Lewis Carroll foi o maior colaborador e o organizador principal.

O despertar da duradoura paixão de Carroll pela Matemática, talvez, também tenha se dado em sua primeira infância naqueles influentes anos na casa de Daresbury. Quando ainda era um menino muito pequeno, Carroll encontrou um livro de logaritmos e o trouxe ao pai, pedindo-lhe "'Por favor, explique.' O sr. Dodgson disse-lhe que ele era muito jovem para entender [...] um assunto tão complicado. A criança ouviu-o [...] mas pareceu não julgar a resposta relevante, pois insistiu: '*Mas*, por favor, explique!'" (Collingwood *apud* Cohen, 1998, p. 28). É claro que tal episódio, em si, dificilmente pode ser assentado como *o momento* em que Carroll começou a se interessar pela Matemática, pois lhe faltavam condições de apreender mesmo as mínimas noções dos conceitos envolvidos em um livro de logaritmos; mas podemos imaginar que, ao menos, estava presente naquele menino gago um certo fascínio por aqueles símbolos e números dispostos de modo esquisito, algo como uma *história* que ele não conseguia ler, mas queria conhecer. Como, ao falar desse episódio inusitado, comenta Cohen (1998, p. 28), "todas as crianças são curiosas, mas poucas são tão precoces quanto Charles".

Aos 12 anos, em 1844, Carroll foi enviado para estudar no internato de Richmond, a 15 quilômetros de casa. A reitoria de Croft, para onde sua família e ele haviam se mudado em 1843, e a escola em Richmond "tinham muito em comum: a quantidade de crianças[9], o clima de estudo, a ênfase no ritual e no comportamento cristãos" (Cohen, 1998, p. 37). Nesse novo ambiente, Carroll aprofundou o estudo de temas com os quais já havia se deparado nas lições tomadas com seu pai, tais como latim, grego, religião, matemática, literatura inglesa e francês. Carroll se mostrou um dos melhores alunos em todas as matérias e, permitindo olhar o anedótico caso do livro de logaritmos como profético, indubitavelmente provou seu interesse e aptidões para a Matemática.

> O diretor da escola [James Tate] [...] comunicou aos Dodgson que seu filho possuía "um raro talento", que "é capaz de adquirir conhecimentos bem avançados para sua idade, e seu raciocínio é tão claro e cioso do erro, que ele não fica apaziguado enquanto não encontra a solução mais exata do que quer que lhe pareça obscuro. Acaba de realizar uma prova excelente de matemática, exibindo aquela paixão pelo argumento preciso que lhe é peculiar."
>
> É possível que Tate tenha alimentado o apetite de Charles por resoluções matemáticas, ajudando-o a entrar no reino da matemática superior. E é mais possível ainda que Carroll tenha deixado Richmond "com um interesse rudimentar pelas lacunas conceituais da álgebra tradicional", de acordo com a historiadora Helena M. Pycior. Ela acredita "que uma perspectiva crítica sobre a álgebra tradicional [...] prevaleceu na escola durante [...] o período que [Charles] passou lá". Além disso, "se conceitos algébricos mal definidos foram algum dia criticados pelos alunos de Richmond [...] [Charles] certamente esteve entre os críticos" (Cohen, 1998, p.38).

Carroll ficou 16 meses em Richmond, retornando a Croft no final de 1845 para se preparar para a próxima etapa de estudos. Dessa vez iria para Rugby, que à época possuía a fama de ser o melhor internato da Inglaterra, partindo para essa jornada em 27 de janeiro de 1845, precisamente

[8] Em tradução livre do inglês, "Mixórdia".

[9] "Em Richmond, Charles morava em um grande edifício chamado Swale House, junto com o diretor da escola, James Tate, sua esposa, seus seis filhos e outros alunos [...] [num total de aproximadamente] 120 meninos" (Cohen, 1998, p. 37-38).

em seu aniversário de 14 anos. Rugby, assim como Richmond anteriormente, fora escolhida pelo pai de Carroll a fim de fornecer os requisitos necessários para ingressar em Christ Church, o maior *college* da Universidade de Oxford, *alma mater* do sr. Charles Dodgson. Carroll acatou e trilhou o caminho definido (para não dizer imposto) por seu pai, que almejava que o filho percorresse seus mesmos passos. "Charles não questiona as decisões do pai; seguirá de bom grado os passos do patriarca. Além do mais, a estrada que está prestes a trilhar descortina-se apenas para uma pequena minoria de jovens ingleses" (Cohen, 1998, p. 53). Posteriormente, de acordo com Cohen (1998, p. 93), também caberia aos irmãos mais novos de Carroll, Wilfred e Skeffington, seguir o caminho de Chirst Church.

Em Rugby, Carroll permaneceria quase 4 anos, finalizando seus estudos com distinção em 1849. Vencida essa etapa, voltou uma vez mais para a casa em Croft onde, por mais quase um ano, preparou-se para finalmente ingressar em Oxford. "O histórico de Charles em Rugby e seu precoce domínio de matemática e letras clássicas garantiram sua aceitação em Christ Church, e no dia 23 de maio de 1850 ele viajou para Oxford a fim de apresentar-se [para realizar sua matrícula]" (Cohen, 1998, p. 53), e em 24 de janeiro de 1851, três dias antes de seu décimo nono aniversário, retornou à universidade para efetivamente tomar assento como aluno.

Sua jornada como discente em Christ Church foi excepcional, atingindo nota máxima em todos os principais exames que prestou. A dedicação e as aptidões de Carroll foram notadas por seus professores, o que pavimentou o seu caminho para se tornar, posteriormente, um membro permanente da universidade e assumir uma cátedra de professor de Matemática.

> Impressionado com o desempenho de Charles, o dr. Pusey [um dos regentes de Christ Church] escreveu a seu pai no dia 2 de dezembro de 1852. "É um grande prazer informá-lo que tive a oportunidade de recomendar o seu filho para receber uma bolsa de estudos [...]. Um dos supervisores apresentou-me hoje cinco nomes, mas ficou claro que eles consideram seu filho o candidato mais bem qualificado [...]. Tem sido uma grande satisfação, para mim, tomar conhecimento da conduta firme e idônea de seu filho".
>
> Não era um fato totalmente excepcional que os melhores alunos de Christ Church ganhassem a bolsa que os tornava membros da fundação universitária antes mesmo de completar o bacharelado, mas a honra era conferida a poucos. A escolha coroou de glória e segurança os sucessos de Charles. Se quisesse, poderia continuar membro de Christ Church pelo resto de sua vida, com direito à moradia, um lugar de honra na comunidade acadêmica do melhor *college* da mais antiga universidade do país e uma renda segura (Cohen, 1998, p. 68).

Seus estudos de letras clássicas e matemática conferiram a Carroll o título de Bacharel em Artes, título referente ao primeiro grau universitário (em 1868 obteria o grau de Mestre em Artes, o mais elevado). A titularidade como professor de Matemática de Christ Church foi alcançada em outubro de 1855, um grande feito para um aluno recém graduado. A comunidade do *college* à época compreendia cerca de 180 alunos e um corpo docente de sete professores: seis de letras clássicas e apenas um de Matemática, que ministrava aulas em todos os níveis de ensino. Carroll viveria nos apartamentos do *campus* até o final de sua vida, onde produziria sua vasta obra artística, pedagógica e científica.

Desde o início de sua atividade docente, as preocupações pedagógicas ocuparam Carroll:

> Charles se entregava de corpo e alma a sua profissão, não somente através dos cursos e aulas particulares, mas também através das obras que escrevia. Pagou do próprio bolso para publicar guias de matemática e lógica para o estudante, aos quais acrescentou, mais tarde, obras que exploram novas dimensões dessas disciplinas. [...] O primeiro livro de Charles saiu em 1860: *A Syllabus of Plane Algebraical Geometry, Systematically Arranged, with Formal Definitions, Postulates, and Axioms* (Roteiro sistemático de geometria algébrica plana, com definições formais, postulados e axiomas), uma obra de 154 páginas tentando traduzir parte da geometria euclidiana em termos algébricos e reivindicando para a geometria analítica um papel maior do que se admitia à época no desenvolvimento da razão e do raciocínio lógico.
>
> Ainda em 1860, publicou um panfleto de oito páginas, *Notes on the First Two Books of Euclid, Designed for Candidates for Responsions* (Observações sobre os dois primeiros livros de Euclides para candidatos ao *Responsions*[10]) e, em 1861, *The Formulae of Plane Trigonometry, Printed with Symbols (Instead of Words) to Express the "Goniometrical Ratios"* (Fórmulas da trigonometria plana apresentadas com símbolos (lugar de palavras) para expressar as "razões goniométricas", 19 páginas) e *Notes on the First Part of Algebra* (Observações sobre a primeira parte da álgebra, 16 páginas). Essas obras refletem a própria atividade docente de Carroll e seu desejo de ajudar os alunos a entender a matéria melhor e preparar-se para os exames de forma mais fácil e mais eficaz. [...] Os tratados de matemática falam por si mesmos: são tentativas profissionais e sinceras, ainda que, talvez, não muito elegantes, de mudar o ensino de matemática e ajudar os estudantes (Cohen, 1998, p. 102-103).

Percebemos do excerto a dedicação de Carroll em organizar materiais que auxiliassem seus alunos. É interessante notar que o seu primeiro livro publicado não foi uma ficção literária, mas sim um tratado de geometria, o *Syllabus*, de 1860, 5 anos antes da publicação do meteórico *Alice no País das Maravilhas*. Ao longo de sua vida, alternará a publicação de obras literárias (romances, contos, poemas etc.) com outras de assuntos matemáticos, sendo as mais complexas sobre geometria euclidiana e lógica simbólica (Montoito, 2007; 2013).

Com estas breves notas biográficas, quisemos destacar alguns aspectos do profundo interesse de Lewis Carroll pela Matemática – algo levado pelo autor até mesmo para muitas de suas obras de literatura – e situá-lo como um educador matemático de renome nas últimas décadas do século XIX na Inglaterra, fato desconhecido por muitos daqueles que o conhecem apenas por *Alice*. Feita esta apresentação do autor, passamos agora à apresentação de uma de suas obras de matemática, o livro *Pillow Problems*, objeto principal da pesquisa de mestrado, em andamento, da qual o presente artigo emerge.

PILLOW PROBLEMS: PROPOSIÇÕES MATEMÁTICAS CARROLLIANAS

O livro *Pillow Problems*[11] consiste em uma coletânea de 72 problemas de variados conteúdos matemáticos, com soluções propostas pelo próprio Carroll. Foi publicado originalmente em 1893, apresentado como a parte 2 de *Curiosa Mathematica*; a parte 1, por sua vez, com o subtítulo *Uma nova teoria das paralelas*, havia sido publicada em 1890 e tratava de problemas geométricos a partir dos postulados e proposições do *Elementos* de Euclides (2009). É interessante observar que "quase todas as obras de matemática [...] [de Carroll] tratam de geometria, [...] [sendo que] *Euclid and His*

[10] Um dos exames aplicados aos alunos em Christ Church.

[11] Em uma tradução literal, "Problemas de Travesseiro", livro que até o momento não possui edições em português. Está nas nossas intenções de pesquisa o plano de traduzir a íntegra do livro para a língua portuguesa. Não obstante, até que a tradução esteja publicada, preferimos indicar o livro por seu título original em inglês.

Modern Rivals (Euclides e seus rivais modernos) e *Curiosa Mathematica, Part 1, A New Theory of Parallels* [...] foram muito além de suas necessidades como professor" (Cohen, 1998, p. 435). Para Carroll, os escritos de Euclides haviam capturado a beleza da Matemática em seu estado mais puro ao mobilizar alguns poucos axiomas e, a partir deles, obter resultados profundos.

A versão de *Pillow Problems* que utilizamos durante a pesquisa é a edição de 1958 publicada pela editora norte-americana Dover (Carroll, 1958), que é uma reedição integral e inalterada dos seguintes dois livros de Lewis Carroll, compilados em um único tomo: *Pillow-Problems* (Parte 2 de *Curiosa Mathematica*), publicado pela Macmillan and Company Ltd., em 1895, e *A Tangled Tale* (*Uma História Embrulhada*), originalmente publicado também pela Macmillan and Company Ltd., em 1885. Considerações sobre *Uma História Embrulhada*, texto literário carrolliano, destoam de nossos interesses no presente artigo.

A introdução original do livro, em sua primeira edição, também da lavra de Carroll, data de maio de 1893. No mesmo ano, uma seguinte edição foi feita, com seu prefácio indicando o mês de setembro. A última edição revisada pelo próprio Carroll, a quarta, é de 1895 – como vimos, a edição que editora Dover republicou integralmente em 1958. Os 72 problemas de matemática reunidos no livro foram concebidos e resolvidos por Carroll durante, em sua maioria, noites e madrugadas. Apenas um ou outro problema, conta o autor, germinou durante a luz do dia. Entretanto, é pertinente notar a ressalva feita por Carroll, quando afirma, a despeito do nome do livro e de sua origem notívaga: "nunca sofri de 'insônia': e as horas excessivamente acordadas que tive de passar à noite foram muitas vezes simplesmente o resultado das horas excessivamente sonolentas que passei durante a noite anterior!" (Carroll, 1958, p. x, tradução nossa). Carroll conta-nos suas motivações no prefácio da segunda edição do livro:

> [...] Tampouco é como remédio para a *vigília* que sugeri o cálculo matemático; mas como um remédio para os *pensamentos angustiantes* que tendem a invadir uma mente totalmente desocupada. [...] O verdadeiro dilema, que tive de enfrentar, é este: dado que o cérebro está em uma condição tão desperta que, faça o que eu fizer, tenho *certeza* de que vou continuar acordado na próxima hora ou mais, devo escolher entre dois caminhos, a saber: ou me submeter à tortura inútil de passar por algum tópico preocupante, repetidamente, ou ditar a mim mesmo algum tópico suficientemente absorvente para manter a preocupação afastada. Um problema matemático é, para mim, um desses tópicos; e é um benefício, mesmo que prolongue um pouco o período acordado. Acredito que uma hora de cálculo é muito melhor para mim do que meia hora de preocupação (Carroll, 1958, p. x, tradução nossa, grifos do autor).

Na Tabela 1, os problemas constantes em *Pillow Problems* estão organizados de acordo com os assuntos matemáticos que abordam.

Tabela 1 – Classificação dos problemas em *Pillow Problems*

Classificação	Subclassificação	Nº do problema
Aritmética		31
Álgebra	Problemas de equacionamento	8, 25, 39, 52, 68
	Séries	21, 32
	Equações indeterminadas	47
	Propriedade dos números	1, 14, 29, 44, 61
	Probabilidades	5, 10, 16, 19, 23, 27, 38, 41, 45, 50, 58, 66
Geometria Pura	Plana	2, 3, 9, 15, 17, 18, 20, 24, 26, 30, 34, 35, 36, 40, 46, 51, 57, 62, 64, 71
Trigonometria	Plana	4. 6, 7, 11, 12, 13, 18, 22, 28, 37, 42, 43, 48, 54, 55, 56, 57, 60, 65, 69
	Sólida	49, 59, 63, 70
Geometria Algébrica	Plana	53
	Sólida	67
Cálculo Diferencial	Máximos e mínimos	33
Probabilidades Transcendentais		72

Fonte: Adaptado e traduzido de Carroll (1958, p. xxii)

Sobre a cronologia dos enigmas reunidos em *Pillow Problems*, quanto à data em que foram "concebidos" e solucionados, Carroll (1958, p. xiii) aponta que registrou "as datas exatas de alguns" dos problemas. No livro, estas datas, quando disponíveis, constam ao final de cada enunciado. Sete dos problemas não possuem data (listados como "s/d" – sem data – na Tabela 2). Em 21 dos problemas, constam apenas mês e ano[12]. Os demais problemas apresentam a data exata. Na Tabela 2, organizamos os problemas cronologicamente.

Tabela 2 - Distribuição dos problemas por ano

Ano	Nº do problema	Ano	Nº do problema
1872	67	1884	1, 45, 56, 58
1874	34, 55, 64, 71	1886	24, 49, 54
1876	4, 9, 25, 35, 38, 40, 62	1887	5, 16, 23, 41, 46, 72
1878	28, 39, 42	1888	20
1880	27	1889	7, 8, 13, 17, 21, 22, 26, 30, 31, 32, 36, 52, 53, 65, 66, 68, 69
1881	14, 29, 48, 51, 61	1890	10, 47, 59, 60, 63
1882	11, 43	1891	12, 15, 18, 37, 57
S/d	2, 3, 6, 19, 33, 50, e 70.		

Fonte: Os autores.

Aqui não discutiremos pormenores matemáticos dos problemas de *Pillow Problems*, embora essa (não) ação aponte para a possibilidade de trabalhos futuros que tomem alguns dos problemas individuais do livro para análise de conteúdo. Nosso interesse momentâneo é apresentar aspectos gerais do livro e comentar, brevemente, alguns estudos já realizados a partir dele, bem como indicar outras possibilidades de pesquisa que vislumbramos possíveis – algumas das quais a que temos nos

[12] A saber, os problemas 7, 8, 13, 17, 20, 24, 26, 30, 31, 36, 37, 40, 41, 43, 47, 51, 59, 62, 65, 66, e 69.

dedicado em pesquisas em desenvolvimento. Reproduzir aqui todos os 72 enunciados (afinal, há o livro em si com todos eles) seria copioso e despropositado; no entanto, entendemos que se faz pertinente indicar os enunciados de ao menos alguns dos problemas presentes em *Pillow Problems*, sem o que a apresentação do livro ao leitor não familiarizado, intenção cara aos intuitos desse artigo, ficaria algo incompleta. Assim, conforme um ou outro problema de *Pillow Problems* for citado no contexto das nossas considerações seguintes, o enunciado daquele problema em particular será apontado em nota de rodapé.

O problema mais antigo é o de nº 67[13], classificado como um problema de Geometria Algébrica Sólida, datado de 27 de janeiro de 1872 (exatamente no aniversário de 40 anos[14] de Carroll), e o mais recente é o problema nº 37[15], de Trigonometria Plana, concebido em dezembro de 1891 (quando Carroll tinha 59 anos, um ano e meio antes da publicação de *Pillow Problems*, em maio de 1893, e pouco mais de 6 anos antes de sua morte, em 14 de janeiro de 1898). Não sabemos dizer se algum dos problemas "sem data" ocorreu ao autor antes do problema nº 67 ou depois do problema nº 37. Se considerarmos apenas os problemas com data conhecida, exata ou aproximada, temos *Pillow Problems* como a reunião de problemas matemáticos com os quais o autor se ocupou, eventualmente, ao longo de quase 20 anos, sem qualquer intencionalidade maior, no sentido de que os reunir em um livro a ser publicado foi uma decorrência não (muito) planejada inicialmente.

É possível perceber, a partir da Tabela 2, que não há problemas datados nos anos de 1873, 1875, 1877, 1879, 1883 e 1885. Entretanto, isso não quer, necessariamente, dizer que Carroll não "esteve às voltas" com nenhum "problema de travesseiro" nesses 6 anos em que temos hiatos na lista. Alguns dos problemas sem data podem ter sido pensados nesses anos. Também é possível, acreditamos, que o autor tenha agrupado em *Pillow Problems* seus 72 problemas favoritos e *inéditos* de uma lista originalmente maior. Esta conjectura se deve ao fato de que Carroll, por várias vezes, publicou enigmas matemáticos, *à la* os de *Pillow Problems*, em periódicos especializados (Minks; Montoito, 2024; Cohen, 1998).

Escassas pesquisas têm sido realizadas sobre *Pillow Problems*. Vale destaque os trabalhos do matemático ucraniano-australiano Eugene Seneta, membro da Sociedade Lewis Carroll[16], professor emérito do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de Sydney. Este pesquisador se insere dentre aqueles que dedicaram escritos a evidenciar a "faceta de matemático" de Carroll (Seneta, 1984) – desviando do lugar comum de percebê-lo apenas como um literato – e um dos poucos a abordar a(s) matemática(s) subjacente(s) em *Pillow Problems* (Seneta, 1993).

Seneta (2017, p. 33, tradução nossa) comenta que seu "principal interesse em Lewis Carroll tem sido seu pensamento probabilístico [...] [e que] esse interesse começou com os treze problemas de probabilidade presentes no livro *Pillow Problems*". Conforme a Tabela 1, doze dos problemas de

[13] Problema nº 67: "Se um tetraedro regular for colocado, com um vértice para baixo, em uma base que o encaixa exatamente, e for girado ao redor de seu eixo vertical, em um ângulo de 120°, levantando-o apenas o necessário até que ele se encaixe novamente na base: encontre o lugar geométrico de um dos vértices giratórios" (Carroll, 1958, p. 16, tradução nossa).

[14] O problema nº 57 data de 27 de janeiro de 1891, aniversário de 59 anos de Carroll. Não deixa de ser interessante notar que o autor, mais de uma vez, dedicou a noite de seu aniversário a trabalhar em um enigma matemático. Segue o problema nº 57: "Em um triângulo dado, descreva três quadrados, cujas bases estejam situadas ao longo dos lados do triângulo, e cujas arestas superiores formem um triângulo; (1) geometricamente; (2) trigonometricamente" (Carroll, 1958, p. 14, tradução nossa).

[15] Problema nº 37: "Dois círculos dados se intersectam, de modo que sua corda comum subtenda ângulos de 30° e 60° em seus centros. Que fração do círculo menor está dentro do maior?" (Carroll, 1958, p. 8, tradução nossa).

[16] A Sociedade Lewis Carroll foi fundada em 1969 com o intuito de promover o interesse na vida e na obra de Charles Lutwidge Dodgson. A sociedade reúne-se regularmente, patrocina conferências, organiza visitas a lugares relacionados a Dodgson e mantém um ativo programa de publicações. Seus membros incluem estudiosos e colecionadores ilustres (Cohen, 1998).

probabilidade do livro estão associados à categoria maior de "Álgebra" e há mais um, o problema nº 72[17], datado de 8 de setembro de 1887, solitário na categoria de "Probabilidades Transcendentais".

> Dez desses problemas envolvem questões de "sacos e contadores", exemplos simples de modelos de urna na teoria das probabilidades. Esses dez problemas abordam questões sobre "probabilidades inversas", ou seja, dado um conjunto de probabilidades prévias para as causas, como essas são modificadas pela observação experimental de um entre vários efeitos possíveis? O tratamento dessas questões de inversão por meio de um dispositivo simples chamado Teorema de Bayes[18] é a base da inferência estatística Bayesiana moderna (Seneta, 2017, p. 33, tradução nossa).

Dentre outras considerações, Seneta (2017) chama a atenção para a influência de um trabalho do matemático Morgan W. Crofton[19], trabalho este publicado poucos anos antes de *Pillow Problems*, na abordagem dada por Carroll a alguns problemas de estatística do livro:

> Crofton (1826-1915), na célebre 9ª edição da *Encyclopaedia Britannica* [de 1885], incluiu uma seção intitulada "II. Probabilidade de eventos futuros deduzida da experiência", que expõe a teoria das "probabilidades inversas" conforme o entendimento de Crofton [...] sobre o Teorema de Bayes. Vários dos problemas de *Pillow Problems* de Carroll (especificamente o nº 66[20], de setembro de 1889, e o nº 10[21], de agosto de 1890) foram fortemente influenciados pelo tratamento dado por Crofton ao tema (Seneta, 2017, p. 33, tradução nossa).

Embora Eugene Seneta tenha favorecido uma análise em "matemática pura" dos problemas de *Pillow Problems* (ainda que seus textos não se furtem de considerações sobre a biografia de Carroll e a historiografia de seus escritos), este não é o único modo de investigar o livro no escopo da Educação Matemática e da História da Matemática.

Pillow Problems foi recentemente estudado em Minks e Montoito (2024) sob uma perspectiva historiográfica, relevando outras publicações de Carroll a partir de um dos problemas do livro, o problema nº 61, que citaremos mais à frente. É dizer que o livro foi manipulado como uma fonte histórica, seguindo abordagens propostas por Montoito, Dalcin e Rios (2021), a fim que evidenciar camadas ocultas, ainda que interpretativas, acerca das intenções do autor ao publicar a obra, bem como o contexto de seu advento.

Cotejando as seções introdutórias das várias edições de *Pillow Problems* com outros trabalhos de e sobre Carroll, Minks e Montoito (2024) identificaram que o problema nº 61 também fora

[17] Problema nº 72: "Um saco contém 2 peças, sobre as quais nada se sabe, exceto que cada uma é preta ou branca. Determine suas cores sem retirá-las do saco" (Carroll, 1958, p. 18, tradução nossa).

[18] Atribuído ao pastor presbiteriano e matemático inglês Thomas Bayes (1701-1761).

[19] Matemático irlandês que contribuiu para a teoria geométrica da probabilidade.

[20] Problema nº 66: "Dado que há 2 peças em um saco, sobre as quais tudo o que se sabia inicialmente era que cada uma era branca ou preta. Também dado que foi realizado o experimento de retirar uma peça, observá-la e devolvê-la ao saco um certo número de vezes; que ela foi branca em todas as vezes; e que, como resultado, a chance de retirar uma peça branca na próxima tentativa é $\alpha/(\alpha+\beta)$. Além disso, considerando que o mesmo experimento é repetido mais *m* vezes, e que ela continua sendo branca em todas as vezes, qual seria então a nova chance de retirar uma peça branca?" (Carroll, 1958, p. 15, tradução nossa).

[21] Problema nº 10: "Uma mesa de bilhar triangular tem 3 buracos, um em cada canto. Um dos buracos comporta apenas uma bola, enquanto cada um dos outros dois comporta duas bolas. Há 3 bolas na mesa, cada uma contendo uma única moeda. A mesa é inclinada de forma que as bolas correm para um dos cantos, sem que se saiba qual. A 'expectativa' em relação ao conteúdo do buraco é 2/6. Quais são as moedas?" (Carroll, 1958, p. 3, tradução nossa).

publicado por Carroll em um jornal vitoriano, *The Educational Times*, que, dentre outros assuntos de interesse à educação, publicava problemas matemáticos. Os leitores do jornal podiam propor soluções às questões veiculadas e tais soluções eram posteriormente publicadas remetendo às questões originais. Era possível réplica do autor, e para o problema nº 61 – e também em outras questões sugeridas por Carroll ao jornal, mas não presentes em *Pillow Problems* – Carroll criticou acidamente uma solução enviado por um leitor. Além de evidenciar esse "debate" sobre a solução do problema nº 61, os autores do artigo também apontam propostas de soluções enviadas por outros leitores do *Educational Times* descobertas durante a pesquisa, e, por fim, apresentam a solução que o próprio Carroll indica na seção de resoluções de seu *Pillow Problems*.

Com o intuito de proporcionar ao leitor ao menos um vislumbre do modo como Carroll pensava em seus "problemas de travesseiro", também aqui trazemos, nas linhas abaixo, o Problema nº 61 e a solução carrolliana correspondente.

Comecemos pelo enunciado do Problema nº 61:

> Prove que, se quaisquer 3 números forem tomados, que não podem ser arranjados em P. A., e cuja soma é um múltiplo de 3, a soma de seus quadrados também é a soma de outro conjunto de 3 quadrados, os 2 conjuntos não tendo nenhum termo em comum (Carroll, 1958, p. 14, tradução nossa).

A solução proposta por Carroll (1958, p. 90-91, tradução nossa) é a seguinte:

> Nós sabemos que a equação $(a^2+4b^2+4c^2)+(4a^2+b^2+4c^2)+(4a^2+4b^2+c^2)=9(a^2+b^2+c^2)$' é identicamente verdadeira.
> Portanto $a^2+b^2+c^2$
> $=1/9\{(a^2+4b^2+4c^2)+(4a^2+b^2+4c^2)+(4a^2+4b^2+c^2)\}$
> $=1/9\{(a^2+4b^2+4c^2+8bc-4ca-4ab)+(4a^2+b^2+4c^2-4bc+8ca-4ab)+(4a^2+4b^2+c^2-4bc-4ca+8ab)\}$
> $=1/9\{(-a+2b+2c)^2+(2a-b+2c)^2+(2a+2b-c)^2\}$
> $((-a+2b+2c)/3)^2+((2a-b+2c)/3)^2+((2a+2b-c)/3)^2$
> Agora $(-a+2b+2c)=3(b+c)-(a+b+c)$
> ∴, se $(a+b+c)$ é um múltiplo de 3, então também o é $(-a+2b+2c)$;
> $\therefore(-a+2b+2c)/3$ é um inteiro;
> e da mesma forma para as outras 2 frações.
> Também pode ser provado que, se $(-a+2b+2c)/3$ é igual a a, ou b, ou c, então a, b, c podem ser arranjados em P. A.
> Primeiro, seja $(-a+2b+2c)/3=a$
> então $-a+2b+2c=3a$; i.e. $b+c=2a$;
> Segundo, seja $(-a+2b+2c)/3=b$;
> então $-a+2b+2c=3b$; i.e. $2c=a+b$;
> Terceiro, seja $(-a+2b+2c)/3=c$;
> então $-a+2b+2c=3c$; i.e. $2b=c+a$.
> E da mesma forma para as outras 2 frações.
> Portanto, contranominalmente, se a, b, c não podem ser arranjados em P.A., os dois conjuntos de quadrados não têm termos comuns.
>
> Q.E.D.[22]

[22] Sigla para a expressão latina "*Quod Erat Demonstrandum*", que significa "o que era para ser demonstrado".

Exemplos Numéricos (não elaborados)

a^2	b^2	c^2	$((-a+2b+2c)/3)^2$	$((2a-b+2c)/3)^2$	$((2a+2b-c)/3)^2$
1^2	4^2	4^2	5^2	2^2	2^2
3^2	4^2	8^2	7^2	6^2	2^2
4^2	5^2	9^2	8^2	7^2	3^2

Certamente será proveitoso para o leitor explorar as nuances dos resultados acima, percebendo teoremas e lemas subentendidos. Isso tudo, é claro, não afasta a possibilidade de o leitor interessado propor soluções alternativas.

Como comentado, poucos trabalhos se dedicaram a estudar *Pillow Problems* até o momento. Talvez a razão seja porque a obra carrolliana seja vasta, mesmo tratando-se de suas produções não literárias. Ademais, até a década de 1990, muitos dos escritos de Lewis Carroll careciam de organização e acesso adequados aos pesquisadores e entusiastas do autor (Cohen, 1998, vide introdução do livro). Este cenário é particularmente verdade no Brasil, com muitos dos trabalhos de Carroll ainda inacessíveis em nosso país e mesmo em língua portuguesa – como é caso de *Pillow Problems*. Num esforço para mudar esse cenário, recentemente participamos, junto com outros pesquisadores de diversas instituições do país, de um projeto de tradução de textos carrollianos inéditos em nosso idioma, compilados com comentários sob a organização de Montoito (2023). Somando-se a esse esforço, a tradução integral de *Pillow Problems* para a língua portuguesa será um dos resultados da pesquisa de mestrado na qual o presente artigo se insere.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos são os movimentos de investigação possíveis para aproximar *Pillow Problems* das pesquisas afins aos campos da Educação Matemática, da História da Matemática e mesmo da Matemática Pura. Os trabalhos mencionados anteriormente exemplificam alguns desses movimentos que, certamente, são passíveis de aprofundamentos e desdobramentos. Minks e Montoito (2024) mostraram modos de tomar *Pillow Problems* como uma fonte histórica e conectaram conteúdos do livro com publicações pouco conhecidas e/ou exploradas de Carroll e outros autores em um jornal educacional da Inglaterra do final do século XIX. Seneta (2017), em uma perspectiva totalmente diferente, busca explorar problemas de probabilidade propostos por Carroll para investigar aspectos particulares desse campo da Matemática. Dentre outros tantos movimentos investigativos imagináveis, gostaríamos de sugerir, à guisa de encerramento, ao menos mais um: a contextualização dos teoremas matemáticos mobilizados ao longo do livro com o intuito de perceber até que ponto Carroll mobilizava "matemática de vanguarda". Como apontou Seneta (2017), alguns dos problemas de probabilidade de *Pillow Problems* advieram sob a influência de trabalhos que eram contemporâneos a Carroll nessa especialidade e, ademais, para além de *Pillow Problems*, Lindemann (2023), Lindemann e Sauter (2019) e Cohen (1998) indicaram que os trabalhos de Lewis Carroll no campo da Lógica seguiam, em grande medida, as inovações e avanços realizados nesse campo naquela época e, até mesmo, contêm contribuições originais e relevantes.

REFERÊNCIAS

CARROLL, Lewis. **The Mathematical recreations of Lewis Carroll: Pillow Problems and A Tangled Tale**. New York: Dover Publications, 1958.

COHEN, Morton. **Lewis Carroll, uma biografia**. Rio de Janeiro: Record, 1998.

EUCLIDES. **Elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

LINDEMANN, John Lennon. A história e a atualidade de um paradoxo lógico carrolliano. In: MONTOITO, R. (org.) **Alimentar a mente – e outros textos de Lewis Carroll.** Pelotas: Editora IFSUL, 2023, p. 105-107.

LINDEMANN, John Lennon; SAUTTER, Frank Thomas. A abordagem carrolliana a paradoxos. **Pensando** – Revista de Filosofia. Vol. 10, n. 20. 2019. p. 91-106.

MINKS, Roger; MONTOITO, Rafael. A "genealogia" do problema 61 – Pillow Problems, de Lewis Carroll, enquanto fonte histórica. In: Anais do Encontro Gaúcho de Educação Matemática. **Anais...** Bagé (RS) UNIPAMPA, 2024. Disponível em: http//www.even3.com.br/anais/xv-encontro-gaucho-de-educacao-matematica-449211. Acesso em: 06 jan. 2025.

MONTOITO, Rafael. (org.) **Alimentar a mente – e outros textos de Lewis Carroll**. Pelotas: Editora IFSUL, 2023.

MONTOITO, Rafael. **Euclid and his Modern Rivals (1879), de Lewis Carroll:** Tradução e Crítica. Tese de doutorado. Bauru: Universidade Estadual Paulista, 2013.

MONTOITO, Rafael. **Uma Visita ao Universo Matemático de Lewis Carroll e o (Re)encontro com sua Lógica do Nonsense.** Dissertação de mestrado. Natal: Universidade Federal de Natal, 2007.

MONTOITO, Rafael; DALCIN, Andréia; RIOS, Diogo. **Aproximações entre matemática, literatura e história:** reflexões sobre o ensino e a pesquisa. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

SENETA, Eugene. Lewis Carroll as a probabilist and mathematician. In: **Mathematical Scientist**, v.9, p. 79-94, 1984.

SENETA, Eugene. Lewis Carroll, Boole's Inequality and Statistical Inference. In: **The Carrollian: The Lewis Carroll Journal**, n. 30 (Lewis Carroll: Man of Science), p.33-44, The Lewis Carroll Society, Hatrow, Inglaterra, oct. 2017.

SENETA, Eugene. Lewis Carroll's "Pillow Problems": On the 1993 centenary. In: **Statistical Science**, v. 8, p. 180-186, 1993.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores). Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Apreciação inicial do documento *New and Complete Epitome of Practical Navigation* (de 1805)

Initial consideration of the document *New and Complete Epitome of Practical Navigation* (from 1805)

Anna Beatriz de Andrade Gomes[1]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Giselle Costa de Sousa[2]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Valdenize Lopes do Nascimento[3]
Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA

RESUMO

O presente trabalho é um desdobramento de uma pesquisa de doutorado em andamento sobre o uso da aliança da História da Matemática e Tecnologias Digitais com o uso de instrumentos matemáticos a partir da Teoria da Objetivação para o ensino da matemática e tem como objetivo fazer um estudo preliminar do documento *New and Complete Epitome of Practical Navigation*, produzido em 1805 pelo inglês John William Norie. Tal documento consiste num livro que trata, sumariamente, do que se precisa para navegar na época, incluindo instrumentos náuticos que poderiam auxiliar a navegação, também sobre como realizar cálculos para encontrar longitude e latitude, assim como tabelas trigonométricas, além de conhecimentos de natureza matemática necessários para navegar. Nesta perspectiva, adotamos uma metodologia qualitativa com aspectos bibliográficos e documentais, a partir de métodos que auxiliassem no estudo do documento. Neste sentido, foi realizada, incialmente, uma investigação em livros e sites de busca, como bibliotecas online e repositórios de livros, para entender mais sobre o autor e o contexto em que o documento foi produzido. Em seguida, foi realizada uma categorização de acordo com o conteúdo do livro, sendo as categorias: conteúdos de natureza matemática, instrumentos náuticos, métodos para encontrar a longitude, tabelas de navegação e outros assuntos. A partir dessa categorização, notou-se que muitos capítulos do livro apresentam conhecimentos de natureza matemática, sejam os que falam unicamente sobre isso ou os que necessitam deles para encontrar distâncias, como longitude e latitude, a exemplo dos que conhecemos como campos da geometria, trigonometria e aritmética.

Palavras-chave: História da Matemática; *New and Complete Epitome of Practical Navigation*; John William Norie; Conhecimentos de natureza matemática.

ABSTRACT

The present work is a development of an ongoing doctoral research on the use of the alliance between the History of Mathematics and Digital Technologies, along with the use of mathematical instruments based on the Theory of Objectification for mathematics teaching. Its objective is to conduct a preliminary study of the document New and Complete Epitome of Practical Navigation, produced in 1805 by the Englishman John William Norie. This document consists of a book that briefly addresses the essential knowledge required for navigation at the time, including nautical instruments that could aid navigation, methods for performing calculations to determine longitude and latitude, as well as trigonometric tables and mathematical knowledge necessary for navigation. From this perspective, we adopted a qualitative methodology with bibliographic and documental aspects, using methods that supported the study of the document. Initially, an investigation was conducted in books and search websites, such as online libraries and book repositories, to gain a better understanding of the author and the historical context in which the document was produced. Next, a categorization was carried out based on the book's content, with the following categories: mathematical

[1] Doutoranda na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Natal, Rio Grande do Norte, Brasil.E-mail: gomesbeatriz.anna@gmail.com.

[2] Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora Titular do DMAT/PPGECNM da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: giselle.sousa@ufrn.br.

[3] Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora Associada do Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA). Mossoró, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: denizeln@ufersa.edu.br.

knowledge, nautical instruments, methods for determining longitude, navigation tables, and other topics. Based on this categorization, it was observed that many chapters of the book present mathematical knowledge, either explicitly or as a necessary foundation for calculating distances, such as longitude and latitude. These topics align with what we recognize today as fields of geometry, trigonometry, and arithmetic.

Keywords: History of Mathematics; New and Complete Epitome of Practical Navigation; John William Norie; Mathematical Knowledge.

INTRODUÇÃO

No século XIX, a Inglaterra era destaque na Revolução Industrial[4]. Segundo Santos (2023), este fenômeno ocorreu, dentre outros fatores, devido às grandes navegações, visto que o país era estrategicamente bem localizado e mantinha boas relações de mercado. Além disso, também havia diversos investimentos em estudos e pesquisas que pudessem auxiliar nas práticas de navegação, como a determinação da longitude e latitude e a localização em alto mar.

Dessa forma, muitos registros foram feitos contendo resultados dessas pesquisas. Esses registros, muitas vezes detalhados por exploradores, cartógrafos e cronistas, oferecem um olhar privilegiado sobre o contexto político, econômico e cultural das grandes expedições marítimas.

Além disso, alguns desses documentos também evidenciam certos conhecimentos de natureza matemática utilizados para o entendimento de determinados conceitos em diversas áreas do conhecimento. Neste trabalho, voltamos nossa atenção para um desses registros: um documento, em formato de livro, intitulado *New and Complete Epitome of Practical Navigation* publicado por John William Norie em 1805. Nele, o autor, além de fornecer orientações para utilizar durante a navegação, discorre sobre conhecimentos de natureza matemática necessários para navegar e aplicações desses conhecimentos a cálculos de longitude e uso de instrumentos náuticos.

O presente artigo é um desdobramento inicial de uma pesquisa de doutorado[5] em andamento que aborda o uso da aliança entre História da Matemática (HM) e Tecnologias Digitais (TD) numa perspectiva da Teoria da Objetivação (TO) e uso de instrumentos matemáticos. Nela, pretende-se fazer um estudo detalhado do documento *New and Complete Epitome of Practical Navigation* com a intenção de evidenciar conhecimentos de natureza matemática envolvidos e fazer uma proposta educacional, conectando a aliança entre HM e TD à TO, conforme Sousa (2024).

Sob esta ótica, este artigo tem como objetivo apresentar um estudo preliminar sobre o documento *New and Complete Epitome of Practical Navigation* do inglês John William Norie. Para alcançar este objetivo, foi utilizado uma metodologia qualitativa com aspectos bibliográficos e documentais.

No estudo inicial da referida obra foram notados o uso de logaritmos, tabelas de seno e cosseno, geometria plana, trigonometria, e entre outros assuntos associados que podem ser acionados numa proposta educacional posterior. Além da abordagem desses conhecimentos de maneira objetiva, o autor também os apresenta aplicados em cálculos de longitude e em instruções de uso de

[4] Gonçalo (2024, p. 4), aponta que a revolução industrial "...caracteriza-se por ser um período marcado por profundas mudanças nos mecanismos de produção, na tecnologia, na economia e na sociedade, sendo um momento de transição entre as formas tradicionais produção artesanal para a produção em larga escala de forma mecanizada."

[5] As autoras deste artigo são respectivamente a doutoranda, orientadora e coorientadora da pesquisa.

instrumentos náuticos, como o quadrante e o sextante[6] de Hadley (1682-1744), escala de Gunter[7] (1581-1626), Setor[8], entre outros.

Este artigo está estruturado em quatro seções: a presente *introdução*, que apresenta esse trabalho, suas intenções e seus elementos; a seção de *aspectos metodológicos*, que evidencia os métodos utilizados para fazer o estudo inicial do documento citado anteriormente; a seção intitulada *o documento New and Complete Epitome of Pratical Navigation (de 1805)*, que aborda acerca da estrutura e do conteúdo presente no livro investigado; e, por fim, as *considerações finais*.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para a produção do presente trabalho, utilizamos de uma metodologia qualitativa. Segundo Taquette e Borges (2021), a pesquisa qualitativa envolve uma conexão mais estreita entre o pesquisador e o objeto de estudo, caracterizada por interação. Essa conexão deve ser dialogada e reflexiva, permitindo a compreensão do que não é visível, dito ou explicitado. Ou seja, o pesquisador precisa se envolver diretamente com o tema, visto que permite uma interação mais rica e detalhada, favorecendo a compreensão das nuances do fenômeno estudado.

No que diz respeito a esta pesquisa, o objeto de estudo consiste no conteúdo presente no documento que compreende o livro de título *New and Complete Epitome of Practical Navigation,* de 1805. Dessa forma, de acordo com o objetivo apontado na introdução, utilizamos da metodologia qualitativa na intenção de evidenciar e descrever os conhecimentos de natureza matemática presentes no documento de modo que, nos procedimentos de análise do mesmo, buscamos corroborar uma conexão entre a atividade do pesquisador e seu objeto, num diálogo reflexivo entre texto e contexto, num processo de compreensão mútua, visível e aclarado, o qual procuramos externar neste artigo.

Nesta perspectiva de abordagem qualitativa adotamos procedimentos bibliográficos e documentais. Sobre o procedimento bibliográfico, para Sousa, Oliveira e Alves (2021), é onde inicia-se a pesquisa científica, onde o pesquisador procura por materiais relevantes já publicados sobre o problema que deseja pesquisar, colaborando e permitindo uma melhor e mais ampla exploração do tema.

Sobre o procedimento documental, Severino (2013) aponta que se utilizam como fonte documentos em um sentido amplo, abrangendo não apenas materiais impressos, mas também outros tipos, como jornais, fotografias, filmes, gravações e documentos legais. Nesses casos, os conteúdos ainda não passaram por análise e permanecem como matéria-prima, que servirá de base para o pesquisador realizar sua investigação e apreciação.

Nesta ótica, o procedimento bibliográfico contribui com o entendimento do contexto e sua relevância, criando uma base teórica sólida, ancorando o estudo em conceitos e teorias já estudadas antes. Similarmente, o procedimento documental ajuda a reconstruir e entender práticas realizadas

[6] Gomes (2024) apresenta o quadrante e o sextante como instrumentos de reflexão semelhantes, com o intuito de encontrar altitudes a partir da dupla reflexão, sendo a sua diferença o tamanho do arco do instrumento, sendo o sextante com 60° e o quadrante, também chamado de Octante, com 45°.

[7] Segundo Santos e Pereira (2021), a escala de Gunter é uma escala utilizada em um instrumento de medição chamada *Cross-staf*, utilizado na prática da astronomia e navegação para encontrar altitudes e distâncias no céu.

[8] Segundo Alencar e Pereira (2022) o setor refere-se a um instrumento era um instrumento utilizado para grimensura (medição de terras), levantamentos topográficos, artilharia e para fins aritméticos (como divisão e multiplicação).

durante a navegação no século XIX e, com isso, também entender conhecimentos matemáticos necessários para navegar na época.

Para fazer a apreciação inicial do texto em estudo, separamos o documento[9] de acordo com os temas dos capítulos a partir de quatro categorias. São elas: conteúdos de natureza matemática, instrumentos náuticos, métodos para encontrar a longitude, tabelas de navegação e outros assuntos. Essa categorização foi organizada de acordo com o objetivo do trabalho que vem se desenvolvendo, do qual este artigo é derivado. Salientamos também que o estudo mais aprofundado dos capítulos será uma das fases seguintes da pesquisa.

Na primeira categoria, conteúdos de natureza matemática, pretende-se abordar quais os assuntos relacionados à matemática, apresentados no documento, que eram considerados importantes pelo autor para se saber antes de navegar. Na segunda categoria, instrumentos náuticos utilizados na navegação, almeja-se apontar quais os instrumentos o autor traz no decorrer do livro e sua utilidade na navegação, evidenciando conhecimentos de natureza matemática mobilizados no uso de tais recursos de navegação.

A terceira categoria, métodos para encontrar latitude e longitude, fala sobre os cálculos necessários a se fazer para encontrar a latitude e longitude durante a navegação. Na quarta categoria se enquadram as tabelas de seno e cosseno, de logaritmo, amplitudes, latitudes e longitudes. Estas tabelas vêm anexadas ao fim do livro. Por fim, na última categoria entram os capítulos do livro que não fizeram parte de nenhuma das categorias anteriores.

Dados os métodos utilizados na apreciação inicial dos documentos, seguem, na próxima seção, os resultados obtidos.

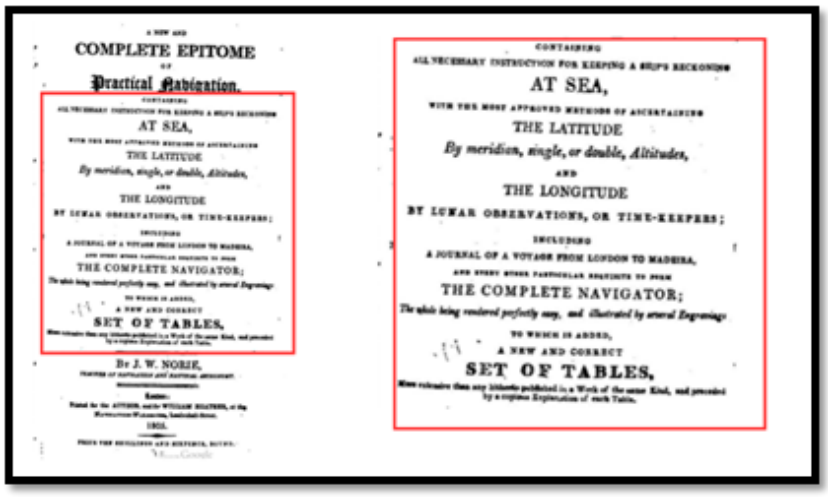
O DOCUMENTO *NEW AND COMPLETE EPITOME OF PRACTICAL NAVIGATION* (DE 1805)

Como posto nas seções anteriores, o documento selecionado para realizar uma apreciação inicial trata-se de um livro intitulado *New and Complete Epitome of Practical Navigation*, publicado por John William Norie (1772-1843) em 1805. Segundo o Dictionary of National Biography (1885-1900), Norie foi um escritor inglês de navegação, com uma vasta quantidade de trabalho voltados para como navegar. Publicados no formato de livros, tais documentos tratam de tabelas e até mesmo mapas. Além disso, Norie também foi professor de navegação e astronomia náutica.

Nos concentrando, mais especificamente, no livro *New and Complete Epitome of Practical Navigation*, ponderamos que consiste em um epítome, ou seja, um resumo ou modelo, neste caso particular, contendo subsídios úteis para se navegar na época. De fato, pela capa do livro, apresentada na Figura 1, é possível notar que há muitas informações acerca do conteúdo do documento.

[9] O documento é um livro que se encontra no formato digital, com livre acesso pela plataforma de livros digitais: https://www.google.com.br/books/edition/A_New_and_Complete_Epitome_of_Practical/I2xGAAAAYAAJ?hl=pt-BR&gbpv=0

Figura 1 – Capa inicial do livro *New and Complete Epitome of Practical Navigation* (de 1805)



Fonte: Adaptado de Norie (1805, s.p.)

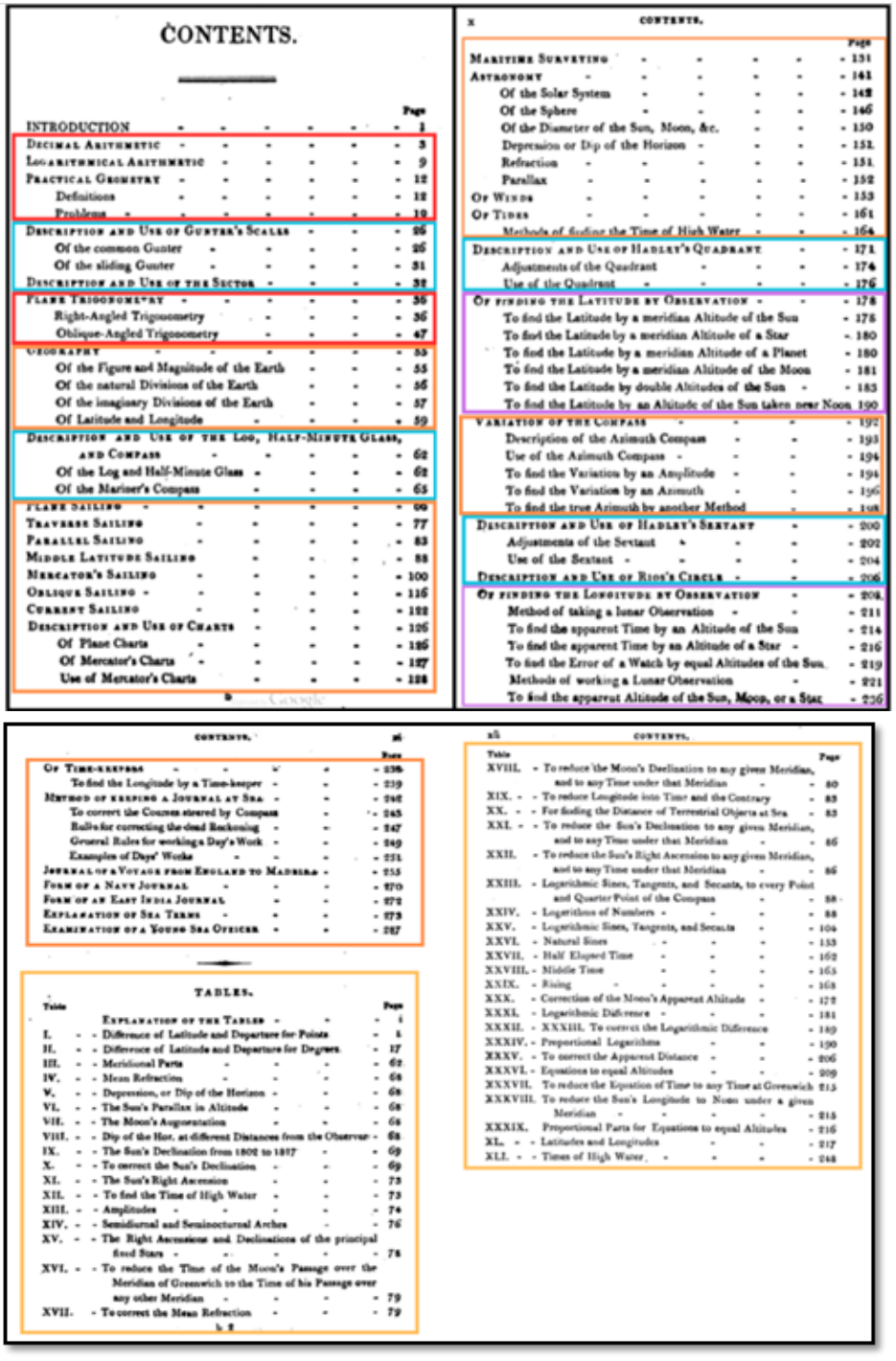
Na Figura 1, a capa inicial do livro, contém o título, como já dito anteriormente e uma breve descrição do que contém no documento. No destaque em vermelho, temos a seguinte tradução:

> contendo todas as instruções necessárias para manter a contagem de um navio no mar, com os métodos mais aprovados para determinar a latitude por meridiano, altitudes simples ou duplas, e a longitude por observações lunares ou cronometristas; incluindo um diário de uma viagem de Londres para a Madeira, e todos os outros requisitos específicos do navegador completo; o todo sendo tornado perfeitamente fácil, e ilustrado por várias gravuras às quais foi adicionado um novo e correto conjunto de tabelas, mais extenso do que qualquer outro publicado até então em uma obra do mesmo tipo, e precedido por uma explicação copiosa de cada tabela (Norie, 1805, s.p. – tradução feita por autores)

Na página inicial, já é possível perceber alguns dos conteúdos presentes no livro. Nela, o autor já indica que há as instruções para fazer os cálculos que determinam latitudes e longitudes, bem como uma experiência de viagem, tabelas e gravuras que auxiliam no entendimento.

O documento possui 631 páginas e está na versão em inglês britânico, visto a origem tanto do autor quanto da publicação. No sumário do livro, apresentado na Figura 2, é possível ver alguns dos temas abordados, apenas pelo nome dos capítulos.

Figura 2 – Sumário do *New and Complete Epitome of Practical Navigation* (de 1805)



CONTENTS.

	Page
INTRODUCTION	1
Decimal Arithmetic	3
Logarithmical Arithmetic	9
Practical Geometry	12
Definitions	12
Problems	19
Description and Use of Gunter's Scales	25
Of the common Gunter	25
Of the sliding Gunter	31
Description and Use of the Sector	32
Plane Trigonometry	35
Right-Angled Trigonometry	36
Oblique-Angled Trigonometry	47
Geography	53
Of the Figure and Magnitude of the Earth	55
Of the natural Divisions of the Earth	56
Of the imaginary Divisions of the Earth	57
Of Latitude and Longitude	59
Description and Use of the Log, Half-Minute Glass, and Compass	62
Of the Log and Half-Minute Glass	62
Of the Mariner's Compass	65
Plane Sailing	69
Traverse Sailing	77
Parallel Sailing	83
Middle Latitude Sailing	88
Mercator's Sailing	100
Oblique Sailing	116
Current Sailing	122
Description and Use of Charts	126
Of Plane Charts	126
Of Mercator's Charts	127
Use of Mercator's Charts	128

CONTENTS.

	Page
Maritime Surveying	131
Astronomy	141
Of the Solar System	142
Of the Sphere	146
Of the Diameter of the Sun, Moon, &c.	150
Depression or Dip of the Horizon	152
Refraction	151
Parallax	152
Of Winds	153
Of Tides	161
Methods of finding the Time of High Water	164
Description and Use of Hadley's Quadrant	171
Adjustments of the Quadrant	174
Use of the Quadrant	176
Of finding the Latitude by Observation	178
To find the Latitude by a meridian Altitude of the Sun	178
To find the Latitude by a meridian Altitude of a Star	180
To find the Latitude by a meridian Altitude of a Planet	180
To find the Latitude by a meridian Altitude of the Moon	181
To find the Latitude by double Altitudes of the Sun	183
To find the Latitude by an Altitude of the Sun taken near Noon	190
Variation of the Compass	192
Description of the Azimuth Compass	193
Use of the Azimuth Compass	194
To find the Variation by an Amplitude	194
To find the Variation by an Azimuth	196
To find the true Azimuth by another Method	198
Description and Use of Hadley's Sextant	200
Adjustments of the Sextant	202
Use of the Sextant	204
Description and Use of Rios's Circle	206
Of finding the Longitude by Observation	208
Method of taking a lunar Observation	211
To find the apparent Time by an Altitude of the Sun	214
To find the apparent Time by an Altitude of a Star	216
To find the Error of a Watch by equal Altitudes of the Sun	219
Methods of working a Lunar Observation	221
To find the apparent Altitude of the Sun, Moon, or a Star	226

CONTENTS.

	Page
Of Time-keepers	235
To find the Longitude by a Time-keeper	239
Method of keeping a Journal at Sea	242
To correct the Courses steered by Compass	245
Rules for correcting the dead Reckoning	247
General Rules for working a Day's Work	249
Examples of Days' Works	251
Journal of a Voyage from England to Madeira	255
Form of a Navy Journal	270
Form of an East India Journal	272
Explanation of Sea Terms	273
Examination of a Young Sea Officer	287

TABLES.

Table		Page
	Explanation of the Tables	1
I.	Difference of Latitude and Departure for Points	1
II.	Difference of Latitude and Departure for Degrees	17
III.	Meridional Parts	62
IV.	Mean Refraction	68
V.	Depression, or Dip of the Horizon	68
VI.	The Sun's Parallax in Altitude	68
VII.	The Moon's Augmentation	68
VIII.	Dip of the Hor. at different Distances from the Observer	68
IX.	The Sun's Declination from 1802 to 1817	69
X.	To correct the Sun's Declination	69
XI.	The Sun's Right Ascension	73
XII.	To find the Time of High Water	73
XIII.	Amplitudes	74
XIV.	Semidiurnal and Seminocturnal Arches	76
XV.	The Right Ascensions and Declinations of the principal fixed Stars	78
XVI.	To reduce the Time of the Moon's Passage over the Meridian of Greenwich to the Time of his Passage over any other Meridian	79
XVII.	To correct the Mean Refraction	79

CONTENTS.

Table		Page
XVIII.	To reduce the Moon's Declination to any given Meridian, and to any Time under that Meridian	80
XIX.	To reduce Longitude into Time and the Contrary	83
XX.	For finding the Distance of Terrestrial Objects at Sea	83
XXI.	To reduce the Sun's Declination to any given Meridian, and to any Time under that Meridian	85
XXII.	To reduce the Sun's Right Ascension to any given Meridian, and to any Time under that Meridian	86
XXIII.	Logarithmic Sines, Tangents, and Secants, to every Point and Quarter Point of the Compass	88
XXIV.	Logarithms of Numbers	88
XXV.	Logarithmic Sines, Tangents, and Secants	104
XXVI.	Natural Sines	153
XXVII.	Half Elapsed Time	162
XXVIII.	Middle Time	163
XXIX.	Rising	163
XXX.	Correction of the Moon's Apparent Altitude	172
XXXI.	Logarithmic Difference	181
XXXII.	XXXIII. To correct the Logarithmic Difference	189
XXXIV.	Proportional Logarithms	190
XXXV.	To correct the Apparent Distance	206
XXXVI.	Equations to equal Altitudes	209
XXXVII.	To reduce the Equation of Time to any Time at Greenwich	213
XXXVIII.	To reduce the Sun's Longitude to Noon under a given Meridian	215
XXXIX.	Proportional Parts for Equations to equal Altitudes	216
XL.	Latitudes and Longitudes	217
XLI.	Times of High Water	248

Fonte: Adaptado de Norie (1805, s.p.)

Como os capítulos não são enumerados, para um melhor entendimento durante a leitura do trabalho, separamos o sumário a partir das categorias: conteúdos de natureza matemática, instrumentos náuticos, métodos para encontrar a longitude e latitude, tabelas de navegação e outros assuntos. Tais categorias estão destacadas por cores diferentes.

Conforme mencionado, na Figura 2, temos o sumário do livro *New and Complete Epitome of Practical Navigation,* com os capítulos separados de acordo com as categorias citadas anteriormente,

destacados por cores diferentes. Na cor vermelha, são os capítulos que se enquadram na categoria de *conteúdos matemáticos*; na cor azul, são os que falam de *instrumentos náuticos*; na cor lilás, são os que abordam os *métodos para encontrar latitude e longitude*; em amarelo, as *tabelas de navegação*; e, em laranja, *outros assuntos* que também estão presentes no livro.

Nas subseções a seguir, traremos com mais detalhes o conteúdo de alguns dos capítulos apresentados, separando-os pelas categorias.

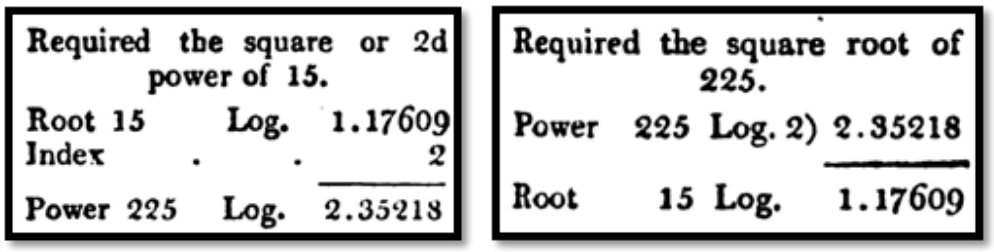
CONTEÚDOS DE NATUREZA MATEMÁTICA

Os capítulos que trazem os conhecimentos de natureza matemática, com definições e exemplos de como são realizadas as operações estão no início do livro. No total, são quatro capítulos que abordam conhecimentos de natureza matemática, de maneira mais evidente. Vale lembrar que não necessariamente os outros capítulos não tenham conhecimentos de natureza matemática em seu conteúdo, porém, vão sendo utilizados a partir da necessidade que a temática tem de trazer esses conhecimentos. Na verdade, entende-se que a escolha do autor de colocar estes capítulos como os primeiros é devido a necessidade da utilização desses conhecimentos em aplicações à navegação, vistas no decorrer da sequência do livro.

O primeiro capítulo traz os conteúdos da aritmética, mais especificamente: sistema de numeração decimal, frações decimais, frações vulgares[10], as quatro operações básicas, unidades de medida e regra de três. O autor detalha as regras utilizadas para realizar as operações e a regra de três, e, durante o capítulo, também explica como fazer uma razão, colocando em forma de fração algumas medidas, como polegadas, pés, xelim e graus, minutos e segundos.

No segundo capítulo, chamado de Aritmética Logarítmica, o autor apresenta como as multiplicações e divisões de logaritmos podem ser transformadas em somas e subtrações de logaritmos. Além disso, também traz o que ele chama de métodos de involução e evolução. A involução é quando, ao colocarmos um número elevado a qualquer outro, o seu logaritmo será a multiplicação do seu logaritmo com o número que foi elevado. Já a evolução seria o processo contrário, como apresentado na Figura 3.

Figura 3 – Exemplos de Involução e Evolução



Fonte: Norie (1805, p. 10 e 11)

Nos exemplos apresentados por Norie (1805), ele utiliza os mesmos valores para mostrar como funcionam as regras de involução e evolução. O primeiro caso, é a regra de involução. Considerando que log15 = 1,17609, o logaritmo do quadrado de 15, 225, é log225 = 2,35218, pois log225 = $\log 15^2$ = 2*log15 = 2*1,1769 = 2,35218. Ou seja, quando temos um número ao quadrado (funcio-

[10] Segundo Norie (1805, p. 3), frações vulgares são frações com denominadores diferentes dos decimais.

nando também para outros valores de potência). Já a regra de evolução, seria o processo contrário, sendo a segunda parte da Figura 3, onde o log225 = 2,35218 e, considerando que 225 é 15 ao quadrado, o log15 = 1,17609, pois 2,35218/2 = 1,17609.

O terceiro capítulo, intitulado Geometria Prática, aborda algumas definições da geometria euclidiana, como ponto, reta, curva, planos, circunferências e sólidos. No decorrer no capítulo, é possível identificar 43 definições de elementos geométricos, bem como alguns problemas de construção, envolvendo ângulos e partes proporcionais, a exemplo de: como dividir o ângulo em duas partes iguais ou a circunferência em partes iguais. Ao todo são 13 problemas apresentados.

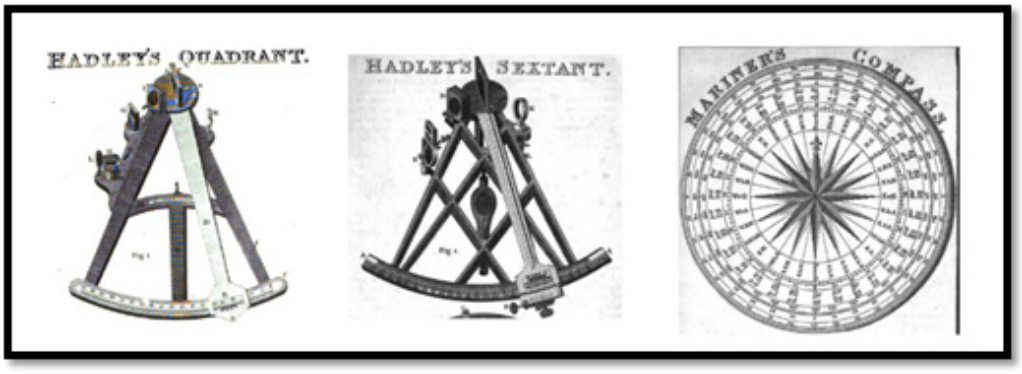
O quarto capítulo que aborda conteúdos matemáticos de maneira mais explícita, intitulado de Trigonometria Plana, trabalha com o triângulo retângulo, mais especificamente, sobre a semelhança e proporcionalidade entre triângulos retângulos, o triângulo inscrito na circunferência, como identificar o seno, cosseno e tangente de ângulos internos a um triângulo, construções de triângulos por meio do compasso, e entre outros. O autor também apresenta 4 exercícios para serem feitos pelo leitor, a partir do que foi visto no capítulo.

Posto acerca dos conhecimentos de natureza matemática, seguimos na próxima subseção sobre instrumentos náuticos.

Instrumentos náuticos

No livro *New and Complete Epitome of Practical Navigation*, Norie (1805) também trata de instrumentos náuticos que ele considera como auxiliadores na navegação. O autor faz a descrição e uso de cada um dos instrumentos. Dos instrumentos identificados, temos: A escala de Gunter, o Setor, Quadrante de Hadley, Sextante de Hadley, Círculo de Rios, Bússola Marítima e Bússola de Azimuth. Norie (1805) traz a imagem de alguns dos instrumentos citados, como mostra a Figura 4 a seguir.

Figura 4 – Instrumentos náuticos no livro *New and Complete Epitome of Practical Navigation* (1805)



Fonte: Norie (1805)

Na Figura 4, foram destacados os seguintes instrumentos, apresentados pelo autor: *Hadley's Quadrant* (O quadrante de Hadley), *Hadley's Sextant* (O sextante de Hadley) e o *Mariner's Compass* (A Bússola Marítima). Devido ao tipo de trabalho, iremos apresentar, rapidamente, nas definições do autor, apenas os instrumentos presentes na Figura 4.

Segundo Norie (1805), o quadrante de Hadley, que também é chamado pelo autor de Octante de Hadley, é um instrumento utilizado para calcular altitudes, tendo seus primeiros relatos, de produção e uso, publicados por John Hadley (1682-1744). O instrumento é de madeira firme, constituído de um arco, formado por um oitavo de um círculo (justificando o nome Octante). Porém, por ter dupla reflexão, o arco é dividido em 90 graus, tendo um indicador móvel, no vértice central do arco, que permite indicar a angulação tomada. Para mais detalhes, ver Gomes (2024).

O sextante de Hadley parte do mesmo princípio. Também é um instrumento de dupla reflexão que permite encontrar altitudes durante a navegação. Os únicos pontos que o diferenciam do quadrante, é que seu arco é um sexto de um círculo, contendo 60 graus e, por causa da dupla reflexão, o arco é dividido em 120 graus.

A Bússola Marítima, como descreve o Norie (1805), trata de um instrumento que faz uma representação artificial do horizonte de qualquer lugar. Ela é um cartão circular, dividida em 32 partes iguais por linhas que partem do centro da circunferência. Essas partes são marcadas com os pontos cardinais (Norte, Sul, Leste e Oeste). Além disso, no centro, é fixada uma agulha que, quando tocada por um imã, aponta para o Norte e Sul. Como fica apoiada no centro do cartão circular que tem os pontos cardinais marcados, é possível definir, também, outras direções.

Como apresentado anteriormente, o autor também apresenta alguns outros instrumentos, porém, vamos nos restringir apenas aos citados anteriormente, dadas as limitações do trabalho. E, como sequência, seguimos para a terceira subseção, Métodos para encontrar a latitude e longitude.

Métodos para encontrar a latitude e longitude

Inicialmente, é importante ressaltar que para chegar nos capítulos sobre como encontrar latitude e longitude, Norie (1805) define o que são em capítulos anteriores, mais especificamente, como uma subseção do capítulo sobre geografia. Norie (1805) determina latitude como sendo uma distância do equador, medida pelo arco de um meridiano que está entre o equador e um lugar no hemisfério norte ou sul. Já a longitude, seria um lugar no arco do equador, medido entre o primeiro meridiano e este meridiano, que passa pelo lugar dado.

Para detalhar os métodos para encontrar latitude e longitude, Norie (1805) divide em capítulos, sendo um capítulo para Latitude e outro para Longitude. O capítulo que detalha sobre como encontrar a latitude por observação é dividido em seis subseções, onde cada uma traz uma forma diferente de medir a latitude. Das apresentadas pelo autor, temos como encontrar por: altitude do sol, altitude de uma estrela, altitude de um planeta, altitude da lua, dobro da altitude do sol e a altitude do sol perto de meio dia.

Já o capítulo que traz as formas de encontrar longitude, também é dividido em seis subseções. Nestas subseções, o autor aborda formas de encontrar e trabalhar com observações lunares, como saber o tempo aparente[11] pela altitude do sol, estrela, lua, além de como encontrar os erros a partir das observações com o sol.

Os métodos mostrados pelo autor para encontrar latitude e longitude passam por diversos processos que não serão detalhados aqui devido a necessidade de muitos detalhes, porém, mostram

[11] Tempo aparente é a hora medida pela angulação do sol.

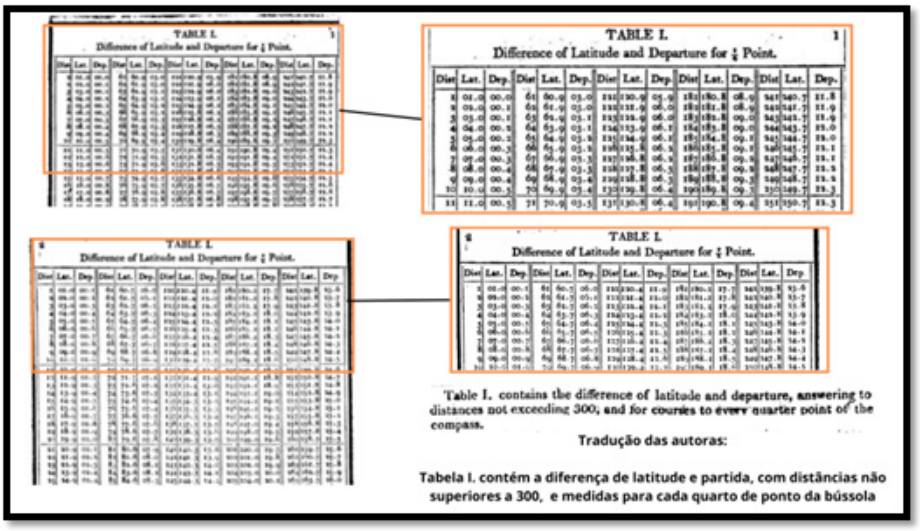
potencial de serem explorados futuramente, especialmente pela utilização dos conceitos matemáticos envolvidos. Seguimos agora para a subseção sobre as tabelas de navegação.

TABELAS DE NAVEGAÇÃO

No decorrer documento, é possível perceber que Norie (1805) faz o uso de cálculos trigonométricos, uso de seno, cosseno e tangente, além de informações acerca da latitude e longitude, como nos capítulos sobre trigonometria plana, como encontrar latitude e longitude, no uso dos instrumentos náuticos. Por isso, ao fim do documento, Norie (1805) anexa 49 tabelas que servem de orientação para navegar.

Antes dos anexos, o autor apresenta uma rápida explicação sobre o que é a tabela e qual a sua finalidade, como podemos ver na Figura 5, da primeira tabela apresentada.

Figura 5 – Tabela com a explicação do autor



Fonte: Adaptado de Norie (1805)

A Figura 5 destaca alguns pontos e comentário do autor sobre a Tabela I. A mesma é composta de 16 páginas, onde cada página refere-se a diferente de latitude e partida para cada ponto. A primeira inicia para ¼ pontos e vai aumentando ¼ a cada ponto, sendo as seguintes com ½, ¾, 1, 1 ¼, 1 1/3, 1 ¾, 2, 2 ¼, 2 ½, 2 ¾, 3, 3 ¼, 3 ½, 3 ¾ e 4 pontos.

Cada tabela é dividida em cinco colunas e, essas, são subdivididas em mais 3 colunas, contendo uma coluna para distância, outra para a latitude medida e para a partida. Quando maior é a distância, maior é a latitude, com a partida variando 0,01 a cada seis linhas.

Para finalizar, partimos agora para a última categoria, de outros assuntos.

Outros assuntos

Os capítulos que são voltados para outros assuntos, buscamos não detalhar da mesma maneira dos outros, visto que o documento é bastante denso e em apenas um artigo, não seria possível tratar de todos eles, em suas particularidades. Assim, nos restringiremos apenas a comentar a presença dos capítulos do livro, de modo a mostrar que ainda há mais coisas neles que podem ser exploradas.

Assim, o documento, além dos conteúdos apresentados anteriormente, também é composto de capítulos que abordam sobre os diferentes tipos de navegação, sendo de curtas, médias e longas distâncias; conhecimentos da área da geografia, como definições de latitude e longitude e as orientações de linhas imaginárias para utilizar durante a viagem; astronomia, com informações sobre refração, sistema solar, diâmetro do sol e da lua; formas de manter um diário no mar, para fins de orientação; e alguns termos utilizados na navegação.

É importante relembrar que esses assuntos entraram na categoria de *outros assuntos*, sobretudo pois não tratam de assuntos das categorias anteriores de forma direta, ressaltando que a pretensão era evidenciar alguns dos conhecimentos de natureza matemática, a partir de um estudo preliminar do documento. Logo, foram necessárias fazer escolhas de quais capítulos focar neste artigo. Tendo em vista o exposto até aqui, seguimos agora para as considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo é um desdobramento de uma pesquisa de doutorado em andamento, pautada na aliança entre História da Matemática (HM) e Tecnologias Digitais (TD), na perspectiva da Teoria da Objetivação (TO). Espera-se que os resultados encontrados até agora propiciem encaminhamentos para desdobramentos futuros da pesquisa citada, por exemplo fazendo uso do conteúdo deste documento para desenvolvimento e análise de proposta educacional pautada na aliança supracitada entre HM, TD e TO a partir do documento *New and Complete Epitome of Practical Navigation*.

O documento apresentado no decorrer deste artigo trata-se de um resumo, contendo informações necessárias para navegar, na época e contexto em que foi publicado. Nele, Norie (1805) apresenta a descrição e formas de usar instrumentos náuticos que possam auxiliar durante a navegação, bem como, formas de realizar os cálculos e informações de natureza não só matemática, mas também física e geográfica que são acionadas na navegação.

A partir deste estudo inicial, foi possível perceber que o documento em estudo tem muitos conhecimentos de natureza matemática. Esses conhecimentos foram identificados nos capítulos que são destinados a apresentá-los, como o de geometria prática, trigonometria plana, aritmética decimal e aritmética logarítmica. Porém, além disso, esses conhecimentos também são identificados em outros capítulos, mas incorporados ao conteúdo dele, como nas tabelas de navegação, no uso dos instrumentos marítimos, nos cálculos de navegação, entre outros.

Dessa forma, identifica-se muito potencial para, além do estudo histórico-matemático, ser pensado também, uma atividade didática, que envolva o conteúdo do documento e o contexto em que ele foi desenvolvido. Vale relembrar que os resultados apresentados neste artigo ainda estão na fase inicial de estudos, sendo, futuramente, realizado um estudo com mais detalhes sobre o conteúdo do mesmo.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, L. B. de .; PEREIRA, A. C. C. Estudos iniciais sobre o setor de Thomas Hood (1556-1620) . **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 9, n. 26, p. 345–358, 2022. DOI: 10.30938/bocehm.v9i26.8054. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/8054. Acesso em: 10 jan. 2025.

DICTIONARY of National Biography. Norie, John William. Volume 41. 1885-1900 Disponível em: https://en.wikisource.org/wiki/Page%3ADictionary_of_National_Biography_volume_41.djvu/117 . Acesso em: 12 de dez. 2024.

GOMES, Anna Beatriz de Andrade. **Aliança entre história da matemática e tecnologias digitais via octante reflexivo dos irmãos Hadley para o ensino de geometria na formação de professores**. Orientadora: Dra. Giselle Costa de Sousa. 2024. 182f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)–Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2024.

GONÇALO, Waldson Félix. **Da Fábrica ao Jornal: a imprensa operária e o Movimento Cartista na Revolução Industrial**. Orientador: Jucélio Régis da Costa. 2024. 18 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em História)–Departamento de História, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2024.

MICHAELIS. Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, [s.d.]. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br. Acesso em: 10 jan. 2025.

NORIE, John William. **New and complete epitome of pratical navigation**. Londres: produzido pelo autor. 1852.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

SANTOS, João Narciso Oliveira. **Os impactos da Revolução Industrial na Inglaterra do século XIX (1760-1840)**. São Cristóvão, 2023. Monografia (licenciatura em História) – Departamento de História, Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2023.

SANTOS, A. G. dos; PEREIRA, A. C. C. Uma descrição das escalas do Cross-Staff (1623) de Edmund Gunter. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 8, n. 23, p. 707–720, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v8i23.4922. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4922. Acesso em: 10 jan. 2025.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo : Cortez, 2013.

SOUSA, Angélica Silva; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; ALVES, Laís Hilário. A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos. **Cadernos de Pesquisa**, v. 12, n. 3, p. 45-60, 2021. Disponível em: https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2336/1441. Acesso em: 10 jan. 2025.

SOUSA, Giselle Costa de. Aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais na Perspectiva da Teoria da Objetivação: um levantamento bibliográfico. **PARADIGMA**, 45(2), 2024. Disponível em: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024010.id1583. Acesso em: 10 jan. 2025.

TAQUETTE, Stella R.; BORGES, Luciana. **Pesquisa qualitativa para todos**. Petrópolis: Editora vozes, 2021.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior–Brasil (CAPES)–Código de Financiamento 001.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Os Números Complexos em Instituições de Ensino Superior do Paraná

Complex Numbers in Higher Education Institutions of Paraná

Kelly Roberta Mazzutti Lübeck[1]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

RESUMO

Noções de número marcam presença na história de diferentes culturas, épocas e locais, algumas evoluindo para os atuais sistemas de numeração, em que se destacam os números reais. Uma concepção que ajudou a elucidar este conceito, e a desvinculá-lo das ideias atreladas unicamente a quantidade, foi o conjunto dos números complexos. Presente na matemática desde os meados do século XVI, documentos apontam que os imaginários estão sendo excluídos do currículo das escolas no Ensino Médio. Assim, neste trabalho mostramos nuances de como os complexos são abordados em cinco Instituições de Ensino Superior do estado do Paraná buscando compreender como este conjunto é introduzido aos futuros professores, responsáveis pelo posterior ensino da matemática no Ensino Médio, a fim de apresentarmos considerações vinculadas ao uso da história da matemática que reforcem a importância e necessidade da permanência deste assunto na formação do licenciando em matemática. A pesquisa mostrou que todos os cursos das instituições investigadas discutem o assunto em suas grades curriculares, no geral, como parte integrante de disciplinas mais amplas, sendo que os documentos apontam que as matérias não fazem referência ao uso de fatos históricos para o desenvolvimento do conteúdo de números complexos ou incentivam o estudo de aplicações que utilizam este conteúdo, fazendo-se necessário repensar maneiras de ensinar frente aos entraves epistemológicos advindos da teoria e, neste contexto, reforçamos a importância da história da matemática como promotora desses entendimentos.

Palavras-chave: Ensino; História da Matemática; Matemática.

ABSTRACT

Notions of number mark present in the history of different cultures, times and places, some evolving into the current numbering systems, in which real numbers stand out. One definition that helped to elucidate this concept, and to separate it from ideas linked solely to quantity, was of the set of complex numbers. Present in mathematics since the mid-16th century, documents indicate that imaginary numbers are being excluded from the curriculum of high school students. Thus, in this work we show nuances of how complex numbers are approached in five Higher Education Institutions in the state of Paraná, seeking to understand how this set is introduced to future teachers, responsible for later teaching mathematics in high school, in order to present considerations linked to the use of the history of mathematics that reinforce the importance and need for this subject to remain in the education of undergraduate mathematics students. The research showed that all courses at the institutions investigated discuss the subject in their curricula, in general, as an integral part of broader disciplines, and the documents indicate that the subjects do not refer to the use of historical facts for the development of complex numbers content or encourage the study of applications that use this content, making it necessary to rethink ways of teaching in the face of epistemological obstacles arising from theory and, in this context, we reinforce the importance of the history of mathematics as a promoter of these understandings.

Keywords: Teaching; History of Mathematics; Mathematics.

INTRODUÇÃO

O conceito de número surgiu desde os primórdios da civilização, juntamente com a necessidade de registro para diferentes necessidades humanas. Povos de diversas localidades desenvolveram seus sistemas de registros, baseados em suas observações, suas crenças, seus costumes e, segundo Ifrah (2005, p. 11), em relação a este conceito, "[...] é também uma história completamente anônima, apesar da importância das invenções. Feito por e para as coletividades, ela não concedeu certificados". Ademais,

[1] Doutorado pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Foz do Iguaçu, Brasil. E-mail: kelly.lubeck@unioeste.br.

> A arte da numeração ou da contagem, em seus primórdios, prescindiu a qualquer sistematização. Como as coleções pertinentes a vida dos povos eram pequenas, não havia necessidade de uma arte de contar desenvolvida, pois ela não ia além da enunciação de um pequeno número de palavras ou de assinalar os equivalentes símbolos. Todavia, a contagem não se restringia apenas às coleções domésticas, visto que os grupamentos de dias em luas e os cálculos de dias do ano retomam ao início das civilizações (Mendes, 2006, p. 2).

Assim, o que se iniciou com simples contagens e associações bijetivas entre objetos e/ou objetos e palavras, com o passar dos anos evoluiu para códigos mais complexos e, com as trocas de informações e conhecimentos, aprimorou-se em sistemas numéricos eficientes e abrangentes. Hoje, o sistema de numeração indo-arábico está mundialmente difundido e, quando pensamos em numeração, é o conjunto dos números reais, com suas respectivas operações de soma e produto, que nos vem à mente. Ainda, "[...] nosso atual sistema de numeração não só possibilita uma maneira simples e concisa de registrar números. O mais importante é que a própria notação ajuda imensamente a execução de cálculos" (Gundlach, 1992, p. 31).

Entretanto, quando falamos em número, este conceito extrapola suas relações quantitativas e um exemplo tácito disto diz respeito aos números complexos, assunto que possui uma das mais ricas histórias registradas, tanto do conteúdo de matemática quanto dos personagens envolvidos nas descobertas. O conjunto dos números complexos, juntamente com suas operações de soma e produto, denotado por $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, representa um produto da engenhosidade humana que, infelizmente, está sendo abandonado dos currículos do Ensino Médio (EM). De fato, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) excluiu este conteúdo de seu texto, intercorrendo dúvidas sobre sua permanência no EM e implicando em questionamentos inclusive sobre a importância em se discutir esse assunto, frente a tantas outras necessidades, junto aos cursos de Licenciatura em Matemática.

Assim, neste trabalho pretendemos apresentar como os números complexos estão sendo trabalhados em cinco cursos de Licenciatura em Matemática do estado do Paraná como forma de trazer à luz o atual quadro do Ensino Superior com relação aos complexos, no intuito de apresentar discussões, vinculadas ao uso da história da matemática, que reforcem a importância e necessidade da permanência deste assunto na formação do licenciando em matemática.

METODOLOGIA

A pesquisa se deu em duas etapas. A primeira de caráter bibliográfico e histórico, ou seja, levantamento de informações históricas sobre todo o desenrolar dos números complexos, de sua descoberta, com Rafael Bombelli (1526-1572) até a formalização final dos conceitos, caracterizada pelos trabalhos da apresentação vetorial de William Hamilton (1805-1865) e, também, da formalização de Augustin Cauchy (1789-1857). Obviamente, durante os mais de 300 (trezentos) anos de desenvolvimento, muitos outros matemáticos contribuíram para elucidar diversas questões a respeito dos números imaginários. Esses dados podem ser revisitados nas obras de Garbi (2007), Katz (2010) e Eves (2011).

A segunda etapa se destinou a escolha das cinco Instituições de Ensino Superior (IES) pesquisadas e posterior análise do objeto investigado: "números complexos" nos documentos que norteiam os seus cursos de Licenciatura em Matemática. Como critério de seleção, tomamos as IES públicas mais antigas do estado do Paraná. Assim, selecionamos: Universidade Federal do Paraná (UFPR) fundada em 1912, Universidade Estadual de Maringá (UEM) e Universidade Estadual de Ponta

Grossa (UEPG) fundadas em 1969, Universidade Estadual de Londrina (UEL) fundada em 1970 e Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste) fundada em 1987, com o curso de Matemática de Cascavel, pois a Unioeste possui duas licenciaturas em Matemática, sendo uma no campus de Foz do Iguaçu e a mais antiga no campus sede de Cascavel.

Para a investigação, além dos Projetos Pedagógicos de Cursos (PPC) apanhados nos sites destas IES, também obtivemos os planos de ensino dos últimos dois anos das disciplinas que contemplam os números complexos em suas ementas. Os planos foram logrados através de contato (via *e-mail*) junto as secretarias dos cursos. Após a realização da leitura destes documentos, buscou-se estabelecer as devidas interpretações, lembrando que a leitura interpretativa procura conferir significado mais amplo aos resultados obtidos, buscando relacionar as afirmações do autor com os problemas para os quais busca por solução (Gil, 2008; Marconi e Lakatos, 2003).

REFERENCIAL TEÓRICO

Os números complexos não surgiram da impossibilidade de extração de raízes quadráticas negativas, associadas a resolução de equações de grau dois, como alguns pensam e disseminam, mas de um problema de raiz de uma equação cúbica estudado por Bombelli, a saber: $x^3 = 15x + 4$. Ele conhecia a raiz $x = 4$ e, ao aplicar os coeficientes desta equação na já conhecida fórmula de Cardano[2], fórmula publicada no *Ars Magna,* em 1545, de Girolamo Cardano (1501-1576), ele se deparou com o resultado $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. A partir disto, elaborou regras para manipular este novo número (Garbi, 2007; Katz, 2010; Eves, 2011).

Assim, foi a necessidade de se validar um procedimento algébrico que impulsionou o estabelecimento de regras operacionais para estes novos entes numéricos. Ainda, "[...] quando do surgimento dos números complexos eles eram tidos apenas como formas algébricas, incapazes de representar alguma forma real e efetiva, e que serviam apenas para representar algoritmos de cálculo" (Rosa, 1998, p. 34), ou seja, até podia-se operar com eles, mas não admitiam os negativos e imaginários como números.

> A resolução de equações trouxe à tona o problema dos números negativos e de suas raízes que, apesar de surgirem no cálculo das soluções das equações, não possuíam um estatuto definitivo. Nas civilizações mais antigas (babilônicos, egípcios, chineses, gregos, hindus etc.), não se usavam números negativos no sentido próprio. [...] No século XV, Nicolas Chuquet representava o número negativo–a como 0–a, o que mostra que o sinal "-" ainda não era um atributo do número, mas sim a indicação de uma operação (Roque, Carvalho, 2012, p. 213).

Essa característica perdurou até que um entendimento mais profundo do significado de número estivesse compreendido/definido para a comunidade matemática, visto que no século XVIII os valores negativos ainda não eram aceitos por todos. Em relação a admitir quantidades negativas como solução de equações, Jean le Rond d' Alembert (1717-1783) "[...] criticou radicalmente a aceitação dos números negativos, atitude que, conforme seu pensamento, partia de uma falsa metafísica" (Roque, 2012, p. 439).

[2] Apesar de ser conhecida por seu nome, devido a publicação deste resultado em sua obra *"Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis",* conhecida como *Ars Magna*, Cardano não estabeleceu esta fórmula, cabendo a matemáticos como Nicolo Fontana (Tartáglia) (1499-1557) e Scipione Del Ferro (1465-1526) realizarem tal descoberta.

O que está por trás do trato algébrico destes entes é o chamado "princípio da permanência", ou seja, garantir a validade das regras e propriedades aritméticas usuais para esta extensão numérica. De fato,

> a questão do estatuto e da forma das quantidades irracionais e imaginárias não era uma preocupação central dos matemáticos no século XVIII. O que marcava a época era a ideologia de que as regras gerais que serviam para operar com os reais deviam ser aplicadas também aos imaginários (Roque, 2012, p. 441).

Do princípio da permanência segue as regras operacionais definidas para os números complexos, bem como a tentativa de se manter a definição do caso real para as extensões de algumas funções, como no caso de potências, raízes n-ésimas, exponencial, logaritmo etc. A busca pelas melhores definições conduziu a diversas discussões e, a insistência em se respeitar o princípio de permanência levou a equívocos, mesmo para Leonhard Euler (1707-1783) um dos matemáticos que contribuiu de forma assertiva para várias questões sobre os complexos, mas que erroneamente afirmou que: $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{4} = 2$ (Roque e Carvalho, 2012). Esta questão mostra a sutileza que esta teoria pode impor aos conteúdos (no caso a validade de propriedades, que nos reais já estavam consolidadas) e que podem se reverter em empecilhos epistemológicos para a aprendizagem deste conhecimento.

Explorar estas questões históricas ajuda os acadêmicos a compreenderem seus próprios erros e a valorizarem seu processo de aprendizagem, pois reconhecem que, assim como outros personagens ilustres, todos cometem equívocos. Além disso, Beatriz S. D'Ambrosio (2007) indica outros motivos para envolvermos os futuros professores no estudo da história da matemática, sendo que:

> o estudo de história ajuda os futuros professores a entenderem o seguinte: a evolução da matemática como processo sócio cultural de construção humana; o processo construtivista como a ação humana que leva à aprendizagem; a semelhança entre o processo histórico e a aprendizagem das crianças; a álgebra como processo geométrico e a importância da geometria na fundamentação matemática; os problemas motivadores para a construção da matemática e como tais problemas levaram ao desenvolvimento de diferentes áreas da matemática; a compreensão de soluções alternativas para problemas que são triviais quando se utiliza a matemática moderna; e a evolução do rigor lógico e de provas matemáticas (D'Ambrosio, 2007, p. 400).

Destacamos aqui a referência aos problemas motivadores para a construção da matemática e as implicações para outras áreas, pois aos imaginários, tem-se o registro das questões que promoveram o seu desenvolvimento. Esta teoria se mostrou promissora na elucidação de diversos problemas, como apontam Ripoll, Ripoll e Silveira (2011, p. 375):

> [...] a importância dos números complexos, como consequência quase que automática do valor matemático intrínseco destes números, também se consolidou "fora" da Matemática. Hoje, os mais diversos campos da Ciência e da Tecnologia fazem deles um uso muito frutífero: na análise dos sistemas dinâmicos contínuos, no controle e estabilidade dos mais diversos sistemas de engenharia, no projeto de circuitos e motores de corrente alternada, na análise e síntese de sinais físicos e biológicos etc.

Algumas aplicações são discutidas de forma simplificada nos trabalhos Caon (2013) e Chagas (2013) e podem servir como uma primeira orientação para aqueles que queiram ampliar os conhecimentos com relação a utilidade deste sistema numérico.

Terêncio Neto (2021), ao analisar livros didáticos para o EM, aponta que a própria nomenclatura impute aos estudantes números especificamente complicados ou que por serem imaginários não necessitam ser estudados. Coloca, ainda, que a estruturação do conjunto $\mathbb{C}$ cria a falsa impressão que este conjunto serve para resolver o problema das raízes quadráticas negativas, o que não se verifica. Estes são empecilhos para a aprendizagem do conteúdo.

Ainda, com relação a exposição do conteúdo, Santos (2013, p. 80) afirma que:

> [...] dentre os mais diversos conteúdos de matemática, os números complexos apresentam, nos livros didáticos, uma abordagem tradicional que enfatiza uma exposição do conteúdo seguida de exercícios que, muitas das vezes, tem por objetivo apenas "treinar" o que foi aprendido: aspecto esse que se apresenta como um fator desestimulante à maioria dos alunos, pois não vem associado a uma contextualização ou aplicação prática que o torne mais atrativo.

Essa constatação pode muito bem ser aplicada à realidade dos cursos de licenciatura em que, pela experiência do autor, muitos dos acadêmicos chegam sem nunca terem tido contato com este conjunto numérico no ensino básico e o modo como apresentamos e discutimos este conhecimento pode interferir positiva ou negativamente na sua formação. Ademais, corroborando com essa percepção, encontra-se o trabalho de Pühl, Lima e Müller (2021) que expõem diversas pesquisas que confirmam o fato de que os números complexos já costumavam ser abdicados em muitas escolas, principalmente do ensino público.

Além disso, a BNCC não apresenta nenhuma referência aos números complexos em seu texto, o que leva a um consequente desinteresse em se manter este conteúdo nos currículos escolares. Nem mesmo a matriz de referência para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) indica qualquer alusão aos imaginários. Este documento, para a área de matemática e suas tecnologias, coloca como um de seus objetivos: "Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações–naturais, inteiros, racionais ou reais" (INEP – Matriz de Referência, 2024, p. 5), caracterizando número no contexto real, sem adentrar no mérito dos complexos, o que acaba refletindo na opção de mantê-los ou não nas grades curriculares das escolas públicas e particulares, já que muitas delas focam seus estudos para realização das provas do ENEM e dos vestibulares.

Com relação aos vestibulares das cinco IES analisadas, averiguamos se os números complexos (ou imaginários) estavam inseridos em suas provas. Verificamos as provas vestibulares, obtidas junto as páginas das instituições, do período de 2015 a 2023, encontrando questões sobre o assunto nos seguintes vestibulares: UFPR (2017/18, 2021/22), UEM vestibular de inverno (2016, 2017, 2018, 2023), UEM vestibular de verão (2015, 2016, 2018, 2019, 2021, 2022, 2023), UEPG vestibular de inverno (2015, 2018, 2023), UEPG vestibular de verão (não consta), UEL (2015), Unioeste (2015, 2017, 2020), conforme descrição da Tabela 1.

Tabela 1 – Indicação da presença do conteúdo números complexos nos vestibulares das IES.

IES/Ano	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
UFPR				X				X	
UEM/ inverno		X	X	X					X
UEM/ verão	X	X		X	X		X	X	X
UEPG/ inverno	X			X					X
UEPG/ verão									
UEL	X								
Unioeste	X		X			X			

Fonte: Elaborada pela autora.

Apesar destes indicativos, uma pesquisa realizada por Chagas (2013) com 151 (cento e cinquenta e um) professores de matemática atuantes no Ensino Médio aduziu que 48% deles achavam o conteúdo relevante, 20% indispensável, 3% acharam irrelevante e 29% pouco relevante, apontando que consideram

> [...] o ensino de números complexos no Ensino Médio é relevante por sua importância histórica no desenvolvimento da Matemática, pelas várias conexões possíveis de serem estabelecidas com outros tópicos da Matemática estudados nesse nível de escolaridade e por suas diversas aplicações (Chagas, 2013, p. 72).

Outro fato mencionado no trabalho de Chagas (2013, p. 84) é que

> [...] a pesquisa com professores mostrou que além do livro didático, outro fator que influencia a opinião dos mesmos sobre o ensino de números complexos no Ensino Médio é a forma como eles estudaram esse assunto na graduação. Em certo sentido, podemos dizer que o professor repete para os alunos o que ouviu e viu na graduação. Ou ainda, que por não ter visto e ouvido, não fala nem mostra aos seus alunos. Isto se revelou especialmente verdadeiro no que diz respeito a história e aplicações dos números complexos.

Isso reforça a importância das conexões e estudos desenvolvidos durante a primeira formação para a vida profissional do professor. Assim, esclarecer os motivos históricos da constituição dos complexos, sua importância teórica com as implicações do Teorema Fundamental da Álgebra e suas utilidades práticas, fazem com que o futuro professor reconheça seu valor instrucional e, na medida que lhe cabe, incorpore o assunto em suas aulas.

Assim, compete investigarmos como os números complexos estão sendo trabalhados nos cursos de Licenciatura em Matemática para discutirmos possibilidades de encaminhamentos alicerçadas neste caminhar histórico do conteúdo.

ANÁLISES E RESULTADOS

A análise dos PPC das IES serviu para, num aspecto mais amplo, indicar quais as disciplinas continham números complexos em suas ementas. Assim, identificamos que todos os cursos de Matemática possuem o tópico em seu currículo em ao menos uma disciplina. A posterior análise dos planos de ensino, encaminhados pelas secretarias dos cursos, nos possibilitou uma visão mais detalhada do tipo de oferta do conteúdo.

O Quadro 1 indica as disciplinas, bem como a descrição das ementas, do conteúdo programático referente especificamente ao assunto de números complexos e o objetivo geral. Os dados foram compilados dos planos de ensino, logo constam as indicações gerais dos dois documentos examinados.

Quadro 1 – Detalhamento das disciplinas ofertadas pelos cursos.

Disciplina	Ementa/Conteúdo Programático/Objetivo
Universidade Federal do Paraná – UFPR	
Funções (CMM012), 1° ano, 90 horas.	Ementa: Números reais e operações. Funções entre conjuntos. Gráficos de funções. Equações e inequações envolvendo funções. Funções: polinomiais, módulo, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Funções compostas e inversas. Transformações de gráficos. **Números complexos**.
	Conteúdo Programático: Propriedades de **números complexos**. Plano **complexo**. Fórmula de Euler. Teorema Fundamental da Álgebra.
	Objetivo: Familiarizar o aluno com o conceito de função em uma variável real e suas ferramentas. O aluno deverá ter a capacidade de entender e utilizar conceitos sobre números reais e funções fundamentais para o estudo da matemática do ensino superior.
Fundamentos da Matemática Elementar 2 (CMM021), 1° ano, 90 horas.	Ementa: Noções básicas de Geometria do triângulo; trigonometria; **números complexos**; polinômios e equações polinomiais; análise Combinatória; Binômio de Newton.
	Conteúdo Programático: Forma algébrica dos **números complexos** e sua representação geométrica. Conjugado e módulo. Operações com **números complexos** e suas propriedades. Forma polar e operações com os **complexos** na forma polar. Potenciação e radiciação.
	Objetivo: Desenvolver um estudo aprofundado de **números complexos** e a capacidade de dedução, via raciocínio lógico e organizado, para solução de problemas contagem. Compreender fundamentos, aplicações e procedimentos relacionados a matrizes e à Análise Combinatória e **Números Complexo**s.
Educação Algébrica 2 (CMM055), 5º ano, 105 horas (60 horas padrão e 45 estágio).	Ementa: Ensino de Números, Álgebra e Funções no Ensino Médio: pesquisas acadêmicas, livros didáticos, propostas curriculares e articulação com a matemática no ensino superior. Números reais e **complexos**, funções, polinômios e equações no Ensino Médio. Tecnologias Educacionais e tendências metodológicas da Educação Matemática no ensino de Números, Álgebra e Funções no Ensino Médio: análise, uso e elaboração de materiais e sequências didáticas.
	Conteúdo Programático: Números Reais e **Complexos** no Ensino Médio. Funções, polinômios e equações no Ensino Médio.
	Objetivo: Conhecer diferentes abordagens da educação algébrica para o Ensino Médio.
Universidade Estadual de Maringá – UEM	
Álgebra e Geometria no Plano, 1º ano, 102 horas.	Ementa: Trigonometria, matrizes e sistemas lineares até ordem 3, vetores e Geometria Analítica no plano e **números complexos**.
	Conteúdo Programático: Coordenadas Polares. Definição, operações e propriedades dos **números complexos**. Representação dos **números complexos** no plano e forma polar de um **número complexo**. Propriedades geométricas das operações de **números complexo**s. Raízes n-ésimas da unidade.
	Objetivo: Possibilitar ao aluno a compreensão de entes geométricos no plano através do estudo de equações associadas aos mesmos. Dar ao acadêmico a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento de outras disciplinas. Possibilitar ao aluno desenvolver habilidades para o formalismo matemático.

Variáveis Complexas, 4º ano, 102 horas	Ementa: **Números complexos**. Funções **complexas**. Topologia no plano **complexo**. Funções analíticas. Integração complexa e o Teorema de Cauchy. Séries de Taylor e séries de Laurent. Singularidades isoladas de funções analíticas. Transformações conformes.
	Conteúdo Programático: **Números complexos**, funções, topologia, funções analítica, integração complexa, séries, singularidades isoladas de funções analíticas, transformações conformes.
	Objetivo: Desenvolver a compreensão algébrica com os **números complexos**. Aprofundar o conhecimento adquirido no cálculo diferencial e integral no contexto das funções complexas. Aplicar os conceitos de integração complexa no cálculo de integrais reais impróprias. Trabalhar com as transformações de subconjuntos do plano por meio de funções analíticas.
Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG	
Matemática Elementar, 1° ano, 68 horas	Ementa: Conjuntos numéricos. Operações e intervalos. Expressões algébricas. Produtos Notáveis. Fatoração. Potenciação e Radiciação. Resolução de equações e inequações polinomiais, exponenciais e com radicais. Módulo: definição, propriedades, equações e inequações modulares. Logaritmos: definição, propriedades, equações e inequações logarítmicas. **Números complexos:** operações, propriedades, representação geométrica, conjugados complexos, forma polar e raízes complexas. Polinômios: igualdade, operações, divisibilidade. Equações algébricas: teorema fundamental da álgebra, raízes e relações entre coeficientes e raízes.
	Conteúdo Programático: **Números complexos**: operações, propriedades, representação geométrica, conjugados complexos, forma polar e raízes complexas. Polinômios: igualdade, operações, divisibilidade. Equações algébricas: teorema fundamental da álgebra, raízes e relações entre coeficientes e raízes.
	Objetivo: Revisar os conteúdos de matemática elementar; Compreender os conceitos fundamentais da matemática; Aplicar os conceitos na resolução de problemas conceitualizados, quando possível. Ampliar e construir novos significados para os conteúdos matemáticos, e a partir deles interpretar sua utilização no cotidiano.
Universidade Estadual de Londrina – UEL	
Matemática Elementar (2MAT173), 1º ano, 90 horas.	Ementa: Números e operações. Regras de potenciação e radiciação. Logaritmo e exponencial. Trigonometria. **Números complexos**. Progressões e recorrências.
	Contribuição ao perfil do egresso: Revisar tópicos de aritmética, álgebra e análise, ministrados no Ensino Fundamental e Médio, tratados sob um ponto de vista preciso, crítico e abrangente; estabelecer conexões entre os conteúdos de Matemática Elementar e os da Educação Básica[3].
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste	
Matemática Elementar II, 1º ano, 68 horas.	Ementa: Análise combinatória. Forma trigonométrica e algébrica de **um número complexo**. Representação geométrica. Potenciação e radiciação de **número complexo**. Polinômios e operações entre polinômios. Equações polinomiais: número de raízes e multiplicidade, relação entre coeficientes e raízes, raízes complexas e reais. Teorema Fundamental da Álgebra.
	Conteúdo Programático: **Números complexos**: forma algébrica, igualdade, conjugados, operações elementares, potências e raízes com expoentes inteiros. Representação geométrica do conjunto. Módulo. Forma Trigonométrica. Polinômios. Teorema Fundamental da Álgebra.
	Objetivo: Retomar e introduzir conteúdos da matemática elementar no nível da Educação Básica e estabelecer relações entre eles e certos conteúdos estudados no decorrer do Curso de Licenciatura. Desenvolver tais conteúdos de modo a fundamentá-los apropriadamente do ponto de vista da matemática acadêmica e escolar.

Fonte: Elaborada pela autora.

Os cursos de Matemática da UFPR e da UEM possuem mais de uma disciplina que trabalham com o tema investigado. Os demais apresentam somente uma matéria sobre o tópico. Todas as disciplinas, com exceção da UEM com Variáveis Complexas, abordam o assunto de forma mais básica, apresentando a definição, suas operações, conjugado, módulo, forma trigonométrica (ou polar), associando um número a sua representação no plano complexo (plano de Argand-Gauss) e

[3] Os planos de ensino da disciplina são disponibilizados via portal do estudante direto para os alunos, não ficando mais arquivado nos computadores da secretaria de departamento, logo não tivemos acesso a eles.

raízes n-ésimas. A UEM, com Variáveis Complexas, extrapola as questões básicas, adentrando num aprofundamento da teoria.

Os cursos da UFPR, com Fundamentos da Matemática Elementar 2 e Educação Algébrica 2, da UEPG e da Unioeste ainda abrangem as questões relacionadas aos polinômios e equações polinomiais, destacando o Teorema Fundamental da Aritmética, importante resultado que é discutido inclusive no EM. Assim, todas as instituições demonstram interesse na manutenção deste tópico, ofertando disciplinas obrigatórias em que tal conteúdo deve ser discutido.

Os planos de ensino da UEPG e Unioeste, na parte metodológica, indicam várias ações, como aulas expositivas e dialogadas, indicação de livros, vídeos e materiais variados para estudos, listas de questões, elaboração de material didático e uso de sala virtual de apoio. Já os da UEM e UFPR não fazem alusões a metodologia utilizada para o desenvolvimento das ações. Como não obtivemos acesso aos planos da UEL, não conseguimos avaliar esta questão.

A UFPR indica em seu PPC quatro eixos (1- conhecimentos de matemática; 2- conhecimentos das ciências a fim; 3- conhecimentos da educação matemática; 4- conhecimentos das ciências da educação) que orientam a distribuição dos conteúdos, informando no eixo 1 que

> [...] as disciplinas oferecidas neste eixo devem ser tratadas levando em conta o desenvolvimento, origem e evolução das ideias matemáticas. [...] Deve-se abordar a evolução histórica e a construção dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais, reais e complexos (UFPR, 2018, p. 50).

À exceção deste curso, os documentos mostram que, no geral, as matérias não fazem referência ao uso de fatos históricos para o desenvolvimento do conteúdo de números complexos ou incentivam o estudo de aplicações que utilizam este conteúdo, mesmo que de forma expositiva e/ou informativa, já que a compreensão total das aplicações requer teorias mais avançadas.

Deste modo, algumas das dificuldades epistemológicas que os acadêmicos possuem a respeito do assunto podem não ser superadas, já que a exposição e simples reconhecimento das regras não trazem à tona os problemas e dificuldades que impulsionaram o desenvolvimento desta teoria e que se fazem presentes na aquisição do conceito. Para isso, o uso da história da matemática enquanto estratégia metodológica pode ser muito útil e proveitosa.

Ainda, uma questão muito relevante é mostrar que a estrutura dos números reais não é suficiente para resolver certas questões e que, para isso, recaímos na necessidade de ampliação numérica, que já foi abordada em outro período histórico, quando da incorporação dos segmentos incomensuráveis ao sistema de medidas, ainda no tempo de Pitágoras (c. 570 a.E.C.–c. 495 a.E.C.). Também, conforme Ripoll, Ripoll e Silveira (2011), com a introdução dos números irracionais ao conjunto numérico dos racionais, as questões topológicas de limites foram superadas, mas outras relacionadas a aritmética e a álgebra permaneceram vagas nos números reais. A primeira, relacionada a aritmética, se refere a impossibilidade de operar com raízes quadráticas negativas, ou logaritmos negativos, já a segunda, relacionada a insuficiência algébrica, só é resolvida nos complexos, na medida que possuímos respostas para os problemas de equações algébricas.

De fato, compreender os números reais é essencial para um professor de matemática, logo levantar questionamentos a respeito da validade de expressões como $(-2)^{\pi}$, $\log(-2)$, $\log 2^{\pi} = \pi \log 2$,

investigar se estão bem definidos neste conjunto e quais possuem extensão complexa, conduzem a um melhor aprendizado. Recordamos que, no conjunto dos reais, a base deve ser positiva para uma definição correta da potência de um expoente irracional, que não existe logaritmo de valores negativos e que a propriedade 'do tombamento' não é nada trivial para potências irracionais[4].

A interpretação das extensões logarítmicas para valores negativos e imaginários "[...] muito se deveu a controvérsias a este respeito: entre Leibniz e Johann Bernoulli, em primeiro lugar; em seguida, entre Bernoulli e Euler; e, posteriormente, entre Euler e d'Alembert" (Roque; Carvalho, 2012, p. 312). Foram dúvidas que surgiram face ao desconhecido e acadêmicos que tomam contato com a teoria também possuem suas incertezas que podem ser dirimidas por meio do estudo de questões semelhantes vivenciadas por estes matemáticos ilustres.

Todas as ementas das disciplinas, com exceção de Variáveis Complexas da UEM, que se destina unicamente ao estudo deste tema, contêm vários assuntos e os números complexos figuram como um dos conteúdos a serem desenvolvidos, não possuindo uma disciplina exclusiva para si. Geralmente, eles estão associados aos demais conjuntos numéricos juntamente com as propriedades básicas operacionais, trigonometria, estudo de polinômios e equações polinomiais.

O conteúdo programático, para os complexos, evidencia: sua definição, seguida das operações e propriedades básicas, módulo, conjugado, representação geométrica (forma trigonométrica), potências e raízes n-ésimas, polinômios, equações e o Teorema Fundamental da Álgebra, que nesta discussão introdutória não pode ser demonstrado.

Ainda, cabe ressaltarmos que a variedade de metodologias apontadas nos planos busca oportunizar mais experiências de ensino, o que pode facilitar ao futuro professor o desenvolvimento desta temática quando em sala, conforme aponta Chagas (2013).

Assim, os licenciandos devem vivenciar durante sua formação inicial experiências enriquecedoras que venham a lhes esclarecer a importância dos números complexos, para que sejam capazes de articular a defesa deste assunto junto à Educação Básica, como: 1. um conteúdo que contribuiu na ampliação do conceito de número, desvencilhando-o da noção de quantidade e expandindo seu estatuto para relações mais abstratas entre seus elementos, operações e propriedades, contribuindo para a evolução das ciências como um todo; 2. pelas diversas aplicações, associadas às transformações geométricas no plano, as artes, a física, a teoria de fractais, a engenharia elétrica etc.; ou 3. pelo ganho estrutural ao se considerar coeficientes e raízes complexas no estudo de equações algébricas, já que elas permitem estabelecer uma teoria muito mais elegante do que é possível considerando apenas os casos reais, culminando com o Teorema Fundamental da Álgebra.

CONCLUSÕES

A investigação dos PPC mostrou que todos os cursos contêm os números complexos em seus currículos, como parte integrante de alguma disciplina mais geral, com exceção da UEM, com Variáveis Complexas, indicando que o assunto, apesar de relevante, não está no centro de discussões mais amplas.

[4] Esclarecimentos com relação a definição de potências com expoentes irracionais, bem como detalhes da demonstração da propriedade do tombamento, podem ser obtidos em Lübeck e Pasquini (2021).

Os planos de ensino sugerem abordagens mais tradicionais voltadas para o estudo técnico do conteúdo, visto que não são especificadas interlocuções com a história desta construção matemática, nem de seus pioneiros, ou com aplicações que poderiam ser exploradas com o uso dos imaginários.

Logo, faz-se necessário repensar maneiras de se ensinar esta teoria frente aos entraves epistemológicos que a afirmação 'raiz quadrada de um número negativo não existe' produz durante todo o percurso escolar. Quebrar este paradigma junto aos acadêmicos é um fato crucial para a manutenção e defesa deste conteúdo no EM. Para isto, há um grande aliado: o uso adequado da história da matemática.

Portanto, sugerimos trabalhar com tópicos sobre os números complexos que se mostraram conflituosos junto à comunidade matemática, dos séculos XVI ao XVIII, como forma de estimular os acadêmicos, e demais interessados, em discussões que ainda são pertinentes hoje. Verificar a validade ou falsidade dos argumentos utilizados por estes matemáticos certamente conduzirá a um aprendizado mais significativo, além de proporcionar a compreensão da escolha das definições utilizadas para as extensões complexas. Essas colocações, hoje elucidadas, ajudam a compreender as várias dificuldades e incertezas que muitos matemáticos de prestígio enfrentaram e que alunos/acadêmicos que tomam contato com essa teoria sentem, na medida que esse conhecimento também lhes é novo, desconhecido.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 06 dez. 2024.

CHAGAS, Juliana S. B. **A relevância do ensino de números complexos no ensino médio na opinião dos professores de matemática.** 2013. 103f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), campus dos Goytacazes, RJ, 2013. Disponível em: https://acesse.dev/sS3tx . Acesso em: 06 dez. 2024.

CAON, Fernanda. **Números Complexos**: inter-relação entre conteúdos e aplicações. 2013. 72f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), Ponta Grossa, 2013. Disponível em: https://acesse.dev/bSDC5. Acesso em: 06 dez. 2024.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Reflexões sobre a História da Matemática na Formação de Professores**. Revista Brasileira de História da Matemática**. [*s. l.*], Especial n. 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, p. 399–406, dez. 2007. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/312 . Acesso em: 06 dez. 2024.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed., Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GIL, Antônio C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. São Paulo: Atlas, 2008.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos Números e Numerais**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

INEP – Matriz de Referência. **Matriz de Referência ENEM**, 2024. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 01 out. 2024.

KATZ, Victor J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

LÜBECK, Kelly R. M.; PASQUINI, Regina C. G. Potências Irracionais: perspectivas para o Ensino Superior. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 43, e95, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.5902/2179460X65837. Acesso em: 06 dez. 2024.

MARCONI, Marina A.; LAKATOS, Eva M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2003.

MENDES, Iran A. **Números:** o simbólico e o racional na história. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

PÜHL, Cassiano S.; LIMA, Isolda G.; MÜLLER, Thaísa J. Ensino de Números Complexos no Ensino Médio, Técnico e Superior: um Mapeamento de Produções Brasileiras. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 9, p. 40-58, mar. 2021. Disponível em: https://periodicos.pucminas.br/index.php/abakos/article/view/22342 . Acesso em: 06 dez. 2024.

RIPOLL, Jaime B.; RIPOLL, Cydara C.; SILVEIRA, José F. P. **Números racionais, reais e complexos**. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

ROSA, Mário S. **Números Complexos**: Uma abordagem histórica para aquisição do conceito. 1998. 173f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica (PUC), São Paulo, 1998. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11186. Acesso em: 06 dez. 2024.

ROQUE, Tatiane. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiane; CARVALHO, João B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, Marcos A. **Dos Números Complexos aos Quatérnions**: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações. 2013. 101f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, 2013. Disponível em: https://encr.pw/aBuds. Acesso em: 06 dez. 2024.

TERÊNCIO NETO, José. **Análise Praxeológica do Conteúdo de Números Complexos em Coleções de Livros Didáticos do Ensino Médio.** 2021. 140f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – e Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/4702. Acesso em: 06 dez. 2024.

UFPR, Universidade Estadual do Oeste do Paraná. CEPE. Resolução nº 22/2018 – CEPE. **Fixa o Currículo Pleno do Curso de Licenciatura em Matemática do Setor de Ciências Exatas.** Curitiba. 2018. Disponível em: https://cmat.ufpr.br/curriculo-2018-2019/. Acesso em: 06 dez. 2024.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Aspectos de História da Matemática na Análise Real para docentes

Aspects of the History of Mathematics in Real Analysis for Teachers

Diogo Sampaio da Silva[1]
Universidade Federal do Amazonas – UFAM

RESUMO

Um problema comum na formação de professores das chamadas ciências exatas, especialmente a Matemática, é a chamada dupla descontinuidade: é comum que durante sua formação universitária, os conhecimentos e práticas da Matemática escolar não são empregados, e posteriormente o processo é reproduzido com a Matemática universitária em suas práticas em sala de aula. Este trabalho é um relato de experiência de produção de material didático, monitorias e outras atividades como parte do Estágio a Docência do curso de Mestrado acadêmico em Matemática, focadas na disciplina Análise Real. Estas atividades objetivavam não apenas o ensino da Análise, como também integrar aspectos históricos e filosóficos de seu desenvolvimento, buscando tornar a formação dos professores, futuros docentes, mais ampla e mais profunda simultaneamente. Assim, além de discutir a importância da Análise Real na formação docente, também se apresentam episódios históricos que motivam discussões interdisciplinares a respeito da matemática, bem como de seu ensino. Para isto, encontram-se neste texto não apenas relatos das ações tomadas, mas propostas de ações semelhantes para integração de conhecimentos na formação de professores de Matemática.

Palavras-chave: Análise Real; História da Matemática; Filosofia da Matemática; Formação docente; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

A common problem in the training of teachers of the so-called exact sciences, especially Mathematics, is the so-called double discontinuity: it is common that during their university training, the knowledge and practices of school Mathematics are not used, and later the process is reproduced with university Mathematics in their classroom practices. This paper is an experience report on the production of teaching material, tutoring and other activities as part of the Teaching Internship for the academic Master's course in Mathematics, focused on the subject of Real Analysis. These activities aimed not only to teach Analysis, but also to integrate historical and philosophical aspects of its development, seeking to make the training of teachers, future teachers, broader and deeper at the same time. Thus, in addition to discussing the importance of Real Analysis in teacher training, historical episodes that motivate interdisciplinary discussions about mathematics and its teaching are also presented. To this end, this text contains not only reports on the actions taken, but also proposals for similar actions to integrate knowledge in the training of mathematics teachers.

Keywords: Real Analysis; History of Mathematics; Philosophy of Mathematics; Teacher training; Mathematics teaching.

INTRODUÇÃO

No início do Século XX, o famoso matemático Felix Klein (1849–1925) apontou o problema dos conteúdos ensinados na formação dos professores não conversarem com o ensino básico. Klein (2009) se refere tanto aos conteúdos ministrados na escola não prepararem adequadamente os futuros pesquisadores em ciências da natureza e matemática para a forma que esses campos do conhecimento tomaram após grandes descobertas e revoluções, quanto ao fato do que é ensinado nas universidades não parece influenciar na prática docente de muitos professores.

Em particular, nos interessa refletir e debater o papel da Análise Real na formação dos futuros professores de matemática, norteados pelas seguintes perguntas: Essa é uma disciplina essencial para a prática docente? Como ela pode ser útil ao professor? Veremos como não apenas conhecimentos

[1] Mestrando pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). E-mail: sampaiodiogo.dasilva@gmail.com.

da Análise Real, como conhecimentos sobre a Análise Real, e consequentemente a própria matemática podem influenciar a prática dos professores que trabalham nos tópicos mais iniciais do ensino da matemática. Assim, propomos uma resposta ao chamado problema da dupla descontinuidade: é comum que durante a formação universitária de professores de Matemática, os conhecimentos e práticas da Matemática escolar não são empregados, e posteriormente o processo é reproduzido com a Matemática universitária em suas práticas em sala de aula.

Outro matemático muito influente do século XIX, Henri Poincaré indagou algo muito importante para nossa discussão: como a própria forma de fazer matemática muda com o tempo. Em sua obra intitulada O valor da Ciência, Poincaré (2011) apresenta sob a ótica da relação entre intuição e rigor, debates a respeito da própria natureza da matemática e como esta muda com o tempo.

Ao comentar sobre o estado da matemática de seu tempo, ele comenta também sobre figuras importantes do nosso estudo, como Weierstrass. Algo especialmente emblemático na matemática daquele momento é a chamada aritmetização da matemática. O estudo de diferentes áreas e conceitos passou a depender cada vez mais de uma definição rigorosa da noção de número, como veremos mais adiante. Assim, a cada época que analisamos da História da Matemática, Poincaré afirma que se pensava haver atingido o rigor absoluto, fruto da necessidade de rigor que cada época exigia em seus problemas.

O que veremos é que esta aritmetização da matemática traz profundas transformações no conceito de número como concebido pela comunidade matemática, tornando o estudo dos números reais uma figura central na transformação da matemática para a forma que possui atualmente. Defendemos que tais reflexões são altamente úteis para que o professor de matemática possa não apenas ter um amplo conhecimento matemático, mas ainda sobre a matemática, podendo refletir sobre a natureza desta e possivelmente assim também produzir reflexões em sala de aula.

PARTICULARIDADES DA EXPERIÊNCIA

Este trabalho se inicia com o curso de Análise Real ofertado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas (PPGM-UFAM), que tem sido ofertado para alunos com interesse em realizar o exame de seleção de mestrado para o mesmo programa. A professora que ministrou a disciplina possui experiência com este curso e com a disciplina Análise Real oferecida para os cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática da mesma universidade, tendo ministrado pelo menos 4 vezes desde 2008.

Por ser o primeiro programa de pós-graduação em Matemática do estado do Amazonas, o PPGM-UFAM tem atuado também na capacitação qualificada de professores para as instituições de ensino locais, como a própria UFAM, a Universidade do Estado do Amazonas (UEA) e o Instituto Federal do Amazonas (IFAM), dentre outras. Assim, ainda que o foco principal do programa seja a formação de pesquisadores em Matemática e Estatística, os egressos em sua maioria atuam como professores de Matemática, e especificamente no estado do Amazonas, grande parte em cursos de licenciaturas.

Consideramos no desenvolver das atividades o fato que os alunos do nivelamento são majoritariamente professores de Matemática em formação inicial ou continuada, ou futuros professores universitários que atuarão na formação de professores de Matemática nos vários níveis de ensino. Além disso, tendo em conta que nos cursos de nivelamento do programa começa a formação do egresso,

pensamos em outras abordagens dos conteúdos de Análise Real que se relacionem com a prática e os conhecimentos de professores e alunos de Matemática nos vários níveis de ensino. Ao observarmos que não só abordagens, mas que outras organizações do curso diferentes das que são apresentadas na bibliografia clássica eram possíveis, passamos a registrar os roteiros das aulas utilizadas na prática em sala de aula do curso, criando inicialmente notas de estudos.

No entanto, ao discutirmos sobre como melhorar o trabalho, contemplamos a possibilidade de torná-lo um material de apoio para alunos de Matemática, em especial os de licenciatura, e não apenas os interessados nos cursos de nivelamento, apresentando os conteúdos de Análise Real em uma disposição original, inclusive de forma integrada com a história da Análise e consequentes implicações sobre a natureza da Matemática, além de reflexões sobre como o conteúdo abordado pode se relacionar com a prática do professor de Matemática, destacando a importância desta combinação.

Com isso, o nosso trabalho surge de observações relacionadas tanto à realidade da atuação profissional dos egressos do PPGM-UFAM, quanto à necessidade de complementar a formação de alunos interessados em ingressar no programa. Sob as diretrizes mencionadas anteriormente, surgem as notas que originaram o minicurso, resultando no presente texto, que esperamos ser útil não somente a alunos interessados em ingressar em cursos de pós-graduação em Matemática, mas também a professores de Matemática em geral.

Já o autor, além de promover o uso do material produzido em monitorias do curso de nivelamento em Análise Real e do curso de Análise para graduação, participa de seminários, tanto para cursos de graduação como para os cursos de nivelamento, com o intuito de promover discussões históricas sobre o desenvolvimento dos conceitos de números reais e funções, abordando as principais ideias surgidas dentro da nossa atual bibliografia, buscando trazer reflexões sobre o surgimento e evolução do Cálculo e da Análise, bem como seus papéis nas formações dos discentes.

Tais integrações permitem que o Curso de Cálculo já introduza alguma familiaridade com as noções que geralmente só são apresentadas com enfoque no Curso de Análise. Por outro lado, um Curso de Análise integrado com a formação docente permite que os professores do ensino básico compreendam melhor as noções do Cálculo e preparem seus alunos que possam encontrar tais noções em sua formação, e os professores do ensino universitário rompam com o ciclo da dupla descontinuidade na formação docente.

O que se encontra nas seções seguintes são ideias obtidas a partir de grande parte da literatura selecionada como referência às notas, e aqui apontamos uma ideia central contida no texto: o estudo da evolução da Matemática através do tempo complementa a formação matemática, especialmente de professores. Além disso, estão presentes algumas considerações resultantes da aplicação do material produzido em sala de aula, como possível modelo para futuras atividades semelhantes.

Vale destacar que estas discussões não são completamente inéditas na literatura, sendo o trabalho de Geromel Meneghetti e Bicudo (2020) sobre a mesma temática e com mesmo propósito, mas com referências, desenvolvimento e métodos distintos. De modo geral, esperamos que a inserção da história do conhecimento matemático na formação docente traga aos professores reflexões semelhantes àquelas apresentadas por D'Ambrosio (2020).

REFERENCIAL TEÓRICO

De modo geral, Alfonso-Goldfarb (2011) defende que nas ciências, reflexões e discussões sobre como produzir conhecimento surgem naturalmente com as diferentes necessidades e questões de cada momento no decorrer da história, sendo apresentadas e discutidas pelos próprios estudiosos. E tal conhecimento é particularmente útil ao professor que ensinará ciências, ampliando sua compreensão não apenas do conhecimento adquirido, mas de suas origens e do porquê este se faz necessário.

Assim, a proposta deste trabalho é compartilhar nossa experiência de produção de material didático voltado para a disciplina Análise Real tendo as diretrizes de integração entre conhecimentos de matemática, sua história e relação com a atividade em sala de aula.

Baroni e Otero-Garcia (2014) apontam que, apesar de o cálculo diferencial e integral estabelecido por Newton e Leibniz ter sido rapidamente aceito pela comunidade científica, ao buscar novos resultados, cada vez mais uma formalização dos conceitos anteriores era necessária.

- Por exemplo, o estudo das séries trigonométricas levou:
- Riemann ao estudo das integrais;
- Cantor ao estudo dos números reais e a criar a Teoria dos Conjuntos;
- Weierstrass ao estudo de continuidade e derivabilidade.

O trabalho de Baroni e Otero-Garcia (2014), juntamente com a tradução do Curso de Análise de Cauchy feita por Roque e Schubring (2022) são nossas principais fontes históricas, além de comentários dos matemáticos Klein (2009), Poincaré (2011) e Russell (2007). Enquanto Klein produziu discussões sobre o ensino da Matemática e como esta pode ser apresentada de diversas formas, tanto Poincaré quanto Russel trazem questões que se caracterizam como discussões filosóficas sobre a Matemática. No entanto, as ideias que geralmente são classificadas como provenientes da Filosofia da Matemática são indissociáveis de sua história, e para compreender as principais dentre estas ideias, é necessário não apenas entender o desenvolvimento dos conceitos e teoremas matemáticos, bem como suas demonstrações, como também as ideias que os próprios matemáticos defendem e as origens destas, como uma leitura de um texto introdutório à Filosofia da Matemática como o de Linnebo (2017) ou o de Newton da Costa (1962) pode comprovar.

Alinhados com a proposta de Ripoll, Rangel e Giraldo (2016), pretendemos então atuar trazendo conexões entre as rupturas da formação de professores no ensino básico, mostrando como podemos refletir sobre a apresentação dos conteúdos e sua ordem escolhida, além disso, mostrar que os conhecimentos apresentados enriquecem as possibilidades de atuação do professor e ainda ilustrando como podemos concretizar tais debates ainda na formação de professores, produzindo materiais didáticos.

Em síntese, consideramos o problema da dupla descontinuidade da formação dos professores de matemática e ciências da natureza, apresentado por Klein (2009), isto é, nossas propostas visam conectar a Matemática universitária com a Matemática escolar, para que os professores em formação não apenas saibam conteúdos de Análise Real, mas reflitam sobre estes conteúdos e empreguem esta reflexão em suas práticas docentes. Somos também inspirados em sua posição em relação ao ensino de matemática, bem como suas reflexões sobre a natureza da matemática, além das de Poin-

caré (2011). Também apresentamos as discussões sobre os fundamentos da Matemática debatidas por Russel (2007). Consideramos também de modo geral a relevância da história da ciência como propulsora de melhorias na formação de cientistas e professores de ciências, como debatido por Alfonso-Goldfarb (2004). Assim, propomos seguir as diretrizes de integração entre conhecimentos de matemática, história da matemática e o seu ensino, como defendido por Ripoll, Rangel e Giraldo (2016). Aplicamos estas diretrizes na construção de um material didático, focado em análise real, e compartilhamos agora as experiências e ideias desta produção.

Naturalmente, os livros que fundamentam nossa teoria matemática são os clássicos "Curso de Análise vol. 1" de Lima (2013), bem como "Introdução à Análise Matemática" de Ávila (1999). Apesar da teoria e dos comentários apresentados ser a mesma do "Curso de Análise vol. 1", a escolha dos conteúdos se assemelha mais ao livro "Análise Real vol. 1" de Lima (2020). Apesar de já existirem textos de Análise voltados para a Licenciatura, como o de Ávila (2006), que inclusive conta com notas históricas, nossa diferença é a abordagem, que busca evidenciar as conexões entre conhecimentos de Matemática e conhecimentos sobre Matemática, como sua história.

METODOLOGIA

Inicialmente, o foco das atividades era a produção de notas de aula para o curso de Análise Real. Em particular, em razão da heterogeneidade das turmas do curso de nivelamento, os primeiros tópicos foram os que receberam mais atenção. Ainda que não sejam exclusivos da Análise, assuntos como Teoria Ingênua dos Conjuntos, Aritmética dos Números Naturais e Reais são assuntos indispensáveis para a disciplina. Por isso, apesar da ementa do curso em questão, apresentada na Figura 1, pressupor conhecimento destes tópicos, bem como noções de limites, optamos por incluir em nosso material não apenas conteúdos próprios da Análise, mas fundamentos de Matemática em geral.

Figura 1 – Ementa do curso

Poder Executivo
Ministério da Educação
Universidade Federal do Amazonas
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Matemática UFAM

UFAM

EMENTA DE DISCIPLINA

Curso: Mestrado em Matemática Pura e Aplicada

Disciplina: ANÁLISE REAL

Sigla: PGMAT 527

Carga Horária: 60 horas

Créditos: 4

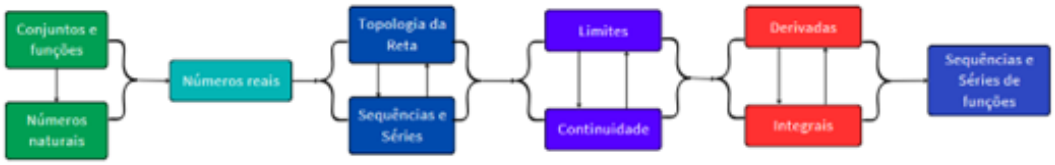
Ementa: Funções contínuas. Funções deriváveis. Funções Integráveis. Seqüências e séries numéricas. Seqüências e séries de funções: convergência simples e uniforme; teste de Weierstrass; continuidade, integrabilidade e derivabilidade do limite uniforme; teorema de Arzelá-Ascoli. Teorema de aproximação de Weierstrass.

Bibliografia: Lima E.L., Curso de Análise, Vol I . IMPA. Rio de Janeiro. Projeto Euclides. 1989. Bartle R. G., Elementos de análise real. Campus. Rio de Janeiro. 1983. Rudin W., Princípios de análise matemática. UnB. Livro Técnico. 1971.

Fonte: Rol de ementas do PPGM/UFAM

Em seguida, analisando como a mesma disciplina pode ser apresentada por meio de diferentes organizações dos mesmos tópicos, fizemos algumas observações. Ainda que os conceitos de Conjuntos, Funções e Números Naturais, juntamente com suas principais propriedades, sejam indispensáveis como ponto de partida, tendo em vista o método axiomático, os demais tópicos podem ser apresentados de ordem distinta da usual, ilustrada a seguir, na Figura 2. As setas indicam possíveis ordens de precedência na apresentação dos conteúdos.

Figura 2 – Estrutura de tópicos da Análise Real



Fonte: O autor

Nesta apresentação, comumente adotada em muitos cursos de Análise Real, entender conjuntos e funções serve de fundamentação para Análise Real, bem como para praticamente todos os campos da Matemática Contemporânea. Naturalmente, em um curso que busca estudar funções reais de uma variável real, é necessário entender o que são funções, bem como alguns resultados básicos sobre elas, além de números reais. Mas devido ao encadeamento da Matemática, isso exige ainda algum conhecimento de outros conjuntos numéricos, contidos na reta real.

Neste sentido, o conjunto dos números naturais destaca-se por três razões. A primeira é ser a estrutura numérica mais simples, o que nos permite introduzir o exercício do raciocínio e da escrita Matemática. Já a segunda é a importância das noções de enumerabilidade e Indução Matemática, a primeira surgindo naturalmente em questões relacionadas à Topologia da Reta e a própria Teoria dos Conjuntos, a segunda sendo um importante meio de demonstração na Análise Matemática. E a terceira é o fato de os números naturais serem os índices de sequências de números reais, o que impele a adoção da interpretação cardinal dos números naturais, e torna necessário o uso de propriedades deste conjunto numérico para deduzir propriedades de sequências numéricas.

Exploremos mais estas ideias. A aritmética dos números naturais é um dos blocos fundamentais que compõem a Matemática. Há vários indicadores disto, como o fato de que o programa logicista de Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) tentava reduzir aritmética à lógica, para provar que Matemática em última instância é lógica, ou do impacto proveniente dos chamados Teoremas da Incompletude ao englobarem qualquer sistema que consiga deduzir os teoremas da aritmética, como pode ser consultado nos textos de Linnebo (2017) ou de Newton da Costa (1962).

A origem de tal importância dessa classe de números é algo citado anteriormente. Como Linnebo (2017) e Baroni e Otero-Garcia pontuam e o texto de Cauchy comentado por Roque e Schubring (2022) documenta, o Cálculo Diferencial e integral se baseava na ideia de infinitesimais, isto é, quantidades "infinitamente pequenas", que permitiam calcular limites de funções, como as derivadas, mas não possuíam justificativa teórica para sua manipulação, que ora tratava os infinitesimais como números não nulos, ora como iguais a zero, sendo apresentada a solução moderna por Weierstrass.

Ambos os autores pontuam ainda que um dos marcos para a busca de novos padrões de rigor na matemática, e especialmente na análise foi a demonstração analítica do Teorema do Valor Intermediário apresentada por Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848).

Em termos simples, se uma função contínua definida em um intervalo fechado e limitado da reta passa por um ponto menor que um valor c e depois por outro ponto maior que c, então em algum momento, seu valor é exatamente c. Tal fato pode ser considerado intuitivamente óbvio e assim o era, sendo por isso tomado como axioma ou demonstrado de forma menos rigorosa que nos padrões atuais. A demonstração de Bolzano fez posteriormente com que os matemáticos refletissem sobre quais proposições poderiam ser consideradas axiomas e quais poderiam de fato ser demonstradas, causando o surgimento de um processo que levou a famosos episódios da História da Matemática, como o surgimento do formalismo matemático, a noção de Geometrias não euclidianas, e o que mais nos interessa: a aritmetização da Análise Real.

Isto é, o estudo de diferentes áreas e conceitos passou a depender cada vez mais de uma definição rigorosa da noção de número. O que vemos é que esta aritmetização da Matemática traz profundas transformações no conceito de número como concebido pela comunidade Matemática, tornando o estudo dos números reais uma figura central na transformação da Matemática para a forma que possui atualmente. No entanto, a formalização da noção de número real se apoiava na noção de número racional, que por sua vez se apoiava na ideia de número natural.

Vale lembrar ainda, que curiosamente, a noção do conjunto dos números reais como conhecemos é uma das mais recentes em comparação com as demais concepções modernas estudadas em Análise, sendo ainda novidade quando comentado por Klein (2009). Particularmente, a maioria das apresentações se baseava em construções apoiadas na noção de número racional, que foi formalizada posteriormente. A apresentação geralmente escolhida na maioria dos cursos e bibliografias surge com Hilbert em 1900, trazendo a axiomatização do conjunto numérico como o que atualmente se entende por corpo ordenado completo, de acordo com Baroni e Otero-Garcia (2014).

Já a axiomatização moderna dos números naturais foi introduzida em 1889, Giuseppe Peano (1858-1932) os axiomas que apresentamos anteriormente. No entanto, o autor escreveu este trabalho de modo a apresentar todo o texto em linguagem simbólica, a fim de evitar que o uso de palavras de uma língua natural interfira na exatidão do conteúdo trabalhado, segundo Klein (2009).

Também no final do século XIX, Georg Cantor (1845-1918) juntamente com Heinrich Eduard Heine (1821-1881), desenvolveu uma teoria que fundamenta os números reais através das sequências de Cauchy. Mas sua contribuição mais famosa é a criação do que atualmente entendemos por Teoria Ingênua dos Conjuntos, que apesar de sofrer inicialmente grande rejeição da comunidade matemática, hoje é considerada ferramenta unificadora de diversos campos da Matemática.

Isto se dá em razão de conceitos essenciais como relações de ordem, relações de equivalência, inclusões, uniões, interseções e principalmente funções serem todos conceitos expressos na linguagem de conjuntos. Em particular, o conceito de função assume protagonismo em praticamente todos os ramos principais da Matemática. Estruturas Algébricas são conjuntos munidos de operações com determinadas propriedades, e operações são funções. Ações geométricas como rotações, translações e reflexões são o que chamamos de isometrias, que são ainda funções.

Um exemplo de sucesso no emprego da noção de conjunto que merece destaque é o da Topologia. Para comentar isto, voltemos a falar da estrutura usual de um curso de Análise Real. Apesar de haver na Figura 2 um item denominado "Topologia da Reta", este item significa tão somente o estudo de conceitos exclusivos da Topologia empregados como ferramentas do Cálculo, ou seja, as definições e propriedades de subconjuntos abertos, fechados e compactos. Também são objetos de estudo da Topologia as noções de sequência, limite e continuidade, que podem, surpreendentemente, ser expressas uma a partir da outra.

Isto significa que, por exemplo, uma função f é contínua em um ponto a se, e somente se, o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a $f(a)$, que por sua vez equivale a dizer que a imagem por f de toda sequência que tende a a é uma sequência no conjunto imagem de f, que converge para $f(a)$, e ainda, uma função é contínua, se e somente se, a pré-imagem de conjuntos abertos é aberta.

Historicamente, as noções de ponto de acumulação, conjunto derivado, conjunto denso, além de outras foram introduzidas através de Cantor, segundo Baroni e Otero-Garcia (2014). Estas noções hoje fazem parte do estudo da Topologia, inicialmente denominada *Analysis situs* por este ser o nome do artigo em que Poincaré introduziu tal estudo, também de acordo com Baroni e Otero-Garcia (2014). Poincaré (2011) chama a este estudo de "verdadeira geometria descritiva", isto porque nele se traduzem conceitos geométricos à noções que dispensam quantidades, ou seja, apresentam-se ideias da geometria da reta que não precisam de números específicos.

Atualmente as ideias da Topologia de fato dispensam noções numéricas por serem expressas meramente através de conjuntos, e assim, as noções de conjunto aberto, conjunto fechado, conjunto compacto, e outras derivadas, são todas expressas através de conjuntos, famílias de conjuntos e operações entre estes. E assim, consequentemente, também são expressas as ideias de continuidade e limite em ambientes mais gerais. No entanto, entender casos particulares onde podemos evocar noções quantitativas, como distâncias entre pontos, é uma introdução adequada ao estudo da Topologia por desenvolver estas ideias em ambientes de fácil visualização, permitindo o exercício da intuição juntamente ao desenvolvimento do estudo.

Desenvolvidas as ideias da topologia da reta, já se tem em mãos todas as ferramentas para a compreensão do Cálculo. Apesar das ideias de derivadas e integrais serem tópicos próprios de estudo, ainda assim são casos especiais de limites, que por sua vez são equivalentes a ideias topológicas na reta.

Geralmente, por questões didáticas, o Cálculo Diferencial é introduzido antes do Cálculo Integral, pois os algoritmos para derivar funções são mais simples, e, portanto, os primeiros algoritmos para integrar funções são evocados via Teorema Fundamental do Cálculo como o processo inverso de derivar.

No entanto, justamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo, não há uma ordem de precedência entre derivadas e integrais para o método axiomático. Os conceitos de integrais podem perfeitamente serem introduzidos sem o conhecimento de derivadas e assim realizar o processo inverso.

Todas essas organizações foram comentadas ou mesmo aplicadas em sala de aula em diferentes apresentações do curso de Análise, presenciadas pelo autor deste texto e juntamente com os apontamentos apresentados até aqui, resultam nas considerações da seção seguinte.

ANÁLISES E RESULTADOS

A partir das questões apresentadas nas seções anteriores temos suporte teórico para as questões que, de fato, são o cerne deste trabalho. Comecemos analisando a importância dos conhecimentos de Análise Real na formação docente, principalmente na formação inicial.

Primeiro, os fundamentos da Análise, bem como de praticamente todos os campos da Matemática contemporânea, residem na Teoria Ingênua de Conjuntos e na Aritmética dos conjuntos numéricos, especialmente os naturais e reais. Nisto, a Análise surge não só como exercício destes estudos, mas como forma de mostrar a potência que estes campos possuem como fundamentação teórica para outras teorias da Matemática contemporânea, permitindo não apenas um entendimento mais amplo sobre o que a Matemática trata, mas um entendimento do porquê a Matemática universitária diverge da Matemática escolar.

Segundo, a Análise introduz e expande a compreensão de números reais como elementos de um corpo ordenado completo, bem como suas diferentes interpretações. Do ponto de vista prático, duas abordagens se sobressaem ao apresentar números reais em sala de aula. A primeira consiste em tratá-los como expressões decimais, isto é, um número inteiro seguido de uma sequência de dígitos, enquanto a segunda é sua representação geométrica enquanto pontos de uma reta orientada. A Análise então permite compreender mais profundamente as motivações para estas construções e porque ambas são consideradas meramente representações distintas para o mesmo conceito. E ainda, podemos comparar a estrutura da reta com as pertencentes a outros conjuntos numéricos, como os racionais e os complexos, permitindo analisar melhor as semelhanças, como serem corpos, serem ordenados ou completos, não só das propriedades básicas, mas de suas consequências. Um professor que compreende bem as propriedades algébricas dos reais terá ainda domínio sobre as propriedades de racionais e complexos por estes serem também corpos, por exemplo.

Terceiro, as noções de infinito, como enumerabilidade, que estão no cerne do que caracteriza a Matemática moderna, são tratadas rigorosamente sob a ótica da Análise. Isto permite que os professores estejam cientes da existência de diferentes tipos de infinitude, como classificar tais tipos e quais suas propriedades. Em sala de aula isto pode se concretizar como uma forma de conectar os saberes da Matemática escolar e da Matemática universitária. Ainda que possam ser contraintuitivas, as ideias modernas sobre infinito são caracterizadas por raciocínios surpreendentemente simples, como o caso do argumento diagonal de Cantor para provar a não enumerabilidade dos reais. Assim, surge uma oportunidade para profundas discussões acessíveis a alunos do ensino escolar sobre o que é infinito e quais suas propriedades.

Quarto, o exercício do método dedutivo como fundamento das ideias mais intuitivas sobre números, finitude, além de ser uma espécie de interseção dos itens já abordados, traz ainda consequências próprias interessantes. Entender por exemplo, que se um conjunto está incluído em outro, o número de elementos do primeiro não excede o do segundo, é um fato considerado intuitivamente óbvio, mas a demonstração não é trivial. Conhecer as demonstrações de propriedades básicas como a lei do corte nos naturais também permite explicitar que, por muitas vezes, fatos matemáticos simples possuem demonstrações que não compartilham a mesma simplicidade. Isto permite também filtrar o que não é acessível aos estudantes ainda na formação escolar.

Quinto, alguns fatos a respeito de números reais só podem ser satisfatoriamente elucidados através do método científico. Por que o método da bisseção sempre funciona? Por que sempre po-

demos aproximar qualquer número real por um número racional? Por que podemos nos aproximar indefinidamente de um número real através de números racionais, e ainda assim, o número resultante ser irracional? São perguntas naturais que devem ser exploradas ainda que apenas do ponto de vista computacional em sala de aula.

Sexto, a Análise na Reta é também preparação para tópicos ainda mais avançados de matemática. Naturalmente, professores de Matemática podem aproveitar conhecimentos de áreas como Álgebra Linear, Espaços Métricos, Funções de Variáveis Complexas e Estruturas Algébricas. Além de o estudo da estrutura da reta ser não apenas um exercício de método axiomático, como também um estudo que compartilha os mesmos fundamentos de outras áreas da Matemática, a estrutura da reta pode ser generalizada por meio de espaços vetoriais, espaços métricos, espaços topológicos, corpos e anéis.

O último tópico é o entendimento do processo histórico que resultou na Análise. No entanto, este merece um debate próprio, que também se divide em diversos pontos de interesse para a formação de professores de Matemática.

O primeiro deles é o entendimento do problema da dupla descontinuidade proposto por Klein (2009), suas origens, e consequentemente ações para resolvê-lo. O Cálculo é ferramenta indispensável na Matemática universitária, e suas mudanças implicam em mudanças necessárias na formação escolar dos alunos que futuramente podem precisar desta ferramenta. Então o entendimento do rompimento entre a Matemática tradicional e a Matemática contemporânea tem raízes históricas, e ao saber dessas histórias é que podemos conciliar estas rupturas.

O segundo é uma consequência do primeiro, mas merece destaque, e consiste em entender a Matemática como um campo dinâmico. Como Poincaré (2011) aponta, ainda que as verdades matemáticas permaneçam verdadeiras através do tempo, a relação entre intuição e rigor se altera conforme a necessidade de cada momento histórico, resultando em diferentes formas de fazer Matemática no decorrer do tempo. O processo de aritmetização da Matemática, em particular da Análise, é um exemplo histórico protagonista para ilustrar esta ideia.

O terceiro tópico é justamente compreender a aritmetização da Análise como um dos processos centrais na história da Matemática, isto é, entender como, quando e por quais motivos o conceito de número se tornou uma das principais preocupações dos matemáticos, enquanto a Matemática adquiriu as características que possui atualmente. Para professores, isto elucida o quanto o conhecimento bem fundamentado dos números e suas propriedades é imprescindível na formação matemática.

Como D'Ambrosio (2020) sintetiza: entender a história da Matemática permite ver a Matemática como resultado de uma construção social e cultural humana, bem como os problemas motivadores para a construção das ideias matemáticas e como tais problemas levaram ao desenvolvimento de diferentes áreas da Matemática, além da compreensão de soluções alternativas para problemas que são triviais quando se utiliza a matemática moderna, e por fim, a evolução do rigor lógico e de provas matemáticas, elucidando porque estes possuem suas características atuais.

Por fim, entender estes episódios da história da Matemática requer não apenas conhecimentos de Matemática e de História, mas também entendimento de ideias sobre a Matemática, que constituem a Filosofia da Matemática. Muitas vezes, a motivação para o desenvolvimento da Matemática

é externa, então entender a história deste desenvolvimento requer ainda noções de outras áreas, como as Ciências Naturais, e este é o último tópico a se discutir. Entender a história da Análise é entender a história da Matemática como um todo, o que é uma atividade que exige saberes de áreas diversas, expandindo o entendimento sobre o que é a Matemática, porque ela é da forma atual, e quais os principais tópicos de interesse desta disciplina atualmente. Isto permite planejamento para que os alunos de fato possam participar ativamente de debates sobre estas questões e se formarem de forma adequada para não apenas enfrentar os problemas matemáticos modernos, mas entender até mesmo porque estes surgem e são relevantes.

CONCLUSÕES

A partir de algumas informações históricas sobre a Matemática é possível compreender por que ela possui suas características atuais e o que a levou a divergir de suas características antigas. Isto abre portas para discussões profundas sobre o que é a Matemática e como se faz Matemática, o que complementa a formação de professores. O texto apresentado é uma síntese de como o surgimento e o desenvolvimento do que atualmente conhecemos como Análise Real é um exemplo de oportunidades para ampliar o entendimento de professores em formação sobre sua área.

Além disso, um dos aspectos de destaque é o surgimento de rupturas entre a Matemática escolar e a Matemática universitária, e entender este surgimento permite propor, mais adequadamente, formas de contornar este problema em sala de aula. Assim, o curso de desenvolvimento apontado pela História da Matemática é muito diferente daquele adotado atualmente, visando clareza e rigor, que por sua vez, difere da organização usual dos tópicos no ensino escolar. No entanto, dominar diferentes formas de organizar e entender a Matemática só contribui para aqueles que a ensinarão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Professora Flávia Morgana, e aos Professores André Pontes e Wanderley Vitorino. A primeira foi minha tutora no desenvolvimento das atividades que resultam neste texto. Todos os três me aconselharam, esclareceram dúvidas e recomendaram leituras que contribuíram fundamentalmente para este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior–Brasil (CAPES)–Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

ALFONSO-GOLDFARB, Ana Maria. **O que é História da Ciência**. São Paulo: Brasiliense. 2004.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; OTERO-GARCIA, Sílvio César. **Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Coleção PROPG Digital (UNESP). 2014.

DA COSTA, Newton Carneiro Alfonso. **Introdução aos fundamentos da matemática**. Rio de Janeiro: Of. gráficas da Livraria do Globo, 1962.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Reflexões sobre a história da matemática na formação de professores. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, p. 32, 2020. https://doi.org/10.47976/RBHM2007vn32.

GEROMEL MENEGHETTI, Renata C.; BICUDO, Irineu. O que a história do desenvolvimento do cálculo pode nos ensinar quando questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 2, n. 3, p. 103–118, 2020. https://doi.org/10.47976/RBHM2002v2n3103-118.

HAIRER, Ersnt; WANNER, Gehard. **Analysis by Its History**. Nova Iorque: Springer Science & Business Media. 2008.

KLEIN, Felix. **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior**. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática. 2009.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise–**Volume 1. 14ª edição. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, p. 286, 2013.

LINNEBO, Øystein. **Philosophy of mathematics**. Princeton: Princeton University Press, 2017.

POINCARÉ, Henri. **O valor da ciência**. 1. ed. Rio de Janeiro: Contraponto. 2011.

RIPOLL, C.; GIRALDO, V.; RANGEL, L. **Livro do Professor de Matemática da Educação Básica**–Volume 1–Números Naturais. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM. 2016.

ROQUE, T. M.; SCHUBRING, G. F. **Curso de Análise de Cauchy**: uma edição comentada. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM–Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à filosofia matemática**. Tradução e notas de Augusto J. Franco de Oliveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

O "Tesouro da Análise" de Pappus de Alexandria

The "Treasury of Analysis" of Pappus of Alexandria

Marcela Melo Amorim[1]
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

RESUMO

Este trabalho é uma adaptação de uma parte do quarto capítulo da tese em andamento que propõe apresentar um dos últimos matemáticos da Grécia antiga, Pappus de Alexandria, sua obra *Coleção Matemática* com seus sete livros chegando até nós que, tudo indica, eram notas de aula para o ensino das matemáticas da antiguidade, englobando astronomia, ótica, aritmética, geometria, filosofia, mecânica, entre outras. Além disso, mostrar algumas das obras que ele teve acesso e utilizou para escrever, reorganizar e completar toda a matemática antiga composta de mais de cinquenta estudiosos citados por ele e de nove séculos de conhecimento 'grego'. Em um segundo momento trazer alguns comentários feitos por ele, em seus prefácios, que mostram alguns vestígios de sua personalidade crítica e de seu suposto grupo de estudo e de trabalho. E, num último instante, reconhecer Apolônio e Euclides como os principais integrantes do, denominado por Pappus, *Tesouro da Análise*, composto por 33 livros de 12 obras, assunto predominante do Livro VII, o mais importante da *Coleção*.

Palavras-chave: Pappus; Didática; Matemáticas; Coleção; Análise.

ABSTRACT

This work is an adaptation of part of the fourth chapter of the ongoing thesis that proposes to present one of the last mathematicians of ancient Greece, Pappus of Alexandria, his work Mathematical Collection with its seven books that have survived to us, which, everything indicates, were lecture notes for teaching ancient mathematics, encompassing astronomy, optics, arithmetic, geometry, philosophy, mechanics, among others. In addition, to show some of the works that he had access to and used to write, reorganize and complete all ancient mathematics composed of more than fifty scholars cited by him and nine centuries of 'Greek' knowledge. In a second moment, to bring some comments made by him, in his prefaces, that show some traces of his critical personality and of his supposed study and work group. And, in a last moment, to recognize Apollonius and Euclid as the main members of what Pappus called the Treasury of Analysis, composed of 33 books of 12 works, the predominant subject of Book VII, the most important of the Collection.

Keywords: Pappus; Teaching; Mathematical; Collection; Analysis.

INTRODUÇÃO

Pappus de Alexandria vive aproximadamente entre 290 e 350 da Era Comum. É considerado o último geômetra grego, faz comentários a respeito da maioria das obras anteriores, além de propor algumas alterações em resultados já conhecidos. Em todas as fontes secundárias da obra de Pappus seu nome com essa forma que é mencionado[2]. Para Pappus o passado desempenha um papel importante e complexo, sendo que a autoridade dos antigos deve servir para sustentar a validade dos procedimentos usados na resolução de problemas. Para alguns historiadores, Pappus é simplesmente um matemático posterior, não original e medíocre, cujo único mérito é registrar e transmitir as obras de seus antecessores. No entanto, ele é um dos poucos que nos deixaram um relato de uma tradição baseada em resolução de problemas. Para Knorr (1989) a obra de Pappus ocupa uma posição intermediária entre um comentário e um estudo original, porém considera Pappus como o mais competente entre os comentaristas matemáticos antigos. Ele não pode ser considerado exatamente

[1] Doutoranda em História da Matemática, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professora EBTT do Colégio Pedro II (CP2), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: marcela.amorim28@gmail.com.

[2] Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεύς em grego, em latim: Pappus Alexandrinus, para o autor italiano Commandino: Pappi Alexandrini, na versão francesa de Eecke: Pappus D'Alexandrini, em sua tradução para o inglês do Livro VII Jones utiliza Pappus of Alexandria, e em português: Papo de Alexandria.

um inovador, mas registra e organiza o patrimônio da informação matemática, num momento que já havia sinais de um declínio dessa prática, pelo menos em Alexandria.

Até a época que antecedeu o Renascimento, a obra original de Pappus permaneceu desconhecida para a maioria dos matemáticos, com exceção de algumas proposições e teoremas atribuídos a ele nos cursos de Geometria. Então, nessa época, se fez necessário o resgate desse, que pode ser considerado o documento mais preciso da História da Matemática da Antiguidade. Numa época em que não havia uma 'escola' e sim uma cultura literária em Alexandria, Pappus parece ter sido mais influente como, o que se conhece atualmente como 'professor', seja de matemática quanto astronomia. Theon de Alexandria foi seu sucessor como professor dessas duas disciplinas e seu próprio comentário sobre a obra de Ptolomeu parece ter sofrido influência de Pappus. Mas um cita o outro nas obras sobreviventes, logo, foram praticamente contemporâneos. Por outro lado, Eutócio, matemático do século V, parece não ter tido acesso à obra *Coleção* de Pappus, pois não cita Aristeu (tão mencionado por Pappus) e não conhece uma solução de cônicas trabalhada por Apolônio e estudada por Pappus. Porém, nessa época, de alguma forma o conhecimento matemático se cristalizou na atividade de perpetuar e comentar os resultados anteriores, preservando e repassando a futuros comentaristas.

O problema principal desse trabalho é revisitar as principais versões do manuscrito da *Coleção* – Eecke, 1933 e Hultsch, 1878 – para identificar as tais obras de Apolônio e Euclides que Pappus utilizou para escrever o Livro VII. O objetivo a ser alcançado é apresentar Pappus e seu principal trabalho e reconhecer as 12 obras, dentre as apolônicas e as euclidianas, que Pappus teve acesso para compor o Tesouro da Análise, suas características e os assuntos abordados por cada uma. E, ainda, dar uma breve ideia como Pappus as organizou em forma de 238 proposições. O trabalho é relevante pois se apresenta como uma fonte de informação diferente dos livros didáticos, para que o leitor entenda que Euclides foi muito mais do que o autor dos *Elementos*, que Apolônio produziu muito mais do que se fala atualmente e Pappus é muito mais que o autor de um teorema e de um problema que levam o seu nome.

PAPPUS DE ALEXANDRIA

Pappus, integrante da dita *Era de Prata* da matemática grega que se deu em torno de 250 a 350 EC, é classificado por Gillispie (1981) como matemático, astrônomo e geógrafo. Sabe-se que viveu grande parte de sua vida em Alexandria, pelos títulos de seus livros que sobreviveram. O único vestígio de sua vida particular é a existência de um rapaz, chamado Hermódore, possível filho ou alguém que tenha um vínculo fraternal, para o qual ele dedica os Livros VII e VIII. Além disso, Pappus menciona uma convivência parecendo próxima com dois matemáticos, Pandrosíon e Megethíon, que nunca mais ouviríamos falar, caso ele não dedicasse os Livros III e V, respectivamente. Para Cuomo (2000) a personalidade de isolamento e de agressividade de Pappus se justifica do inevitável de só se aproximar de excêntricos que tinham os mesmos interesses literários. Por outro lado, Cuomo (2001) o cita como um homem que está constantemente tentando aumentar o valor da matemática como um campo de conhecimento e seu próprio valor como representante de tal campo.

Há três provas que permitem razoavelmente admitir que Pappus viveu entre o final do século III e a primeira metade do século IV. Na biblioteca de Leiden[3] é mantido um manuscrito do sé-

[3] A Biblioteca da Universidade de Leiden é uma biblioteca fundada em 1575 em Leiden, Holanda. É considerado um lugar significativo no desenvolvimento da cultura europeia.

culo X, contendo uma passagem assinada por Pappus relativa ao imperador romano Diocleciano, que reinou entre 284 e 305. A segunda prova da época da vida de Pappus é um comentário feito a obra *Almagesto* de Ptolomeu (título original em grego: Ἡ Μεγάλη Σύνταξις), nascido entre os dois primeiros séculos da nossa era. O que compõe a terceira prova da época vivida por Pappus foi um outro comentário ao mesmo documento de Ptolomeu feito por Theon de Alexandria, muito parecido com o primeiro, porém mais trabalhado. Logo, acredita-se que Theon, que viveu no século IV, parece ter vindo após Pappus. Theon de Alexandria cita Pappus de uma maneira que aparenta ser contemporâneos, ambos durante o reinado de Teodósio. Pappus faz acreditar que escreveu em torno de 320 sobre um comentário da obra de Ptolomeu, citando um eclipse do ano 320 como se ele tivesse presenciado. Thomas (1941) menciona Pappus dessa forma: *"Pappus, alexandrino, filósofo, nascido no tempo do imperador Teodósio I, quando Theon o filósofo também floresceu"*[4] (Thomas, 1941, p. 564, tradução nossa).

A OBRA PRINCIPAL: COLEÇÃO MATEMÁTICA

A obra principal de Pappus chama-se *Coleção* Matemática ou simplesmente *Coleção*. Em grego, denomina-se Συναγωγή (transliteração: Synagogé), composta de 'συν' (= com, junto) e 'αγω' (= conduta, educação). Mas qual é o significado da palavra Sinagoga em grego? Assim como a tradução em hebraico, significa simplesmente "assembleia" ou "reunião". Em alemão, algo como "escola" e, entre os judeus, "templo".

Essa é a ideia da obra de Pappus que reúne vários livros abrangendo grande parte dos assuntos tratados na época desde antes de Euclides (sete séculos antes) a Theon de Alexandria (seu contemporâneo), muitas vezes sendo a única fonte para todas as conquistas e descobertas dos seus antecessores. Esse belíssimo e extenso trabalho de Pappus tem como um dos principais objetivos alcançados a revitalização de antigos pesquisadores de uma forma prolixa.

A variedade de assuntos abordados pela *Coleção* passa a impressão de que a obra possa ter sido escrita durante anos. Entre as abordagens há astronomia, isoperimetria, mecânica e inúmeras proposições geométricas. Seu papel mais importante diz respeito à informação matemática que foi eternizada para as futuras gerações, preservando o método de demonstração dos trabalhos de vários matemáticos conhecidos e desconhecidos. Apesar de conter todos os assuntos abordados na matemática antiga, está longe de ser uma enciclopédia completa, já que falta, por exemplo, os problemas da obra de Diofanto, que viveu em Alexandria pouco menos de um século antes de Pappus.

A biblioteca do Vaticano possui um acervo de obras digitalizadas na página DVL[5], dentre os quais a obra de Pappus se apresenta como 'Manuscrito Vat.gr.218'. Treweek (1957) traz em seu artigo algumas versões da *Coleção*. Para ele há mais de trinta manuscritos existentes dessa obra, distribuídos em bibliotecas, museus e livrarias do mundo inteiro, além da versão anteriormente citada da Biblioteca do Vaticano. Para citar apenas alguns exemplos, há manuscritos nas bibliotecas Ambrosiana (Milão), Angélica (Roma), Nazionale Centrale (Florença), Vittore Emmanuele III (Nápoles), Nationalbibliothek (Viena), Herzog August Bibliothek (Volfembutel), Nationale (Paris); em livrarias Bodleian Library (Oxford), National Library of Scotland (Edimburgo), Newberry Library (Chicago) e em museus, como por exemplo, British Museum (Londres).

[4] "Πάππος, Ἀλεξανδρεύς, φιλόσοφος, γεγονώς κατὰ τὸν πρεσβύτερον θεοδόσιον τὸν βασιλέα, ὅτε καὶ Θέων ὁ φιλόσοφος ἤκμζεν". Transliteração: Páppos, Alecsandreús, philósophos, gegonòs katà tòn presbýteron Theodósion tòn basiléa, hóte kai Théon ho filósofos ekmazen

[5] DIGIVATLIB: https://digi.vatlib.it/

A *Coleção* de Pappus atraiu atenção dos estudiosos a partir do século XVI, mas foi apenas em 1875, apareceu uma edição completa da sua obra. O primeiro trabalho que merece destaque é de Federico Commandino, escrita em latim, em 1588. Durante os próximos dois séculos houve várias traduções de trechos, mas nenhuma completa. Em 1875, Fridericus Hultsch publicou um texto completo, em grego, com tradução e comentários em latim. Essa versão de Hultsch serviria de base para a primeira tradução em língua moderna, em francês, de Paul Ver Eecke, de 1933. Atualmente, desses seis livros supostamente inteiros e parte de outro que compõem a *Coleção*, temos o quarto e o sétimo com edições em inglês.

PREFÁCIOS DA COLEÇÃO MATEMÁTICA

Dos sete livros da obra *Coleção* que sobrevivem, apenas o Livro IV não apresenta prefácio, e, logicamente, nada se pode afirmar a respeito do prefácio do Livro II, já que o que chega até nós é um fragmento a partir da proposição 14. Os prefácios trazem algum tipo de filosofia, além de críticas ao aprendizado da Matemática, mas, em quase sua totalidade, Pappus informa os assuntos abordados e os matemáticos citados em cada livro.

Pappus parece ser o primeiro autor matemático que, em seus livros VI, VII e VIII mostra em seus prefácios assuntos específicos, astronomia, geometria e mecânica, respectivamente. De acordo com Netz (2022), no quarto século já se via um aumento de leitores o que se explica a preocupação didática do próprio Pappus, além de Heron e Theon.

A presença de uma dedicatória nos prefácios além de identificar uma relação entre duas pessoas, o autor e a quem ele dedica, serve como um pedido de ajuda à divulgação do trabalho, segundo Vitrac (2007). Pappus dedica o Livro III a uma professora chamada Pandrosíon: "*Aqueles que querem discernir com mais habilidade o que se busca na geometria,* ***excelente Pandrosíon****, consideram apropriado chamar de problema*..."[6] (Eecke, 1933, p. 21, tradução nossa). Já o Livro V é dedicado ao igualmente desconhecido Megethíon: "*A divindade providenciou ... da matemática,* ***caro Megethíon****, mas compartilhou apenas ...*"[7] (Eecke, 1933, p. 237, tradução nossa).

No maior livro e mais importante da *Coleção*, o Livro VII, Pappus identifica a diferença e enaltece a importância da análise e da síntese, predominando o que denomina de Tesouro da Análise. Dedica o principal e mais famoso livro a seu "filho" Hermódore: "*O campo da Análise, como eu vejo,* ***meu filho Hermódore****, é o material especial disponível para aqueles que, depois de adquirir os Elementos iniciais, ...*"[8] (Eecke, 1933, p. 477, tradução nossa). O último livro da *Coleção* que se tem acesso traz a mecânica como parte prática da matemática e é dedicado a quem ele chama de filho: "*A teoria mecânica,* ***meu filho Hermódore****, sendo útil para múltiplas e importantes coisas que surgem na vida, merece, com mérito, o maior favor entre os filósofos...*"[9] (Eecke, 1933, p. 809, tradução nossa).

A maior crítica de Pappus ao trabalho de Pandrosíon parece ser em relação a diferença entre teorema (demonstrar como correto) e problema (definir se é possível ou impossível): "*É nessas con-*

[6] "Ceux qui, excellent Pandrosius, veulent discerner plus habile ment ce que l'on cherche en géométrie, jugent qu'il convient d'appeler problème..."

[7] "La divinité, cher Mégéthius, a donné aux hommes la concep tion la plus haute et la plus parfaite de la sagesse et des mathématiques, mais n'a octroyé ce privilège que partiellement aux animaux"

[8] "Le champ de Tanalyse, tel que je le conçois, mon fils Hermodore, est la matière particulière dont disposent ceux qui, après avoir acquis les éléments vulgaires"

[9] "La théorie mécanique, mon fils Hermodore, étant utile aux choses multiples et importantes qui se présentent dans la vie, elle mérite à juste titre la plus grande faveur chez les philosophes"

dições que algumas pessoas que afirmavam ter aprendido matemática com você recentemente me deram uma explicação ignorante dos problemas".[10] (Hultsch, 1878, p. 30, tradução nossa). E, mais adiante: "*É sobre essas questões e o que está relacionado com elas que devo dar algumas demonstrações neste terceiro livro da Coleção, para que você e aqueles que gostam de aprender possam se beneficiar disso*"[11] (Eecke, 1933, p. 22, tradução nossa)

Ao final do prefácio do quinto livro, Pappus, após falar sobre a sagacidade das abelhas, justifica o conteúdo do livro sobre isoperimetria: "*Mas, no que nos diz respeito, como afirmamos possuir uma parcela maior de sabedoria do que as abelhas, procuraremos algo mais notável*"[12] (Eecke, 1933, p. 239, tradução nossa). E termina afirmando que figuras equilaterais e equiângulas de mesmo perímetro, a área maior será coberta pela figura que tiver maior número de ângulos, só não sendo maior que o círculo com o mesmo perímetro.

No sexto livro, sobre astronomia, Pappus critica a pouca contribuição pelos antecessores excetuando Ptolomeu, além de questionar o suprimento de algumas proposições da obra *Sobre Dias e Noites*, afirmando que alguns distorceram o trabalho de Teodósio. No Livro VIII, sobre as proposições consideradas de raciocínio geométrico e aplicadas nas artes da mecânica aplicada, Pappus afirma: "*julguei por bem expor de maneira mais concisa e clara, e estabelecer, por um raciocínio melhor do que o daqueles que escreveram anteriormente sobre esse assunto*"[13] (Eecke, 1933, p. 814, tradução nossa).

Considerada como uma das frases mais lindas dos prefácios de Pappus, o Livro V começa com: "*A divindade providenciou aos homens a mais perfeita concepção da sapiência e da matemática, caro Megethíon, mas compartilhou apenas parcialmente esse privilégio com os animais desprovidos da razão*".[14] (Hultsch, 1878, p. 304, tradução nossa).

CONTEÚDO DE CADA LIVRO DA COLEÇÃO MATEMÁTICA

A organização dos livros da *Coleção* parece ter sido alterada de acordo com as versões. Além disso, resulta de um trabalho longo, de vários momentos diferentes de estudo, compilado em livros. Pappus não apenas compila obras antigas, ele amplia os trabalhos anteriores, aumentando o número de lemas para esclarecer demonstrações e estende casos particulares oferecendo novas provas. Originalmente, a *Coleção Matemática* consistia em oito a doze livros sendo que o primeiro e as treze primeiras proposições do segundo se perderam, além do fim do oitavo e a partir dele.

Pappus cita mais de cinquenta estudiosos ao longo da *Coleção*, cobrindo 900 anos de matemática grega. Dentre os mais citados estão Apolônio, Arquimedes e Euclides – três matemáticos da *Era de Ouro* – sendo que o último tem mais citações que o dobro de qualquer outro.

[10] "πρῴην γοῦν τινες τῶν τὰ μαθήματα προσποιουμένων εἰδέναι διὰ σοῦ τὰς τῶν προβλημάτων προτάσεις ἀμαθῶς ἠμῖν ὥρισαν" Transliteração: prṓiēn goûn tines tôn tà mathḗmata prospoiouménōn eidénai dià soû tàs tôn problēmátōn protáseis amathôn.

[11] "C'est au sujet de ces questions et de ce qui s'y rattache qu'il faut que je donne certaines démonstrations dans ce troisième livre de la Collection, afin que toi et ceux qui aiment à s'instruire vous en retiriez profit."

[12] "Mais pour ce qui nous concerne, comme nous avons la prétention de posséder ime plus grande part de sagesse que les abeilles, nous rechercherons quelque chose de plus remarquable."

[13] "j'ai trouvé convenable d'exposer d'une manière plus concise et plus claire, et d'établir par um raisonne ment meilleur que celui de ceux qui ont écrit antérieurement sur ce sujet..."

[14] Σοφίας καὶ μαθημάτων ἔννοιαν ἀπίστην μὲν καὶ τελειοτάτην ἀνθρώποις θεὸς ἔδωκεν, ὦ κράτιστε Μεγεθίον, ἐκ μέρους δέ που καὶ τῶν ἀλόγων ζῴων μοῖραν ἀπένειμέν τισιν. Transliteração: Sophías kaì mathēmátōn énnoian arístēn mèn kaì teleiotátēn anthrópois theòs édōken, ō krátiste Megethíon, ek mérous dé pou kaì tôn alógōn zōiōn moîran apéneimén tisin.

Parece haver uma lógica didática na organização dos livros da *Coleção*, escritos em épocas diferentes e compilados entre 320 e 340 da nossa era, sendo até o Livro III apresentados alguns requisitos para o entendimento de toda a Geometria, Astronomia e Mecânica que virão dos Livros IV a VIII. Tem muito mais o formato de manual ou de notas de aulas do que uma simples enciclopédia, ou seja, vai muito mais além do que um emaranhado de citações de obras e comentários, isto é, uma organização didática de grande parte da herança deixada por nove séculos de matemática grega. Rideout (2008) afirma que Pappus pode ter ficado vulnerável a ser caracterizado como um matemático fraco por esse estilo pedagógico.

É bem provável que o livro I perdido fosse também aritmético, da mesma forma que o segundo. A parte do livro II que sobrevive, começando com a proposição 14, expõe um sistema de operações com grandes números elaborado por Apolônio. Pappus utiliza as proposições 14 a 25 para preparar para a proposição 26, sendo que dessas 12 primeiras, Pappus parece repetir na íntegra o trabalho de Apolônio.

O Livro III composto por 59 proposições e menos de duas páginas de prefácio, pode ser dividido em seis partes: o prefácio dirigido a uma suposta professora Pandrosíon que recebe duras críticas de Pappus, um problema proposto há sete séculos antes por Hipócrates de Chio de construção de médias proporcionais, uma aritmética herdada de Pitágoras, conhecida por Platão e Aristóteles sobre as médias aritmética, geométrica e harmônica, um paradoxo do desconhecido Erycinus sobre construção de triângulo, os cinco poliedros regulares–tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro, e, fechando o terceiro livro de sua obra, Pappus invoca um problema sem solução. A partir de agora, Pappus trata de assuntos bem definidos em cada um dos cinco livros restantes, acabando aqui os requisitos necessários, em sua visão, para o entendimento dos demais conteúdos.

O livro IV contém cinco seções, não possui prefácio e é composto por 44 proposições, todas envolvendo a resolução dos três problemas clássicos: uma série de proposições não relacionadas, os círculos inscritos, a quadratura do círculo, a trisseção de um ângulo e a última parte trata da duplicação do cubo.

O livro V da *Coleção* traz os problemas que envolvem isoperimetria–ἰσοπερίμετρος (transliteração: Isoperímetros), dentre eles, o problema das abelhas:

> As abelhas só reconhecem o que é útil para elas, particularmente, que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo, e que, se a mesma quantidade de matéria for gasta para a construção de cada uma dessas figuras, é o hexágono que poderá conter mais mel[15] (Eecke, 1933, p. 239, tradução nossa).

Todo o livro traz esse tipo de problema tanto para figuras planas e espaciais, ou seja, figuras planas que possuem o mesmo perímetro e áreas diferentes e, de forma análoga, figuras espaciais que possuem mesma área da superfície e diferentes volumes.

O Livro VI é sobre astronomia e lida com os livros na chamada Pequena Astronomia–os tratados menores considerado como uma introdução ao *Almagesto* de Ptolomeu. Theon de Alexandria é o único que conhecemos após a *Coleção* de Pappus que cita a Pequena Astronomia. As obras citadas

[15] "les abeilles ne reconnaissent que ce qui leur est utile, notamment que l'hexagone est plus grand que le carré et le triangle, et que, si la même quantité de matière est dépensée pour la construction de chacune de ces figures, c'est l'hexagone qui pourra contenir plus de miel"

que compõem a Pequena Astronomia são: Dados, Óptica, Catóptrica e Fenômenos de Euclides; Esférica, Em Habitações e Em dias e Noites, de Teodósio; Esfera em Movimento e Dos Nascentes e dos Poentes, de Autólico, Sobre Ascensões de Hípsicles, Dos tamanhos e das Distâncias de Aristarco e Esférica de Menelau.

No livro VIII, Pappus afirma que mecânica é uma prática da matemática e começa definindo centro de gravidade. Cita a descrição de Theon referente a descrição dos cinco poderes mecânicos: a roda e eixo, a alavanca, a polia, a cunha e os parafusos. Nesse último livro que Pappus enfim reconhece a genialidade de Arquimedes, mesmo já o tendo citado anteriormente. Esse oitavo livro é composto por 32 proposições.

LIVRO VII – O TESOURO DA ANÁLISE

Logo no início do prefácio, Pappus cita os três estudiosos que entende como principais nessa área e que englobam 31 dos 33 livros:

> O campo da Análise, como eu vejo, meu filho Hermódore, é o material especial disponível para aqueles que, depois de adquirir os elementos iniciais, quero tocar no poder de resolver os problemas que lhes são propostos. É seguindo o caminho da análise e da síntese que este material foi tratado por três homens: Euclides, autor dos Elementos, Apolônio de Perga e Aristeu, o Velho[16] (Eecke, 1933, p. 477, tradução nossa).

Ainda nesse mesmo prefácio, Pappus afirma que Apolônio teria incluído à obra *Cônicas* de Euclides mais quatro livros, totalizando oito. Foi o próprio Apolônio, de acordo com Pappus, que modificou os nomes das cônicas. Pitágoras já utilizava os termos elipse, hipérbole e parábola para determinar a falta, o excesso e nem falta nem excesso, respectivamente, porém o fazia para áreas. Logo adiante, Pappus cita o problema das três ou quatro retas publicado pelo próprio Apolônio e por Euclides, o qual, mais tarde, levaria o nome de *Problema de Pappus*, ele teria resolvido de forma análoga tal problema para cinco e seis retas.

É nesse Livro VII que se faz a diferença entre Análise e Síntese: a análise para encontrar a solução de um problema ou a demonstração de um teorema e, em seguida, a síntese para expor o que se encontrou para solucionar o problema ou a demonstração de um teorema; esses aspectos, analítico e sintético, permaneceram na Matemática de Euclides de Alexandria e nos trabalhos desenvolvidos por outros geômetras gregos contemporâneos e posteriores.

Do pensamento dedutivo, Pappus, apesar de não utilizar a palavra 'hipótese', já organiza o método considerando o resultado final (aquilo que quer ser provado) como impossível, verdadeiro ou falso, resultante de princípios classificados da mesma forma, e dividindo a análise em dois tipos, o que ele chama de teórico e o problemático. O primeiro tipo se considera uma coisa conhecida como verdadeira ou falsa, o que se busca também o será. O segundo tipo tem a possibilidade de ser impossível. O objetivo principal desse livro vem do desejo de capacitar o leitor a resolver problemas de geometria avançada. Para Cuomo (2001) está implícito que isso deriva não apenas do que se sabe, mas de como se sabe, do conteúdo e de uma certa abordagem dele.

[16] "Le champ de Tanalyse, tel que je le conçois, mon fils Hermodore, est la matière particulière dont disposent ceux qui, après avoir acquis les éléments vulgaires, veulent puiser dans les lignes la puissancè de trouver les problèmes qui leur sont pro posés. C'est en suivant la voie de l'analyse et de la Synthèse que cette matière a été traitée par trois hommes : Euclide, auteur des Eléments, Apollonius de Perge et Aristée l'Ancien."

Para Pappus, a diferença entre análise e síntese é apenas o sentido da demonstração: enquanto a análise supõe o procurado como verdadeiro e vai provando cada antecedente até chegar no que foi dado, a síntese sai do que foi dado e vai provando até chegar no procurado. Ele quase não cita filósofos em sua coleção, porém, principalmente em análise, Pappus parece ter tido acesso às obras platônicas e arquimedianas.

Das 238 proposições do Livro VII, apenas 14 delas apresentam análise e síntese na mesma demonstração. Um dos exemplos é a proposição 21:

> Duas retas AB e BΓ dadas, tomam, no prolongamento AΔ, um dado ponto Δ, tal que a relação entre a reta BΔ e a reta ΔA seja a mesma que a da reta ΓΔ em relação ao excedente cuja soma das retas AB, BΓ ultrapassa a reta que tem na potência quatro vezes o retângulo incluído sob as retângulos AB, BΓ (Eecke, 1933, p. 477, tradução nossa).

Durante a demonstração encontra-se a expressão *"Que isso seja feito..."*, típica de análise, porém, mais adiante, segue a frase: *"A síntese ocorrerá da seguinte maneira:..."*.

Obras contidas apenas no prefácio

Pappus anuncia, no prefácio do Livro VII, a ordem das 12 obras, totalizando 33 livros, que menciona no próprio prefácio e que difere da ordem que as utilizará ao longo das proposições. Apenas três obras são mencionadas somente no prefácio: *Dados*, de Euclides, *Lugares Sólidos*, de Aristeu (o Velho) e *Médias*, de Eratóstenes.

Dados, uma obra euclidiana sobrevivente, de acordo com Pappus[17], contém 90 teoremas que tratam de grandezas em geral (teoremas 1 a 23), triângulos (teoremas 39 a 48 e 74 a 79), áreas (49 a 55, 62 a 66 e 80 a 82), paralelogramos (56 a 61 e 67 a 63), retas (24 a 38) e círculos (83 a 90). Pappus ainda ressalta a relação feita entre as áreas de triângulos e quadrados no 62º teorema. Essa obra euclidiana parece ser um complemento dos *Elementos*.

Já a obra de Aristeu – *Lugares Sólidos* – antecede a obra apolônica *Cônicas* e era composta por cinco livros. Para Pappus, Aristeu utilizava as nomenclaturas de cones acutângulo, retângulo e obtusângulo para tratar de elipse, parábola e hipérbole. Mais adiante, Pappus afirma que tal obra de Aristeu já havia sido lealmente utilizada por Euclides: *"... benevolente como se deve ser para com todos aqueles que estão em posição de enriquecer a ciência matemática até certo ponto... que escreveu tudo o que pôde provar sobre este lugar com a ajuda das cônicas de Aristeu..."* (Eecke, 1933, Introdução, tradução nossa).

Proposições do Livro VII

O sétimo livro da *Coleção* de Pappus englobam 9 das 12 obras que compõem o *Tesouro da Análise*, organizadas nas 238 proposições já citadas. Tais obras contêm 25 livros dos 33 mencionados anteriormente. Pappus intercala seis obras apolônicas com uma euclidiana, voltando para a grande obra apolônica *Cônicas* (sendo que a primeira parte desta é considerada euclidiana por Pappus) e termina o livro com mais uma obra euclidiana.

[17] As observações de Pappus diferem um pouco da versão atual em inglês de Taisbak (2003) em número de teoremas e, por consequência, o assunto abordado em cada um.

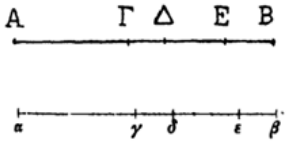
Os dois livros que compõem a obra *Dividir por uma Razão*, apolônica e sobrevivente, possuem versões em árabe e latim. O primeiro livro é composto por 7 lugares planos, 24 casos e 5 determinações das possibilidades, das quais 3 são de máximo e 2 de mínimo; já o segundo livro, 7 lugares planos, 24 casos e as mesmas discussões de possibilidades. O problema é dividir um segmento em partes proporcionais. Junto com a obra *Corte de uma área*, compõem as vinte primeiras proposições do Livro VII da *Coleção* de Pappus.

Na obra apolônica *Corte de uma área* o problema é semelhante ao anterior, substituindo a divisão de um segmento pela divisão de uma área. Pappus afirma que esse tratado perdido era composto por 48 teoremas no primeiro livro e 76 teoremas no segundo, o que lhe gerou, junto com a obra anterior vinte lemas, além das 181 proposições que compõem tais lemas.

Então, Pappus começa com, o que hoje se conhece como Teorema de Tales, dividindo uma semirreta e duas semirretas em uma determinada razão. A seguir, Pappus utiliza dez proposições – as de números 3 a 12 – para enumerar várias propriedades de desigualdades de proporções. Logo, as primeiras doze proposições do Livro VII referem-se a corte de segmento por uma razão. A partir da décima terceira proposição, Pappus trata de razão de áreas e não de segmentos. As duas próximas proposições citam construções de retângulo e quadrado equivalentes. As três seguintes citam desigualdades de áreas. E, as três últimas (de números 18 a 20) chegam a mencionar a razão entre áreas relacionadas com a razão entre os lados.

Seguindo o Livro VII da Coleção de Pappus, as proposições 22 a 40 referem-se ao primeiro livro de uma obra apolônica perdida denominada *Secção Determinada*, enquanto as proposições 41 a 64 referem-se ao segundo livro da mesma obra, que, segundo Pappus, era formada por 83 teoremas. Tal tratado apolônico refere-se ao problema de cortar uma linha de modo que o quadrado construído com um pedaço tenha uma área pré-determinada. Pappus demonstra os 43 lemas gerados por nove problemas (6 do 1º livro e 3 do 2º livro) que, ao serem subdivididos em casos particulares, geraram as 83 proposições.

Para ilustrar essa obra, observa-se a Proposição 22 que diz: *"Uma vez o retângulo obtido por AΔ e ΔΓ é igual ao retângulo contido por BΔ e ΔE, e, tomando todo para todo, portanto, como é AE para BΓ, assim é para AΔ para ΔB"*. A seguir o diagrama referente a tal proposição contida na versão de Eecke (1933) que utiliza letras gregas maiúsculas e a versão de Hultsch (1878) que usa as minúsculas.



Sejam AΓ= a, ΓΔ = b, ΔE = c, EB = d, o que a proposição diz é, em linguagem atual:

$$(a+b)\cdot \mathrm{b} = (c+d)\cdot \mathrm{c} \Rightarrow \frac{a+b+c}{b+c+d} = \frac{a+b}{c+d}$$

$$(a+b)\cdot \mathrm{b} = (c+d)\cdot \mathrm{c} \Rightarrow (a+b)\cdot \mathrm{b} + (a+b)(c+d) = (c+d)\cdot \mathrm{c} + (a+b)(c+d) \Rightarrow$$
$$(a+b)\cdot(b+c+d) = (c+d)\cdot(a+b+c) \Rightarrow$$
$$\frac{a+b+c}{b+c+d} = \frac{a+b}{c+d}$$

As proposições 65 a 74 e 75 a 111 do sétimo livro da *Coleção* de Pappus, referem-se a obra apolônica *Inclinações*, que representa um estudo sobre secantes incluindo a determinação dos pontos de interseção, construtíveis com régua e compasso por Apolônio e acrescentado com a utilização de curvas, por Pappus. Essas 47 proposições de Pappus incluem 38 lemas, 125 teoremas e 54 problemas, bem provável que nem todos pertençam apenas a Apolônio.

As próximas sete proposições do Livro VII de Pappus referem-se à obra, também perdida, denominada *Sobre tangências* e composta por dois livros. É nessa obra que se encontra o mais famoso problema apolônico que é construir o círculo tangente a três círculos dados. A única obra atribuída a Aristeu no Livro VII – *Lugares Sólidos* – parece ter contribuído de forma significativa tanto a obra apolônica *Cônicas*, quanto a essa obra *Sobre tangências*, mesmo não sendo evidenciada em nenhuma fonte. Por outro lado, caso não fosse disponível essa obra não chegaria ao conhecimento de Pappus séculos depois.

As proposições 118 a 123 do Livro VII da *Coleção* referem-se à obra apolônica *Lugares Planos*, sendo que Pappus acrescenta as proposições 118 e 121 para aprimorar os três primeiros lemas apolônicos nas proposições 119, 120 e 122 e, apresenta uma conclusão na proposição 123. Essas seis proposições tentam aprofundar o problema euclidiano das três ou quatro retas. Ao contrário dos problemas geométricos que ocuparam as primeiras pesquisas de Descartes, o *Problema de Pappus* é um problema de determinação de lugar geométrico, ou seja, um problema cuja solução requer a construção de uma curva–a "curva de Pappus"- que inclui todos os pontos que satisfazem a relação declarada no problema.

Pappus indica que Apolônio, em sua obra, classificou os problemas geométricos em três tipos, atendendo aos meios pelos quais é possível construir sua solução. Os que podem ser resolvidos apenas por meio de linhas retas e circunferências são designados por planos, visto que as curvas referidas têm a sua origem num plano; os que envolvem na sua resolução superfícies cônicas são chamados problemas sólidos, porque fazem uso de superfícies de figuras sólidas; os que envolvem, na sua construção, curvas que se obtêm de superfícies menos regulares e de movimentos mais complexos são os lineares ou gramaticais. Parece que nem Aristeu, nem Arquimedes, nem Apolônio tinham interesse em articular a distinção entre problemas planos e sólidos, pois há indícios de terem sido aplicados cônicas para a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo.

A diferença entre problema (Πρόβλημα–transl. problema) e teorema (Θεώρεμμα – transl. theṓremma) é citada no prefácio do Livro III, porém tratada de forma mais detalhada no Livro VII. Para Pappus, problema designa um inquérito em que é proposto a construir ou fazer algo, enquanto teorema designa um inquérito no qual uma sequência de implicações necessárias de certas hipóteses é investigada. Uma proposição qualquer então pode ser classificada como problema ou teorema, dependendo se tratar de uma construção ou uma demonstração, respectivamente.

Uma possível ideia do que seja porisma é dada por Pappus como nome de certas proposições para encontrar fatos geométricos particulares. Já Proclus, entende como fatos geométricos procurados, cuja pesquisa requer um tipo de investigação que não é uma construção isolada ou um simples teorema. Pappus em seu sétimo livro, cita, demonstra e diagrama os trinta e oito lemas dos *Porismas*, compondo as proposições 127 a 164, que serviram, originalmente, para esclarecer os teoremas. Ele afirma que essa obra de Euclides continha 171 teoremas organizados em três livros, incluindo alguma relação com as *Cônicas* e com o próprio *Teorema de Pappus*.

Dentre esses, as proposições 131 a 138 preparam para a proposição 139, conhecida atualmente como *Teorema de Pappus*, que deu origem à geometria projetiva mais tarde. Então é importante ressaltar que Pappus considerava o teorema que leva seu nome como um porisma e utiliza nove proposições para demonstrar tal teorema. A proposição 139 do Livro VII da *Coleção* traz o *Teorema de Pappus*: *"Que as linhas* AB *e* $\Gamma\Delta$*, por outro lado, não sejam paralelas, mas que se encontrem no ponto N; Eu digo que a linha que passa pelos pontos H, M, K é novamente reta".* O caso particular das retas paralelas é demonstrado na proposição 138.

A principal obra apolônica, datada em torno do segundo século antes da Era Comum, é composta de oito livros, sendo o último perdido e os quatro primeiros de autoria de Euclides e contém 387 teoremas ou diagramas. O texto grego das *Cônicas* está disponível na edição comentada de Eutócio, um estudioso neoplatônico do século VI EC. Os sete livros apresentam uma tradução para o latim, sendo que os quatro primeiros possuem uma versão em grego e os outros três, em árabe.

No Livro I (equivalente às proposições 165 a 175 do Livro VII da *Coleção* de Pappus) estuda-se a determinação das três secções cônicas variando o ângulo do corte, suas propriedades de diâmetros e das tangentes das cônicas. O Livro II (proposições 176 a 188 de Pappus) traz as investigações das hipérboles e suas assíntotas, diâmetros conjugados, eixos e tangentes. Nesse segundo livro, Apolônio mostra como traçar tangentes usando divisão harmônica. O Livro III dessa obra contém muitos teoremas originais apolônicos que, sem eles, seria impossível completar a síntese do problema de Euclides em relação a três e quatro retas, que deu origem mais tarde, ao Problema de Pappus. O Livro IV mostra a quantidade de pontos de interseção possíveis que uma secção cônica pode ter com uma curva qualquer. As proposições do sétimo livro de Pappus correspondentes aos livros apolônicos III e IV são as de números 189 a 202.

A partir do Livro V, até o Livro VII, já que o Livro VIII se perdeu, mostra-se toda a originalidade de Apolônio sobre o tema e foram lançados a título de adicionar teoremas mais profundos. O Livro V (equivalente às proposições 203 a 212 de Pappus) é sobre máximos e mínimos, através do estudo de tangentes e normais de uma curva; o Livro VI (proposições de Pappus de números 213 a 220) sobre semelhanças entre secções cônicas. O Livro VII traz muitos teoremas sobre diâmetros conjugados, retomando o assunto do Livro II. E o Livro VIII parece que continha problemas cônicos, sendo considerado, pelo próprio Apolônio, um apêndice ao sétimo livro. Pappus indica a esses dois últimos livros as proposições 221 a 234.

Parece que os dois livros da obra *Lugares de Superfície* incluíam além de cones, cilindros e talvez esferas, ainda paraboloide e hiperboloide, já antecipando o trabalho de Arquimedes: *Conóides e Esferóides*. Pappus afirma que os antigos tinham estudado muito outras curvas de graus mais altos como determinação de intersecções de cones, cilindros e esferas. No Livro VII da Coleção, as proposições 235 a 238 são utilizadas por Pappus para se referir as quatro primeiras proposições de um dos dois livros que compõem a obra euclidiana.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pappus de Alexandria, por ter sido um dos maiores matemáticos comentadores da Grécia Antiga, merece ser mais estudado e citado por historiadores dessas ciências; muito além de seu Problema ou de seu Teorema que colaboraram na origem às geometrias analítica e projetiva, respectivamente.

Sua principal obra – *Coleção Matemática* – fornece um grande acervo, longe de ser completo, do que foi os nove séculos das matemáticas de história antiga, com inúmeras obras dos principais autores da época. Por esse motivo, merecia um pouco mais de divulgação e de estudo.

Pode-se descobrir que, muitos dos problemas e teoremas utilizados atualmente, já eram estudados há mais de dezessete séculos, vistos e revistos por renomados matemáticos da antiguidade e, em sua maioria, citados por Pappus em sua *Coleção*.

Esse trabalho se propôs a trazer um pouco mais de conhecimento de Pappus de Alexandria, além de introduzir Euclides e Apolônio vistos por Pappus, muito mais abrangentes que as obras Cônicas e Elementos, respectivamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COMMANDINO, Federico. **Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones**. Roma, 1589

CUOMO, Serafina. **Pappus of Alexandria and Mathematics of Late Antiquity**. Cambridge University Press. New York, 2000.

CUOMO, Serafina. **Ancient Mathematics**. Cambridge University Press. Londres, 2001.

EECKE, Paul V. **Pappus d'Alexandrie la Collection Mathématique** . Paris, 1933

GILLISPIE, Charles Coulston. **Dictionary of Scientific Biography**. Princeton University, Editor Scriber. New York, 1981.

HULTSCH, Fridericus Otto. **Collections**. Berolini, 1878.

KNORR, Wilbur Richard. **Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry**. Editor Birkhauser. Boston, 1989.

NETZ, Reviel. **A New History of Greek Mathematics**. Cambridge University Press. New York, 2022.

RIDEOUT, B. **Pappus of Alexandria and the changing face of analysis and synthesis in late antiquity.** University of Canterbury. Nova Zelândia, 2008.

TAISBAK, Christian M. **Dedomena–Euclid's Data**. Museum Tusculanum Press. Copenhagem, 2003.

TREWEEK, A.P. **Pappus of Alexandria, The manuscript tradition of the Collectio Mathematica**. In: Scriptorium, Tome 11 n°2, 1957. pp. 195-233.

THOMAS, Ivor. **Selections Illustrating the History of Greek Mathematics**. Harvard University Press. Massachusetts, 1941.

VITRAC, Bernard. **Promenade dans les préfaces des textes mathématiques grecs anciens**. Centre Louis Gernet. Paris, 2007.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

A evolução da geometria euclidiana de Euclides a Proclo

The evolution of Euclidean geometry from Euclid to Proclus

Bruno Felipe Gonçalves Diamantino da Silva[1]
Universidade Federal de Goiás – UFG

Humberto de Assis Clímaco[2]
Universidade Federal de Goiás – UFG

RESUMO

O assunto da crítica à axiomática euclidiana foi mormente tratado como um tópico da história das geometrias não euclidianas. Por mais que esse seja um tópico privilegiado dentro dessa história, essa abordagem não permite uma análise que para ele se volte exclusivamente e que seja capaz de revelar outras contribuições mais específicas a este assunto. O objetivo do presente estudo é fugir dessa prática e fornecer uma análise, a partir de uma pesquisa bibliográfica, cuja ferramenta principal de análise é o método semiótico peirceano, de como se deu a história da geometria euclidiana a partir da crítica a axiomática originalmente proposta por Euclides em seu *Os Elementos* que contribua para a concepção da geometria euclidiana como um objeto do conhecimento humano, que se transforma através de um processo evolutivo (ou genético) na medida em que é humanamente construído. Atingidos esses objetivos, influencia-se claramente certa prática pedagógica, na medida em que as conclusões a que se chega pela mencionada análise, envolvem determinada epistemologia que, por sua vez, orienta determinada concepção de Educação Matemática.

Palavras-chave: Euclides de Alexandria; axiomática; geometria euclidiana; História da Matemática grega; semiótica.

ABSTRACT

The critique of the Euclidean axiomatics has mostly been discussed as a topic of the history of non-Euclidean geometries. As much as this is a privileged topic within this history, this approach does not allow for an analysis that focuses exclusively on it and that is capable of revealing furthermore contributions to this subject. The aim of this study is to move away from this practice and provide an analysis, based on bibliographical research, whose main tool of analysis is the Peircean semiotic method, of how the history of Euclidean geometry has developed from the criticism of the axiomatics originally proposed by Euclid in his The Elements, which contributes to the conception of Euclidean geometry as an object of human knowledge, which is transformed through an evolutionary (or genetic) process as it is humanly constructed. Once these goals have been achieved, a certain educational view will be influenced, insofar as the conclusions reached by this analysis involve a certain epistemology which, in its turn, guides a certain conception of Mathematical Education.

Keywords: Euclid of Alexandria; axiomatics; Euclidean geometry; History of Greek Mathematics; semiotics.

INTRODUÇÃO

Por volta do ano 300 a. C., no Egito governado pela dinastia dos Ptolomeus, mais especificamente e muito provavelmente na cidade de Alexandria, apareceu um tratado que reunia grande parte do conhecimento matemático grego até então produzido, intitulado *Os Elementos*. Seu compilador, Euclides (*fl.* 300 a. C.), provavelmente fez parte da escola platônica por volta do mesmo tempo em que viveu Aristóteles (384 – 322 a. C.); não se sabe, no entanto, se isso se deu antes ou depois de este último ter deixado a Academia, pouco antes de 350 a. C. De qualquer modo, parece ter sido o caso que o ambiente filosófico das discussões aristotélicas acerca dos princípios primeiros das ciências e da lógica tenha exercido alguma influência sobre a obra euclidiana, pois *Os Elementos*

[1] Licenciando em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Bolsista pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG), na cidade de Goiânia, Goiás, Brasil. E-mail: diamantino@discente.ufg.br.

[2] Doutor em Educação pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Professor adjunto no Instituto de Matemática e Estatística (IME) da UFG na cidade de Goiânia, Goiás, Brasil. E-mail: humberto_climaco@ufg.br.

não é somente um compêndio de resultados matemáticos: trata-se, na verdade, de uma tentativa de organizar os conhecimentos até então produzidos de maneira sistemática, através da *dedução* dos mais complexos a partir dos mais simples. Para tal, seria necessário, a fim de se evitar uma espécie de círculo vicioso, que se partisse de definições e de afirmações não demonstradas, ou seja, de *princípios* sobre os quais se construiria o todo do tratado. É, inclusive, este o sentido do seu nome: pois, assim como os gregos consideravam o fogo, o ar, a água e a terra como os *elementos* constituintes de todo o universo, os princípios enunciados por Euclides se constituem como os *elementos* a partir dos quais se forma toda a teoria matemática que ele pretendia discutir (*Comentário*,[3] 72-73). Embora estes princípios sejam referidos por Euclides a partir de duas nomenclaturas diferentes – que serão expostas logo mais – já nos tempos de Aristóteles, o termo αξιώμα (transl. *axióma*)[4] era utilizado para designá-los (*An. Post.* 72a 14). Por essa razão, a esse esforço organizacional se passou a chamar *axiomatização*; por sua vez, ao conjunto dos αξιώματα (transl. *axiómata*) elencados para esse tipo de realização, pode-se, como faz De Risi (2016), através de um empréstimo de um termo eminentemente moderno (Abbagnano, 2007, p. 102), dar o nome de *axiomática*.

Os Elementos, embora também lide com assuntos relacionados, por exemplo, à teoria dos números, majoritariamente trata sobre geometria.[5] Discussões sobre a axiomática originalmente proposta por Euclides em seu trabalho geralmente se confundem com discussões relacionadas à fundamentação teórica da própria geometria.

Desde a Renascença, a preocupação artística com a *perspectiva* começou a produzir interesse num tipo de geometria essencialmente distinto daquela estudada por Euclides: a *geometria projetiva* (Bongiovanni, 2007). A história viu então florescer e se desenvolver a concepção de diferentes tipos de geometria, não fundamentalmente baseadas no famoso *postulado das paralelas* – a ser discutido mais adiante. O percurso histórico viria a revelar para a comunidade matemática o qual central seria a negação ou a suposição deste postulado para a caracterização das teorias geométricas. Assim, a geometria do postulado das paralelas, muito embora se distancie hoje em dia de muitos aspectos da axiomática presente em *Os Elementos*, passou a ser conhecida como *geometria euclidiana*, em distinção das outras *geometrias não euclidianas* que surgiam a partir da negação e subsequente substituição do postulado das paralelas.

Importa conhecer a história da geometria euclidiana e das transformações da fundamentação axiomática pelas quais ela passou principalmente para se compreender como surgiram e em qual sentido se desenvolvem as geometrias não euclidianas. Dessa forma, quase sempre, o assunto da crítica à axiomática euclidiana é discutido como um tópico da história das geometrias não euclidianas.[6] O objetivo do presente trabalho é expandir este tópico, tratando-o não com vistas a compor um quadro sobre a história das geometrias não euclidianas, mas, sim, para propor uma visão da recepção do texto euclidiano pela comunidade matemática, mais especificamente daquela que

[3] Este é *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides* de Proclo, o Diádoco. A convenção geral adotada por aqueles que escrevem sobre este texto, particularmente importante para a história da matemática, é abreviá-lo e citar a paginação da edição de Gottfried Friedlein de 1873. Além de seguir este padrão de citação, essa obra será referida de agora em diante apenas como *Comentário*. A edição consultada, no entanto, foi a segunda de Glenn R. Morrow (Proclo, 1992); todas as citações deste texto aqui contidas são traduções próprias dos autores, feitas a partir da tradução de Morrow para o inglês.

[4] Os parâmetros de transliteração utilizados para a escrita deste trabalho são de Prado (2006).

[5] Unguru (1975) e Unguru e Rowe (1981; 1982) defendem a exclusividade do pensamento geométrico nas atividades matemáticas desenvolvidas na Grécia Antiga. É, em linhas gerais, com sua visão historiográfica que os autores deste artigo se alinham.

[6] Por exemplo, ao perpassar os anais do Seminário Nacional de História da Matemática, agora em sua décima sexta edição, percebe-se que o tema da crítica à axiomática euclidiana aparece apenas em trabalhos como os de Bongiovanni (2007), Montoito (2011) e Nascimento (2021), que apenas o discutem como tópico preliminar da história das geometrias não euclidianas.

desenvolveu seus trabalhos depois de Euclides até Proclo, cujo *Comentário*, além de ser um documento importantíssimo para as pesquisas em História da Ciência e da Matemática na Antiguidade Clássica, também marca profundamente a história da crítica à axiomática euclidiana.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

A principal fonte bibliográfica deste trabalho é Heath (1908a; 1921a; 1921b). É verdade que os autores do presente trabalho tenhamos iniciado nossos esforços investigativos em História da Matemática ancorados principalmente nas discussões historiográficas propostas por autores como Szabó (1978), Unguru (1975), Unguru e Rowe (1981; 1982) e Fowler (1999), que enxergam a historiografia de figuras como Sir Thomas Little Heath, Hyeronimus Georg Zeuthen e Paul Tannery como insuficiente para representar o processo histórico pelo qual passou a matemática na Grécia Antiga. No entanto, Heath, como grande classicista que era, fornece até hoje uma das revisões mais abrangentes e úteis dos conteúdos da Matemática grega. Sua contribuição para essa pesquisa é a de fornecer o panorama, isto é, o quadro geral dos movimentos de crítica e de aceitação da axiomatização proposta por Euclides. A análise dependerá de uma abordagem teórica diferente, a ser explicada mais adiante.

Heath, no entanto, assim como a maior parte da comunidade científica, aceita a opinião de Johan Ludvig Heiberg como definitiva para a recomposição do texto euclidiano original a partir, principalmente, de fontes greco-bizantinas. Por outro lado, a leitura de Knorr (2001) sugere que isso possa ser tão *certo* e que a opinião de Martin Klamroth, que prefere os manuscritos latinos, possa ser preferível a de Heiberg. Exige-se, portanto, cuidado para que o que aqui se possa dizer acerca da axiomática euclidiana original não se torne totalmente obsoleto se novas pesquisas vierem a confirmar a primazia das fontes medievais latinas e árabes na conservação do material que originalmente compunha *Os Elementos*.

Assim, a partir do quadro apresentado em De Risi em seu importante *The development of Euclidean axiomatics: The systems of principles and the foundations of mathematics in editions of the* Elements *in Early Modern Age* (2016), procurou-se discutir as transformações pelas quais passou a fundamentação da geometria euclidiana a partir de uma axiomática que mais ou menos representasse o conjunto de princípios que muito provavelmente compunham o tratado euclidiano original.

Uma das fontes analisadas por Heath (1908a; 1921a; 1921b) é central para a composição do presente trabalho. Trata-se do *Comentário* de Proclo, o Diádoco (412 – 485). Ela foi efetivamente consultada e citada durante todo o texto.

Proclo estudou sob Plutarco (*c.* 350 – *c.* 430) e Siriano, sucedendo a este último na direção da escola dos neoplatônicos de Atenas quando morreu este último, por volta de 437, até a sua própria morte, quando foi sucedido por Marino de Flávia Neápolis (*c.* 450 – *c.* 500). Considerando, portanto, este contexto, seria lúcido duvidar de uma prática historiográfica que se amparasse exageradamente em seu texto, pois muitos dos apontamentos de Proclo podem se constituir como reconstruções hipotéticas nada imparciais que valorizassem a escola à qual os neoplatônicos acreditavam suceder: a Academia de Platão. É preciso, portanto, cautela no tratamento deste documento.

Para este trabalho, no entanto, considerou-se que as informações fornecidas por Proclo acerca das críticas à axiomatização d'*Os Elementos* não poderia se distanciar muito de uma representação fidedigna dos movimentos de crítica filosófica e matemática da obra euclidiana. Pois, mesmo que

suas identificações dos *críticos* e *comentadores* do texto possam não ser suficientemente precisas, parece seguro crer que o ambiente filosoficamente diverso por ele retratado em seu *Comentário* tenha realmente se constituído naquele intervalo de tempo–entre 300 a. C. e a metade do século V.

METODOLOGIA

A pesquisa bibliográfica foi a metodologia a partir de qual se produziu a maior parte do texto deste trabalho. Ela foi realizada a partir das orientações de Lakatos e Marconi (2003).

Procurou-se consultar, sempre que possível, fontes bibliográficas – discutidas em *Referencial teórico* – que amparassem as análises do conteúdo das fontes primárias que aqui se realizaram. Essas análises foram importantes para a composição de quadros ausentes nas fontes bibliográficas utilizadas – como é o caso da ênfase na comparação em *A axiomática euclidiana original* entre as listas de postulados e noções comuns (serão discutidos posteriormente) dos manuscritos greco-bizantinos e dos manuscritos latinos medievais.

Estudos historiográficos mais recentes (indicados em *Referências*) foram sempre consultados a fim de se atingir as conclusões deste estudo sem uma ingênua fundamentação em trabalhos que podem, pela ação do tempo, se tornar defasados.

Para uma análise de todo o panorama histórico construído a partir dessa primeira abordagem metodológica, etapa da pesquisa bibliográfica que fundamental a difere da *revisão da literatura* (Witter, 1990), se escolheu como abordagem metodológica a semiótica peirceana, a partir da qual se pôde compreender a *história evolutiva* (ou *genética*) da geometria euclidiana.

Para Peirce, o *conceito* deve ser compreendido a partir de sua origem (isto é, de sua *gênese*) e da sua *evolução* ao longo da história (Clímaco *et al.*, 2024, p. 202). É com base nessa visão que o entendimento de evolução da geometria euclidiana – que será explicada mais adiante – presente neste trabalho se ancora seguramente.

Foi também particularmente importante a abordagem semiótica para a compreensão do conhecimento estudado como *construção* do sujeito, de modo que o papel da subjetividade, segundo a epistemologia peirceana, entra em relevo, o que resulta em claras implicações filosóficas e, consequentemente, também pedagógicas (Monteiro, 2021). A investigação das consequências que um estudo como este podem trazer para a prática de ensino de Matemática e para a compreensão do lugar que ocupa a geometria dentro da Educação Matemática, no entanto, não são o alvo dessa pesquisa, e portanto, nenhuma abordagem metodológica a este tipo de investigação relacionada foi empregada aqui. Trabalhos posteriores podem investigar as consequências de se assumir esse tipo de postura metodológica de análise no ambiente pedagógico.

Os autores, entretanto, enxergam a necessidade de se compreender a matemática e, em particular, a geometria como um objeto do conhecimento passível de ser concebido tanto a partir da sua compreensão como *produção* quanto como *descoberta* humana. A interação entre esses pontos de vista, acreditam os autores, deve eliminar a dualidade tradicional e substituí-la pela noção de complementaridade, fundamentalmente ancorada na abordagem semiótica (Clímaco *et al.*, 2024).

ANÁLISES E RESULTADOS

A axiomática euclidiana original

Na primeira metade da década de 1880, houve um curto debate entre Johan Ludvig Heiberg, um filólogo e historiador dinamarquês especialista em História da Matemática grega, e Martin Klamroth, um historiador especialista em estudos orientais. A questão discutida era a primazia dos manuscritos que deveriam ser considerados para a composição de uma edição crítica d'*Os Elementos* que reproduzisse mais fidedignamente o texto original.

Por volta do final do século IV, surgiu uma recensão do texto euclidiano que serviria de base para a cópia dos manuscritos mais antigos que se tem hoje d'*Os Elementos* de Euclides. Essa recensão tinha sido produzida por Teão, que também viveu em Alexandria, pouco menos de 700 anos depois do próprio Euclides. Em 1808, um filólogo francês chamado François Peyrard percebeu que um dos manuscritos d'*Os Elementos* da Biblioteca Apostólica Vaticana, o famoso *Vat. gr. 190*, provavelmente escrito por volta do início do século IX, período em que a Grécia já estava em seu período bizantino, além de não ser encabeçado por dizeres como "... da edição de Teão" (como era o caso de todos os outros até então conhecidos) não continha também um certo corolário no final do Livro VI, que Teão dizia explicitamente ser adição sua (Knorr, 2001, p. 134). A visão de Peyrard, endossada por uma série de especialistas e por Heiberg, era de que o escriba do manuscrito *Vat. gr. 190* muito possivelmente tinha diante de si uma cópia tanto do texto de Teão, quanto de uma versão d'*Os Elementos* que historicamente antecedia esta recensão do final do século IV.

A edição crítica de Heiberg (Euclides, 1883-1888) tem no manuscrito *Vat. gr. 190*, a que ele chamou P, sua principal fonte. Por outro lado, Klamroth primava pelos manuscritos medievais latinos, que, por sua vez, tinham sido compostos a partir das versões árabes dos textos, os quais, conforme sua análise, representavam mais fidedignamente o texto euclidiano original.

As principais edições árabes são as duas de al-Ḥajjāj b. Yūsuf b. Maṭar (do final do século VIII e do início do século IX) e a de Abū Yaʿqūb Isḥāq b. Ḥunain b. Isḥāq al-ʿIbādī (da metade do século IX), revisada pelo grande matemático Thābit b. Qurra, que, em geral, se costuma ter como uma versão mais confiável que as duas de al-Ḥajjāj (De Risi, 2016, p. 596).[7] Um importante comentário aos Livros I-VI d'*Os Elementos*, produzido por Abū 'l 'Abbās al-Faḍl b. Ḥātim an-Nairīzī (*c.* 865 – *c.* 922) sobrevive no *Codex Leidensis* 399 junto com uma das traduções de al-Ḥajjāj. Da Ma'mūni, se produziu a importante tradução latina de Adelardo de Bath, da primeira metade do século XII; da tradução de Isḥāq, veio a importante edição latina d'*Os Elementos* de Gerardo de Cremona, na metade do século XII (De Risi, 2016, p. 639-640). Gerardo também produziu, por volta do mesmo período, uma tradução dos comentários de an-Nairīzī (De Risi, 2016, p. 640). Esses últimos três textos latinos compõem a base de fontes latinas mais importantes para Klamroth (Knorr, 2001).

Knorr (2001) adverte que o debate foi encerrado muito prematuramente – apenas dois artigos foram publicados por cada um dos debatedores – e que a "vitória" de Heiberg deveria ser problematizada e investigada com maior cautela pelos historiadores e editores da obra euclidiana. Para que a análise aqui proposta possa, portanto, abranger as posições de ambos os lados, procurou-se esclarecer em quais pontos os manuscritos greco-bizantinos de Heiberg e os manuscritos medievais de Klamroth concordavam entre si, no que se refere a suas respectivas listas de princípios.

[7] Os nomes árabes, diferentemente do que se fez para os nomes gregos, foram mantidos na sua forma transliterada. Todas as transliterações são dadas a partir das fontes em língua inglesa.

Conforme De Risi (2016, p. 638-642), em todos os manuscritos greco-bizantinos consultados por Heiberg, que são sete, e em todos as edições manuscritas medievais latinas, que são oito, cinco *postulados* aparecem sempre:

1) Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

2) Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

3) E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

4) E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

5) E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (Euclides, 2009, p. 98).

Enquanto grande parte dos princípios e definições podem ser considerados como compilações de outros matemáticos anteriores, este quinto postulado, conforme sugere Heath (1921a, p. 339) parece ser original de Euclides.[8] As discussões acerca dele são bem expressivas. Ele será referido, de agora em diante, como o *postulado das paralelas*.

Esta primeira lista de princípios, que em todos os manuscritos greco-bizantinos são chamados αἰτήματα (transl.: *aitḗmata*) e na maior parte dos textos latinos são designados por *petitiones* (isto é, "petições", "postulados"), se identificam mais ou menos com o conceito aristotélico de *noções específicas*.[9] Estas são *princípios* e, portanto, são assumidas e não demonstradas. Particularmente, dizem respeito a objetos próprios da teoria que se pretende com eles "fundar".

Alguns manuscritos, quatro greco-bizantinos e todos os latinos, com a exceção das já mencionadas traduções de Gerardo, trazem ainda um sexto postulado: que "[...] duas retas não contém uma área" (Euclides, 2009, p. 99). Gerardo, reproduzindo o texto de an-Nairīzī, conta este postulado como uma *noção comum* (De Risi, 2016, p. 639-640).

Este segundo grupo de princípios euclidianos, designados em todos os manuscritos greco-bizantinos por κοιναὶ ἔννοιαι (transl.: koinaì énnoiai) e geralmente chamadas em latim de *communes animi conceptiones* (isto é, "concepções (ou noções) comuns de princípios que, ao contrário das *noções específicas*, se referem a objetos universais a todas as ciências.[10]

Existem inúmeras divergências entre os manuscritos com relação ao número das noções comuns. Seis, entretanto, aparecem em todos os manuscritos consultados por Heiberg e em todos os manuscritos latinos:

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.

2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.

3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.

[4. E, caso iguais sejam adicionados a desiguais, os todos são desiguais.

[8] Bicudo (2005) ampara essa posição.

[9] Szabó (1978) adverte sobre os perigos de se realizar uma identificação ingênua entre a divisão aristotélica dos princípios primeiros das ciências e a divisão euclidiana exposta em *Os Elementos*. Wilck (2020), por outro lado, sugere uma proximidade muito maior entre *Os Elementos* e a filosofia aristotélica do que se costuma pensar haver.

[10] Inclusive, no texto de Adelardo, as κοιναὶ ἔννοιαι dos manuscritos gregos são chamadas de *scientia universaliter communis* ("ciência (ou conhecimento) universal comum").

[…]]

7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.

8. E o todo [é] maior do que a parte (Euclides, 2009, p. 99).

Uma sétima noção comum aparece em todos os manuscritos greco-bizantinos e nas duas traduções de Gerardo já mencionadas: que "[...] os dobros da mesma coisa são iguais entre si". Uma oitava noção comum só não se encontra presente em um dos manuscritos de Heiberg e na tradução de Gerardo dos comentários de an-Nairīzī: que "[...] as metades da mesma coisa são iguais entre si".

Todas essas noções comuns, juntamente com o "sexto postulado" acima exposto, compõem a lista das noções comuns que aparece na edição preparada por Irineu Bicudo (Euclides, 2009). Heiberg considerava apenas as noções comuns 1, 2, 3, 7 e 8 como genuínas (Euclides, 1883-1888). Heath argumenta que apenas 1, 2 e 3 estavam verdadeiramente presentes no texto original (1921a, p. 376). Por sua vez, nunca foi preparada uma edição crítica fundamentada nos manuscritos medievais.

A crítica à axiomática euclidiana original e o surgimento de novas axiomáticas

A revisão de Heath (1908a; 1921a; 1921b) do *Comentário* de Proclo revela a participação de pelo menos sete matemáticos na crítica ativa da axiomática disposta originalmente por Euclides em *Os Elementos*. São eles: Apolônio de Perga (*c.* 262 – 194 a. C.), Possidônio de Apameia (*c.* 135 – *c.* 51 a. C.), Gêmino de Rodes (*fl.* 70 a. C.), Cláudio Ptolomeu (*c.* 100 – *c.* 170), Herão de Alexandria (século II ou III, não depois de Papo e não muito antes de *c*. 150),[11] Papo de Alexandria (*c.* 290 – *c.* 350) e o próprio Proclo, que limita o escopo desta pesquisa.

Apolônio foi o autor de *Cônicas*. Quando jovem, tinha sido aluno dos discípulos de Euclides em Alexandria; já no reinado de Ptolomeu Filopátor (247 – 222 a. C.), era tido como um renomado astrônomo (Heath, 1921b, p. 126). No que se refere à crítica da axiomática euclidiana, Apolônio se apoiou em outros princípios relacionados ao espaço que os objetos geométricos ocupam para fornecer uma demonstração para a primeira noção comum euclidiana, a saber, que "as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si" (*Comentário*, 195). Para além disso, não se conhece que ele tenha produzido alguma outra crítica a algum outro princípio.

Possidônio e Gêmino entram na história da crítica da axiomática euclidiana ao tentarem formular novas interpretações para a teoria das paralelas.

A história da crítica à teoria euclidiana das paralelas é aparentemente movida por um estranhamento quanto ao caráter do postulado das paralelas, em que ela está fundamentalmente ancorada:

> Consideremos, como foi hábito fazê-lo até o século XIX, que a geometria, costumeiramente chamada euclidiana, descreva, de fato, o espaço físico que nos circunda e suas propriedades. Desse ponto de vista, os postulados, sobre que se baseia essa geometria, deveriam ser abstraídos da experiência [...]. Não exige qualquer esforço a aceitação dos dois primeiros como abstração de nossa experiência no traçado de retas, fazendo uso de régua. Do mesmo modo, o terceiro representa nossa experiência com a utilização de um compasso. Talvez o quarto postulado seja o menos imediato, como uma abstração, mas, por certo, é derivado da nossa experiência com medidas de ângulo e com a constatação de que, se dois ângulos retos quaisquer forem adjacentes, os lados não comuns estarão sobre

[11] Sobre as dificuldades de se precisar quando viveu Herão, cf. Heath (1921b, p. 298-307).

> uma reta. O V Postulado é diferente, pois não podemos, pela experiência, saber se as retas se encontrarão ou não, uma vez que a experiência só nos permite traçar segmentos. Podemos estender os segmentos mais e mais, porém não eternamente. Além do que, sabemos que duas linhas podem-se aproximar ilimitadamente sem nunca se encontrarem, como é o caso de uma curva e de sua assíntota -por exemplo, uma hipérbole e sua assíntota (aliás, em grego, "linhas assíntotas" quer dizer "linhas que não se encontram") O V Postulado afirma que isso não acontece com duas linhas retas, o que, para todos os efeitos da experiência, não era intuitivamente claro (Bicudo, 2005, p. 12-13).

Possidônio e Gêmino são os protagonistas do primeiro episódio de que se tem notícia relacionado à história dessa crítica. Possidônio forneceu uma nova definição para o conceito de *paralelismo*, que, para todos os efeitos, levava a uma abordagem diferente da teoria das paralelas: enquanto, para Euclides, retas paralelas eram retas que, prolongadas em qualquer um dos lados indefinidamente, jamais se interceptavam (Euclides, 2009, p. 98), para Possidônio, elas eram as retas equidistantes.[12] Gêmino, que muito provavelmente tinha sido aluno de Possidônio, por sua vez, possuindo uma teoria classificativa de postulados e axiomas (*Comentário*, 182), tomou o quarto postulado, segundo o qual são iguais entre si todos os ângulos retos, como um teorema, ou seja, nem como postulado, nem como noção comum. Como, ao defender a classificação do postulado das paralelas como um teorema, Proclo se vale da afirmação de Gêmino de que não se deve "[...] prestar atenção a imaginações plausíveis" (*Comentário*, 192) para defender que a plausibilidade do postulado das paralelas não deveria servir de critério para contá-lo entre os postulados da geometria; pode-se inferir, então, que Gêmino também pensava que este postulado fosse um teorema. No entanto, a possível demonstração que ele pode ter delineado não sobreviveu ao tempo.

Ptolomeu, o autor de *Almagesto*, é o protagonista do segundo episódio da história das críticas à teoria euclidiana das paralelas. Este episódio, no entanto, é de particular interesse, pois a demonstração que tentou fornecer Ptolomeu para a validade postulado das paralelas sobreviveu. Ela está conservada em *Comentário*, 362-363, 365-367. Uma apresentação mais suscinta de sua prova pode ser encontrada em Barbosa (2007, p. 18-19).

Justamente pelo fato de este episódio ser tão emblemático na história da crítica à axiomática euclidiana, a discussão dele já se encontra robustamente colocada na literatura nacional sobre o assunto. A leitura indicada acima fornece apontamentos acerca das falhas lógicas dos argumentos de Ptolomeu. Adicionalmente, cf. Heath (1908b, p. 204-206).

Tendo vindo antes ou depois de Ptolomeu (é difícil afirmar com certeza), Herão, o representante de uma emblemática virada na tradição matemática grega, do estilo euclidiano tradicional para a matemática das mensurações, volta a crítica para outros princípios da axiomática euclidiana. Para ele, que "o todo é maior do que a parte" e que "as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si" não deveriam ser verdades contadas entre as noções comuns. Segundo Proclo (*Comentário*, 196), ele defendia apenas que as três primeiras noções comuns fossem verdadeiros princípios; as demais deveriam ser demonstradas.

Papo, que – assim como Euclides – era um grande compendiador da matemática até então produzida, também propôs alterações à axiomática euclidiana. Ele introduziu princípios que dão propriedades relacionadas a desigualdades: "caso desiguais sejam adicionados a desiguais, o excesso

[12] É possível mostrar que a existência de um par de retas equidistantes num plano implica a validade do postulado das paralelas, e vice-versa. Cf. Barbosa (p. 14-15).

de uma das somas sobre a outra é igual ao excesso de uma das quantidades adicionadas sobre a outra" e o seu complemento, "caso iguais sejam adicionados a desiguais, o excesso de uma das somas sobre a outra é igual ao excesso de uma das quantidades originais sobre a outra" (*Comentário*, 197). Além desses, também é de sua opinião que outros princípios devessem ser contados entre as noções comuns: que "todas as partes de um plano e todas as partes de uma reta coincidem entre si", que "um ponto divide uma reta e uma reta divide um plano" e que "infinito em magnitude existe tanto por adição, quanto por remoção, ainda que potencialmente em cada caso" (*Comentário*, 198). Além disso, pode também ser a ele que se deve a inclusão do "sexto postulado" e da noção comum 4 na segunda lista de princípios euclidianos, a das κοιναὶ ἔννοιαι (*Comentário*, 196-197).

Na opinião de Proclo, todas essas adições de Papo são inapropriadas em virtude do fato de que todas elas são consequências de princípios e definições previamente assumidos. Inclusive, o *Comentário*, a obra de referência desse importantíssimo autor, foi composta também como uma crítica aos matemáticos anteriormente discutidos. Ele critica Apolônio por tentar fornecer demonstrações aos axiomas (ou seja, às noções comuns), numa clara contradição ao método aristotélico de separação entre o *postulado*, que se assume por *convencimento*, e o *axioma* (ou *noção comum*), que se assume por *clareza* (*Comentário*, 183). Também aponta falhas lógicas no argumento de Ptolomeu para a validade do postulado das paralelas como um teorema (*Comentário*, 368) e afirma a excessividade da parcimônia de Herão (*Comentário*, 196) e da ingênua liberalidade de Papo (*Comentário*, 196-198) na elaboração de novas listas de noções comuns a partir da lista euclidiana original. Posto que as visões de todos esses autores se fundamentam em posições filosóficas relacionadas aos conceitos de axioma e de postulado, por exemplo, o *Comentário* de Proclo é verdadeiramente um testamento da Filosofia da Matemática até então desenvolvida e um comentário crítico muitíssimo robusto da matemática euclidiana. Seria impossível esgotar a crítica de Proclo nas páginas desse trabalho, pois uma análise detalhada de seu trabalho poderia ser alvo de um livro inteiro.

Proclo é o último personagem de interesse para o enfoque dessa pesquisa. É, portanto, importante mencionar pelo menos um aspecto da sua crítica: sua tentativa de demonstrar o postulado das paralelas. Proclo protagoniza, assim, o terceiro e último episódio da história da crítica à teoria euclidiana das paralelas. Assim como era o caso de Ptolomeu, sua demonstração também sobreviveu. Está conservada em *Comentário*, 369-373. Uma representação simplificada e vertida em linguagem moderna pode ser encontrada em Barbosa (2007, p. 19-20) e Freitas Júnior e Cavalari (2013, p. 6-7); outra representação comentada pode ser encontrada em Heath (1908b, p. 206-208). Assim como era o caso de Ptolomeu, a demonstração de Proclo já foi discutida largamente. As leituras acima indicadas são suficientes para a compreensão das falhas lógicas em seus argumentos.

A *GEOMETRIA EUCLIDIANA* COMO OBJETO DO CONHECIMENTO HUMANO

Já é parte do entendimento comum que a *geometria euclidiana* hoje estudada não é a mesma geometria que concebeu Euclides em seu *Os Elementos*. Já existem trabalhos, como Freitas e Lübeck (2021), que se ocupam de discutir essas diferenças. Pouco, no entanto, se percebe que esta mesma geometria foi concebida por meio de diversos olhares mesmo na Antiguidade Clássica, por matemáticos imediatamente posteriores a Euclides.

Por exemplo, a preferência de Euclides por construir sua teoria das paralelas com base na definição do *paralelismo* como a não intersecção entre duas retas e a opção de Possidônio por definir o

mesmo fenômeno a partir da noção de equidistância configuram duas formas possíveis de se conceber a caracterização fundamental da *geometria euclidiana*. Por Euclides, é o postulado das paralelas que *forma* o espaço euclidiano; por outro lado, seguindo a interpretação de Possidônio, deveria ser, em seu lugar, a existência de um par de retas equidistantes a desempenhar o mesmo papel.

Essa multiplicidade de olhares e a constituição desse ambiente receptor da axiomática euclidiana como eminentemente crítico e revisionista permitem a visão da geometria euclidiana como um conhecimento humano, construído a partir de um processo histórico. Este conhecimento avança *evolutiva* e *geneticamente*, segundo a interpretação peirceana (Monteiro, 2021; Clímaco *et al*., 2024): o *gene* é a axiomática proposta pela primeira vez no primeiro manuscrito d'*Os Elementos* que produziu Euclides por volta de 300 a. C., pois é de lá que vem o postulado das paralelas, fundante da concepção mais nuclear do que é a geometria euclidiana (Heath, 1921a, p. 339); a *evolução* se dá na crítica, na reavaliação, nos comentários e nas revisões dos vários matemáticos por quem passou este texto.

Compreendendo-se o processo dialógico de construção da geometria euclidiana e da interação semiótica dos sujeitos matemáticos com ela, ressalta-se a concepção epistemológica que põe em relevo o papel da subjetividade na *construção* do conhecimento. A geometria, desse modo, se desvela como inacabada, como uma área em constante evolução, mas cuja história genética revela o que é este objeto de que aqui se fala. A consequência é o olhar para o conhecimento dos objetos geométricos como um processo de aprendizagem, de interpretação e de apreensão dos significados.

Este trabalho, portanto, ao buscar uma melhor compreensão histórica acerca do fenômeno da evolução da geometria euclidiana, se conclui também com contribuições interessantes para a prática pedagógica. Pois ele insere uma compreensão filosófica acerca dos objetos matemáticos que, no diálogo com as várias outras concepções possíveis, implica (seja consciente ou inconscientemente) numa visão particular de Educação Matemática que orienta determinadas práticas de ensino (Thom, 1973).

Assim, como objeto histórico, o texto de Euclides pode ser entendido não como aquele modelo consagrado de procedimento matemático conforme concebe Freudenthal (1977, p. 191), mas como um documento, que nunca passou pelas mãos da comunidade matemática sem que a arte dos comentários dele criticamente partisse para a construção cada vez mais robusta desta área do conhecimento que nos tempos presentes se chama *geometria euclidiana*. E, na qualidade de objeto do conhecimento estudado até os dias atuais, a geometria pode passar a ser vista não apenas como um conjunto de teoremas e de resoluções de problemas, ou como uma descrição do espaço real, ou, ainda, como um conjunto sem significado de fórmulas e símbolos; mas, também, como um conhecimento humanamente construído a partir de um processo dinâmico e vivo, envolvendo várias fases e níveis de compreensão humana (Monteiro, 2021).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao desvincular o estudo da história da crítica à axiomática euclidiana da história das chamadas geometrias não euclidianas, este trabalho se volta exclusivamente para a revisão do processo histórico relacionado a fundamentação da geometria euclidiana. Neste sentido, procurou-se responder, segundo o ponto de vista semiótico, o que é a *geometria euclidiana*. A análise deste trabalho permite ver que até mesmo a delimitação de uma lista original de princípios euclidianos é uma tarefa complicada diante do sem-número de transformações sugeridas pelos comentadores e matemá-

ticos que estudaram ativamente a *geometria euclidiana*. Através de uma perspectiva semiótica, se pôde interpretar as transformações reveladas pelo levantamento bibliográfico como um processo evolutivo pelo qual passou a geometria euclidiana.

Uma importante consequência da análise aqui presente foi a influência que a interpretação semiótica da história da geometria euclidiana, a partir da qual ela é concebida como conhecimento humanamente produzido, pode exercer sobre a prática pedagógica nas salas de aula de matemática.

Duas linhas de pesquisa podem ampliar os resultados aqui obtidos. Uma seria a avaliação dos escritos matemáticos de Apolônio, Ptolomeu, Herão, Papo e Proclo (*Cônicas*, *Almagesto*, *Coleção*, entre outros), pois não só a crítica **à** axiomática é suficiente para a compreensão de toda a geometria; abordagens demonstrativas, opções linguísticas e simbólicas, entre outras, por exemplo, são importantes aspectos do trabalho matemático do geômetra. Uma averiguação mais pormenorizada desses detalhes poderia revelar ainda mais nuances da história evolutiva da geometria euclidiana.

Outra linha estaria relacionada à investigação acerca de quais são as implicações de se assumir um posicionamento filosófico alinhado com a teoria peirceana na sala de aula. Quais seriam os ganhos e os desafios de um trabalho orientado segundo uma perspectiva semiótica e da metodologia que dela surge, a complementaridade otteana?

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG).

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ARISTÓTELES. **Posterior Analytics**. Tradução de E. S. Bouchier. Oxford: B. H. Blackwell, 1901.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

BICUDO, Irineu. Histórias Paralelas: O V Postulado de Euclides e o Axioma da Escolha. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [*s. l.*], v. 5, n. 9, p. 5-17, abr./set. 2005. DOI: 10.47976/RBHM2005v5n905-17.

BONGIOVANNI, Vincenzo. Euclides, Hilbert e Birkhoff: História da geometria e do seu ensino. *In*: Seminário Nacional de História da Matemática–SNHM, 7., 2007, Guarapuava. **Anais** [...]. Guarapuava: Unicentro, 2007. p. 19-35.

CLÍMACO, Humberto de Assis; PAULA, Jacqueline Borges de; SANTANA, Geslane Figueiredo da Silva. Metodologia de Pesquisa em Educação Matemática: Complementaridade Otteana baseada na Semiótica. **Revista Pesquisa Qualitativa**, São Paulo, v. 12, n. 31, p. 190-217, maio/ago. 2024. DOI: 10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666.

DE RISI, Vincenzo. The development of Euclidean axiomatics: The systems of principles and the foundations of mathematics in editions of the *Elements* in Early Modern Age. **Archive for History of Exact Sciences**, [*s. l.*], v. 70, n. 6, p. 591-676, fev. 2016. DOI: 10.1007/s00407-015-0173-9.

EUCLIDES. Euclidis Elementa. *In*: HEIBERG, Johan Ludvig (ed.); MENGE, Heinrich (ed.). **Euclidis Opera Omnia**. Leipzig, Teubner, 1883-1888. 4. v.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FOWLER, David. **The Mathematics of Plato's Academy**: A New Reconstruction. 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 1999.

FREITAS, Gabriela Daiani de; LÜBECK, Kelly Roberta Mazzutti. A axiom**ática de Euclides** e Hilbert: Apontamentos históricos e considerações. *In*: Seminário Nacional de História da Matemática, 14., 2021, Uberaba. **Anais** [...] Uberaba: UFTM, 2021. p. 338-353.

FREITAS JÚNIOR, Francisco de Assis; CAVALARI, Mariana Feiteiro. Um estudo histórico de algumas tentativas de demonstração do quinto postulado de Euclides de Alexandria. *In*: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 10., 2013, Campinas. **Anais eletrônicos** [...] [*s. l.*]: [*s. n.*], 2013. Disponível em: https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/article/view/42. Acesso em: 28 out 2024.

FREUDENTHAL, Hans. What is Algebra and What has it been in History? **Archive for History of Exact Sciences**, [*s. l.*] v. 16, n. 3, p. 189-200, jan. 1977. DOI: 10.1007/BF00328154.

HEATH, Thomas Little. **A History of Greek Mathematics**. Oxford: Clarendon Press, 1921a, v. 1.

HEATH, Thomas Little. **A History of Greek Mathematics**. Oxford: Clarendon Press, 1921b, v. 2.

HEATH, Thomas Little. Introduction. *In*: EUCLIDES. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Tradução de Sir Thomas Little Heath. Cambridge: Cambridge University Press, 1908a. v. 1. p. 1-151.

HEATH, Thomas Little. Noteworthy attempts to prove the Postulate. *In*: EUCLIDES. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Tradução de Sir Thomas Little Heath. Cambridge: Cambridge University Press, 1908b. v. 1. p. 204-219.

KNORR, Wilbur Richard. On Heiberg's Euclid. **Science in Context**, [*s. l.*], v. 14, n. 1-2, p. 113-143, jun. 2001. DOI: 10.1017/S0269889701000059.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Maria de Andrade. **Fundamentos da Metodologia Científica**. São Paulo: Atlas, 2003.

MONTEIRO, Lúcia Cristina Silveira. **Semiótica na didática da matemática**: interpretações das interpretações das interpretações.... 1. ed. Curitiba: Appris, 2021.

MONTOITO, Rafael. Por Que Tardaram a Aparecer as Geometrias Não-Euclidianas?. *In*: Seminário Nacional de História da Matemática–SNHM, 9., 2011, Aracaju. **Anais** [...] [*s. l.*]: [*s. n.*], 2011. Disponível em: https://www.crephimat.com.br/visor_anais.php?id_t=9&tbl=snhm. Acesso em: 28 out 2024.

NASCIMENTO, Anna Karla Silva do. Um breve percurso histórico desde a geometria euclidiana até as geometrias não-euclidianas. *In*: Seminário Nacional de História da Matemática, 14., 2021, Uberaba. **Anais** [...] Uberaba: UFTM, 2021. p. 576-591.

PRADO, Ana Lia do Amaral de Almeida. Normas para a transliteração de termos e textos em grego antigo. **Revista Brasileira de Estudos Clássicos**, [*s. l.*] v. 19, n. 2, p. 298-299, 2006. DOI: 10.24277/classica.v19i2.123.

PROCLO. **A Commentary on the First Book of Euclid's Elements**. Tradução de Glenn R. Morrow. 2. ed. Princeton: Princeton University Press, 1992.

SZABÓ, Árpád. **The beginnings of Greek mathematics**. Tradução de A. M. Ungar. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1978.

THOM, René. Modern Mathematics: does it exist? *In*: HOWSON, Albert Geoffrey (ed.). **Developments in Mathematical Education**. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. p. 194-210. DOI: 10.1017/CBO9781139013536.011.

UNGURU, Sabetai. On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics. **Archive for History of Exact Sciences**, [*s. l.*], v. 15, n. 1, p. 67-114, dez. 1975. DOI: 10.1007/BF00327233.

UNGURU, Sabetai; ROWE, David E. Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of "Geometric Algebra", "Application of Areas", and Related Problems. **Libertas Mathematica**, [*s. l.*] v. 1, p. 1-49, 1981. DOI: 10.14510%2Flm.v1i0.354.

UNGURU, Sabetai; ROWE, David E. Does the Quadratic Equation Have Greek Roots? A Study of "Geometric Algebra", "Application of Areas", and Related Problems. **Libertas Mathematica**, [*s. l.*], v. 2, p. 1-62, 1982. DOI: 10.14510%2Flm.v2i0.710.

WILCK, Benjamin. Euclid's Kinds and (Their) Attributes. **History of Philosophy & Logical Analysis**, [*s. l.*] v. 23, n. 2, p. 362-397, dez. 2020. DOI: 10.30965/26664275-02302005.

WITTER, Geraldina Porto. Pesquisa bibliográfica, pesquisa documental e busca de informação. **Estudos de Psicologia**, [*s. l.*], v. 7, n. 1, p. 5-30, jan./jul. 1990.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Segredo das circunferências: uma jornada histórica para o π e ao comprimento da circunferência

Secret of the Circumferences: A Historical Journey to π and the Length of the Circumference

José Fernando Ugoski Silveira[1]
Universidade Federal de Pelotas – UFPEL

Otto Germano Blank[2]
Universidade Federal de Pelotas – UFPEL

Diogo Franco Rios[3]
Universidade Federal da Bahia – UFBA

RESUMO

Este artigo tem como objetivo apresentar uma forma de utilizar a História da Matemática no 8° ano do Ensino Fundamental. Acredita-se que essa abordagem possa trazer resultados positivos no desenvolvimento do interesse dos alunos pela Matemática e na melhoria da compreensão dos conceitos, pois seu aprendizado requer mudanças nos modos de ensino. Visando essa melhoria, aqui apresentamos uma atividade denominada de "Segredo das circunferências: uma jornada histórica para o π e ao comprimento da circunferência", inspirada em abordagens comuns em que os alunos usam barbantes para medir a circunferência e o diâmetro de objetos circulares, porém combinando práticas investigativas com conceitos históricos, com o intuito de que os alunos encontrem um valor aproximado para o "π", mostrando que a Matemática é uma ciência viva e não apenas uma série de respostas prontas. Os alunos serão incentivados a explorar o conceito de π, procurando compreender o que seu valor representa, como evoluiu durante a história, sua importância e algumas de suas aplicações, partindo da ideia de que o valor de π é encontrado na relação fundamental entre a circunferência e o seu diâmetro e chegando até a fórmula da circunferência conhecida atualmente.

Palavras-chave: Educação Matemática; História da Matemática; Metodologia; Circunferência, Pi.

ABSTRACT

This article aims to present a way to use the History of Mathematics in the 8th grade of Elementary School. It is believed that this approach can bring positive results in developing students' interest in Mathematics and improving their understanding of the concepts, as its learnings requires changes in teaching methods. With this improvement in mind, we present an activity called "Secret of Circumferences: A Historical Journey to π and the Circumference Length", inspired by common approaches where students use strings to measure the circumference and diameter of circular objects, but combining investigative practices with historical concepts with the aim that students find an approximate value for "π", demonstrating that Mathematics is a living science and not just a collection of ready-made answers. Students will be encouraged to explore the concept of π, seeking to understand what its value represents, how it has evolved throughout history, its importance, and some of its applications, starting from the idea that the value of the "π" is found in the fundamental relationship between the circumference and its diameter, leading students to the well-known circumference formula used today.

Keywords: Mathematics Education; History of Mathematics; Methodology; Circumference; Pi.

[1] Licenciando em Matemática pela Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: jsilveira74@yahoo.com.br.

[2] Licenciando em Matemática pela Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: protoman1234@hotmail.com.

[3] Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia (UFBA)/Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil. E-mail: riosdf@ufba.br.

INTRODUÇÃO

É notável que o atual ensino de Matemática esteja problemático, algo aparente quando se analisa o nível de aprendizagem dos alunos, segundo Dantas (2017), que estuda este aspecto do Ensino Fundamental e Ensino Médio na Matemática na Universidade Federal de Rondônia. Dantas (2017) realizou um estudo através de questionários em seu trabalho "*Baixo rendimento na disciplina de matemática*", o qual investigou o baixo rendimento acadêmico de estudantes em matemática no Ensino Fundamental e Médio e, como resultado, descobriu que o desinteresse foi o principal problema relatado.

Da mesma forma, Lima *et al*. (2020) discutem as dificuldades enfrentadas no ensino e na aprendizagem desse componente curricular no 8° ano do Ensino Fundamental. No estudo, 22,9% dos discentes entrevistados já haviam reprovado em Matemática, 31,5% afirmaram não gostar da matéria e outros 10,5% relataram ter pouco interesse.

Esses dados evidenciam a necessidade de mudança no modo como o conteúdo é abordado nas escolas. A precarização da Educação Básica, conforme apontado por Dantas (2017) e Lima *et al*. (2020), resulta em deficiências nos conhecimentos elementares em Matemática, o que impacta diretamente a formação de futuros profissionais. Para reverter esse quadro, é essencial que o ensino dessa área seja reformulado, incorporando metodologias que tornem a disciplina mais acessível e relevante para os alunos.

As informações apresentadas por Dantas (2017), evidenciam que a maioria dos estudantes não se dedicam às atividades de Matemática fora da sala de aula, o que contribui para o desinteresse e a dificuldade na disciplina, resultando no prejuízo de sua compreensão acerca da matéria. Essa falta de engajamento é um indicativo claro de que a forma como o conteúdo é ensinado precisa despertar a curiosidade e a motivação dos estudantes.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aponta um possível caminho para melhorar o ensino dessa disciplina: "[...] é importante incluir a História da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática" (Brasil, 2018, p. 298).

Para além de qualquer crítica que possa existir em relação à BNCC, este documento prescritivo defende que a utilização da História da Matemática pode influenciar o aprendizado dos alunos, o que corrobora o entendimento de Ersoy & Öksüz (2016), que investigaram o impacto de utilizar a História da Matemática no ensino e cujos resultados mostraram uma grande diferença entre os alunos que aprenderam com o auxílio da História da Matemática e os que aprenderam sem, sendo que aqueles que tiveram contato com contextos históricos junto com o conteúdo obtiveram notas maiores.

> De modo geral, a História da Matemática inserida no processo de ensino e aprendizagem constitui um meio eficiente para motivar os alunos a aprender e pode chamar a atenção dos aprendizes motivando-os "para construir o conhecimento matemático, passando a enxergá-la como uma ciência em construção que deve ser interpretada e reinterpretada constantemente", assim, estimulando a curiosidade, a criatividade e o interesse dos alunos pela Matemática (Almeida, 2022, p. 18).

Com isso, vê-se que a História da Matemática pode ser uma ferramenta poderosa para o ensino, ferramenta esta que não é muito utilizada atualmente. Considerando o que foi dito anteriormente, proporemos uma forma de ensinar Matemática, especificamente lecionando sobre o valor do número "π" e o cálculo do comprimento da circunferência de um círculo com o auxílio da História da Matemática, visando despertar uma maior curiosidade nos estudantes e fazendo com que eles se sintam envolvidos na aula.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

De acordo com Boaler (2018, p. 23), "muitos estudantes acreditam que a Matemática é uma matéria morta, irrelevante para seu futuro". Com o intuito de reforçar essa crença, Boaler menciona o matemático Reuben Hersh, o qual argumenta que a Matemática se encontra seriamente deturpada nas salas de aula, critica está a qual pode ser resumida na ideia de que a maioria dos alunos a percebem como "uma série de respostas, respostas para perguntas que ninguém fez" (Boaler, 2018, p. 26).

É compreensível que a maioria dos estudantes da Educação Básica tenham essa visão, tendo em vista que, segundo Vanessa de Oliveira e Rosa Monteiro Paulo (2016, p. 6), "No ensino de Matemática (hoje) a ênfase nos algoritmos e cálculos escritos, revela a Matemática como uma ciência estática, com conceitos verdadeiros que não são suscetíveis a dúvidas e questionamentos", o que reduz a disciplina a uma mera atividade copista, dificultando a busca para compreendê-la.

No entanto, conforme discutido por Saito e Dias (2013) e Furinghetti (2007), a história da matemática pode ser vista como uma alternativa que tem a capacidade de conduzir os alunos a refletirem acerca do processo de formação e consolidação do conhecimento matemático.

De encontro a essa ideia, acreditamos que essa abordagem seja um incentivo que tenha um forte potencial de leva-los a questionarem a concepção de que a matemática é algo pronto e acabado, proporcionando aos discentes a oportunidade de reconhecê-la como resultado das contribuições de diversos matemáticos ao longo do tempo, desde figuras amplamente conhecidas, como Georg Cantor, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss, até outros menos conhecidos atualmente.

Perspectiva esta a qual é fundamental para que se reflita a natureza dinâmica e em constante transformação dos conhecimentos matemáticos ao longo da história humana.

Com base no que foi evidenciado e buscando promover uma visão mais humanizada da disciplina, apresentamos a atividade "Segredo das circunferências: uma jornada histórica até π e ao comprimento da circunferência", que deverá ser aplicada em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, com o intuito de mostrar que a Matemática é uma ciência viva, que evolui ao longo do tempo por meio da colaboração de diversos estudiosos e não apenas uma série de respostas prontas como argumentado na primeira das competências da Matemática na BNCC, conforme se nota a seguir:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (Brasil, 2018, p. 267).

Dessa forma, elaboramos uma experiência pedagógica que auxiliará os alunos na compreensão de π, explorando sua importância histórica e sua aplicação no cálculo do comprimento da circunferência. Para isso, ela utilizará como base uma atividade amplamente conhecida pelos professores do Ensino Fundamental e irá aprimorar e adequar ao Ensino Fundamental a proposta exibida no artigo de Trivizoli (2018), no qual ele propõe duas atividades para determinar essa constante matemática, inspiradas nos trabalhos de Arquimedes especificamente, em sua obra conhecida como "Medida do Círculo" (Grudtner, 2021).

A principal diferença entre a abordagem que apresentaremos e as propostas expostas no artigo de Trivizoli (2018) é que na dinâmica nomeada de "Segredo das circunferências" serão mostradas diversas aplicações para o número π em uma aula com foco na metodologia investigativa[4]. Além de utilizar dos conhecimentos de História da Matemática por parte do docente, junto a uma abordagem que levará em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes, guiando-os para que eles consigam determinar uma aproximação para o valor do número π, promovendo desta forma uma aprendizagem mais significativa.

METODOLOGIA

A proposta foi desenvolvida para ser aplicada no 8° ano do Ensino Fundamental, e antes da sua realização, será solicitado que os estudantes tragam réguas e três objetos circulares diferentes para a aula, sendo responsabilidade do professor disponibilizar barbantes para que os discentes realizem a etapa de medição da dinâmica.

A atividade será composta por cinco momentos, os quais foram nomeados respectivamente como, discussão inicial; construção do conceito de π; introdução a contextualização histórica; aproximação de π; Contextualização histórica de antigos valores de π e comprimento da circunferência.

Na discussão inicial, o professor deverá começar explicando que realizarão uma atividade diferente, não citando o termo π para não antecipar a descoberta. Nessa etapa, o docente deverá frisar que eles irão investigar algo comum e cotidiano, que são as circunferências e que terão a oportunidade de descobrir uma relação misteriosa e antiga, que é capaz de conectar diversas civilizações ao longo do tempo, indo desde os babilônicos, egípcios até os chineses e provocá-los com a pergunta: "Será que vocês conseguirão descobrir o que a circunferência esconde?".

Ainda no primeiro momento, será apresentado o que é uma circunferência, destacando detalhes como o seu diâmetro, raio e comprimento. Nesta etapa, o professor deverá perguntar aos alunos como eles mediriam a volta da circunferência sem utilizar uma régua curva, guiando-os a uma resposta que utilize barbantes e réguas caso ela não seja sugerida pela turma.

No segundo momento da atividade, o docente deverá guiar os estudantes para a construção do valor numérico de π. Nessa etapa eles serão orientados a se reunirem em grupos e utilizarem barbantes para medirem os comprimentos das circunferências e os diâmetros dos objetos circulares que trouxeram.

[4] Analisando o texto de Zompelo e Laburu (2011), é possível interpolar uma visão comum de que a metodologia investigativa é uma estratégia de ensino que estimula os alunos a buscarem respostas, a partir de situações-problema, ou casos de investigação.

Nesta parte, é fundamental que o educador crie tabelas no quadro para que cada grupo seja capaz de anotar os resultados das medições dos objetos que trouxeram, como indicado no exemplo abaixo com as medições de três objetos de tamanhos diferentes.

Medida da Circunferência	Medida do Diâmetro
10,65 cm	3,4 cm
15,7 cm	5 cm
54,9 cm	17,5 cm

Após a medição e o preenchimento de cada tabela, o docente deverá instigar os discentes a dizerem que relação eles são capazes de enxergar entre a medida do comprimento da circunferência e a medida do diâmetro. Para isso, ele deverá perguntar: "Há alguma relação entre o comprimento da circunferência e o diâmetro?".

Neste momento, espera-se que os alunos afirmem que a medida da circunferência é maior que a medida do diâmetro, por causa dos dados das medições realizadas. Seguidamente a essa afirmação, o professor deverá indagá-los: "quanto maior será que a medida da circunferência é em relação ao diâmetro? Vamos tentar descobrir. Alguém tem uma ideia de quantas vezes a medida da circunferência é maior que o diâmetro?".

Se responderem algo em torno de 3 e identificarem esse padrão para todas as circunferências, o professor deverá dar início ao terceiro momento da atividade, intitulado de "introdução a contextualização histórica". Neste momento o educador deverá realçar que realmente há uma constante responsável pela relação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro.

O docente deverá frisar que essa constante hoje em dia é conhecida como π e que é algo que tem sido conhecido por milhares de anos, dando breves exemplos de sua utilização na antiguidade, como o armazenamento de alimentos em cilindros pelos egípcios (Barros; SÁ, 2022) e o cálculo da área de círculos pelos babilônios (Silva, 2016).

É válido ressaltar aos alunos que sem a existência do número π, vários problemas não poderiam ter sido solucionados, e devido à importância desse assunto, ele é citado nos currículos do ensino básico (Barros; SÁ, 2022). Dentre alguns exemplos da importância da utilização do número π, é possível elencar a medição de longas distâncias no planeta Terra, tendo em vista que a Terra é um geoide; a determinação da posição e dos movimentos dos astros no céu, utilizando a geometria esférica, que nada mais é do que uma extensão da geometria plana aplicada a esfera e etc. (Abreu, 2015).

Segundo Oliveira e Gomes (2009), "as evidências sobre a utilização desse número indicam que a ideia de π já era usada há cerca de 4.000 anos, sendo a relação constante entre a circunferência e o seu diâmetro percebido por muitas civilizações antigas" (Oliveira; Gomes, 2009, apud Barros; SÁ, 2022).

No quarto momento da atividade proposta, o professor deverá provocar os estudantes a dividirem o comprimento de cada circunferência pelos seus respectivos diâmetros, permitindo que eles utilizem calculadoras. Em seguida, o educador deverá colocar no quadro os resultados aproximados para o número π obtidos por alguns estudantes da turma em que a proposta foi aplicada, destacando um valor médio como consenso atingido pelos discentes para a aproximação do número π, acentu-

ando o quanto a aproximação dos alunos acerca da constante π foi refinada em relação às estimativas iniciais apresentadas pela turma.

No quinto e último momento da atividade proposta, o professor deverá continuar a contextualização histórica do número π, gerando uma nova pergunta para a classe: "como vocês acham que o valor de π era calculado no passado?" mostrando uma síntese dos valores que o π assumiu ao longo da história, conforme o Quadro 1, correlacionando estes valores com a média obtida pela turma de forma a encaixá-los de maneira lúdica em um dos períodos históricos, de acordo a aproximação do π que obtiveram.

Figura 1 – Aproximações de π

Origem/autor	Data	Valor
Babilônia	2000 a. C.	$3+\frac{1}{8}$
Egito (Papiro de Ahmes)	1650 a. C.	$\left(\frac{16}{9}\right)^2$
Arquimedes	250 a. C.	$\frac{22}{7}$
Ptolomeu	150 d. C.	$\frac{377}{120}$
China (Liu Hui)	ca. 220 d. C.	3,14159
China (Tsu Chung Chih)	480 d. C.	$\frac{355}{113}$

Fonte: Barros e Sá (2022, p. 3).

Após isso, é importante que o docente introduza brevemente o método da exaustão utilizado por Arquimedes para determinar uma aproximação do valor de π. Explicando que este método, consiste em inscrever e circunscrever polígonos regulares em uma circunferência para obter uma aproximação do comprimento da circunferência, através do comprimento dos perímetros desses polígonos.

Para ilustrar esse conceito, o professor deverá desenhar no quadro um quadrado circunscrito e um inscrito a circunferência, questionando os alunos se há alguma forma de fazer esses polígonos ficarem mais parecidos com o círculo e melhorar a aproximação obtida. O objetivo é conduzi-los à conclusão de que, ao aumentar os lados dos polígonos, sua forma se aproxima cada vez mais com uma circunferência, o que resultará em uma melhor aproximação para o comprimento da circunferência.

Após essa reflexão, o professor deverá explicar que seguindo essa lógica Arquimedes utilizou um polígono de 96 lados para determinar a aproximação de π.

Em seguida, o docente poderá estimular os alunos a pensarem em como as outras aproximações de π foram obtidas, dando de exemplo o caso do matemático chinês Liu Hui, o qual não satisfeito com as façanhas de Arquimedes foi além e utilizou um polígono de 3072 lados para determinar que π = 3,14159 (Silva, 2016), enriquecendo assim a contextualização histórica e sanando eventuais curiosidades que possam surgir com a pergunta realizada anteriormente.

O objetivo desse momento é fazer os alunos compreenderem que a precisão do número π foi aumentando ao longo dos séculos mediante o avanço das técnicas matemáticas, mostrando que o

valor de π durante muito tempo não foi um conceito fixo e pronto, sendo um valor que foi refinado ao longo da história da civilização humana.

Além disso, o docente deverá instigar os alunos a construírem uma fórmula para calcular o comprimento da circunferência com base no que viram no decorrer da atividade "Segredo das circunferências", guiando-os para que, a partir das discussões e explorações realizadas descubram que essa relação é dada por $C=2\pi r$.

Destacando mais uma vez que o valor de π é fundamental em diversos cálculos e como por exemplo no cálculo de ondas como as que vemos na água ou até as ondas de rádio e som, e evidenciando que o π também é utilizado na criação de jogos e animações, sendo aplicado em movimentos circulares e rotações e até mesmo para projetar construções na engenharia.

Realçando que o símbolo que conhecemos hoje para π só foi começar a ser utilizado em 1706, pelo matemático galês William Jones (Soriano; Vianna, 2022), havendo até mesmo tentativas de outras representações como a sugerida em 1859 pelo professor Benjamin Pierce de Harvard o qual apresentava como alternativa para substituir a notação de π, o símbolo "@", que não foi amplamente aceito pela comunidade científica da época (Bortoletto, 2008).

ANÁLISES E RESULTADOS

Embora a atividade proposta não tenha sido aplicada, é possível supor alguns resultados com base na literatura existente e nas intenções pedagógicas delineadas, portanto, a expectativa é que a atividade envolva praticamente todos os alunos da turma em que a mesma for aplicada, utilizando como um meio para tal finalidade várias curiosidades históricas e perguntas às quais serão submetidos.

Ademais, essa proposta visa desenvolver habilidades críticas e reflexivas nos discentes ao discutir a relevância do número π em diferentes áreas. Eles terão a oportunidade de pensar sobre a Matemática como uma disciplina viva, desafiando a visão tradicional de que ela se trata apenas de uma série de respostas prontas (Boaler, 2018).

Embora a atividade não tenha sido aplicada neste estudo e isso ter impedido a coleta de dados, acreditamos que ela possa contribuir para despertar o interesse e a curiosidade dos alunos em relação a Matemática em geral, ocasionando também em uma melhora dos seus níveis de compreensão quanto a fórmula do comprimento da circunferência e a importância do valor do número π. Adicionalmente, almejamos como uma etapa futura do trabalho sua aplicação em uma turma e a análise da experiência da proposta que trouxemos aqui.

A partir do que foi considerado neste trabalho, defendemos que é necessário que os educandos se sintam motivados e engajados e para isso, é fundamental que os educadores busquem formas de tornar a Matemática mais acessível e relevante, tendo como um possível meio, por exemplo, a História da Matemática.

A proposta "Segredo das circunferências" serve como uma sugestão para outras intervenções pedagógicas que busquem inovar no ensino de Matemática, trazendo uma abordagem nova e diferente para o ensino do número π que tem um envolvimento maior com a História da Matemática e

permite a reflexão dos estudantes em torno da história dessa constante e de seus usos na Matemática atual.

Além disso, a natureza prática e dialogada da dinâmica que propusemos permite que ela seja facilmente implementada em diversas turmas e níveis de ensino, promovendo um aprendizado contínuo e progressivo ainda que haja uma padronização do momento escolar em que o conteúdo costuma ser ensinado.

Tendo em vista a necessidade de ressaltar a relevância histórica da determinação de uma aproximação cada vez mais precisa de π e caso o docente lecione em turmas onde a facilidade na disciplina é evidente, o mesmo poderá acrescentar a dinâmica um sexto momento envolvendo o cálculo de área da circunferência.

Para fazer isso, sugere-se que o professor volte a utilizar o exemplo do armazenamento de alimentos em celeiros cilíndricos pelos egípcios, que são figuras geométricas com base circular. Essa abordagem deverá ser utilizada para destacar a importância do π desde os tempos antigos e introduzir à maneira que os egípcios calculavam a área da circunferência da base do cilindro.

Para explicar essa forma de calcular, o professor deverá solicitar que cada grupo escolha o diâmetro de um dos objetos circulares que trouxeram e que façam os cálculos, através das instruções que o professor deverá passar as quais deverão estar em consonância com a descrição de Ritter (1989) a respeito da forma que os egípcios faziam seus cálculos, explicitando também que os alunos poderão utilizar calculadora, tendo em vista os números com várias casas decimais que poderão surgir.

Segundo Ritter (1989), para realizar esta tarefa, os egípcios usavam um método específico. Primeiro, eles pegavam o diâmetro do círculo e o dividiam por 9. Em seguida, subtraíam esse resultado do valor original do diâmetro e, por fim, multiplicavam o novo valor obtido por ele mesmo, chegando a uma aproximação da área do círculo.

Após isso, o professor deverá reunir todos esses passos em uma equação no quadro, mostrando que se fôssemos adaptar o método utilizado pelos egípcios para o cálculo da área de circunferências aos dias de hoje, utilizaríamos a fórmula: $A=(16/9*r)^2$

Em seguida, o docente deverá fazer com que os discentes calculem novamente a área aproximada do objeto circular que escolheram anteriormente, porém desta vez, com a fórmula descoberta para que possam verificar que o resultado coincidirá com o cálculo feito com as instruções dadas inicialmente.

Nesta etapa é importante que o professor retome o quadro de aproximações de π, evidenciando que na época dos egípcios a aproximação para o π era $(16/9)^2$. O intuito é que após essa elucidação, o docente estimule os alunos perguntando "Com base nas aproximações de pi reveladas ao longo da aula, de que maneira poderíamos tornar o cálculo da área da circunferência mais preciso?", onde o professor deverá guia-los através de discussões em grupo a identificarem que a fórmula para o cálculo da área da circunferência utilizada atualmente é $A = \pi r^2$, proposta a qual dará a oportunidade para que descubram a área da circunferência através de reflexões fundamentadas na história da Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por fim, conclui-se que a partir da exploração do valor de π e de sua rica trajetória histórica, o presente artigo evidencia que atividades pedagógicas fundamentadas na História da Matemática podem melhorar a visão dos alunos e a forma como se relacionam com a disciplina. Com o exposto, nosso artigo propõe baseado nas literaturas abordadas, uma atividade investigativa que busca estimular a curiosidade e o pensamento crítico dos estudantes, promovendo uma aprendizagem significativa e dialogada, gerando uma compreensão mais profunda dos conceitos abordados.

Ao atribuir contextos históricos nas aulas de matemática, espera-se que os estudantes deixem de encarar a disciplina como um conjunto de fórmulas e conceitos imutáveis, compreendendo-a como uma ciência viva construída pelos esforços de incontáveis pessoas.

Em síntese, a proposta apresentada serve não apenas como uma alternativa metodológica para enriquecer o ensino de Matemática, mas também como um convite para que educadores repensem suas práticas pedagógicas, explorando abordagens que integrem o conhecimento histórico com o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais para a aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ABREU, Shyrlene Martins de. **Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas à astronomia de posição.** 2015. 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)–Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba, 2015.

ALMEIDA, Daniel Carlos Siqueira de. **A potencialidade da história da matemática como ferramenta para o ensino e aprendizagem de estatística no ensino fundamental**. 2022. 66 f. TCC (Graduação)–Curso de Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, 2022.

BARROS, Rafael Lameira; SÁ, Pedro Franco de. Incrível história do número pi. **Revista História da Matemática para Professores**, Natal (RN), v. 8, n. 1, p. 1-11, 2022.

BOALER, Jo. **Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador**. Brasil: Penso Editora, 2018.

BORTOLETTO, Anésia Regina Schiavolin. **Reflexões relativas às definições do número π (pi) e à presença da sua história em livros didáticos de matemática do ensino fundamental.** 2008. Dissertação (Mestrado em Educação)–Universidade Metodista de Piracicaba, Faculdade de Ciências Humanas, Piracicaba, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

DANTAS FILHO, Jerônimo Vieira. Baixo rendimento na disciplina de matemática. EDUCA–**Revista Multidisciplinar em Educação**, Porto Velho, v. 4, n° 9, p. 98 a 113, set./dez. 2017. e-ISSN: 2359-2087.

ERSOY, E.; ÖKSÜZ, C. Efeito do uso da história da matemática em alunos do 4º ano do ensino fundamental. **İlköğretim** Online, v. 15, n. 2, p. 408-420, 2016.

FURINGHETTI, Fulvia. Teacher education through the history of mathematics. **Educ Stud Math**, [S. l.], v. 66, n. 2, p. 131–143, 2007. DOI: 10.1007/s10649-006-9070-0. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-9070-0. Acesso em: 1 de mar. 2025.

GRUDTNER, Guilherme Luiz; BERTATO, Fábio Maia; D'OTTAVIANO, Itala Maria Loffredo. A Medida do Círculo: Uma tradução do texto ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ de Arquimedes. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [s. l.], v. 21, n. 42, p. 1–13, 2021. DOI: 10.47976/RBHM2021v21n421-13. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/354. Acesso em: 1 set. 2024.

LIMA, Kaliandra Pacheco de; POERSCH, Kelly Gabriela; EMMEL, Rúbia. Dificuldades de ensino e de aprendizagem em Matemática no oitavo ano do Ensino Fundamental. **REMAT**, Bento Gonçalves, RS, Brasil, v. 6, n. 1, p. 01-15, fev. 2020. Disponível em: https://www.academia.edu/download/104590892/2569.pdf. Acesso em: 18 set. 2024.

OLIVEIRA, Vanessa de; PAULO, Rosa Monteiro. O cálculo mental nos anos iniciais do ensino fundamental: discutindo possibilidades. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 9, n. 21, Seção Temática, 2016.

RITTER, James. A cada um a sua verdade: as matemáticas no Egito e na Mesopotâmia. In: **Elementos para uma História das Ciências**. Serres, Michel (org.). Lisboa, Terramar, Vol. 1 (Da Babilônia à Idade Média), 1989, pp. 47-72.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma proposta didática. **Ciência & Educação**, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

SILVA, Manuel Amancio da. **A utilização da história da matemática na construção do conceito do número Pi nos livros didáticos da coleção Praticando Matemática**. 2016, 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática)–Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2016.

SORIANO, Mariana da Silva; VIANNA, Márcio de Albuquerque. Aprendizagem significativa em matemática: contribuições da origem do pi nas medições do círculo. **Revista História da Matemática para Professores**, [S. l.], v. 8, n. 2, p. 1-10, 2022. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/87. Acesso em: 15 out. 2024.

TRIVIZOLI, L. M. Descobrindo pi: duas atividades baseadas nos trabalhos de arquimedes. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 4, n. 12, p. 6–13, 2018. DOI: 10.30938/bocehm.v4i12.22. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/22. Acesso em: 1 set. 2024.

ZOMPERO, A. F.; LABURU, C. E. Atividades investigativas no ensino de ciências: aspectos históricos e diferentes abordagens. **Ensaio**: pesquisa em educação em ciências, Belo Horizonte, v. 13, n. 3, p. 1-80, 2011.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

A matemática na Proposta Curricular Pernambucana (1974): um estudo histórico fundamentado na teoria da objetivação

Mathematics in the Proposta Curricular Pernambucana (1974): a historical study based on the theory of objectification

Natália Lucile Medeiros de Lira[1]
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Juliana Martins[2]
Instituto Federal de Pernambuco – IFPE

RESUMO

Neste trabalho discutimos a matemática presente na Proposta Curricular Ensino – 1º grau de Pernambuco, documento proposto pela Secretaria de Educação e Cultura do Estado e publicado em 1974 em diversos volumes. Diferente de outros documentos curriculares publicados até essa data, a proposta de 1974 era de nível estadual ao invés de nacional, tendo objetivo de atender melhor às necessidades das escolas do estado. O estudo foi fundamentado na Teoria da Objetivação (TO) e em seus pressupostos, especialmente nos Sistemas Semióticos de Significação Cultural (SSSC), compreendendo que existe uma relação dialética no processo de escrita deste documento curricular com as demandas sociais de sua época. Assim, analisamos o Volume I–Fundamentação (que contém questões filosóficas, sócio-econômicas, psicológicas e pedagógicas), e o Volume III–Ciências (onde concentra-se a parte dos conteúdos de matemática). Em um primeiro olhar destacamos as contradições propostas para o ensino da Matemática na parte relativa às teorias pedagógicas que embasam o documento, e a maneira como os conteúdos são apresentados ao longo das séries escolares.

Palavras-chave: Proposta Curricular Pernambucana (1974); História do Ensino de Matemática; Teoria da Objetivação; Sistemas Semióticos de Significação Cultural.

ABSTRACT

In this work we discuss the mathematics present in the Curricular Proposal for Teaching–1st grade in Pernambuco, a document proposed by the State Department of Education and Culture and published in 1974 in several volumes. Unlike other curriculum documents published up to that date, the 1974 proposal was at a state level rather than a national one, aiming to better meet the needs of the state's schools. The study was based on the Theory of Objectification (TO) and its assumptions, especially on the Semiotic Systems of Cultural Significations (SSSC), understanding that there is a dialectical relationship in the process of writing this curricular document with the social demands of its time. Thus, we analyzed Volume I–Foundation (which contains philosophical, socio-economic, psychological and pedagogical issues), and Volume III–Sciences (where the mathematics content is concentrated). In a first analysis, we highlight the contradictions proposed for the teaching of Mathematics in the part relating to the pedagogical theories that support the document, and the way in which the contents are presented throughout the school grades.

Keywords: Proposta Curricular Pernambucana (1974); History of Mathematics Teaching; Theory of Objectification; Semiotic Systems of Cultural Significations.

INTRODUÇÃO

As reformas curriculares no cenário educacional em Pernambuco foram estudadas por Maria Leopoldina de Albuquerque Britto[3], professora da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), por meio do projeto: "A Trajetória do Currículo na Rede Estadual de 1º Grau em Pernambuco".

[1] Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências – PPGEC (UFRPE), Recife, Pernambuco, Brasil. E-mail: natalia.lucile@ufrpe.br.

[2] Pós-Doutora em Ensino das Ciências (UFRPE). Professora no Instituto Federal de Educação (IFPE), Recife, Pernambuco, Brasil. E-mail: juliana.martins2@ufrpe.br.

[3] Segundo consta em uma nota publicada no site da UFPE, a professora Maria Leopoldina de Albuquerque Britto faleceu no dia 04.03.2018, aos 81 anos de idade. https://www.ufpe.br/en/ce/-/asset_publisher/8TgQ0vpyChuQ/content/id/1252202

Infelizmente encontram-se poucas informações sobre o desenvolvimento e publicações referentes a esse projeto, com exceção de um artigo, publicado em 1993, e um livro publicado em 2005.

Do mesmo modo, a revisão da literatura sobre o tema aponta poucas pesquisas sobre a *matemática* presente nos documentos curriculares do estado, entre elas destacamos o estudo de Costa (2022).

A presente investigação faz parte da dissertação de mestrado da primeira autora deste texto. De cunho histórico, o estudo tem o objetivo de discutir sobre a matemática que aparece na Proposta Curricular de 1974, considerando que este documento foi um marco na educação em Pernambuco por ser o primeiro a nível estadual, rompendo com os currículos nacionais.

Segundo Britto (1993, p. 28), o documento curricular de 1974 foi pensado como: "uma proposta – a qual poderia ser aceita, ou não, e alterada de forma a se adequar às necessidades e possibilidades de alunos e professores".

Como suporte teórico para a investigação, utilizamos a Teoria da Objetivação (TO), especialmente os Sistemas Semióticos de Significação Cultural (SSSC). Assumimos a proposta curricular de 1974 como um artefato cultural que é produzido a partir de processos sociais e suas relações dialéticas. Essa visão corrobora com Sacristán (2013), quando afirma que um currículo é a ponte entre a cultura e a sociedade, isto é, forma um elo com a cultura dos sujeitos.

A PROPOSTA CURRICULAR PERNAMBUCANA DE 1974–VOLUMES I E III

No ano de 1974 a Secretaria de Educação de Pernambuco publicou uma coletânea de documentos intitulados por: "*Proposta Curricular Ensino–1º grau*". Inicialmente a proposta era composta por quatro volumes, cada um deles foi publicado separadamente, como livros distintos. Em 1978 a proposta foi republicada e acrescida de mais cinco volumes que já haviam sido publicados ao longo do ano de 1975.

Os primeiros volumes foram organizados do seguinte modo: "Volume I–Fundamentação filosófica, socioeconômica-cultural e psicológica; Volume II–Comunicação e expressão; Volume III–Ciências; e Volume IV–Estudos Sociais" (Britto, 2005, p. 159). Os outros cinco volumes têm como título: Sistemática para elaboração do Currículo Pleno; Formação Especial; Ensino Religioso; Sistemática da Avaliação do Aluno de 1º grau e Alternativas para recuperação aluno 1º grau.

Nossa pesquisa consiste na análise do Volume I, com o intuito de compreender a fundamentação filosófica presente naelaboração deste documento curricular, e o Volume III, onde se encontram orientações quanto ao ensino dos conteúdos matemáticos de 1ª a 8ª série. Interessa-nos também verificar a articulação entre esses dois volumes.

Figura 1: Volume I–Fundamentação

Fonte: Biblioteca do CE–UFPE

Figura 2: Volume III–Ciências

Fonte: Biblioteca do CE–UFPE

Esses dois volumes foram encontrados na biblioteca do Centro de Educação (CE) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), em um acervo interno, sem acesso ao público geral, pois havia uma ala da biblioteca que estava passando por reformas.

O Volume I é dividido nos seguintes subtópicos: justificativa, introdução, fundamentos filosóficos, fundamentos socioeconômico-culturais, fundamentos psicológicos, objetivos e bibliografia. O intuito desse volume seria: "oferecer estruturas que possam servir como referência na seleção e organização de objetivos e experiências curriculares e proporcionar meios e instrumentos de avaliação aos professores das diversas áreas e matérias" (Secretaria de Educação e Cultura, 1974a, p. 11).

Essa tarefa seria suficientemente difícil, de modo que seu êxito ou fracasso estariam relacionados aos:

> [...] valores e ideais da sociedade que vão projetar "o ideal de homem" que se pretende atingir; pela sociedade com sua herança cultural, sempre acrescida e transformada a todo momento e, ainda, projetada para o futuro; pelas próprias crianças e pré-adolescentes com suas características, suas necessidades, seus interesses, seus motivos e seus níveis de aspirações (Secretaria de Educação e Cultura, 1974a, p. 11).

Segundo seus autores, pensar a proposta curricular em Pernambuco se insere nas ações do MEC (Ministério da Educação e Cultura), que naquela oportunidade buscavam a racionalização, expansão e melhoria do ensino básico a partir de projetos de elaboração e reformulação de currículos.

Os três temas principais discutidos no Volume I envolvem questões filosóficas, socioeconômicas-culturais e psicológicas que norteiam e fundamentam o que se está assumindo por educação e currículo naquele momento histórico.

A partir da página 12 do documento, na discussão filosófica, encontramos alguns tópicos que, segundo os autores, tendem a assegurar o sentido mais próprio e mais humano da educação. Chegam a expressar uma definição de educação dada Cottler[4]:

[4] Autor que não conseguimos localizar mais informações, seu trabalho também não consta nas referências do documento.

> [...] invocando a própria autoridade de COTTLER, pode-se definir educação como o **conjunto de técnicas, atividades e experiências por que passa o educando para chegar àquele grau de maturação além do qual está habilitado a exercer sua autonomia existencial, como personalidade emancipada, como ser social e como ser produtivo** (Secretaria de Educação e Cultura, 1974a, p. 14, grifo dos autores).

Nota-se a valorização pela formação humanística e, mesmo que se estivesse pensando a nível nacional em uma formação profissional (segundo a Lei 5692/71), o a proposta curricular de 1974 tende a preocupar-se com a formação do sujeito, conforme observamos na citação: "se se formular um ensino só em torno de objetivos inteiramente atingíveis a curto prazo, ter-se-á transformado a educação em mero treino mecânico e ter-se-á perdido, no homem, aquilo que ele tem de mais humano" (Secretaria de Educação e Cultura, 1974a, p. 15).

Na discussão sobre as questões socioeconômicas-culturais, os autores falam sobre a industrialização e urbanização, sua relação e como impactam a vida das pessoas no mundo contemporâneo daquela época. A transmissão de conhecimentos entre as sociedades seria uma das consequências dessa globalização, e ocorre em meios diversos, como nas relações entre pais e filhos, nos grupos de amigos e vizinhos, nas relações profissionais, nos cultos religiosos, nos clubes de recreação, nas rádios, jornais e revistas etc.

No entanto, o trato dos conhecimentos de maneira formal seria função da escola, mas, sem deixar de lado os aspectos culturais da região. Com isso,

> é na escola que o processo educativo se manifesta de maneira formal. Isolar consequentemente, a escola de seu ambiente social, com a aplicação de técnicas não adequadas ao tipo de homem e de cultura (nacional ou regional, rural ou urbana) é não compreender a relevância da educação enquanto processo social, para promover o homem e integrá-lo à sociedade (Secretaria de Educação e Cultura, 1974a, p. 17).

Essa proposta, como dito anteriormente, foi a primeira a nível estadual, pois visava atender as especificidades da educação no estado, visto que, de acordo com os relatos dos professores citado por Britto (1993, p. 20) a inadequação dos currículos era o fator principal para as críticas negativas em relação à qualidade do ensino. Para os autores, em um país tão diverso como o Brasil, seria importante considerar que existem contextos sociais e/ou culturais variados.

Com relação às questões psicológicas, o documento aponta que existe um processo de desenvolvimento estrutural do organismo a partir de condições genéticas pessoais, iniciado ainda na fase da gestação. A partir daí há uma influência do ambiente nesse desenvolvimento pois o sujeito vai se inserindo na cultura local, isto é, sua aculturação.

Nas páginas seguintes, o documento separa as crianças em dois grupos: de 7 a 11-12 anos e de 11-12 a 14 anos, para discorrer sobre os aspectos psicomotor e intelectual, a formação do eu e do desenvolvimento físico, sexual e sócio-afetivo. Cabe destacar que nessa discussão os estudos do biólogo e psicólogo Jean Piaget são citados[5].

Passamos agora a falar sobre o Volume III que aparece dividido em três seções: Ciências, Ciências Físicas e Biológicas e Programas de Saúde, e Matemática. Esta última seção, foco de nosso

[5] A teoria de Piaget também é conhecida por construtivismo e diz respeito à construção do conhecimento de modo individual.

estudo, se divide nos seguintes tópicos: Introdução; Objetivos; Importância; Objetivos gerais das séries; Objetivos específicos e Conteúdos Programáticos; Orientação metodológica; Avaliação; Bibliografia.

Segundo o documento, a reformulação dos conteúdos de matemática na proposta de 1974, visava atender à realização pessoal e ao desenvolvimento científico e tecnológico da época durante os 8 anos que o aluno permanecia no 1º grau. Pontuam os seguintes objetivos acerca do ensino da matemática:

- Desenvolver o espírito de investigação, reflexão, iniciativa e invenção;
- Desenvolver a habilidade de: solucionar problemas relacionados com situações da vida cotidiana;
- Interessar-se pela Matemática;
- Saber usar adequadamente a linguagem matemática;
- Desenvolver a noção de universalidade das leis matemáticas;
- Compreender a importância da Matemática no mundo contemporâneo;
- Descobrir seus interesses e aptidões;
- Desenvolver a capacidade de comunicar suas ideias com precisão, clareza e objetividade;
- Buscar constantemente o próprio crescimento e o crescimento do outro. (Secretaria de Educação e Cultura, 1974b, p. 61).

Existem também algumas considerações em relação a organização dos conteúdos curriculares, conforme descrito a seguir:

> Da 1ª a 8ª série, o aluno se familiariza progressivamente com a **linguagem dos conjuntos, das relações e funções**, visando a sua aplicação adequada em qualquer campo da Matemática. Na aquisição dessa linguagem, o educando parte do que lhe é **familiar** para, aos poucos, operar com os conjuntos numéricos, iniciando, nas quatro primeiras séries, o estudo do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) e dos números racionais ($\mathbb{Q}$). Na 5ª e 6ª séries, o professor aprofundará o estudo dos conjuntos dos números naturais e dos números racionais, respectivamente, com a finalidade de oferecer ao aluno condições necessárias às abstrações mais complexas, nas séries seguintes. O estudo dos conjuntos dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) e dos números racionais ($\mathbb{Q}$) será realizado na 7ª série, de modo que o aluno perceba as relações entre os conjuntos, estudados anteriormente. Na 8ª série, o aluno estudará o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) quando ele deverá redescobrir que as propriedades estruturais dos sistemas numéricos, estudados anteriormente, são mantidas. Quanto ao estudo da Geometria, considera-se válido graduarem-se os objetivos e os conteúdos de 1ª a 8ª série de forma, que, nas primeiras séries, o aluno adquira os conceitos geométricos básicos, necessários a um maior aprofundamento nas últimas séries do ensino de 1º Grau. Assim procedendo, objetiva-se dar ao educando condições para que ele redescubra, analise e aplique corretamente conceitos e relações geométricas (Secretaria de Educação e Cultura, 1974a, p. 62, grifo dos autores).

Pela citação acima, compreende-se que o ensino de matemática no 1º grau se dividia no estudo dos conjuntos numéricos e no estudo da Geometria. É dito que da 1ª a 4ª série o trabalho estava voltado ao conjunto dos números naturais e dos racionais. A partir da 5ª série o aluno ia progressi-

vamente adentrando em outros conjuntos numéricos até chegar ao conjunto dos números reais. Há ênfase na linguagem dos conjuntos, das relações e funções, visto que aparecem em negrito no texto.

Em seguida são apresentados vários quadros com os objetivos gerais e específicos de cada série, com os seus respectivos conteúdos programáticos. A seção 3.4, intitulada: *orientação metodológica* comenta que os professores tendem a começar de situações abstratas para concretas, o que dificulta a aprendizagem dos estudantes. Logo, indica o trabalho com situações desafiadoras e familiares à vida dos alunos partindo do concreto para o abstrato.

Os jogos aparecem como uma alternativa para o ensino de matemática, pois auxilia o estudante a "aprender a pensar" (Secretaria de Educação e Cultura, 1974b, p. 84), contribuindo também na sua liberdade de investigação. Assim, os alunos perceberiam os resultados por si mesmos e conseguiriam formalizá-los na linguagem matemática.

Ao final do documento existe uma curta seção de um parágrafo, abordando o processo de avaliação, onde sugere-se que o professor verifique as mudanças nos domínios afetivos, cognitivos e psicomotor dos estudantes. Na última seção são apresentadas as referências do documento.

PRINCÍPIOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS: A TEORIA DA OBJETIVAÇÃO E OS SSSC

A Teoria da Objetivação (TO) é uma teoria do campo educacional proposta em meados da década de 1990, pelo professor Luis Radford. Seu principal objetivo é se apresentar como uma alternativa às teorias individualistas de aprendizagem, como por exemplo, o construtivismo de Piaget. A base teórica em que a TO se assenta é construída a partir de princípios do materialismo histórico-dialético, da escola soviética da psicologia sociocultural, do projeto educativo freiriano, entre outras correntes filosóficas.

Além de auxiliar nas discussões sobre o ensino e aprendizagem da matemática, especialmente da álgebra, há uma visão implícita sobre história dentro dessa teoria. Essa visão poderia ser traduzida como uma perspectiva histórica dialética, que contribuiria na compreensão da realidade por meio do estudo do passado, em que seria fundamental a ideia que o movimento dialético une e dá sentido às ações humanas em determinados contextos culturais.

Segundo a TO as interações ocorridas nas práticas sociais são conduzidas por sistemas dinâmicos carregados de ideologias, que dão sentido e significado às ações humanas (também chamadas por *atividade*[6] dentro da TO). Esses sistemas são chamados de Sistemas Semióticos de Significação Cultural (SSSC). Para Radford (2011), os SSSC são responsáveis

> [...] pelas visões e crenças que uma cultura possui sobre o que é bom, certo, belo etc. Isso inclui ideais sobre verdade, os métodos de inquirir sobre ela, o que conta como evidência, as formas legítimas de representação do conhecimento etc. Também se relaciona a crenças sobre objetos matemáticos, seu modo de existência e sua relação com nosso mundo concreto (Radford 2011, p. 226–227).

[6] Dentro da TO o conceito de atividade é assumido segundo o estudioso russo Leontiev.

Logo, os SSSC acabam tendo uma função normativa, explícita ou implicitamente, transmitindo visões políticas e éticas. Regulam "como nos mostramos aos outros e como se espera que nos comportemos socialmente e sejamos reconhecidos pelos outros (Radford, 2021, p. 239)". É na atividade humana que os SSSC se encontram, e é a partir dela que os infinitos artefatos culturais são produzidos.

Nessa perspectiva, os artefatos carregam em si marcas, visíveis ou não, do modo de vida e do pensamento de sua própria cultura. Assim, estudar esses artefatos e desvendar suas marcas é uma etapa essencial na pesquisa histórica.

A investigação realizada neste trabalho assume o documento curricular escrito em 1974 e publicado pela Secretaria de Educação de Pernambuco, como um artefato cultural. Como observado em Moretti (2015), ao entrevistar Luis Radford, ele afirma que:

> mais do que um documento a seguir, um currículo deveria ser um ponto de partida para que os indivíduos em certas localidades, em certas comunidades, reflitam a respeito deles e do mundo. Um currículo é um artefato impulsionado por duas forças opostas. Por um lado, uma força centrípeta, que busca identificar elementos comuns (ideias, conceitos, maneiras de fazer, maneiras de ser); por outro lado, uma força centrífuga, que aponta a diferença. Nesse sentido, um currículo é um artefato dinâmico, portador de tensões. Essas tensões fazem parte da natureza do currículo e, sem elas, ele não poderia ser um artefato cultural genuíno, crítico, aberto e suscetível de ser transformado continuamente (Moretti, 2015, p. 258).

Nesse estudo buscamos lançar esse olhar histórico-dialético da TO na tentativa de compreender a matemática presente no documento curricular analisado, considerando os SSSC envolvidos nesse processo. Em outras palavras, buscamos entender de que modo a matemática presente na Proposta Curricular Pernambucana de 1974 se encaixa e responde às demandas geradas pelas estruturas econômicas, políticas e educacionais de seu momento histórico.

RESULTADOS: ALGUMAS INCOERÊNCIAS ENTRE OS VOLUMES I E III

Embora a Proposta Curricular Ensino de 1974 seja considerada como um documento curricular único que deveria possuir uma certa homogeneidade, há contradições significativas entre as ideias defendidas pelos autores do Volume I–Fundamentação e as ideias defendidas pelos autores que organizaram a parte de conteúdos programáticos e objetivos específicos da Matemática, presente no Volume III–Ciências.

O grupo responsável pela elaboração do Volume I foi composto por duas equipes, uma de elaboração e outra de currículo. Na equipe de elaboração, a professora Vilma Maria de Lima Bezerra, com graduação nas áreas de Pedagogia e Psicologia, mestrado na área de Psicologia cognitiva e doutorado em Psicologia experimental, o professor Epitácio Fragoso Vieira com formação nas áreas de Magistério, Filosofia e Letras e José Alberto Tavares da Cunha Melo que possuía formação nas áreas de Jornalismo e Sociologia, e era escritor.

Na equipe de currículo, aparecem os seguintes nomes: Albene de Menezes Bezerra, Amalita Maria Costa Lima Cavalcanti, Elizabeth Figueira Dias, Eliziete Cassimiro de Freitas, Maria Angelita

de Souza, Maria Cavalcante da Silva, Maria Edna Aguiar Gomes, Nadja Henriques de Araujo, Paula Franssinette Ferraz Moraes e Vilma Maria de Lima Bezerra.

Já a elaboração do Volume III, foi coordenada por Albene de Menezes Bezerra e Maria Cavalcante da Silva e contou com os seguintes nomes: Albene de Menezes Bezerra, Aurora Tabosa, Cecy de Oliveira Morim, Maria Cavalcante da Silva, Maria José de Souza Leão, Maria Valderez Campos de Araújo e Olegário da Costa Fialho.

A diferença entre os membros das equipes que escreveram a parte da fundamentação teórica da Proposta de 1974 e os que organizaram o volume III, pode justificar a incoerência do modo com que os conteúdos matemáticos aparecem ao longo das séries referentes ao ensino do 1º grau.

Percebemos ao longo de nossas leituras do Volume I, a ênfase na importância de se considerar o aluno como um indivíduo único e dotado de diversas especificidades que são fruto da cultura e da sociedade na qual estão inseridos, na forma como foram criados e o convívio com seus familiares e ressalta,

> portanto, a prudência filosófica [que] ensina ver sempre o indivíduo concreto, com seu nome, sua história, seus problemas, suas diferenças individuais, sua existencialidade, sua situação e seus condicionamentos. Retirar a pessoa desse contexto e vê-la à luz de conceitos universais, é desconhecer sua especificidade, é submetê-la a um leito-de-procusto[7] (Secretaria de Educação e Cultura, 1974a, p. 12, nota dos autores).

Ou seja, não seria correto limitar o desenvolvimento de nossos alunos e nem os colocar em fôrmas pré-existentes, esperando que todos se desenvolvam da mesma forma e ao mesmo tempo, por meio das mesmas experiências.

Por outro lado, no Volume III não é possível ver alguma relação entre os meios para que os alunos desenvolvam o pensamento reflexivo, com os objetivos específicos designados para cada conteúdo programático. Estes, por sua vez, se apresentam bem delineados em torno do estudo dos conjuntos numéricos, em uma linguagem formal e muito específica. Não há indicação de como esses conteúdos irão promover o desenvolvimento autônomo do aluno.

Vejamos um exemplo, para a turma da 7ª série, cujo conteúdo programático é *Equação do primeiro grau com uma e duas variáveis em Z* e, o objetivo específico é, "Resolver em Z, equação do primeiro grau com uma e duas variáveis". Ou seja, a única preocupação é que o aluno aprenda como se resolve uma equação e depois reproduza esse método em outras atividades do mesmo modelo.

Segundo a Teoria da Objetivação, são os Sistemas Semióticos de Significação Cultural (SSSC) que acabam moldando as ações humanas em determinada *atividade*. Os SSSC expressam por meio dessas ações seu sistema de verdade, sua compreensão sobre o mundo, aquilo que é tido como verdadeiro ou falso (certo ou errado) em determinada época.

Ao analisar os Volumes I e III da proposta de 1974, conjecturamos que a parte dos conteúdos programáticos de matemática, representa o que se considerava como verdadeiro no que diz respeito ao seu ensino naquele momento histórico. Vale lembrar que alguns anos antes o ensino de mate-

[7] Procusto era o personagem da lenda grega que supliciava suas vítimas num leito: se a vítima era maior, cortava-lhes as pernas, se era menor, esticava-a para dar no tamanho da cama.

mática no Brasil havia sofrido forte influência do Movimento da Matemática Moderna, nesse caso caberia investigar com mais detalhes se os conteúdos programáticos da proposta de 1974 ainda seguiam o que propunha esse movimento.

Dentro da proposta, encontramos indicações de que devem ser propostas atividades que contribuam para o desenvolvimento do aluno, "[...] a atenção se deve dar aos exercícios de "manipulação, classificação e ordenação de objetos, de modo a lhe facilitar a aprendizagem das operações básicas de adição, multiplicação, inclusão e ordenação serial" (Secretaria de Educação e Cultura, 1974a, p. 26).

Segundo os autores do Volume I, as experiências práticas, o fato de deixar que o aluno faça, que pense, erre e acerte, são muito importantes. É preciso entender que a aprendizagem não acontece ao final de uma atividade, mas durante. É ter a consciência de que as crianças precisam do concreto para desenvolver o seu sistema cognitivo e então depois organizar esse processo no campo mental. Vejamos o que diz o documento:

> no ensino da Matemática devem, pois, ser criadas situações de aprendizagem que permitam a manipulação do material concreto, **familiar**, à vida do aluno, até ele ser capaz de fazer abstrações mais complexas, adequadas aos seus sistemas mentais (Secretaria de Educação e Cultura, 1974b, p. 83, grifo dos autores).

Percebemos que há um enfoque em trazer o lúdico, envolver os alunos de acordo com a sua faixa etária para trabalhar a literatura e as suas diversas formas de expressão. Seria importante compreender que no processo de ensino, não se pode impor o que se sabe aos alunos, que educação não é um processo de transmissão de conhecimentos, mas que, como bons profissionais, deveríamos saber conduzir os nossos alunos por experiências práticas e sensoriais que os levem a despertar a partir de si mesmos esses conhecimentos.

A proposta seria fazer com que os alunos se desenvolvessem a partir de suas experiências com o meio, seja em relação ao ambiente em si ou em relação aos objetos presentes nele. Ou seja, os alunos precisariam tocar o objeto sobre o qual estão aprendendo, para que fosse possível apropriar-se daquelas estruturas a partir de suas próprias conclusões.

Mais uma vez pontuamos que todas essas indicações apresentadas no Volume I não se alinham ao modo com que os conteúdos são apresentados no Volume III, nem se relacionam aos seus objetivos específicos.

Do mesmo modo, a breve orientação metodológica e a parte da avaliação, não apresentam de modo claro como os professores podem criar atividades partindo do concreto, para chegar no campo abstrato da linguagem dos conjuntos, das relações e das funções, conforme aparecem em destaque no Volume III.

Cabe destacar que embora a proposta curricular de 1974 tenha sido de nível estadual, ela foi elaborada considerando as normas e leis nacionais que regiam o cenário educacional da época, conforme indicado no próprio texto da proposta. Em trabalhos futuros serão analisados outros documentos relacionados à educação nessa época, no sentido de compreender por que os conteúdos de matemática se apresentam dessa maneira no Volume III.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho de investigação buscamos discorrer sobre a matemática presente na Proposta Curricular de Ensino–1º grau do Estado de Pernambuco, a partir de um estudo histórico fundamentado na Teoria da Objetivação e nos SSSC.

É possível notar que no decorrer da análise dos documentos curriculares, sempre há um destaque para a importância de levar em consideração os contextos social, político, econômico, histórico e cultural dos indivíduos, bem como fazer uma pré-análise da sociedade na qual o aluno está inserido, para que haja uma melhor compreensão deste como um todo, considerando principalmente as suas especificidades e a sua trajetória, que fazem parte da sua formação enquanto indivíduo.

Também pudemos notar que existia uma equipe qualificada, do ponto de vista pedagógico, que após diversas reuniões e discussões, chegaram ao documento curricular, como o apresentamos, ressaltando que, como o próprio nome já propunha, se tratava de uma proposta, que poderia e deveria ser adaptada para melhor atender às demandas das escolas.

Ao nosso ver, existe uma grande incoerência entre o que o documento propõe como fundamentos teóricos e filosóficos da educação e os objetivos e conteúdos do ensino de matemática para o ensino durante o 1º grau. Além disso, não há articulação entre a parte teórica e a parte metodológica.

Nos valendo da TO e dos SSSC, consideramos forte a hipótese de que a parte de matemática do Volume III seguia influenciada pelo Movimento da Matemática Moderna, devido ao fato da ênfase no estudo dos conjuntos numéricos e na formalização da linguagem matemática correspondente. Esse pode ter sido o "regime de verdade" que ainda imperava entre as discussões sobre o ensino de matemática da época, e que acabou moldando aquela realidade por meio do currículo.

Acreditamos que a fundamentação teórica utilizada neste estudo, traz possibilidades de reflexão para as produções em história da matemática, a partir de uma visão dialética da existência humana. Buscamos compreender historicamente sobre o modo como a matemática foi sendo constituída (alterada e alterando sua realidade), segundo as demandas sociais que ela visava atender.

REFERÊNCIAS

Secretaria de Educação e Cultura. Departamento de Ensino. Divisão de ensino de 1º e 2º graus. **Proposta curricular de ensino 1º grau – Volume I Fundamentação**, 1.v. Recife: SEC/PE, 1974a.

Secretaria de Educação e Cultura. Departamento de Ensino. Divisão de ensino de 1º e 2º graus. **Proposta curricular de ensino 1º grau – Volume III Ciências (incluindo Matemática)**, 3.v. Recife: SEC/PE, 1974b.

BRITTO, Maria Leopoldina de Albuquerque. **Propostas e programas de ensino da Secretaria de Educação de Pernambuco de 1923 a 1992**. [Proposals and programmes of the State Secretariat of Education of Pernambuco–1923/1992]. Tópicos Educacionais, v. 11, n. 1-2, p. 20-33, 1993.

BRITTO, Maria Leopoldina de Albuquerque. **A trajetória do currículo de Ensino Fundamental na rede estadual de Pernambuco nos séculos XIX-XX: aproximações do texto e do contexto** / Maria Leopoldina de Albuquerque Britto; prefácio Itamar de Abreu Vasconcelos. – Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2005.

COSTA, Wagner Rodrigues. **Currículo e suas características: O caso da Matemática de Pernambuco**. XX Seminário Temático Internacional–História da produção curricular em matemática: Saberes para o ensino e formação de professores. Osasco: SP, 2022.

MORETTI, Vanessa Dias; PANOSSIAN, Maria Lúcia; MOURA, Manoel Oriosvaldo de. **Educação, educação matemática e teoria cultural da objetivação: uma conversa com Luis Radford**. Revista Educ. Pesqui., São Paulo, v. 41, n. 1, p. 243-260, jan./mar. 2015.

RADFORD, Luis. **Teoria da objetivação: uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática**. Tradução de Bernadete Morey e Shirley Gobara. São Paulo: Livraria da Física, 2021.

RADFORD, Luis. **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia**. Morey Bernadete, Mendes Iran (Orgs). São Paulo: Livraria da Física, 2011.

SACRISTÁN, José Gimeno. **Saberes e incertezas sobre o Currículo**. Porto Alegre: Editora Penso, 2013.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

A avaliação na lei de diretrizes e bases da educação de 1971: o tecnicismo em foco

Assessment in the 1971 education guidelines and bases law: technicism in focus

Leonardo Severo[1]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

Dulcyene Maria Ribeiro[2]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

RESUMO

O Brasil viu surgir e crescer na década de 1970 um novo modelo econômico, baseado no neoliberalismo. O país vivia o auge do Regime Militar (1964–1985) e as mudanças econômicas, políticas, sociais e culturais ecoam também no sistema de ensino brasileiro. Influenciada pelo tecnicismo, é homologada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação em 1971 e o cenário educacional é marcado por transformações, visando aproximar-se daquilo que preconizava a legislação vigente. Assim, surge a questão norteadora deste trabalho: como a tendência tecnicista refletiu no tratamento dado à avaliação na Lei de Diretrizes e Bases da Educação homologada em 1971 no Brasil? Tem-se por objetivo principal analisar como a tendência tecnicista refletiu na Lei de Diretrizes e Bases da Educação homologada em 1971 e, consequentemente, nas concepções e finalidades da avaliação no processo educativo. Para produção e discussão de dados foi realizada uma pesquisa qualitativa, a partir de uma análise documental. O referencial teórico trará estudos de Luckesi (2002), Amaral (2021), Miguel (2007) e Fiorentini (1995). Os resultados encontrados apontaram para um tratamento superficial dado à avaliação na LDB/1971, ao mesmo tempo que o caráter classificatório é percebido a partir dos termos utilizados. Ainda, o sistema de ensino, coadunando com os objetivos tecnicistas, centrava seu interesse na preparação para a mão de obra útil ao mercado de trabalho.

Palavras-chave: Tendência Tecnicista; Sistema de Ensino; Educação.

ABSTRACT

Brazil saw the emergence and growth of a new economic model in the 1970s, based on neoliberalism. The country was experiencing the height of the Military Regime (1964–1985) and economic, political, social and cultural changes also echoed in the Brazilian education system. Influenced by technicality, the Education Guidelines and Bases Law was approved in 1971 and the educational scenario is marked by transformations, aiming to get closer to what the current legislation advocated. Thus, the guiding question of this work arises: how was the technical tendency reflected in the treatment given to assessment in the Education Guidelines and Bases Law approved in 1971 in Brazil? The main objective is to analyze how the technical tendency was reflected in the Education Guidelines and Bases Law approved in 1971 and, consequently, in the conceptions and purposes of evaluation in the educational process. To produce and discuss data, qualitative research was carried out, based on documentary analysis. The theoretical framework will bring studies by Luckesi (2002), Amaral (2021), Miguel (2007) and Fiorentini (1995). The results found pointed to a superficial treatment given to the evaluation in the LDB/1971, while the classificatory character is perceived from the terms used. Furthermore, the education system, in line with technical objectives, focused its interest on preparing workers to be useful in the job market.

Keywords: Technicist Trend; Education System; Education.

INTRODUÇÃO

O sistema educacional brasileiro sofreu profundas e significativas mudanças no decorrer das últimas décadas. As transformações que se desencadearam não envolvem apenas aspectos atitudinais

[1] Especialista, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Mestrado em andamento, Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Cascavel, Paraná, Brasil. E-mail: leonardosevero_@hotmail.com.

[2] Doutor, Universidade de São Paulo (USP). Professor, Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Cascavel, Paraná, Brasil. E-mail: dulcyenemr@yahoo.com.br

de professores e alunos, mas também a organização do próprio sistema de ensino. As alterações podem ser observadas, inclusive, ao voltar o olhar para as legislações que regulamentaram e nortearam o sistema educacional brasileiro em diferentes períodos, refletindo, assim nos objetivos postos, nas metas estabelecidas, nos parâmetros de qualidade definidos, no papel assumido pelos sujeitos no processo educacional e, também, nas crenças e ideais assumidos.

A década de 1970 foi marcada por profundas transformações sociais. Coadunando, o sistema de ensino passou por mudanças. Puderam ser observadas alterações nas concepções de ensino e, assim, na forma como ocorre a mediação do conhecimento matemático nos ambientes escolares. Os papeis assumidos por professores e alunos foram modificados e/ou ressignificados, visando aproximar-se daquilo que preconizava a legislação e as orientações técnicas da época (Miguel, 2007). Nesse sentido, pode ser destacado que o tecnicismo, ganhando força na década de 1960, reflete no sistema de ensino brasileiro, fincando suas raízes com a homologação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação, em 1971.

É a partir da Reforma Francisco Campos (1931) que a Matemática, enquanto disciplina escolar, inicia sua caminhada, com a unificação entre geometria, aritmética e álgebra (Valente, 2008). Os currículos, as legislações, as orientações técnicas e os documentos que tratam do processo educativo esboçam e traduzem as expectativas, perspectivas, interesses e ideais para o sistema de ensino e, consequentemente, para a Matemática a ser explorada nos ambientes escolares.

Ao pensar a mediação do conhecimento matemático é possível adentrar no universo da avaliação. Avaliar é uma atitude inerente à vida humana. Logo, estará presente em todas as relações estabelecidas pelo homem. Por isso, ao falar sobre a relação entre sujeito e objeto matemático é possível suscitar discussões acerca do processo avaliativo e sua operacionalização em diferentes períodos históricos.

A avaliação traz consigo concepções e construções individuais do docente. Porém, o processo avaliativo é resultado de construções sociais, as quais envolvem interesses políticos e econômicos da sociedade (Luckesi, 2002). Dessa forma, a avaliação não é a-política ou a-histórica. Apesar das práticas avaliativas representarem interesses próprios de uma sociedade em determinado período histórico, elas ecoam nas práticas docentes para além daquele momento.

Partindo disso, surge a questão central deste trabalho: como a tendência tecnicista refletiu no tratamento dado à avaliação na Lei de Diretrizes e Bases da Educação homologada em 1971 no Brasil? Da questão norteadora, define-se por objetivo principal analisar como a tendência tecnicista refletiu na Lei de Diretrizes e Bases da Educação homologada em 1971 e, consequentemente, nas concepções e finalidades da avaliação no processo educativo. Assim, tem-se por objetivos específicos compreender as diferentes concepções de avaliação, analisar as aproximações entre o tecnicismo e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1971 e compreender como o tecnicismo se mostra nas concepções de avaliação postas na Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1971.

Será realizada uma pesquisa qualitativa, a partir de uma análise documental. O referencial teórico será constituído a partir de estudos de Luckesi (2002), Amaral (2021), Miguel (2007) e Fiorentini (1995). A produção e análise de dados trará para o centro das discussões a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (1971).

O TECNICISMO, A MATEMÁTICA E A AVALIAÇÃO

O sistema educacional traz consigo objetivos, ideais e crenças próprios da sociedade na qual encontra-se inserido. Quando uma sociedade passa por mudanças, o sistema educacional também vive um período de transformações.

O século XX deixou profundas marcas na história brasileira. As mudanças no cenário político, econômico, social e cultural refletiram no sistema educacional brasileiro. Vivendo o auge do Regime Militar (1964–1985), o Brasil vê emergir um modelo de crescimento econômico neoliberalista que visava fortalecer e projetar o país rumo ao novo modelo de economia (Silva, 2016).

As mudanças também ecoaram no cenário educacional e foram evidenciadas com a Lei nº 5.692/1971, também conhecida como Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB/1971). O sistema de ensino, visando atender aos interesses capitalistas, assiste à tendência tecnicista ganhar força, "modificando sua estrutura em todos os níveis, os conteúdos, a formação dos professores, a relação professor-aluno, os métodos e as técnicas de ensino" (Miguel, 2007, p. 82).

A LDB/1971 introduz uma nova visão de homem e sociedade na Educação brasileira. O sujeito passou a ser visto enquanto ferramenta útil ao sistema capitalista, válido para o mercado de trabalho como fator de produção (Miguel, 2007). Com isso, a Educação voltava seu olhar para a preparação de mão-de-obra qualificada e prevê o ensino técnico para todos, "com ênfase no desenvolvimento de habilidades, atitudes e conhecimentos necessários à integração no processo produtivo" (Silva, 2016, p. 204).

O foco do processo educativo passa a ser a execução de habilidades estritamente técnicas. Nesse sentido, a qualidade do processo educativo estava baseada na execução da técnica e a "preocupação recai de modo incisivo na eficácia e eficiência do processo" (Oliveira, 2022, p. 66). Como consequência disso, o sujeito da Educação passou a ser a técnica (Miguel, 2007).

Ao pensar o sistema de ensino e as mudanças nele ocorridas, é possível percorrer pelo universo da Matemática e promover reflexões sobre a avaliação nesta área do conhecimento. O processo de ensino e aprendizagem de Matemática estabelece uma relação intima com os interesses que predominam na sociedade em determinado período histórico (Fiorentini, 1995).

Nesse sentido, A LDB de 1971, fortemente baseada no tecnicismo, traz novas perspectivas ao ensino de Matemática no Brasil. É possível perceber que a tendência tecnicista "influenciou a organização do sistema escolar e da escola, a seleção de conteúdos, os métodos de ensino-aprendizagem, as formas de avaliação e a relação professor-aluno" (Miguel, 2007, p. 70).

Aproximando-se daquilo que era interesse do sistema de ensino, em um cenário marcado pela tendência tecnicista, ao aluno não era necessário desenvolver criticidade ou reflexividade em relação aos processos vividos (Fiorentini, 1995). Professor e aluno são tidos como executores. O professor, conforme destaca Amaral (2021), tem o papel de assegurar a transmissão do conteúdo e o aluno é receptor do conhecimento.

A avaliação em Matemática coaduna com os objetivos, crenças, ideais e parâmetros estabelecidos como verdadeiros em determinado cenário político, econômico e social. Também, assume diferentes finalidades, podendo ser,

> […] a de quantificar e classificar o desempenho do estudante com conceitos e notas, a de diagnosticar o estado de desenvolvimento que se encontra o aluno e a formativa que com base em um diagnóstico elabora ações que encaminham ao aperfeiçoamento da prática docente no processo de ensino e aprendizagem (Amaral, 2021, p.23).

A avaliação hoje é concebida em um processo contínuo e ininterrupto, presente do começo ao fim do processo de ensino e aprendizagem de Matemática e visa acompanhar "construtivamente o aluno em seu processo de aprendizagem" (Luckesi, 2002, p. 86). Nesse sentido, é possível perceber que a avaliação estará presente desde os primeiros contatos do aluno com o objeto matemático, mostrará o pensamento que vem sendo elaborado pelo aluno durante a construção do conhecimento e evidenciará a apropriação realizada pelo aluno em relação ao objeto matemático.

A aproximação entre aluno e objeto matemático poderá ser revelada a partir de uma avaliação diagnóstica. Esta avaliação é caracterizada por mostrar ao professor o grau de apropriação do conhecimento ou nível de aprendizagem em que o aluno se encontra (Amaral, 2021). Comumente, neste modelo avaliativo, são observadas as lacunas existentes na aprendizagem do aluno e traçadas estratégias que possibilitem a superação das fragilidades existentes, pois "é a partir do diagnóstico que se elaboram ações em busca do aprendizado" (Amaral, 2021, p. 24). A avaliação diagnóstica, como destaca Amaral (2021, p. 23), investiga a qualidade do processo de ensino e aprendizagem, trazendo um diagnóstico do conhecimento já apropriado pelo aluno.

Ao conceber a avaliação como um processo contínuo e ininterrupto, indissociável do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, é possível suscitar discussões acerca da avaliação formativa, a qual centra seu objetivo em "desenvolver condições para que o educando aprenda e se forme como sujeito crítico e reflexivo" (Amaral, 2021, p. 32). O interesse da avaliação estará pautado na relação que está sendo construída entre aluno e conhecimento matemático. A avaliação formativa está interessada, conforme pontua Amaral (2021, p. 32), no "desenvolvimento do estudante como sujeito, proporcionando oportunidades de reflexão, de se estabelecer relações, por via de estudos teóricos e experiências práticas, que promovam a motivação nos alunos".

A avaliação formativa revelará possíveis caminhos a serem seguidos visando aproximar aluno e conhecimento matemático. Assim, a avaliação mostrar-se-á preocupada não só com os fins, mas com os meios. Uma avaliação formativa pode ser tomada como oportunidade de aprendizagem (Silva; Buriasco, 2023) Em uma perspectiva formativa, a avaliação constitui-se de um processo contínuo, sendo "necessário entender a avaliação da aprendizagem como componente do ato didático, como parte do processo de ensino e não como um elemento isolado, após o processo de ensino" (Amaral, 2021, p. 37).

A partir de uma avaliação formativa o professor pode possibilitar atividades que favoreçam a aproximação entre aluno e conhecimento matemático. Amaral (2021, p. 31) destaca que em um contexto de avaliação formativa o professor "planeja e desenvolve intervenções (se necessário) que oportunizam o aprendizado, utilizando-se de recursos necessários na busca por resultados satisfatórios". Assim, a avaliação formativa traz à tona um processo de ensino-aprendizagem de Matemática centrado no aluno, pois é dinâmica, flexível e contínua (Amaral, 2021).

Contudo, não se pode deixar despercebida a avaliação classificatória. Uma prática avaliativa com interesse centrado na classificação do aluno visa atender, principalmente, aos interesses de um

sistema de ensino classificatório e excludente. As avaliações classificatórias ou somativas, centradas na aplicação de exames ou provas, não vão muito além dos exames finais.

Ao final de um bimestre, trimestre, semestre ou mesmo após o desenvolvimento de um ou vários conteúdos o professor elabora, aplica e corrige o exame, que vai classificar o grau de desempenho do estudante. O processo de ensino classificatório é marcado por atividades de ensino repetitivas, como por exemplo, listas de exercícios, que visam "treinar" os alunos para testes (Amaral, 2021). Em uma avaliação classificatória, ao aluno compete a realização de "procedimentos rotineiros, como memorização, reprodução, aplicação de algoritmos e fórmulas previamente apresentados" (Silva; Buriasco, 2023, p.2).

A avaliação classificatória está interessada em mensurar a aprendizagem do aluno, transformando o conhecimento em uma nota ou um conceito. A avaliação classificatória, ao atribuir uma nota ou um conceito ao conhecimento, pouco releva sobre a aprendizagem do aluno (Luckesi, 2002). Conforme destaca Amaral (2021, p. 25), quando menciona que,

> […] na prática das avaliações classificatórias não se tem interesse em saber o caminho que o estudante percorreu em busca do aprendizado, não importam as condições em que o aluno estava no momento em que foi avaliado, só o que importa é classificá-lo em uma escala de valores ou conceitos.

Ao assumir a avaliação em um caráter classificatório a preocupação gira em torno de objetivos quantitativos, os quais devem ser possíveis de mensuração. O interesse está centrado, portanto, nos fins do processo educativo.

Assim, observa-se uma prática avaliativa antidemocrática e autoritária, em que o aluno deve buscar aproximar-se dos objetivos determinados por terceiros para que possa atingir o mínimo desejável. O interesse, neste contexto, não está na trajetória trilhada pelo aluno, mas no seu resultado final. Assim, objetiva-se classificar, comparar e quantificar a aprendizagem do aluno diante de um determinado grupo. Por isso, conforme destaca Amaral (2021, p. 30), "professores que se apoiam nesse método de ensino e avaliação tratam os alunos como armazenadores de conteúdo e promovem as provas de forma isolada do processo de ensino".

A avaliação revela não apenas a relação entre aluno e conhecimento matemático. A prática avaliativa, além de refletir aspectos culturais e sociais, trará à tona interesses econômicos e políticos, evidenciando, assim, as relações de poder que se estabelecem na sociedade em determinado período histórico.

Por isso, ao promover reflexões sobre o processo avaliativo torna-se possível ampliar o olhar sobre o processo educativo, que acontece a partir do interesse dominante em determinado contexto histórico. É possível perceber que a prática avaliativa de professores de Matemática tem base não só na sua trajetória acadêmica e profissional, mas também nos documentos que fazem parte do cenário educacional brasileiro, como, por exemplo, a LDB/1971.

A AVALIAÇÃO NA LDB/1971

A década de 1970 marcou profundamente a história brasileira. Vivendo o Regime Militar (1964–1985), o cenário educacional brasileiro passou por importantes transformações. É possível

perceber também que as concepções sobre a avaliação tiveram suas bases alteradas e reformuladas, visando aproximar-se das concepções tecnicistas que predominavam na Educação brasileira.

Então, como a tendência tecnicista refletiu no tratamento dado a avaliação na Lei de Diretrizes e Bases da Educação homologada em 1971 no Brasil? A partir da questão norteadora, tem-se por objetivo principal analisar como a tendência tecnicista refletiu na Lei de Diretrizes e Bases da Educação homologada em 1971 e, consequentemente, nas concepções e finalidades da avaliação no processo educativo. Assim, definem-se como objetivos específicos compreender as diferentes concepções de avaliação, analisar as aproximações entre o tecnicismo e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1971 e compreender como o tecnicismo se mostra nas concepções de avaliação postas na Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1971. Essa lei será considerada como a principal fonte de pesquisa.

O presente estudo constitui-se de uma pesquisa qualitativa, realizada a partir de uma análise documental. Ao realizar uma análise documental é possível perceber que um documento representa vestígios da atividade humana em uma determinada época (Cellard, 2008). Além disso,

> […] é esse encadeamento de ligações entre a problemática do pesquisador e as informações extraídas de sua documentação, o que possibilita formular explicações plausíveis, produzir uma interpretação coerente e realizar a reconstrução de um aspecto qualquer de uma dada sociedade, neste ou naquele momento (Cellard, 2008, p. 304).

A Lei de Diretrizes e Bases de 1971 (LDB/1971), sancionada em 11 de agosto de 1971, fixou diretrizes e bases para o ensino de primeiro e segundo graus, entendendo-se por "ensino primário a educação correspondente ao ensino de primeiro grau e por ensino médio, o de segundo grau" (Brasil, 1971, cap. I, art 1). Ensino primário e ensino médio eram as designações usadas na legislação anterior.

A LDB/1971 trouxe impactos para a Educação em todo o território nacional, uma vez que apresenta em seu objetivo geral termos que denotam o caráter tecnicista que regulou o sistema de ensino brasileiro. A LDB/1971, conforme destaca Silva (2016, p. 204), "preconiza a sondagem de aptidões e a iniciação para o trabalho com uma atenção maior para as questões de profissionalização e, em decorrência com a inserção no mercado de trabalho". O documento define como objetivo geral do ensino de primeiro e segundo graus que o processo educativo, no Brasil, deve

> [...] proporcionar ao educando a formação necessária ao desenvolvimento de suas potencialidades como elemento de auto-realização, qualificação para o trabalho e preparo para o exercício consciente da cidadania (Brasil, 1971, cap. I, art. 1).

O sistema de ensino volta seu olhar à preparação dos sujeitos para o mercado de trabalho. Conforme visto, a Educação brasileira estava interessada na qualificação de mão de obra para uma economia predominantemente industrial, conforme modelo econômico em operacionalização na época. Assim, pode ser observado que "com a imposição de novo modelo econômico e conseqüente mudança do modelo político, alterou-se também o modelo educacional" (Miguel, 2007, p. 82). É observável que os objetivos traçados para o sistema de ensino coadunam com os interesses determinados pelo modelo econômico e político que vigoravam na época.

A LDB/1971, além de objetivar, evidenciava o interesse dado à preparação para o mercado de trabalho e mão de obra na própria organização curricular proposta, propondo o ensino técnico para todos. O currículo proposto trouxe, em sua composição, partes de educação geral e formação especial. Entendia-se que a parte que compunha a formação especial deveria acontecer no ensino de segundo grau. Assim, a organização curricular pensada para a formação especial,

> a)terá o objetivo de sondagem de aptidões e iniciação para o trabalho, no ensino de 1º grau, e de habilitação profissional, no ensino de 2º grau;
>
> b) será fixada, quando se destina a iniciação e habilitação profissional, em consonância com as necessidades do mercado de trabalho local ou regional, à vista de levantamentos periodicamente renovados (Brasil, 1971, cap. I, art. 5).

O sistema de ensino, ao propor a preparação de mão de obra para o mercado de trabalho, reflete o caráter classificatório do sistema de ensino, inclusive propondo habilidades exigidas de cada aluno, conforme aponta o Parecer 45/ 1972 do Conselho Federal da Educação (CNE). Nesse sentido, são estabelecidos parâmetros mínimos a serem atingidos pelos alunos e são compreendidos, de maneira ampla e geral, como "o menor número de matérias cujo conteúdo proporcione ao educando, necessariamente, conhecimentos e habilidades que o capacitem para o desempenho de determinada ocupação" (Brasil, 1972, p. 124).

Aproximando-se aos objetivos do próprio sistema, a avaliação escolar tem sua história marcada e determinada pelo modelo político, econômico, social e cultural que predominam em determinado período histórico. A avaliação da aprendizagem nem sempre recebeu um tratamento adequado nos documentos que normalizaram a Educação no Brasil ao longo da história, sendo, por vezes, tratada com superficialidade. Por isso, é necessário, ao analisar o documento, buscar elementos que remetam ao objeto observado, que, no caso, é a avaliação.

A avaliação do aproveitamento, conforme preconiza a LDB/1971, deveria ser expressa por notas ou menções (conceitos). Infere-se a predominância de uma avaliação somativa, com caráter classificatório, exigindo um aproveitamento mínimo para o ingresso do aluno no ano escolar subsequente. Porém, a avaliação proposta pela LDB/1971 também traz elementos que podem remeter ao caráter formativo da avaliação quando sinaliza seu interesse também em "aspectos qualitativos sobre os quantitativos" (Brasil, 1971, cap I, art. 14)). Assim, observa-se que a LDB/1971, propunha que em uma,

> […] avaliação do aproveitamento, a ser expressa em notas ou menções, preponderarão os aspectos qualitativos sobre os quantitativos e os resultados obtidos durante o período letivo sobre os da prova final […] (Brasil, 1971, cap. I, art. 14).

A LDB/1971 não trata da avaliação enquanto um processo regulador de aprendizagem. Apesar de trazer elementos que esboçam discretamente uma avaliação com caráter formativo, o tratamento dado à avaliação mostra um interesse centrado na verificação do rendimento escolar dos alunos, que poderia ser mensurado a partir da assiduidade e da avaliação de aproveitamento. Assim, a "verificação do rendimento escolar ficará, na forma regimental, a cargo dos estabelecimentos, compreendendo a avaliação do aproveitamento e a apuração da assiduidade" (Brasil, 1971, cap I, art. 14). Nesse sentido, Silva e Buriasco (2023, p.2) sinalizam que o "processo educacional, associado à avaliação

de rendimento, tem por objetivo eliminar as diferenças existentes entre os estudantes, não havendo espaço para as multiplicidades de pensamento".

A verificação de rendimento estava sob responsabilidade das instituições de ensino e deveria, estar regulamentada. Além disso, observa-se que aos estabelecimentos/instituições de ensino caberia também a certificação de conclusão de série, conforme pode-se observar no Art. 16, quando define que,

> Caberá aos estabelecimentos expedir os certificados de conclusão de série, conjunto de disciplinas ou grau escolar e os diplomas ou certificados correspondentes às habilitações profissionais de todo o ensino de 2º grau, ou de parte deste (Brasil, 1971, cap I, art. 16).

O interesse do sistema de ensino estava no produto final, ou seja, nos resultados quantitativos obtidos por alunos. Portanto, o caráter classificatório da avaliação é percebido quando o olhar da avaliação está voltado para a certificação da aprendizagem do aluno, a partir de parâmetros mínimos estabelecidos pelo próprio sistema. Caso o aluno não atingisse o resultado desejável, havia a possibilidade de recuperação de estudos, visando, principalmente, sua certificação para a série seguinte, uma vez que, de acordo com o Art. 14,

> […] o aluno de aproveitamento insuficiente poderá obter aprovação mediante estudos de recuperação proporcionados obrigatoriamente pelo estabelecimento (Brasil, 1971, cap. I, art. 14).

A LDB/1971 evidencia que o currículo respeitará "as diferenças individuais dos alunos" (Brasil, 1971, cap I, art. 4) e propõe "a inclusão de opções que atendam às diferenças individuais dos alunos" (Brasil, 1971, cap I, art. 8). Contudo, a verificação de rendimentos, a avaliação do aproveitamento, o aproveitamento insuficiente, os estudos de recuperação, a escala de notas ou menções ou até mesmo os certificados de conclusão são expressões evidenciadas na LDB/1971 que mostram uma aproximação com uma avaliação classificatória. Assumindo a avaliação um caráter classificatório, o aluno é entendido como produto.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1971 traz poucos elementos que permitam ampliar as discussões acerca da avaliação. Porém, entra em contradição ao preconizar "proporcionar ao educando a formação necessária ao desenvolvimento de suas potencialidades como elemento de auto-realização" (Brasil, 1971, cap. I, art. 1) e, em contrapartida, centrar seu interesse em uma avaliação que permita mensurar com notas, menções ou conceitos a aprendizagem do aluno, visando principalmente o ingresso na série subsequente e a parametrização do corpo discente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Brasil passou por significativas mudanças sociais ao longo da década de 1970. A adoção de um modelo econômico neoliberalista trouxe influências não apenas para a economia, mas também para o sistema de ensino. Emerge, a partir do modelo econômico adotado, a necessidade de preparação de mão de obra para o mercado de trabalho industrial, que estava em ascensão naquele período. Com isso, o sistema de ensino precisaria ser repensado e reformulado, visando atender aos interesses capitalistas.

A LDB/1971, quando homologada, traduz os interesses econômicos e políticos que vigoravam na sociedade, evidenciando o interesse do sistema de ensino em tornar o sujeito (aluno) útil ao modelo econômico capitalista. Assim, propõe um currículo voltado **à** formação técnica, a todos os estudantes. Com isso, o currículo proposto ao sistema de ensino possibilitaria a habilitação do aluno para o mercado de trabalho.

O tratamento dado à avaliação na LDB/1971 mostra a carência de subsídio para a prática avaliativa de professores no cenário educacional brasileiro. Por isso, a avaliação aproxima-se da subjetividade. Além disso, o tratamento dado à avaliação na proposta tecnicista evidenciada pela LDB/1971 mostra-se contraditório.

A LDB/ 1971 sinaliza o interesse nas potencialidades individuais do aluno. Porém, a avaliação assume um caráter classificatório, em que o interesse centrava-se no aspecto somativo da avaliação. Portanto, ao sistema de ensino interessava o conceito, a nota ou menção ao final de um ciclo de estudos.

O caráter classificatório da avaliação, mesmo que não evidenciado nestes termos, é percebido a partir das concepções propostas ao sistema de ensino e, também, na forma como a avaliação é entendida na própria LDB/ 1971. Dessa forma, é possível perceber que a avaliação, pensada em uma perspectiva tecnicista, reproduz a lógica de mercado vigente na época. O interesse estava prioritariamente centrado nos resultados.

A forma como a avaliação é tratada na LDB/1971 mostra a carência de discussões que cercam o tema. Ao sinalizar o interesse na classificação dos sujeitos para a série subsequente, na preparação para o mercado de trabalho e no desenvolvimento de habilidades úteis ao sistema econômico, a LDB/1971 mostra-se pouco interessada nos aspectos construtivos da aprendizagem do aluno. Neste sentido, a LDB/1971 trouxe poucas contribuições para a mudança de paradigmas que envolvem o processo avaliativo, evidenciando que o interesse da avaliação não era a aprendizagem do aluno, mas sim sua utilidade e funcionalidade para o sistema econômico e capitalista.

REFERÊNCIAS

AMARAL, Jordana de Oliveira do. **Uma investigação sobre avaliação em Educação Matemática: concepções e práticas de professores em formação**. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Jataí. Disponível em <https://repositorio.ifg.edu.br/bitstream/prefix/923/1/Disserta%c3%a7%c3%a3o_Jordana_de_Oliveira_do_Amaral_2021%20%281%29.pdf> Acesso em: 20 nov. 2024.

BRASIL. **Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971**. Lei de Diretrizes e Bases da Educação. Brasília: Senado Federal, 1971.

BRASIL. **Parecer nº 45/72, de 12 de janeiro de 1972**. Conselho Federal de Educação. Brasília, 1972.

CELLARD, Andre. A análise documental. In: PIRES *et al* (Org). **A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos**. Petrópolis: Vozes, 2008. p. 295-316.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o Ensino de Matemática no Brasil. **Zetetiké**. Campinas: UNICAMP, ano 3, n. 4, 1995, p. 1-36.

LUCKESI, Cipriano Carlos. Avaliação da aprendizagem na escola e a questão das representações sociais. **Eccos Revista Científica**, v. 4, n. 2, p. 79-88, 2002. Disponível em < https://periodicos.uninove.br/eccos/article/view/310/298> Acesso em: 15 nov. 2024.

MIGUEL, Maria Elisabeth Blanck. A presença das tendências pedagógicas na educação brasileira. **Revista Educativa-Revista de Educação**, v. 10, n. 1, p. 69-84, 2007. Disponível em < https://seer.pucgoias.edu.br/index.php/educativa/article/view/175/138> Acesso em: 02 nov. 2024.

OLIVEIRA, Luciene. Pedagogia tecnicista e sua influência no sistema educacional brasileiro. **Revista de Ciência e Tecnologia da Região Norte**, v. 8, n. 1, p. 64-69, 2022. Disponível em <https://periodicos.unir.br/index.php/RCTRN/article/view/6777/4392>. Acesso em: 30 out. 2024.

SILVA, Gabriel dos Santos e; BURIASCO, Regina Luzia Coriode. O erro na avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem. R**evista de História da Educação Matemática**, v. 9, p. 1-17, 2023. Disponível em < https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/573/478>. Acesso em: 26 nov. 2024.

SILVA, Andréa Villela Mafra da. A pedagogia tecnicista e a organização do sistema de ensino brasileiro. **Revista HISTEDBR On-line**, v. 16, n. 70, p. 197-209, 2016. Disponível em <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/histedbr/article/view/8644737/15765> Acesso em: 05 nov. 2024.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Quem somos nós, professores de matemática? **Cadernos Cedes**, v. 28, n. 74, 2008, p. 11-23. Disponível em <https://www.scielo.br/j/ccedes/a/3PnDyZfGYnvPtwVMwRgNJMx/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 01 nov. 2024.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Frações: um olhar para as obras de Osvaldo Sangiorgi

Fractions: a look into the works of Osvaldo Sangiorgi

Pamela Gonçalves[1]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

Dulcyene Maria Ribeiro[2]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

RESUMO

Este artigo analisa as abordagens do conteúdo de frações em livros didáticos brasileiros escritos por Osvaldo Sangiorgi com o objetivo de compreender como esse tema é introduzido e apresentado. Considera-se que os livros didáticos são uma fonte importante para o registro das disciplinas escolares e suas transformações ao longo do tempo. Nesse sentido, foram levados em conta aspectos do contexto histórico correspondente à data de publicação de cada obra. Por meio de uma abordagem exploratória e qualitativa, foram analisadas três obras de períodos distintos. A análise revelou que os livros sofreram mudanças ao longo do tempo, especialmente na explicitação dos conteúdos, no uso de recursos visuais, na incorporação de elementos históricos e na aplicação de situações do cotidiano. As três obras seguem uma sequência lógica na organização dos conteúdos, que são apresentados de forma intuitiva, utilizando elementos do cotidiano e com um aumento progressivo no nível de dificuldade. Observa-se, ainda, que as mudanças nos livros ao longo do tempo incluem o aprimoramento dos recursos visuais, a aplicação da teoria dos conjuntos e a integração de situações práticas do dia a dia.

Palavras-chave: Livros didáticos como fonte de pesquisa; Educação Matemática; Movimento da Matemática Moderna.

ABSTRACT

This article analyzes the approaches to fraction content in Brazilian textbooks written by Osvaldo Sangiorgi, aiming to understand how this topic is introduced and presented. Textbooks are considered an important source for recording school subjects and their transformations over time. In this regard, aspects of the historical context corresponding to the publication date of each work were considered. Through an exploratory and qualitative approach, three works from different periods were analyzed. The analysis revealed that the books underwent changes over time, particularly in the explicitness of content, the use of visual resources, the incorporation of historical elements, and the application of real--life situations. The three works follow a logical sequence in organizing the content, which is presented intuitively, using everyday elements and progressively increasing in difficulty. Furthermore, the changes in the books over time include the enhancement of visual resources, the application of set theory, and the integration of practical, real-life situations.

Keywords: Textbooks as a research source; Mathematics Education; Modern Mathematics Movement.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O presente trabalho é resultado de estudos desenvolvidos em uma disciplina intitulada "Aspectos da História e Historiografia da Educação Matemática" do programa de pós-graduação *stricto sensu*, Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, *campus* Cascavel.

Os livros, fontes desse trabalho, fazem parte do acervo do laboratório de matemática do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste/Cascavel-PR. Os materiais consultados são de autoria

[1] Mestre em Educação pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste). Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM/Unioeste). Professora colaboradora na Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Cascavel, Paraná, Brasil. E-mail: pangoncalves@gmail.com.

[2] Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP), com estágio (doutorado sanduíche) na Universidade de Lisboa. Professora efetiva da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Cascavel, Paraná, Brasil. E-mail dulcyene.ribeiro@unioeste.br.

de Osvaldo Sangiorgi[3] e foram organizados em ordem cronológica: *1ª Série Ginasial da Coleção Matemática Curso Ginasial*, publicado em 1955; *Matemática 1: Curso Moderno, volume 1 para os ginásios*, de 1965; e *Matemática 5, para cursos de primeiro grau (antiga primeira série do ginasial),* de 1972.

Em relação à natureza do estudo, trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo, que se deu por meio de leitura exploratória das abordagens sobre o conteúdo de frações presentes nas obras. O objetivo deste trabalho é compreender como as frações são introduzidas e apresentadas por meio da análise de abordagens adotadas em livros didáticos brasileiros de matemática do autor Osvaldo Sangiorgi.

A escolha relativa ao conteúdo de frações se deu em razão do interesse pela temática, uma vez que esse conteúdo é tratado em vários anos de escolarização. Já quanto à escolha dos livros, a disponibilidade de acesso a essas obras, foi o fator determinante.

Valente (2008) afirma que os livros didáticos representam fontes importantes para a análise do ensino de matemática sob uma perspectiva histórica:

> Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos (Valente, 2008, p. 151).

De acordo com Choppin (2004, p. 533), os livros didáticos oportunizam colocar em prática "aprendizagens, atividades, exercícios, facilitando a memorização e favorecendo a aquisição de competências e habilidades". Portanto, o livro didático é um dos responsáveis pela constituição do conhecimento que, historicamente, foi transmitido pelos manuais ao longo da vida escolar das crianças e jovens.

O MOMENTO HISTÓRICO EM QUE AS OBRAS FORAM PUBLICADAS

O final da Segunda Guerra Mundial, propiciou, nos Estados Unidos e em alguns países do continente europeu, o surgimento de comissões e congressos em que se discutia uma possível reforma do ensino de matemática, uma vez que era necessário adequar seu ensino ao emergente avanço científico, técnico e econômico. Iniciativas de reformas foram desenvolvidas entre meados dos anos 1950 e parte dos anos 1970 adquirindo a forma de um movimento internacional, conhecido como Matemática Moderna (Matos; Valente, 2010). No Brasil, ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM).

O MMM procurava aproximar a matemática ensinada no ensino básico àquela desenvolvida pelos pesquisadores e ensinada nos cursos superiores. De acordo com Sangiorgi (1965, p. 1), "é preciso superar, com trabalho honesto e construtivo, a herança de um ensino anacrônico de Mate-

[3] Nascido em 9 de maio de 1921, doutor em matemática pela USP, foi professor da Universidade Mackenzie e do magistério do Estado de São Paulo, ingressou no Departamento de Comunicações e Artes, onde foi fundador do núcleo de pesquisa Cibernética Pedagógica. Era membro fundador da Academia de Letras de Campos do Jordão e membro titular da Academia Paulista de Educação. Ganhou o Prêmio Jabuti na categoria "Ciências Exatas" em 1964 pelo livro "Matemática Curso Moderno". Faleceu em 7 de julho de 2017 em São Paulo. Disponível em: https://cpp.org.br/falece-em-sao-paulo-o-doutor-em-matematica-professor-osvaldo-sangiorgi/. Acesso em: 16 dez 2024.

mática". Alterações de currículo e sistema de ensino foram principalmente baseadas em produções internacionais, como livros e materiais produzidos pelo grupo *School Mathematics Study Group* (SMSG), traduzidos em vários idiomas, com início em 1958 (D'Ambrosio, 1987).

Na década de 1960, no Brasil, essas discussões oportunizaram a formação de grupos de professores, como o GEEM[4], o NEDEM[5] e o GEEMPA[6], cujas ações contribuíam com coordenação de cursos de formação de professores, produção de material escrito, influências no governo e mudanças em programas de ensino de matemática (Fischer, 2008).

Dentre os nomes em destaque, pode-se citar Sangiorgi, Castrucci, Jacy Monteiro, Barbosa, Caroli e D'Ambrosio que eram associados diretamente ao GEEM. Soares (2001) argumenta que com o MMM destacaram-se outros líderes e pesquisadores, que durante as décadas seguintes participariam ativamente do cenário da Educação Matemática brasileira, como Omar Catunda, Mello e Souza, Martha Maria de Souza Dantas, entre outros.

Em torno de 1966, ocorriam muitos projetos, seminários e congressos em que se discutiam a formação de professores, adaptações de currículos e materiais didáticos, promovendo o livro didático como um influente recurso de divulgação das propostas do MMM (D'Ambrosio, 1987). Em contrapartida, em meados dos anos 1970, o MMM recebia fortes críticas, segundo Búrigo (1989), a oposição delineada nos programas de matemática moderna entre a álgebra e a geometria euclidiana, gerava problemas de compreensão e por consequência, evitava que as resoluções fossem feitas por uso da teoria dos conjuntos.

Santos (2015) pondera que o estudo de obras didáticas gera indícios para buscar um caminho para a compreensão do MMM, como a sua articulação, o movimento organizado e principalmente as mudanças expressas de forma escrita nos livros didáticos.

Na próxima seção apresenta-se a descrição das obras selecionadas, listando características e aspectos relevantes para a investigação sobre o conteúdo de frações. A ordem dos livros respeita a data da publicação.

LIVRO DA DÉCADA DE 1950

A década de 1950 foi um período importante para o Movimento da Matemática Moderna (MMM), pois marcou o início de esforços sistemáticos para reformular o ensino da matemática. Esse movimento surgiu como resposta à necessidade de modernização curricular diante dos avanços científicos e tecnológicos da época, impulsionados, em parte, pela corrida espacial e pelo contexto da Guerra Fria.

Como representante desta década, selecionou-se a obra: *1ª Série Ginasial da Coleção Matemática Curso Ginasial*, 11ª edição, produzido pela Editora Nacional, no ano de 1955. A obra possui 268 páginas. De forma descritiva, quanto à aparência, esta obra exibe formas gráficas e destaque à palavra "matemática" na capa (Figura 1) e internamente, predomina a escrita em preto com detalhes em tons de laranja.

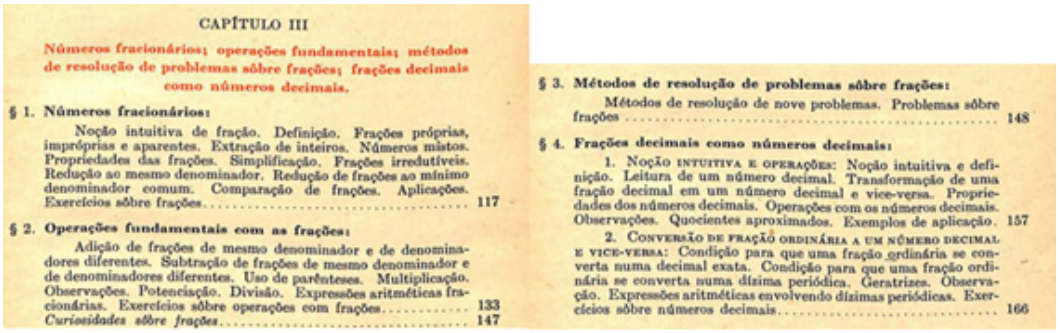
[4] Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), fundado em outubro de 1961 em São Paulo.
[5] Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática. Grupo paranaense fundado em 1962.
[6] Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre, fundado em 1970.

Figura 1 - Capa do livro

Fonte: Sangiorgi (1955).

Quanto aos conteúdos, apresenta seus assuntos distribuídos em quatro capítulos e aborda "Números fracionários" no terceiro capítulo. Além disso, apresenta, ao final dos quatro capítulos, "exercícios de recapitulação" em que são propostas expressões numéricas e problemas envolvendo os conteúdos trabalhados. As seções iniciais sobre o conteúdo de fração estão dispostas na imagem (Figura 2) a seguir.

Figura 2 - Recorte do índice no capítulo 3



CAPÍTULO III

Números fracionários; operações fundamentais; métodos de resolução de problemas sôbre frações; frações decimais como números decimais.

§ 1. Números fracionários:
Noção intuitiva de fração. Definição. Frações próprias, impróprias e aparentes. Extração de inteiros. Números mistos. Propriedades das frações. Simplificação. Frações irredutíveis. Redução ao mesmo denominador. Redução de frações ao mínimo denominador comum. Comparação de frações. Aplicações. Exercícios sôbre frações 117

§ 2. Operações fundamentais com as frações:
Adição de frações de mesmo denominador e de denominadores diferentes. Subtração de frações de mesmo denominador e de denominadores diferentes. Uso de parênteses. Multiplicação. Observações. Potenciação. Divisão. Expressões aritméticas fracionárias. Exercícios sôbre operações com frações 133
Curiosidades sôbre frações 147

§ 3. Métodos de resolução de problemas sôbre frações:
Métodos de resolução de nove problemas. Problemas sôbre frações 148

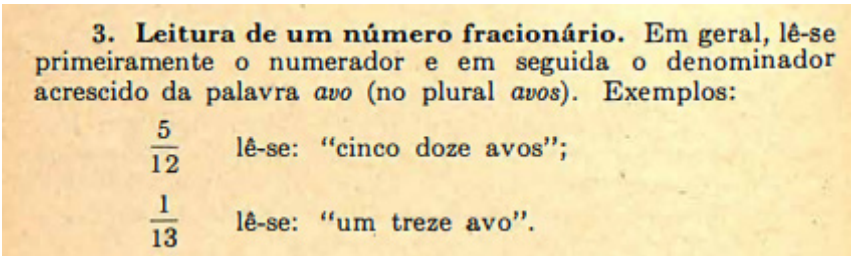
§ 4. Frações decimais como números decimais:
1. Noção intuitiva e operações: Noção intuitiva e definição. Leitura de um número decimal. Transformação de uma fração decimal em um número decimal e vice-versa. Propriedades dos números decimais. Operações com os números decimais. Observações. Quocientes aproximados. Exemplos de aplicação. 157
2. Conversão de fração ordinária a um número decimal e vice-versa: Condição para que uma fração ordinária se converta numa decimal exata. Condição para que uma fração ordinária se converta numa dízima periódica. Geratrizes. Observação. Expressões aritméticas envolvendo dízimas periódicas. Exercícios sôbre números decimais 166

Fonte: Adaptado de Sangiorgi (1955, p. 9)

Os conceitos iniciais das frações são tratados como noções intuitivas, para então apresentar a definição, utiliza como exemplo um "tablete de chocolate" dividido em "em três partes iguais", em que "1) uma dessas partes representa uma fração do chocolate que chamaremos de *um têrço* e indicamos por 1/3. 2) duas partes representam outra fração que chamaremos *dois terços* indicamos por 2/3" (Sangiorgi, 1955, p. 117, *grifos do autor*).

Nesta obra o autor apresenta a definição de número fracionário como: "um número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais" (p. 117). Há uma preocupação com a "leitura de um número fracionário" (Figura 3), e sequencialmente aborda como se faz a leitura desses números, define frações ordinárias, decimais, impróprias e aparentes.

Figura 3 - Descrição de como fazer a leitura de um número fracionário



3. Leitura de um número fracionário. Em geral, lê-se primeiramente o numerador e em seguida o denominador acrescido da palavra *avo* (no plural *avos*). Exemplos:

$\frac{5}{12}$ lê-se: "cinco doze avos";

$\frac{1}{13}$ lê-se: "um treze avo".

Fonte: Sangiorgi (1955, p. 118)

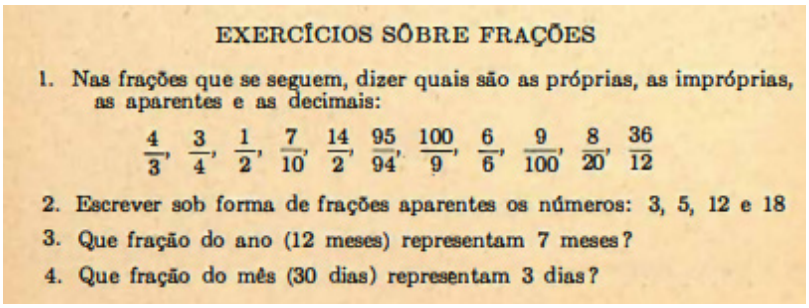
O autor enfatiza cálculos, representações numéricas, sem mencionar sobre a visualização desses números de forma geométrica, fazendo, novamente, uso do tablete de chocolate (que aparece no começo do capítulo) para conceituar frações impróprias (Figura 4), com destaque para a última parte, com a repetição de "cho" da palavra "chocolate", indicando a parte de outro inteiro.

Figura 4 - 3/3 de chocolate mais a terça parte de outro chocolate, representando 4/3

Fonte: Sangiorgi (1955, p. 119)

Depois de definir frações próprias, impróprias e aparentes, o autor segue com definições de números mistos e com a "extração de inteiros", de acordo com o autor "pode-se sempre extrair os inteiros de uma fração imprópria, bastando para isso dividir o numerador pelo denominador [...] o quociente obtido é a parte inteira da fração imprópria" (1955, p. 120). Sequencialmente são abordadas as propriedades, simplificação, formas de redução, formas irredutíveis, "redução de frações ao mesmo denominador" (p. 124), "redução de frações ao mínimo denominador" (p. 125) e comparações, fechando a seção com vinte "exercícios sobre frações" (p.128).

Figura 5 - Quatro primeiros exercícios da lista ao final do capítulo



EXERCÍCIOS SÔBRE FRAÇÕES

1. Nas frações que se seguem, dizer quais são as próprias, as impróprias, as aparentes e as decimais:

$\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{14}{2}, \frac{95}{94}, \frac{100}{9}, \frac{6}{6}, \frac{9}{100}, \frac{8}{20}, \frac{36}{12}$

2. Escrever sob forma de frações aparentes os números: 3, 5, 12 e 18
3. Que fração do ano (12 meses) representam 7 meses?
4. Que fração do mês (30 dias) representam 3 dias?

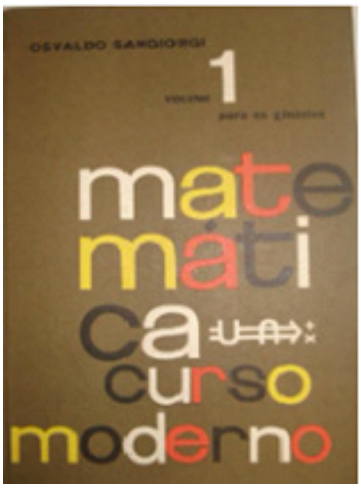
Fonte: Sangiorgi (1955, p. 128)

Em sua maioria são exercícios para treinar definições e manipulações, perguntas sem contextualização. Dos vinte exercícios, apenas o exercício cinco mencionou algo que poderia fazer parte do cotidiano, "um pacote de balas foi dividido para 3 meninos cabendo ao primeiro 5 balas, ao segundo 7 e ao terceiro 4 balas. Que fração do pacote de balas recebeu cada menino?" (Sangiorgi, 1955, p. 129).

LIVRO DA DÉCADA DE 1960

Para esta década, selecionou-se a obra *Matemática 1: Curso Moderno*, volume 1 para os ginásios, 5ª edição, produzido pela Editora Nacional em 1965, que possui 327 páginas. Visualmente exibe destaque à palavra "matemática" e "curso moderno" na capa (Figura 6) e internamente, predomina a escrita em preto com realces em tons de azul. Compartilha as mesmas diagramações internas e externas da obra anteriormente citada.

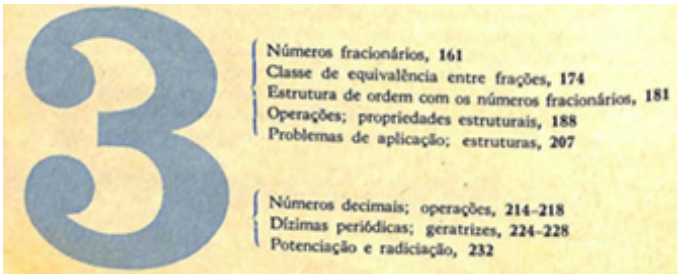
Figura 6 - Capa da obra de 1965



Fonte: Sangiorgi 1965

O índice é apresentado de forma mais sucinta, apenas listando as seções principais. Permanece a distribuição em quatro capítulos abordando "números fracionários" também no terceiro capítulo (Figura 7).

Figura 7 - Recorte do capítulo 3 e as descrições apresentadas no índice



Fonte: Sangiorgi (1965, p. X)

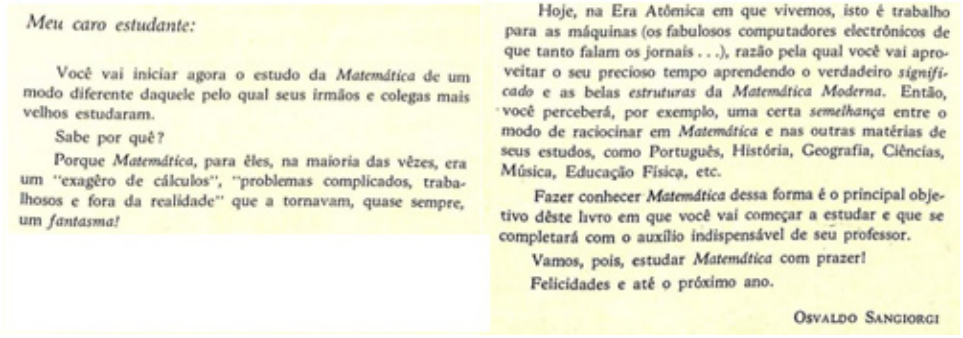
A obra segue a mesma abordagem (em comparação a obra de 1955) introdutória dos números fracionários, mantendo o uso do "tablete de chocolate" dividido em três partes iguais e com explicações idênticas a obra de 1955. O diferencial aparece na descrição dada pelo autor na sequência das explicações: "nasce, portanto, uma nova *espécie* de número (lembre-se que até agora você só 'trabalhou' com os números naturais e números inteiros) denominado *número fracionário*" (Sangiorgi, 1965, p. 161, *grifos do autor*).

Um aspecto relevante a ser observado nesta obra é a inserção da Teoria dos Conjuntos no primeiro capítulo do livro, creditado à influência ao MMM vigente no período. Segundo Wrobel e Kill

(2021, p. 6) "a teoria dos conjuntos era o pilar do modernismo e a noção de estrutura possibilitava uma abordagem que interessava à Matemática Moderna".

Outro ponto a ser destacado, na parte de apresentação da obra, é a mensagem do autor, que em poucas palavras descreve as mudanças que serão encontradas na obra quando comparadas com edições anteriores.

Figura 8 - Mensagem do autor aos estudantes



Meu caro estudante:

Você vai iniciar agora o estudo da *Matemática* de um modo diferente daquele pelo qual seus irmãos e colegas mais velhos estudaram.

Sabe por quê?

Porque *Matemática*, para êles, na maioria das vêzes, era um "exagêro de cálculos", "problemas complicados, trabalhosos e fora da realidade" que a tornavam, quase sempre, um *fantasma!*

Hoje, na Era Atômica em que vivemos, isto é trabalho para as máquinas (os fabulosos computadores electrônicos de que tanto falam os jornais . . .), razão pela qual você vai aproveitar o seu precioso tempo aprendendo o verdadeiro *significado* e as belas *estruturas* da *Matemática Moderna*. Então, você perceberá, por exemplo, uma certa *semelhança* entre o modo de raciocinar em *Matemática* e nas outras matérias de seus estudos, como Português, História, Geografia, Ciências, Música, Educação Física, etc.

Fazer conhecer *Matemática* dessa forma é o principal objetivo dêste livro em que você vai começar a estudar e que se completará com o auxílio indispensável de seu professor.

Vamos, pois, estudar *Matemática* com prazer!

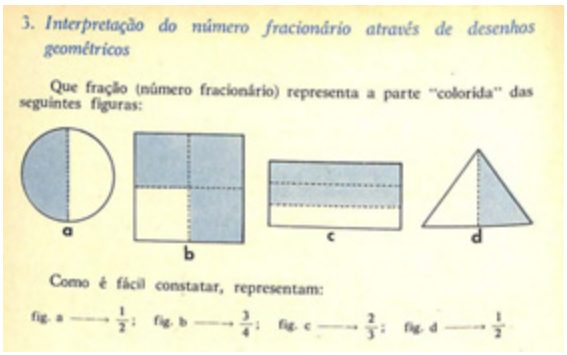
Felicidades e até o próximo ano.

OSVALDO SANGIORGI

Fonte: Sangiorgi (1965, p. XIII)

Percebe-se a preocupação do autor em explicar as mudanças, citando sobre uma possível interdisciplinariedade. Além disso, uma das novidades está na "interpretação do número fracionário através de desenhos" (Sangiorgi, 1965, p. 164), em que o autor explora aspectos visuais para explicar o número fracionário por meio de diferentes formas geométricas regulares (Figura 9).

Figura 9 - Representação geométrica de números fracionários



3. *Interpretação do número fracionário através de desenhos geométricos*

Que fração (número fracionário) representa a parte "colorida" das seguintes figuras:

a b c d

Como é fácil constatar, representam:

fig. a ⟶ $\frac{1}{2}$; fig. b ⟶ $\frac{3}{4}$; fig. c ⟶ $\frac{2}{3}$; fig. d ⟶ $\frac{1}{2}$

Fonte: Sangiorgi (1965, p. 164)

Depois da interpretação dos números fracionários por meio de desenhos, Sangiorgi (1965) escreve sobre frações próprias, impróprias e aparentes e traz alguns exemplos e exercícios. Segundo Wrobel e Bill (2021, p. 10) a percepção do autor seria "uma vez que o aluno já esteja 'amadurecido', pode receber uma definição geral de número fracionário". Sangiorgi (1965) define que "em um número fracionário participam dois números inteiros: o primeiro (numerador) e o segundo (denominador)", com a observação de que o segundo não pode ser zero pois "é impossível dividir alguma coisa por zero" (p. 168).

Sequencialmente são abordadas as "relações entre números inteiros e números fracionários" em que o autor aborda as operações dentro dessas relações: "um número fracionário indica, também, a divisão entre o numerador e o denominador" (Sangiorgi, 1965, p. 169). No final da seção, o autor

provoca com a seguinte "observação: Quanto vale 0/2?", seguida da resposta "Vale 0, pois, dentro da *noção intuitiva* estudada, se você dividir a unidade em duas partes e considerar 'nenhuma' dessas partes, ficará com zero...e, dentro do conceito da *operação divisão* o quociente é 0, pelo fato de: 0 x 2 = 0" (Sangiorgi, 1965, p. 169, *grifos do autor*).

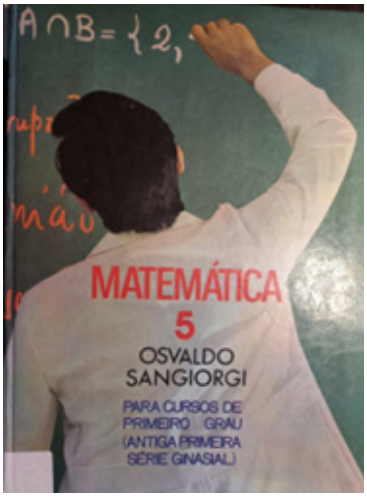
Depois da sugestão para estudo com "exercícios exploratórios", há a seção "extração de inteiros de frações impróprias: números mistos" (Sangiorgi, 1965, p. 170), seguido de mais quinze "exercícios de fixação" (Sangiorgi, 1965, p, 171).

O próximo conteúdo explorado são "classes de equivalência entre frações", proposta de ensino que difere da obra de 1955, de acordo com Wrobel e Kill (2021, p. 8) a inclusão do tema frações relacionado à classe de equivalência é uma inovação do "currículo moderno".

LIVRO DA DÉCADA DE 1970

O representante selecionado para esta década, é a obra de Osvaldo Sangiorgi, publicada em 1972 pela Companhia Editora Nacional, que tem 132 páginas. Segundo a obra, o ano data o 'sesquicentenário da Independência do Brasil (ano internacional da Educação)'. Na capa, exibe destaque ao professor atuando, expressa pela imagem do profissional trajando um jaleco, com giz na mão, e escrevendo na lousa a representação simbólica da intersecção entre dois conjuntos, conteúdo não abordado na obra de 1955, mas já presente na de 1965 (Figura 10).

Figura 10 - Capa da obra de 1972



Fonte: Sangiorgi, 1972

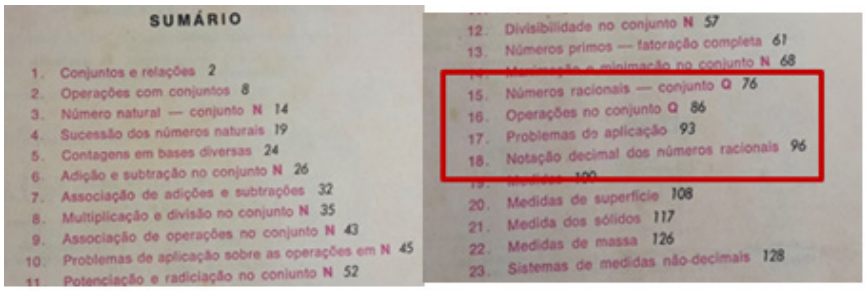
A obra se inicia com uma mensagem de apresentação do autor desejando sorte, com elementos lúdicos e personagens de formas heterogêneas, permanece a escrita em preto com realces em um único tom, neste caso tons rosados (Figura 11).

Figura 11 - Mensagem do autor e exemplo do uso de imagens lúdicas

Fonte: Sangiorgi (1972, s/p e p. 7)

O que antes era nominado de "índice" (1955) ou "índice da matéria" (1965), passou a ser chamado de "sumário", com uma descrição de tópicos. A temática das frações aparece no item 15, com a descrição "Números Racionais – conjunto **Q**" (1972, p.1, *grifo do autor*). Sob o viés da teoria dos conjuntos, os tópicos são apresentados caracterizando o conjunto dos números racionais. De acordo com Jandrey, Dias e Santos (2021, p. 7), "a ideia era que a noção de conjunto fosse desenvolvida desde os primeiros anos escolares, da observação e experiência para a abstração matemática". Os conteúdos abordados sequencialmente, são operações no conjunto, problemas de aplicação e notação decimal (Figura 12).

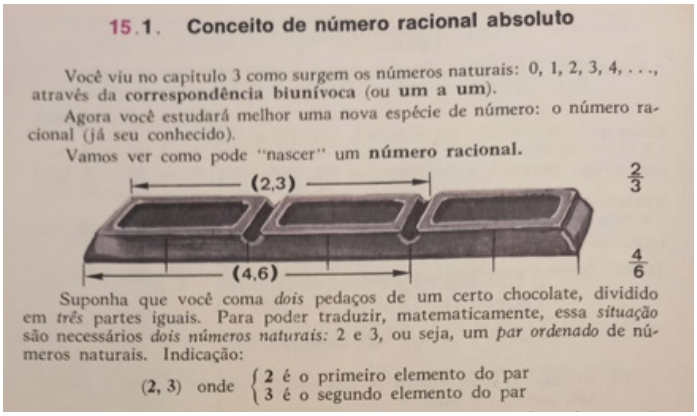
Figura 12 - Sumário



Fonte: Adaptação de Sangiorgi (1972, p. 1)

A introdução ao conteúdo de frações (Figura 13) é realizada com o "conceito de número racional absoluto", faz alusão ao "capítulo 3" sugerindo um raciocínio análogo ao já praticado: "agora você estudará melhor uma nova espécie de número: o número racional (já seu conhecido)" (p. 76).

Figura 13 - Conceito de número racional introduzido na obra de 1972



15.1. Conceito de número racional absoluto

Você viu no capítulo 3 como surgem os números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, . . ., através da **correspondência biunívoca** (ou **um a um**).

Agora você estudará melhor uma nova espécie de número: o número racional (já seu conhecido).

Vamos ver como pode "nascer" um **número racional.**

(2,3) $\frac{2}{3}$

(4,6) $\frac{4}{6}$

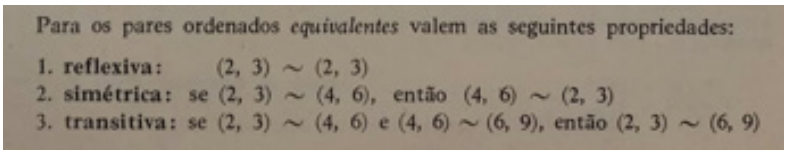
Suponha que você coma *dois* pedaços de um certo chocolate, dividido em *três* partes iguais. Para poder traduzir, matematicamente, essa *situação* são necessários *dois números naturais:* 2 e 3, ou seja, um *par ordenado* de números naturais. Indicação:

(2, 3) onde { 2 é o primeiro elemento do par; 3 é o segundo elemento do par

Fonte: Sangiorgi (1972, p. 76)

Antecedente ao conteúdo de "classe de equivalência", o autor apresenta a conceituação de pares equivalentes com o uso do símbolo til (∽) e seu uso para indicar uma relação de equivalência. Além disso, deixa claro que essa relação deve satisfazer as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva (Figura 14).

Figura 14 - Propriedades de uma relação de equivalência



Para os pares ordenados *equivalentes* valem as seguintes propriedades:

1. **reflexiva:** $(2, 3) \sim (2, 3)$
2. **simétrica:** se $(2, 3) \sim (4, 6)$, então $(4, 6) \sim (2, 3)$
3. **transitiva:** se $(2, 3) \sim (4, 6)$ e $(4, 6) \sim (6, 9)$, então $(2, 3) \sim (6, 9)$

Fonte: Sangiorgi (1972, p. 76)

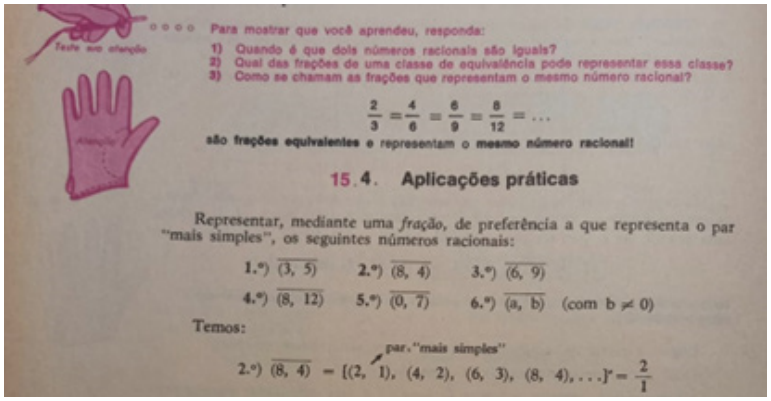
Seguindo nas seções, o autor apresenta as classes de equivalência e explana sobre a igualdade de frações definindo que:

> "as classes $\overline{(2,\ 3)}$ *e* $\overline{(4,\ 6)}$ são *iguais*, por serem formadas pelos *mesmos pares*, podemos dizer: 1) as classes $\overline{(2,\ 3)}$ *e* $\overline{(4,\ 6)}$ definem o *mesmo número racional* e, portanto, as frações $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{4}{6}$ representam o mesmo número racional, isto é: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. 2) as frações $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{4}{6}$, bem como aquelas que definem o *mesmo número racional*, são chamadas *frações equivalentes"* (Sangiorgi, 1972, p. 77, grifos do autor).

As frações próprias, impróprias, decimais e ordinárias aparecem somente depois dos conteúdos de classe de equivalência e frações equivalentes, o que configura uma abordagem distinta em comparação às obras de 1955 e 1965.

Os exercícios de fixação não aparecem mais ao final de cada seção, apenas há um indicativo de atividades chamadas "para mostrar que você aprendeu, responda". Outro diferencial são as "aplicações práticas" com exemplos resolvidos, deixando alguns para o leitor resolver, tais sugestões aparecem entre tópicos e são exercícios que apresentam um exemplo resolvido para guiar o processo resolutivo (Figura 15).

Figura 15 - Exercícios "para mostrar que você aprendeu" e as "aplicações práticas"



Para mostrar que você aprendeu, responda:

1) Quando é que dois números racionais são iguais?
2) Qual das frações de uma classe de equivalência pode representar essa classe?
3) Como se chamam as frações que representam o mesmo número racional?

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \ldots$$

são frações equivalentes e representam o mesmo número racional!

15.4. Aplicações práticas

Representar, mediante uma *fração*, de preferência a que representa o par "mais simples", os seguintes números racionais:

1.º) $\overline{(3, 5)}$ 2.º) $\overline{(8, 4)}$ 3.º) $\overline{(6, 9)}$

4.º) $\overline{(8, 12)}$ 5.º) $\overline{(0, 7)}$ 6.º) $\overline{(a, b)}$ (com $b \neq 0$)

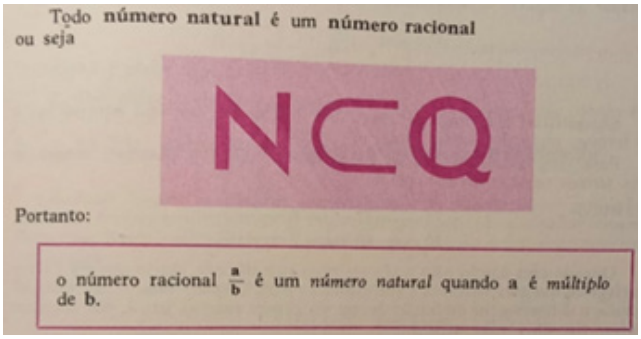
Temos:

2.º) $\overline{(8, 4)} = [(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), \ldots]' = \frac{2}{1}$ (par "mais simples")

Fonte: Sangiorgi (1972, p. 78)

A representação visual, com desenhos, somente aparece nas seções "recordando o estudo de frações" e "aplicações práticas" em exemplos ou formas de contextualizar uma explicação, sem ter uma seção específica, como na obra de 1965 (Figura 9). Sequencialmente, Sangiorgi (1972, p. 81) traz uma "identificação entre números naturais e números racionais com o uso de conceitos da Teoria dos Conjuntos (Figura 16), definindo:

Figura 16 - Uso da teoria dos conjuntos nas explicações



Todo **número natural** é um **número racional**
ou seja

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

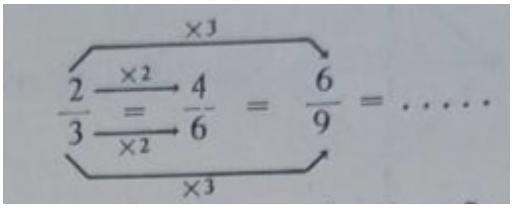
Portanto:

o número racional $\frac{a}{b}$ é um *número natural* quando a é *múltiplo* de b.

Fonte: Sangiorgi (1972, p. 81)

As frações equivalentes são obtidas por meio de uma "técnica de cálculo" que consiste na verificação "se são iguais os produtos: *numerador da primeira X denominador da segunda e denominador da primeira X do numerador segunda*" (Sangiorgi, 1972, p. 83, *grifos do autor*), representado pelo esquema da Figura 17.

Figura 17 - Técnica de cálculo para obter frações equivalentes



Fonte: Sangiorgi (1972, p. 82)

As próximas seções trazem mais "aplicações práticas", "redução de frações ao mesmo denominador", "estrutura de ordem em $\mathbb{Q}$" (aborda comparação de frações), seguido da "reta numerada",

novas "aplicações práticas" e uma recomendação de realizar mais atividades no "caderno de exercícios".

REFLEXÕES SOBRE AS OBRAS

De forma comparativa, percebe-se similaridades nas três propostas de ensino, no entanto a inclusão do tema frações relacionado à classe de equivalência, nas obras de 1965 e 1972, é uma alusão ao "currículo moderno". De acordo com Wrobel e Kill (2021) a abordagem sobre classe de equivalência neste período "modernista" é produto de discussões e propostas apresentadas no IV Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática e em publicações do século XX.

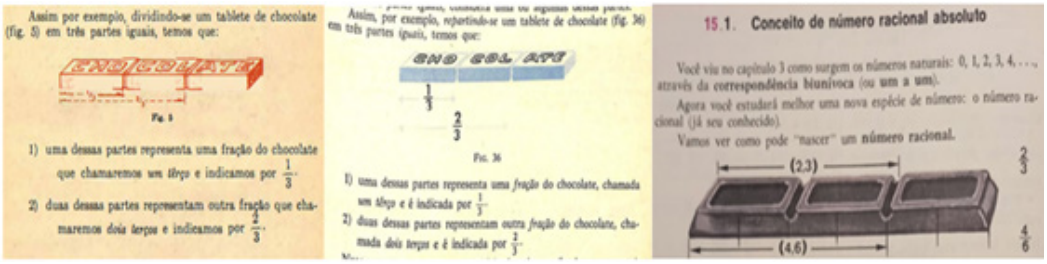
Quadro 1 - Descrição dos conteúdos do capítulo 3 nas obras de Sangiorgi de 1955 e 1965, e item 15 da obra de 1972.

Obra de 1955	Obra de 1965	Obra de 1972
Números fracionários; Operações fundamentais; Métodos de resolução de problemas sobre frações; frações decimais como números decimais.	Números fracionários; Classe de equivalência entre frações; Estrutura de ordem com números fracionários; Operações e propriedades estruturais; Problemas de aplicação e estruturas.	Conceito de número racional absoluto; Classe de equivalência: número racional; Igualdade e representações diferentes (frações equivalentes); Aplicações práticas; Operações; Notação decimais e operações.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024)

Sangiorgi (1955; 1965) apresenta a ideia de fração, denominado "número fracionário", como parte de um objeto, enquanto na obra de 1972, o autor mostra como "nasce um número racional", sem deixar de fazer uso da barra de chocolate, apenas com um aspecto mais realista, como ilustrado na Figura 13. Desse modo, o autor associa fração à representação da parte de um todo que possa ser igualmente dividido. A partir da ideia de fração, o autor define número fracionário ou fração como "um número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais" (Sangiorgi, 1955, p. 97).

Figura 18 - Noção intuitiva de número fracionário



Fonte: Sangiorgi (1955, p. 97), (1965, p. 161) e (1972, p. 76), respectivamente.

Percebe-se algumas características do MMM a partir da obra de 1965, como a presença da teoria dos conjuntos na obra de 1965 e o uso conceitual dos conjuntos na obra de 1972. Por se tratar de um material produzido para alunos do primeiro ano do ensino de primeiro grau (ou equivalente) os conteúdos são abordados de forma intuitiva com elementos que compõem o cotidiano, sempre aumentando gradativamente o nível de dificuldade. Choppin (2004, p. 533) esclarece que o livro didático é uma tradução de um programa, além de se constituir como "o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações".

As alterações de maior significado, entre as obras de 1955 e 1965, foram a atribuição da interpretação geométrica de números fracionários e a inclusão das classes de equivalência entre frações. Entre as obras de 1965 e 1972 há uma incorporação do uso da teoria dos conjuntos, uma redução na interpretação visual/geométrica de frações, além de abordar as frações impróprias, próprias e decimais depois de classes de equivalência. Nas três obras, há uma sequência lógica para a organização dos conteúdos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os livros didáticos, de acordo com Valente (2008), têm um lugar de destaque no registro escrito da história da matemática escolar no nosso país, reforçando a potencialidade desta fonte de pesquisa.

Com o passar das décadas, mudanças foram sendo implantadas nos livros, abrangendo desde os aspectos mais visuais até as representações escritas, incluindo alterações nas abordagens apresentadas.

As análises indicam que Sangiorgi, apesar de ser reconhecido como uma referência na divulgação do movimento modernista no Brasil, optou por uma transição gradual para explicitar a matemática proposta pelo movimento. Especificamente, no conteúdo de frações, na primeira obra consultada (antes MMM), o uso de ilustrações ainda era escasso, sendo adotada a estratégia introdutória de apresentação sequencial de regras, seguido de poucos exemplos e muitos exercícios de fixação.

Na obra de Sangiorgi (1965), aparece o uso de ilustrações como recurso textual e visual, exercícios de fixação, e, por mais que aborde a teoria dos conjuntos, o seu uso para a conceituação das frações não aparece de forma explícita. Já na obra de 1972, há o emprego da teoria dos conjuntos e a redução do uso das representações visuais.

Em síntese, com as análises percebe-se que os livros publicados sofreram mudanças ao longo do tempo, principalmente nas explicitações do conteúdo, seja pelos recursos visuais, o uso da teoria dos conjuntos e situações do cotidiano.

REFERÊNCIAS

BÚRIGO, Elisabete Zardo. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: estudo do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 286 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, v. 30, n. 3, p. 549–566, set. 2004. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S1517-97022004000300012. Acesso em 10 jan, 2025.

D'AMBROSIO, Beatriz Silva. **The Dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education**. Thesis (Doctor of Philosophy) – Indiana University, 1987.

FISCHER, Maria Cecília Bueno. Formação de professores em tempos de matemática moderna: uma proposta de investigação histórica. **Revista Diálogo Educacional**, v. 8, n. 25, p. 663–674, 2008.

JANDREY, Diogo Ferreira; DIAS, Laura Silva; SANTOS, Edilene Simões Costa dos. Saberes para Ensinar Frações no Livro "A Caminho da Matemática" de Adla Neme. **Revista de História da Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 7, p. 1–21, 2021. Disponível em: https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/408. Acesso em: 16 dez. 2024.

MATOS, José Manuel; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A reforma da Matemática Moderna em contextos iberoamericanos**. 2010.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática para a primeira série ginasial**. 11 ed. São Paulo: Companhia Editora nacional, 1955.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática um curso moderno**. 5 ed. São Paulo: Companhia Editora nacional, 1965.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática para cursos de primeiro grau**. 5 ed. São Paulo: Companhia Editora nacional, 1972.

SANTOS, José Luiz Soares dos. **O movimento da matemática moderna e o ensino das operações com números fracionários:** uma análise de livros didáticos. 2015. 106 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

SOARES, Flávia. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: Avanço ou Retrocesso? 2001. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2001.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Livro didático e educação matemática:** uma história inseparável. FE –Unicamp, v. 16, n. 30, 2008. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646894. Acesso em 25 set. 2024.

WROBEL, Julia Schaetzle; KILL, Tercio Girelli. Classes de equivalência: uma abordagem moderna para o ensino de frações. **Revista de História da Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 7, p. 1–27, 2021. Disponível em: https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/405. Acesso em: 27 nov. 2024.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

O papel dos determinantes em abordagens geométricas do século XIX

The role of determinants in 19th century geometric approaches

Caio Emanuel Curty Lima[1]
Instituto Federal do Rio de Janeiro Campus Volta Redonda – IFRJ

Yasmin Cristina Motta Fernandes[2]
Instituto Federal do Rio de Janeiro Campus Volta Redonda – IFRJ

Magno Luiz Ferreira[3]
Instituto Federal do Rio de Janeiro Campus Volta Redonda – IFRJ

RESUMO

Pode-se observar que atualmente o conceito de determinantes é abordado de forma superficial nas disciplinas que utilizam desse recurso matemático. Comparando como esse assunto é tratado com autores de séculos passados, nota-se uma significativa diferença na profundidade do tratamento dado ao tema. De modo mais específico, para matemáticos do século XIX, os determinantes tinham, também, um papel crucial em problemas geométricos. James Joseph Sylvester, autor do artigo "*On the Intersections, Contacts, and other Correlations of two Conics Expressed by Indeterminate Coordinates, publicado no Cambridge and Dublin Mathematical Journal*", que consideramos central para o presente estudo, por exemplo, utilizava de determinantes em investigações sobre contatos de curvas algébricas, principalmente cônicas. Ele empregava a geometria em coordenadas homogêneas como método para relacionar problemas de contatos com as propriedades dos determinantes. Uma abordagem mais aprofundada do tema era recorrente no Reino Unido durante o mesmo período histórico, sendo incorporada em trabalhos e livros-textos de outros matemáticos renomados, como George Salmon e Norman Macleod Ferrers. O presente trabalho tem como objetivo adaptar um trecho do artigo sobre contatos de Sylvester para a linguagem atual, explicar e exemplificar os estudos abordados, apresentando uma perspectiva alternativa ao que se entende sobre a utilização dos determinantes. Além disso, busca-se compreender a conexão entre Sylvester e os demais autores mencionados.

Palavras-chave: Determinante; Polinômios Homogêneos; Cônicas; James Joseph Sylvester.

ABSTRACT

It can be observed that currently, the concept of determinants is approached superficially in disciplines that utilize this mathematical tool. When comparing how this subject is treated by authors from past centuries, a significant difference in the depth of treatment given to the topic becomes evident. More specifically, for 19th-century mathematicians, determinants also played a crucial role in geometric problems. James Joseph Sylvester, the author of the article "On the Intersections, Contacts, and other Correlations of two Conics Expressed by Indeterminate Coordinates," published in the Cambridge and Dublin Mathematical Journal, which we consider central to the present study, for example, used determinants in investigations into the contacts of algebraic curves, particularly conics. He employed geometry in homogeneous coordinates as a method to relate contact problems with the properties of determinants. A more in-depth approach to the subject was recurrent in the United Kingdom during the same historical period, being incorporated into the works and textbooks of other renowned mathematicians, such as George Salmon and Norman Macleod Ferrers. The present work aims to adapt an excerpt from Sylvester's article on contacts to modern language, explain and exemplify the studies addressed, and present an alternative perspective on the understanding of the use of determinants. Additionally, it seeks to understand the connection between Sylvester and the other mentioned authors.

Keywords: Determinant; Homogeneous Polynomials; Conics; James Joseph Sylvester.

[1] Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: caioecl13@gmail.com.

[2] Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: mottafernandesyc@gmail.com.

[3] Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBTT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: magno.ferreira@ifrj.edu.br.

INTRODUÇÃO

Atualmente vemos e encontramos de maneira comum como forma de interpretação possível para os determinantes, uma função associativa entre matrizes e números reais ou um método para resolução de sistemas lineares. Porém, historicamente, é possível encontrar as mais diversas interpretações e usos que vão além da utilização como um simples operador. O presente trabalho tem como finalidade trazer para a linguagem atual um trecho de uma destas interpretações no artigo *On the Intersections, Contacts, and other Correlations of two Conics Expressed by Indeterminate Coordinates*, publicado no *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* publicado em 1850, pelo matemático britânico James Joseph Sylvester (1814 – 1897). Neste artigo, Sylvester utiliza os determinantes para operações geométricas que se tornaram comuns no Reino Unido do século XIX: pontos de contato em cônicas projetivas através de polinômios homogêneos, polinômios esses que na época expandiram se tornando um objeto importante para elaboração do que ficou conhecido posteriormente como Teoria dos Invariantes. Além disso, a seleção do recorte do texto que há de ser apresentado se dá ao fato de que os autores compreenderem ser material suficiente para analisar a abordagem do instrumento matemático em questão do autor.

É possível associar os determinantes com polinômios homogêneos ao lidar com problemas da Filosofia Natural, como o cálculo do movimento rotacional de corpos rígidos e das desigualdades nos movimentos dos planetas (Katz; Parshall, 2014). Quanto a esse cálculo de movimento, Brechenmacher (2014) aponta que uma das principais autorias foi a de Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) que, em 1775, nas palavras de Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), apresenta a seguinte reflexão nas memórias da academia de ciências de Paris:

> Dei noutra Memória... as expressões das desigualdades seculares dos planetas... mas a falta de utilidade deste cálculo para as necessidades da Astronomia, aliada às dificuldades que apresentava, fizeram-me abandonar esta ideia, e admito que eu não teria retomado o assunto sem ler um excelente livro de memórias sobre as desigualdades seculares do movimento dos nós e da inclinação das órbitas dos planetas que o Sr. de Lagrange acaba de enviar à Academia, e que aparecerá em um dos seguintes volumes. Este ilustre geômetra, por meio de uma transformação bem-sucedida, reduz o problema à integração de tantas equações lineares de primeira ordem quantas forem as incógnitas; ele então fornece um método muito engenhoso para integrá-los e para determinar as constantes contidas na integral, qualquer que seja o número de planetas.[4] (Laplace, 1775, p. 354 Apud. Brechenmacher, 2014, p. 85, tradução nossa).

Apesar do problema ser interessante para a astronomia, a solução traz uma discussão importante sobre transformações lineares. Isso pode ser observado a partir do século seguinte através de matemáticos como Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), que apresenta uma investigação sobre classificação de curvas (Cauchy, 1829) e George Boole (1815 – 1864), que apresenta a propriedade invariante do determinante associado a transformação linear que reduz um polinômio homogêneo à soma de quadrados positivos ou negativos em 1841 (Boole, 1841). Além da relação com a Equa-

[4] J'ai donné dans un autre Mémoire … les expressions des inégalités séculaires des planètes … mais le peu d'utilité de ce calcul pour les besoins de l'Astronomie, joint aux difficultés qu'il présentait, m'avait fait abandonner cette idée, et j'avoue que je ne l'aurais pas reprise, sans la lecture d'un excellent Mémoire Sur les inégalités séculaires du mouvement des nœuds et de l'inclinaison des orbites des planètes que M. de Lagrange vient d'envoyer à l'Académie, et qui paraîtra dans un des Volumes suivants. Cet illustre géomètre, au moyen d'une transformation heureuse, réduit le problème à l'intégration d'autant d'équations linéaires du premier ordre qu'il y a d'inconnues; il donne ensuite une méthode fort ingénieuse pour les intégrer, et pour déterminer les constantes que renferme l'intégrale, quelque soit le nombre de planètes

ção Secular, nome que ficou ligado ao problema proposto por Lagrange, estes trabalhos apresentam uma forte conexão entre os determinantes e problemas de geometria.

Citando Ferreira (2023), nesse contexto Sylvester contribui ao trazer o desenvolvimento das investigações em formas binárias e ternárias (polinômios homogêneos em duas e três variáveis). Após um trabalho importante sobre resolução de sistemas de equações, e até apresentar os determinantes como meio para esta solução, ele percebe uma aplicação importante deste objeto matemático para a interpretação dos contatos entre cônicas representadas em coordenadas indeterminadas, nome dado por ele ao que conhecemos atualmente como coordenadas homogêneas.

> Estou extremamente agradecido pela sua pronta resposta (em um período em que eu sei que seu tempo está muito ocupado com a sua ocupação bifara) e sua referência ao artigo de Salmon. Eu mencionei que uma dúvida pendia sobre a afirmação de que, a menos que as raízes de □ $(U + \lambda V)$ fossem todas reais, os pontos de inflexão devem ser todos imaginários. Ao olhar mais para o assunto, acho que a dúvida estava bem fundada, de fato, se todas as raízes são imaginárias, é verdade que as "flexões" são todas imaginárias, mas se duas raízes são reais e duas imaginárias, descobri com alguma surpresa que 4 das flexões (nem mais nem menos) não só podem, mas devem ser reais![5] [Sylvester para Calyley, dez/1850] (Parshall, 1998, p. 28, tradução nossa).

Nesta correspondência entre Sylvester e seu amigo Arthur Cayley (1821 – 1895) estramos o tratamento de problemas sobre pontos específicos de curvas algébricas. Neste caso, os matemáticos discutiam a associação das raízes da expressão □ $(U + \lambda V)$[6] e a natureza dos pontos de contato das U e V, a partir de uma combinação linear destes elementos. A expressão utilizada representa o determinante simétrico associado ao polinômio gerado pela combinação das duas cônicas citadas. Esta prática se tornou comum naquele período, tendo sido presente em outras obras e produções matemáticas como os tratados de álgebra moderna de George Salmon na mesma década de 1850 (Salmon, 1859) e a obra sobre coordenadas trilineares, publicada Norman Mcleod Ferrers, em 1861 (Ferrers, 1861).

Dado este contexto, este trabalho apresenta uma adaptação, para linguagem moderna, de termos utilizados ao longo do artigo publicado por Sylvester em 1850, de modo a evidenciar o papel dos determinantes na discussão sobre os contatos de cônicas. Para isso, nos concentramos nos conceitos que podem ser associados a conhecimentos contemporâneos da Álgebra Linear e Geometria Analítica. Além disso, realizamos comparações com as obras de Salmon e Ferrers. Esperamos contribuir para esclarecimentos sobre a pesquisa em História da Matemática e práticas comuns no curso de Licenciatura em Matemática e por vezes desprovidas de sentido.

REFERENCIAL TEÓRICO

Dentro da comunidade científica de pesquisa em história da matemática, pudemos ressaltar alguns autores que contribuíram como guias para debater o tema abordado no presente trabalho.

[5] I am exceedingly obliged by your prompt reply (at a period when I know your time is so much taken up with your bifarious occupation) and your reference to Salmon's paper. I mentioned that a doubt hung over my assertion that unless the roots of □ $(U + \lambda V)$ were all real, the points of inflexion must be all imaginary. On looking further into the matter I find that the doubt was well founded, in fact if all the roots are imaginary, it is true that the "flexures"are all imaginary, but if two roots are real and two imaginary, I have discovered with some surprise, that 4 of the flexures (neither more nor less) not only may but must be real!

[6] O símbolo □ trata-se de uma representação do determinante.

Bernardes (2016) em seu artigo "História da noção de matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas" traz diversas reflexões sobre a utilização dos determinantes no século XIX, com foco no Cayley e Sylvester. A autora aborda o mesmo texto selecionado e traz alguns dos usos para o determinante trazidos por Sylvester, como por exemplo, a análise da multiplicidade algébrica das raízes da equação cúbica de $|U + \mu V| = 0$. Apesar da passagem histórica e da análise do mesmo texto do problema dos contatos, a autora não aprofunda a abordagem selecionada pelo presente trabalho, ou seja, o determinante nulo como condição para uma cônica degenerada. Consideramos, então, que ambos trabalhos dialogam e podem vir a servir como complemento um do outro, sem o intuito de esgotar as discussões sobre o tema.

Ferreira (2023) ressalta diversos aspectos importantes das obras de nosso autor foco, como a explicação sobre os contatos e equações homogêneas. Além disso, podemos vinculá-lo à nossa pesquisa ao colocarmos em questão o debate sobre as comunidades científicas de algum tema existente, o que nos incentivou a abordar uma ramificação do debate sobre determinantes, mais especificamente, trazer para a comunidade científica um dos aspectos que Sylvester considerava importante para a utilização do determinante, além do seu diálogo para com outros autores relacionados de mesma época (Salmon e Ferrers).

Além disso, vale ressaltar que não consideramos que o presente trabalho tem o intuito de solucionar problemas históricos ao que se trata do assunto de determinantes e esgotar as discussões, mas sim, enriquecer o debate a partir da leitura e análise de textos desses autores citados anteriormente.

METODOLOGIA

Para compreender o papel dos determinantes na obra de Sylvester de 1850, buscamos evidenciar o modo como suas ideias geométricas se conectam com este objeto matemático. Como forma de evidenciar estas ligações nos concentramos na produção das ilustrações de um texto específico do autor. A escolha do artigo analisado nesta comunicação se deu através da análise prévia das publicações do matemático britânico no início da década de 1850. Este período é apontado por Ferreira (2023) como uma mudança de perspectiva das investigações de Sylvester. O objetivo foi analisar o texto através da abordagem sobre matrizes/determinantes e compreender como certos aspectos presentes nessa obra do século XIX podem ser adaptados para os conceitos didáticos atuais.

Como métodos de pesquisa e análise, seguimos as seguintes etapas que consideramos cruciais: levantamento e análise dos textos originais de Sylvester complementado por fontes secundárias que ajudaram a contextualizar sua publicação. Além disso, o trecho do artigo selecionado foi adaptado para a linguagem moderna, comentado e comparado com outras obras produzidas no período posterior à sua divulgação, selecionadas com base nas discussões sobre cônicas e determinantes. Os textos posteriores foram escolhidos no período posterior a publicação de Sylvester (1850) até o fim do século XIX. Esta opção leva em consideração o período em que o matemático se estabelece como personagem central da produção matemática britânica. Como forma de comparar as obras selecionadas, nos concentramos em evidenciar práticas comuns no artigo central deste estudo e nestas outras publicações.

OS DETERMINANTES E AS CÔNICAS PROJETIVAS, O ARTIGO DE 1850

Antes de partirmos para o artigo, vale ressaltar que selecionamos apenas as primeiras 5 páginas do "*On the Intersections, Contacts, and other Correlations of two Conics Expressed by Indeterminate Coordinates*" para a discussão, pois entendemos, a partir da leitura e análise do texto, já serem suficientes para conseguirmos entender como o autor utiliza o determinante na aplicação geométrica que queremos trazer.

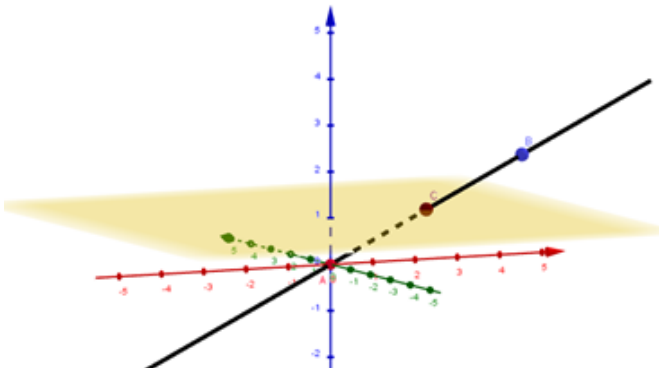
J. J. Sylvester inicia sua publicação com um problema de eliminação de variáves em polinômios homogêneos sugerindo a ideia das intersecções de curvas em cônicas: Dados U = 0, V = 0, sendo estas duas equações homogêneas de segundo grau com coeficientes reais entre as 3 variáveis[7] x, y, z. O modo considerado mais prático e generalizado de determinar as intersecções das cônicas expressas por essas equações seria formá-las a partir de:

$$ax+by+cz = t \qquad (1)$$

$$a'x+b'y+c'z = u \qquad (2)$$

Vale ressaltar que essas são equações lineares referentes as retas que ele acrescenta às duas formas quadráticas para U e V de modo a poder lidar mais facilmente com os sistemas de equações ou coexistências (nome dado pelo autor para sistemas). A partir disso, o autor busca observar como as propriedades dos contatos das cônicas se configuram a partir de determinantes associados aos polinômios homogêneos, através de um sistema de coordenadas que considera a interseção de uma reta qualquer com um plano z = 1, onde se forma uma projeção da reta. Exemplificando, ao traçar uma reta r: (5,3,2):

Figura 1 - Ponto em coordenadas homogêneas



Fonte: Elaborada pelos autores.

Pelo processo de eliminação das variáveis x, y, z podemos chegar em uma equação biquadrática entre t e u. A natureza dessas interseções depende diretamente da natureza das raízes da biquadrática formada. Assim, a partir das condições expressas podemos dizer onde teremos casos de todas as interseções sendo reais ou imaginárias, ou um par real e outro imaginário. Essas condições dependem dos sinais de certas funções dos coeficientes das dadas equações.

[7] O autor utiliza as letras gregas ξ, η e ς para representar coordenadas homogêneas. Neste trabalho, utilizaremos uma notação moderna no intuito de esclarecer os exemplos, não alterando os resultados dos exemplos.

A partir das formações proporcionais das coordenadas de x : y : z correspondentes aos conjuntos proporcionais de t : u, chegaremos em um padrão dado por:

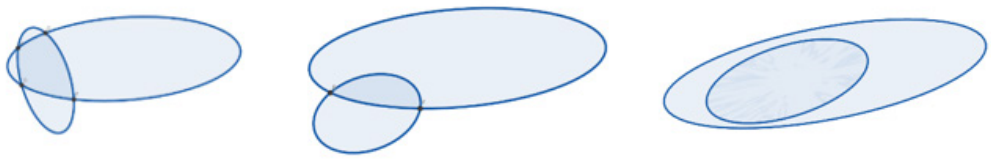
$$\begin{array}{ll} \frac{x_1}{z_1} = a + b\sqrt{(-1)} & \frac{y_1}{z_1} = c + d\sqrt{(-1)} \\ \frac{x_2}{z_2} = a - b\sqrt{(-1)} & \frac{y_2}{z_2} = c - d\sqrt{(-1)} \\ \frac{x_3}{z_3} = \alpha + \beta\sqrt{(-1)} & \frac{y_3}{z_3} = \gamma + \delta\sqrt{(-1)} \\ \frac{x_4}{z_4} = \alpha - \beta\sqrt{(-1)} & \frac{y_4}{z_4} = \gamma - \delta\sqrt{(-1)} \end{array} \quad (2)$$

O autor, então, a partir da análise das interseções, traça as seguintes conclusões:

> Se todos os quatro pontos do quadrângulo de intersecções forem todos reais, os três vértices e três pares de lados são todos reais. Se somente dois pontos do quadrângulo são reais, um vértice e um dos três pares de lados serão reais; sendo os outros dois vértices e dois pares de lados imaginários. Se todos os quatro pontos do quadrângulo são irreais, um par de lados vai ser real e os outros dois pares imaginários, assim como no último caso; Mas todos os três vértices permanecerão reais, como no primeiro caso. Portanto temos uma direta e simples caracterização para distinguir o caso de intersecções mistas de intersecções totalmente imaginários ou totalmente reais; nominalmente, essa equação cúbica de raízes de cada coordenada dos vértices são funções lineares reais terá um par de raízes imaginárias. Esta é a única e inequívoca condição necessária[8] (Sylvester, 1850, p. 263, tradução nossa).

De uma perspectiva geométrica visual, o autor pretende representar a interseção de duas cônicas quaisquer, onde poderemos encontras quatro interseções reais, duas reais e duas imaginárias ou todas as interseções complexas, respectivamente:

Figura 2 - Tipos de interseção das cônicas



Fonte: Elaborada pelos autores.

As equações formadas em questão são o produto do determinante de x, y, z em relação ao feixe de cônicas λU + μV. Se escrevemos as coordenadas proporcionais de x, y, z dos vértices de λU + μV, podemos chegar em:

$$AB - C2 : C'A' - B'B : B'C' - A'A \quad (3)$$

[8] If all the four points of the quadrangle of intersection are real, the three vertices and the three pairs of sides are all real. If only two points of the quadrangle are real, one vertex and one of the three pairs of sides will be real; the other two vertices and two pairs of sides being imaginary. If all four points of the quadrangle are unreal, one pair of sides will be real and the other two pairs imaginary, as in the last case; but all the three vertices will remain real, as in the first case. Hence, we have a direct and simple criterion for distinguishing the case of mixed intersection from intersection wholly real or wholly imaginary; namely, that the cubic equation of the roots of which the coordinates of the vertices are real linear functions shall have a pair of imaginary roots. This is the sole and unequivocal condition required

Para chegar nesse caso, devemos efetuar o determinante de λU + μV. A partir do método de eliminação por determinantes menores, encontrando coordenadas em z = 1. Com isso, nos resta apenas os coeficientes maiores e, fazendo deles coordenadas, encontramos justamente o citado acima.

Se as equações em λ:μ nominados[9] $\square_{xyz}(\lambda U + \mu V) = 0$ tem um par de raízes imaginárias, ou seja, se $\square_{\lambda\mu}\,\square_{xyz}(\lambda U + \mu V)$ é positivo, a interseção de U e V serão um "tipo misto", onde as duas cônicas terão dois pontos reais em comum.

Vale ressaltar que $\square_{xyz}(\lambda U + \mu V) = 0$ e $\square_{\lambda\mu}\,\square_{xyz}(\lambda U + \mu V)$ trata-se de dois determinantes que são utilizados para definição dos pontos de interseção das cônicas. Com o determinante da matriz associada à forma quadrática sendo nulo garante-se que as cônicas se degenerem. Para isso é necessário encontrar as raízes do polinômio característico, ou seja, os valores de (λ : μ) que fazem com que o determinante da matriz associada à forma quadrática seja zero.

Dadas duas cônicas:

$$\begin{aligned} U &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'zx + 2c'xy \\ V &= \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\alpha' yz + 2\beta' zx + 2\gamma' xy \end{aligned} \qquad (4)$$

Faz-se, $A = \lambda a + \mu\alpha$, $B = \lambda b + \mu\beta$, $C = \lambda c + \mu\gamma$, $A' = \lambda a' + \mu\alpha'$, $B' = \lambda b' + \mu\beta'$, $C' = \lambda c' + \mu\gamma'$.

Assim, uma nova cônica $W = \lambda U + \mu V = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy$ surgirá.

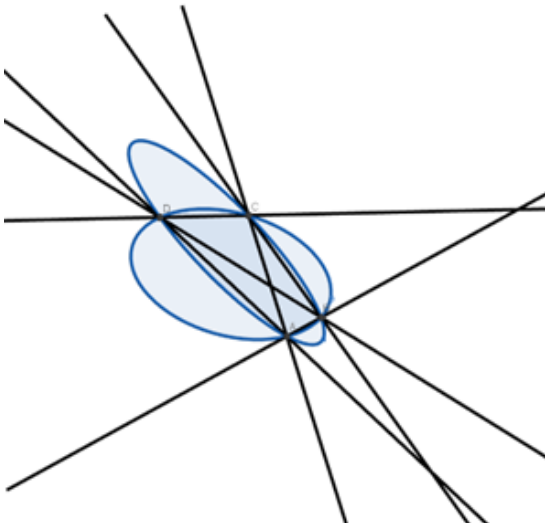
Sendo assim, operando o determinante de $\square_{\lambda\mu}\,\square_{xyz}(\lambda U + \mu V)$ com valores quaisquer, conseguimos encontrar a natureza dos pontos de interseção dados por:

$$(\lambda U + \mu V) = \begin{vmatrix} A & C' & B' \\ C' & B & A' \\ B' & A' & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a + \mu\alpha & \lambda c' + \mu\gamma' & \lambda b' + \mu\beta' \\ \lambda c' + \mu\gamma' & \lambda b + \mu\beta & \lambda a' + \mu\alpha' \\ \lambda b' + \mu\beta' & \lambda a' + \mu\alpha' & \lambda c + \mu\gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Com esta definição de Sylvester, podemos definir as interseções das retas dentro das cônicas. Neste caso, os polinômios podem ser escritos de forma matricial e, quando o determinante dos coeficientes é igual a 0 temos uma cônica degenerada. Nesse caso de Sylvester, são 3 valores que geram os pares de retas, como podemos ver na Figura 3:

[9] No material original Sylvester encontramos $\square_{\lambda\mu}\,\square_{\xi\eta\zeta}(\lambda U + \mu V)$. As letras gregas ξηζ são comumente utilizadas nas operações com cônicas no século XIX.

Figura 3 - Quadrângulo formado pela interseção das retas das cônicas degeneradas



Fonte: Elaborado pelos autores.

Essas retas formadas passando pelas interseções das cônicas só podem ser definidas a partir das cônicas degeneradas que tem como característica o determinante nulo encontrado no exemplo anterior.

CONSIDERAÇÕES DOS AUTORES ACERCA DO TRABALHO DE SYLVESTER

Nesta seção separamos aspectos que consideramos importantes para compreender melhor o texto e exemplificar certos pontos, a fim de enriquecer o debate e essa aproximação com a linguagem moderna para o texto.

Pudemos perceber durante a leitura do artigo de Sylvester que o autor em 1850 não só já utilizava do termo determinante enquanto narrava suas operações, como o associava sempre a funções ligadas a polinômios homogêneos. Outro momento que vale ressaltar é que o autor também utilizou de dados retirados da operação por determinantes menores quando busca as coordenadas dos vértices em λU + μV. Apesar de não utilizar o termo, vindo a trazer essas noções apenas em outra publicação posterior de mesmo ano na *Philosophical Magazine* de acordo com Bernardes (2016), já podemos perceber que se trata disso pois podemos encontrá-los a partir da separação em coordenadas dos menores presentes no determinante da equação 5.

Figura 4 - Quadrângulo formado pela interseção das retas das cônicas degeneradas

The equation in question is, or ought to be, well known to be the determinant in respect to ξ, η, ζ of $\lambda U + \mu V$. In fact, if we write

$$U = a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2a'\eta\zeta + 2b'\zeta\xi + 2c'\xi\eta,$$

$$V = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 + 2\alpha'\eta\zeta + 2\beta'\zeta\xi + 2\gamma'\xi\eta,$$

$$\lambda U + \mu V = (a\lambda + \alpha\mu)\,\xi^2 + \&c. = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2A'\eta\zeta + 2B'\zeta\xi + 2C'\xi\eta,$$

the ratios of the coordinates ξ, η, ζ of the vertex of $\lambda U + \mu V$ may easily be shown to be identical with

$$AB - C^2 : C'A' - B'B : B'C' - A'A,$$

and will be real or imaginary as $\lambda : \mu$ is one or the other.

Fonte: *On the Intersections, Contacts, and other Correlations of two Conics Expressed by Indeterminate Coordinates* (Sylvester, 1850)

Isso posto, consideramos que a abordagem de Sylvester busca um propósito e uma associação do determinante com "algo", nesse caso, sendo uma forma algébrica através da representação de polinômios homogêneos, o que, se compararmos com as operações que realizamos hoje em dia, realizamos operações geralmente de determinantes "quaisquer" de tamanho n x n sem necessariamente uma contextualização, associação ou necessidade específica para tal.

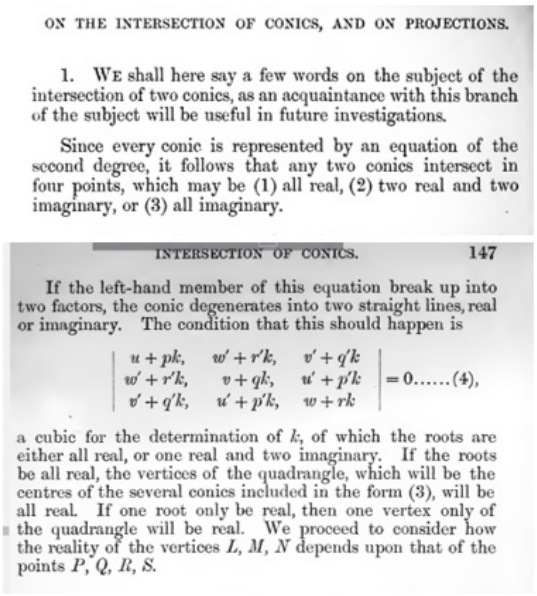
OUTRAS OBRAS DO SÉCULO XIX

O texto de Sylvester apresentou repercussões em livros-textos e apresentaram desdobramentos importantes, como foi o caso do *Lessons Introductory to the Mordern Higher Algebra* (Salmon, 1859). Sendo a primeira obra elaborada com intuito de divulgar novas técnicas desenvolvidas pelos britânicos para investigações sobre as relações entre os polinômios homogêneos e as transformações lineares, sendo conhecido como Teoria dos Invariantes. Além de apresentar as práticas citadas, o autor se concentrou em interpretações geométricas dos resultados. Este é o caso da seção 140 de seu livro (Salmon, 1859, p. 108), onde o autor destaca a característica covariante do que ele chama de *Pencil* (nome dado à combinação $\lambda U + \mu V$).

Outro caso que dialoga com o material deste trabalho é o capítulo VIII do livro *An Elementary Treatise on Trilinear Co-Ordinates* (Ferrers, 1861, p. 136). Ferrers se preocupa em trabalhar os conceitos, em suas próprias palavras, de Geometria Moderna ao destrinchar as coordenadas trilineares. Coordenadas trilineares nada mais são que um tipo de coordenada homogênea onde a posição de um ponto num plano é determinada pela razão de suas distâncias a partir de três retas distintas dadas neste plano.

Em determinado momento, Ferrers analisa as interseções de cônicas. Durante a leitura do texto, compreendemos que o autor considera o tema importante para entender as coordenadas trilineares, pois a estrutura do livro-texto destaca conhecimentos a partir de capítulos e/ou subtópicos, como a distância entre dois pontos num plano, condição para perpendicularidade, condições para formação de parábolas, entre outros, sendo um desses capítulos justamente o XVIII entitulado "*On the intersection of conics, on projections, and on the determination of a conic from five given geometrical conditions*", que trata do assunto de interseções de cônicas a partir de condições geométricas. Inicialmente, o autor fala de diversos exemplos de operações com cônicas e análise sobre o comportamento das retas no mesmo plano das cônicas em questão. Mas para além disso, podemos perceber que em seu texto, o autor trás as mesmas considerações sobre a definição de curvas degeneradas e a interseção de retas com seus padrões (imaginárias e/ou reais).

Figura 5 - Trechos da autoria de N. M. Ferrers



ON THE INTERSECTION OF CONICS, AND ON PROJECTIONS.

1. We shall here say a few words on the subject of the intersection of two conics, as an acquaintance with this branch of the subject will be useful in future investigations.

Since every conic is represented by an equation of the second degree, it follows that any two conics intersect in four points, which may be (1) all real, (2) two real and two imaginary, or (3) all imaginary.

INTERSECTION OF CONICS. 147

If the left-hand member of this equation break up into two factors, the conic degenerates into two straight lines, real or imaginary. The condition that this should happen is

$$\begin{vmatrix} u+pk, & w'+r'k, & v'+q'k \\ w'+r'k, & v+qk, & u'+p'k \\ v'+q'k, & u'+p'k, & w+rk \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots (4),$$

a cubic for the determination of k, of which the roots are either all real, or one real and two imaginary. If the roots be all real, the vertices of the quadrangle, which will be the centres of the several conics included in the form (3), will be all real. If one root only be real, then one vertex only of the quadrangle will be real. We proceed to consider how the reality of the vertices L, M, N depends upon that of the points P, Q, R, S.

Fonte: *An Elementary Treatise on Trilinear Co-Ordinates* (Ferrers, 1861)

Nestes trechos recortados, de forma traduzida e resumida, o autor trás conceitos estabelecidos por Sylvester em sua autoria (ressaltando a importância do determinante nulo para se estabelecer uma cônica degenerada) levando-nos a entender melhor o contexto daquela época, onde os autores britânicos já tinham esses conhecimentos pré-estabelecidos devido a comunidade cientifica criada, além da relevância de tais estudos produzidos.

CONCLUSÕES

Em suma, podemos afirmar que os saberes que rondam o assunto dos determinantes dentro da matemática hoje em dia dificilmente abordam da mesma forma ou com a mesma utilização prática de autores do século XIX. No que se trata dos problemas de contatos em curvas algébricas, podemos, ainda, analisar o quanto para aquela comunidade científica da época, tais assuntos eram de suma importância para a fomentação de conhecimento.

Desta forma, a adaptação do texto de Sylvester proporciona uma perspectiva mais ampla de um objeto matemático que tem sido apresentado de forma descontextualizada. Os desdobramentos encontrados em outras obras do século XIX caracterizam a relevância deste tipo de abordagem na época, fator que reforça a importância de sua retomada em dias atuais.

Isto posto, nossa intenção não foi a de esgotar o estudo dos determinantes e sua utilização no decorrer da história, porém, entendemos e enxergamos, então, que através deste trabalho, em que destacamos autores que utilizam os determinantes como meio para compreender a natureza dos pontos de contatos entre duas cônicas, podemos ter a oportunidade da expansão do ensino e conhecimentos sobre Álgebra Linear a partir de conceitos importantes citados durante a presente pesquisa.

REFERÊNCIAS

BERNARDES, A.; ROQUE, T. História da noção de matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 16, n. 31, p. 01-19, 2016.

BOOLE, G. Exposition of a general theory of linear transformations. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 3, p. 1–20, 1841.

BRECHENMACHER, F. Lagrange and the secular equation. **Lettera Matematica**, Springer, v. 2, n. 1, p.79–91, 2014.

CAUCHY, A.-L. Sur l'équation l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes. **Oeuvres Completes (IIeme Série)**, v. 9, 1829.

FERREIRA, M. L. **JJ Sylvester e a comunidade formada através do desenvolvimento da Teoria dos Invariantes**. 2023. Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Brasil.

FERRERS, N. M. **An elementary treatise on trilinear co-ordinates, the method of reciprocal polars, and the theory of projections**. Cambridge: Macmillan and Co., 1861.

KATZ, V. J.; PARSHALL, K. H. **Taming the unknown: history of algebra from antiquity to the early twentieth century**. Princeton: Princeton University Press, 2014.

PARSHALL, K. F. **James Joseph Sylvester: Life and work in letters**. [S.l.]: Oxford University Press, 1998.

SALMON, G. **Lessons introductory to the modern higher algebra**. 1. ed. [S.l.]: Hodges, Smith, and Company, 1859.

SYLVESTER, J. J. On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 5, n. 262-282, p. 162, 1850.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Determinantes a partir de livros-textos do século XIX

Determinants from 19th-century textbooks

Maria Luisa Mendonça Pitassi[1]
Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

Caio Emanuel Curty Lima[2]
Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

Leandro Silva Dias[3]
Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

RESUMO

O trabalho a seguir apresenta resultados de um projeto de iniciação científica que teve como objetivo investigar o desenvolvimento de aspectos da álgebra linear vistos no século XIX. Através do que conhecemos sobre determinante atualmente, pudemos encontrar e analisar algumas abordagens que são utilizadas ao trabalhar o conceito de determinantes no século XIX. Com o foco nas abordagens e definições trabalhadas pelos matemáticos do período, partimos da definição apresentada por George Salmon em seu livro-texto de 1859 *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*. A partir disso, pudemos encontrar outros livros da mesma época, dentro do período escolhido de 1856 a 1866. Como critério de seleção livros que lidaram com os determinantes. A fim de verificar como o conceito estava consolidado na matemática britânica no século XIX, analisamos alguns trabalhos, com interesse no desenvolvimento e nas utilizações de determinantes e as intenções interligadas ao seu uso. Foram identificadas características nos livros-textos que, percebeu-se o destaque de aspectos geométricos e algébricos. Além disso, apresentamos o desenvolvimento de exemplos e abordagens históricas, com objetivo de entender como o objeto matemático era utilizado no passado. A partir disso, entendemos como as utilizações dos determinantes partindo de ideias geométricas podem ampliar a percepção dos conceitos de álgebra linear ligados a este objeto.

Palavras-chave: Determinante; História da Matemática; Álgebra Linear.

ABSTRACT

The following paper presents the results of a scientific initiation project that aimed to investigate the development of aspects of linear algebra seen in the 19th century. Through what we know about determinants today, we were able to find and analyze some of the approaches used when working with the concept of determinants in the 19th century. Focusing on the approaches and definitions worked on by mathematicians of the period, we started with the definition presented by George Salmon in his 1859 textbook Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra. From there, we were able to find other books from the same century, within the chosen period of 1856 to 1866. The selection criteria were books that dealt with determinants. In order to verify how the concept was consolidated in British mathematics in the 19th century, we analyzed some works, with an interest in the development and uses of determinants and the intentions linked to their use. We identified characteristics in the textbooks that emphasized geometric and algebraic aspects. In addition, we presented the development of examples and historical approaches, with the aim of understanding how the mathematical object was used in the past. From this, we understand how the use of determinants based on geometric ideas can broaden the perception of linear algebra concepts linked to this object.

Keywords: Determinant; History of Mathematics; Linear Algebra.

[1] Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: malumendoncapitassi@gmail.com.

[2] Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: caioecl13@gmail.com.

[3] Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBTT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: leandro.dias@ifrj.edu.br.

INTRODUÇÃO

Este trabalho é parte de um projeto de pesquisa cujo objetivo foi investigar o desenvolvimento da álgebra linear no século XIX. Partindo da definição de determinantes presente na 1ª edição da obra *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra* (Salmon, 1859), buscamos outros livros, que lidam com o mesmo tema, entre 1856 e 1866, os quais foram divulgados na seção *Notices Respecting New Books* do Periódico *Philosophical Magazine*. Neste período identificamos quatros obras que lidam com o conceito de determinante, conforme o Quadro 1 adiante.

Quadro 1 – Obras selecionadas

TÍTULO	AUTOR	ANO
Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra	George Salmon (1819 – 1904)	1859
An Elementary Treatise on the Theory of Equations, with a Collection of Examples	Isaac Todhunter (1820 – 1884)	1861
Elementary Treatise on Trilinear Coordinates, the Method of Reciprocal Polars, and the Theory of Projections	Norman Macleod Ferrers (1829 – 1903)	1861
Trilinear Coordinates and other Methods of Modern Analytical Geometry of Two Dimensions	William Allen Whitworth (1840 – 1905)	1866

Fonte: Elaborada pelos autores

O objetivo deste trabalho foi identificar as principais características em livros-textos que lidaram com determinantes na segunda metade do século XIX. Trata-se de um objeto central para evolução da matemática, tanto atualmente quanto no período escolhido. Como Eberhard Knobloch (2002) aponta, este tema fez parte de investigações em teoria dos números, equações lineares, eliminação e permutação, além de geometria. Atualmente é muito utilizado em cálculos de autovalores e autovetores.

Neste artigo, apresentamos os determinantes no século XIX. Inicialmente trabalhamos como o tema aparece no livro de Salmon de 1859, possuindo uma abordagem ligada as transformações. Em seguida o livro de Ferrers de 1861, que trabalha com determinantes associados a uma abordagem geométrica. Também possuindo uma abordagem geométrica o livro-texto trabalhado em seguida é de Whitworth de 1866. Focando seu trabalho em equações o último livro abordado é de Todhunter, de 1861.

REFERENCIAL TEÓRICO

Trabalhando o conceito de determinante, Knobloch (2002) faz um recorte histórico parando no século XIX. Inicia com uma parte mais histórica de seu desenvolvimento, traz um enfoque em Leibniz, aborda as definições do século XVIII, e no século XIX traz nomes como o de Cayley, que publica trabalhos por volta da metade do século e foi o primeiro a delimitar o conjunto de elementos por duas linhas verticais, e posteriormente ajuda na fundação de teorias, como as das matrizes e invariantes.

Victor Katz e Karen Parshall (2014) em seu livro que estuda a álgebra da antiguidade ao século XX tratam do desenvolvimento de vários campos ou áreas da matemática. O determinante aparece muitas vezes relacionado aos temas: resolução de sistemas lineares, transformações lineares,

relacionado as matrizes e teoria dos invariantes. Eles afirmam que determinantes foi a maior área de pesquisas no século XIX, citando vários matemáticos, dentre os quais figuram Sylvester e Cayley representando os britânicos.

Assim como no artigo de Aline Bernardes e Tatiana Roque, exploraremos exemplos partindo de um interesse principal, no caso deste trabalho os determinantes, e no artigo citado o trabalho de contato de cônicas de Sylvester. As autoras apresentam um exemplo, trazendo os cálculos utilizados e as representações geométricas. Somos apresentados a uma clara utilização geométrica dos determinantes, onde temos um determinante constituído de derivadas de segunda ordem que apresenta as equações das retas que ligam as intersecções da cônicas (Bernades; Aline, 2016).

METODOLOGIA

Partindo do livro-texto de George Salmon (1859), buscamos outros livros, que lidam com o mesmo tema, entre 1856 e 1866, os quais foram divulgados na seção *Notices Respecting New Books* do Periódico *Philosophical Magazine*.

Ao estudar os determinantes nos livros-textos selecionados tomamos em consideração o contexto que eles se inserem, conforme indica o professor Gert Schubring (2022). Nesse trabalho o contexto se refere a um conjunto de gestos, procedimentos e práticas codificadas concretas que são atestadas pelas fontes escritas. Então, analisamos os livros-textos a partir dos seus próprios procedimentos e conceitos.

Fazemos uma breve análise dos livros-textos seguindo a segunda dimensão apontado por Schubring (2022), que consiste em encontrar mudanças correspondentes em outros livros didáticos pertencentes à mesma obra, estudando as partes que lidam com campos conceituais relacionados. Neste trabalho, o determinante foi o conceito relacionado nas obras selecionadas.

DETERMINANTE NO SÉCULO XIX

As principais definições encontradas durante a pesquisa tratam os determinantes a partir dos assuntos: sistemas de equações lineares, teoria de eliminação e geometria. Analisamos os quatro livros selecionados verificando como aparece o determinante, sua utilidade, exemplos e a abordagem adotada. Percebeu-se que os problemas geométricos estavam muito presentes nas discussões que utilizavam os determinantes. A seguir serão trabalhados exemplos de cada uma das obras, de forma direta ou indireta.

Determinantes no livro de Salmon

Lessons introductory to the modern high algebra (1859), livro-texto dividido em 17 lições aborda o conceito da álgebra moderna (nome atribuído às práticas com polinômios homogêneos investigados a partir de transformações lineares).

Em sua primeira lição, Salmon traz noções preliminares de um determinante, definindo-o através das equações homogêneas. Possuindo n equações é possível encontrar o determinante fazendo a eliminação das variáveis e o resultado é baseado nos coeficientes. Sendo os coeficientes letras do alfabeto seguidas de um índice, que representa a equação, como: a_1, b_1, c_1, ..., para a primeira equação; a_2, b_2, c_2, ..., para a segunda equação; assim por diante. O determinante segue essa ordem,

colocando em cada linha os coeficientes de uma equação (Salmon, 1859). Para expressar o determinante, Salmon também utiliza sua diagonal principal entre parênteses, sendo uma representação mais sintética. Por exemplo, dadas as equações $a_1x+b_1y=0$ e $a_2x+b_2y=0$, o determinante associado é (a_1b_2).

Os exemplos selecionados apresentam um cunho preparatório em relação ao principal tema do livro, as transformações lineares onde pode-se perceber mais diretamente a discussão geométrica.

Salmon (1859) apresenta uma generalização do cálculo de um determinante quando o número de colunas é maior que o número de linhas, o qual representa uma coleção de outros determinantes. O método apresenta um modo de equiparar equações como forma de eliminar variáveis. No texto, elimina-se *x* e *y* alternadamente, e em seguida escreve-se *x* e *y* em função de *z*, encontrando-se igualdades cujo valores substituídos nas duas equações originais, dão as identidades já escritas.

A seguir será trabalhado um exemplo com base nas explicações do artigo.

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Separando em 3 determinantes, eliminando uma coluna de cada vez, teremos

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2) \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2 \times 2 - 1 \times 1) = 3$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = (a_3b_1) = (a_3b_1 - a_1b_3) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2 - 1 \times 2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2) = (a_1b_2 - a_2b_1) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1 - 2 \times 2) = -3$$

Esses três determinantes estão conectados pelas relações:

$a_1(a_2b_3) + a_2(a_3b_1) + a_3(a_1b_2) = 0$ *e* $b_1(a_2b_3) + b_2(a_3b_1) + b_3(a_1b_2) = 0$, e no exemplo numérico $1(2\times2-1\times1)+2(1\times1-1\times2)+1(1\times1-2\times2)=3+0-3=0$ *e* $2(2\times2-1\times1)+1(1\times1-1\times2)+0(1\times1-2\times2) = 6+0-6=0$.

Agora trabalhando com as equações $a_1x + a_2y + a_3z = 0$ e $b_1x + b_2y + b_3z = 0$ ($x + 2y + z = 0$ e $2x + y + 2z = 0$), eliminando alternadamente *x* e *y* teremos duas equações correspondentes em função de *z*.

Multiplicando a primeira por (b_2) e a segunda por $(-a_2)$, eliminaremos *y*, e conseguiremos escrever *x* em função de *z*. Teremos então a relação $(a_1b_2)x = (a_2b_3)z$, analogamente o exemplo numérico traz a relação $-3x = 3z$.

Multiplicando a primeira por $(-b_1)$ a segunda por (a_1) eliminaremos *x*, e conseguiremos escrever *y* em função de *z*. Teremos então a relação $(a_1b_2)y = (a_3b_1)z$, analogamente o exemplo numérico traz a relação $-3y = 0z$.

Já em sua terceira lição, Salmon (1859) trabalha menores e recíprocos de um determinante qualquer. Definido pela eliminação de uma linha e uma coluna em relação a um elemento, o determinante formado pelos elementos restantes é o chamado menor, e o elemento relacionado não aparece no menor. Nesta lição no art. 25, Salmon (1859) demonstra que o recíproco de um determinado determinante é o determinante cujos constituintes são os menores correspondentes a cada

constituinte daquele. Com isso mostra a relação entre um determinante de ordem *n* e seu recíproco: recíproco é o determinante inicial elevado a potência *n–1*.

Adiante será trabalho um exemplo com base nas explicações do artigo, que utiliza um determinante de ordem 3 para mostrar os cálculos. Partindo de três equações homogêneas, $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ e $a_3x + b_3y + c_3z = 0$, criamos o exemplo $3x + 2y + z = 0$, $2x + y + 2z = 0$ e $-x + 2y-z = 0$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3) = \Delta \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Através de um determinante calcularemos os menores em relação a todos os elementos, e em seguida montaremos o determinante com os menores.

$$a_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3) = \ A_1 \quad 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (1 \times (-1) - 2 \times 2) = -5$$

$$b_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} c_3 & a_3 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} = (c_3a_1) = B_2 \quad 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = ((-1) \times 3 - (-1) \times 1) = -2$$

$$c_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2) = C_3 \quad -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 \times 1 - 2 \times 2) = -1$$

Temos descrito anteriormente os menores em relação aos elementos da diagonal principal do determinante inicial, e de forma análoga foram calculados os menores em relação ao demais elementos. Assim, podemos montar o recíproco do determinante, que seria o determinante dos menores.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = (A_1B_2C_3) = \Delta' \Rightarrow \begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -8 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 100$$

Agora multiplicando os determinantes (Δ×Δ') teremos o seguinte determinante.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 \\ a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 \\ a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -8 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3(-5) + 2(0) + (5), & 2(-5) + (0) + 2(5), & -1(-5) + 2(0) + (-1)(-5) \\ 3(4) + 2(-2) + (-8), & 2(4) + (-2) + 2(-8), & -1(4) + 2(-2) + (-1)(-8) \\ 3(3) + 2(-4) + (-1) & 2(3) + (-4) + 2(-1), & -1(3) + 2(-4) + (-1)(-1) \end{vmatrix}$$

Destas relações, as relações da diagonal principal resultam no determinante original ($a_1b_2c_3$). Logo,

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3 \Rightarrow \Delta \times \Delta' = \Delta^3 \Rightarrow (a_1b_2c_3)\,(A_1B_2C_3) = (a_1b_2c_3)^3 \Rightarrow$$

$$(A_1B_2C_3) = (a_1b_2c_3)^2$$

$$\begin{vmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = (-10)^3 = (-10)(100) \Rightarrow 100 = (-10)^2$$

Ao longo do desenvolvimento das operações, foi respeitada a abordagem que o autor trabalhava. Percebe-se que se tratava de um cálculo detalhado e demorado, porém o determinante aparece com um significado matemático importante. Por vezes nos cursos de álgebra linear o estudante nunca é exposto a uma abordagem significativa dos determinantes, o que problemas como esse poderiam ajudar, dando significado ao conteúdo. Ou seja, apresentando-o de uma forma mais didática. O que para Salmon (1859) era importante.

Em seguida, será apresentada uma das abordagens para determinantes de Ferrers (1861).

Determinantes no livro de Ferrers

O livro de N. M. Ferrers, *An Elementary Treatise on Trilinear Coordinates*, se preocupa em trabalhar os conceitos considerados como *Geometria Moderna* em sua época, especificamente com coordenadas trilineares no plano cartesiano. A fim de contexto, coordenadas trilineares são, basicamente, um tipo de coordenada homogênea onde a posição de um ponto num plano é determinada pela razão de suas distâncias de três retas dadas neste plano, com elas não passando pelo mesmo ponto.

Em seu livro, Ferrers (1861) e preocupa em seguir uma construção de conceitos até chegar no tópico principal de sua obra. Ele parte da definição inicial do tema, passa por conceitos importantes como, por exemplo, a conceituação de equações homogêneas de segundo grau, um capítulo específico para trabalhar o uso de determinantes para, apenas depois de construir uma base, chegar no seu objetivo.

Ferrers (1861) utiliza os determinantes para aplicações geométricas. No capítulo do livro sobre cônicas, podemos observar diversos exemplos da sua utilização.

A equação geral de segundo grau dada pela forma $u\alpha^2 + v\beta^2 + w\gamma^2 + 2u'\beta\gamma + 2v'\gamma\alpha + 2w'\alpha\beta = 0$. Ou de forma abreviada, $\phi(\alpha, \beta, \gamma,) = 0$.

Que ele afirma representar uma seção cônica (Ferrers, 1861). Para achar o ponto em que uma reta traçada interceptando um ponto da cônica toca novamente um outro ponto da cônica, ou seja, uma secante, Ferrers (1861) utiliza de diversos cálculos para mostrar que as razões das coordenadas serão proporcionais, além de definir o conceito de S (utilizado na maioria dos cálculos) e, com isto em mente, o autor segue explicando os conceitos de reta tangente em cônicas. Os dois conceitos são de suma importância para continuar a explicação sobre cônicas pois, tanto as operações, quanto a parte geométrica, dependem desse entendimento.

Isso posto, seguimos com as primeiras aparições dos determinantes nas aplicações em cônicas. Para encontrar a condição para que uma reta dada possa tocar a cônica,

Seja a equação da reta: $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ e (f, g, h) as coordenadas desse ponto de contato; então, comparando esse com a equação da tangente citada anteriormente no texto, dá-se:

$$\frac{uf + w'g + v'h}{l} = \frac{w'f + vg + u'h}{m} = \frac{v'f + u'g + wh}{n}$$

representando cada uma dessas grandezas equivalentes, o que nos leva a encontrar três relações a seguir *uf+w'g+v'h+lk=0* (relação 1)*, w'f+vg+u'h+mk=0* (relação 2) e *v'f+u'g+wh+nk=0* (relação 3).

Além disso, a partir do momento que (*f, g, h*) é um ponto na reta dada, temos uma quarta relação, *lf+mg+nh=0* (relação 4).

Eliminando f, g, h, k entre (1), (2), (3), (4), temos:

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v', & l \\ w', & v, & u', & m \\ v', & u', & w & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ou \; \begin{vmatrix} \frac{d^2\phi}{d\alpha^2}, & \frac{d^2\phi}{d\alpha d\beta}, & \frac{d^2\phi}{d\alpha d\gamma}, & l \\ \frac{d^2\phi}{d\beta d\alpha}, & \frac{d^2\phi}{d\beta^2}, & \frac{d^2\phi}{d\beta d\gamma}, & m \\ \frac{d^2\phi}{d\gamma d\alpha}, & \frac{d^2\phi}{d\gamma d\beta}, & \frac{d^2\phi}{d\gamma^2} & n \\ l, & m, & n, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Esta é a condição necessária para que a reta *(l, m, n)* toque na cônica ϕ(f, g, h) = 0. Abrindo o determinante, isso pode ser reescrito como: *(vw–u'²)l² + (wu–v'²)m² + (uv – w²)n² + 2(v'w' – uu') mn + 2(w'u' – vv')nl + 2(u'v' – ww')lm =0*

Que nos leva a condição inicial que queríamos encontrar.

Outro exemplo que vale ressaltar é que para encontrar a condição em que uma cônica se separe entre duas retas, reais ou imaginárias é necessário e suficiente que a expressão $\phi(\alpha, \beta, \Upsilon)$ se separe em dois fatores, onde a condição para que isso ocorra é dado por:

$$\begin{vmatrix} u, & w', & v\prime \\ w', & v, & u\prime \\ v', & u', & w \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } uvw + 2u'v'w' - uu'^2 - vv'^2 \, ww'^2 = 0$$

Por último, o autor também utiliza dos determinantes para o cálculo de área de cônicas dado por:

$$2\pi\Delta abc \frac{\begin{vmatrix} u, & w', & v' \\ w', & v, & u' \\ v', & u', & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u, & w', & v', & -a \\ w', & v, & u', & -b \\ v', & u', & w, & -c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}^{\frac{3}{2}}}$$

Onde, a depender da classificação da cônica (sendo hipérbole ou elipse) muda-se o sinal das variáveis.

Diferente de Salmon (1859), que se preocupava com a transferência do conteúdo de uma forma mais didática e acessível, Ferres (1861), possuía uma abordagem voltada para aqueles que já conheciam previamente os conteúdos, e a sua utilização de determinante acompanha as outras

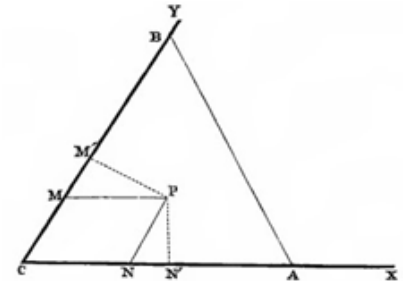
abordagens. Esta abordagem mais complexa requer uma maior dedicação para entender a utilização do determinante.

Em seguida será apresentado uma utilização dos determinantes no trabalho de Whitworth (1866).

Determinantes no livro de Whitworth

Trilinear Coordinates and other Methods of Modern Analytical Geometry (1866), antes de se aprofundar nas coordenadas trilineares, William (1866) introduz seu livro com um sistema que conecta o eixo cartesiano usual com o sistema trilinear (método de coordenadas perpendiculares referentes a dois eixos oblíquos). Dada pela distância do ponto aos eixos, essa conexão trabalha a relação das coordenadas obliquas e as coordenadas perpendiculares utilizando o ângulo formado pelos eixos, como pode ser notado na Figura 1 da sequência.

Figura 1 – Distâncias do ponto ao eixo

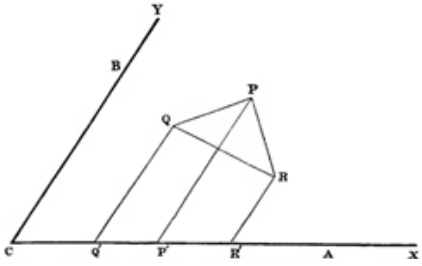


Fonte: Whitworth (1866, p. 6)

Onde temos as distâncias obliquas, $x=PM$ e $y=PN$, e as distâncias perpendiculares, $\alpha=PM'$ e $\beta=PN'$. E elas estão conectadas pelas seguintes relações, $\alpha = x \operatorname{sen} C$ e $\beta = y \operatorname{sen} C$ ou $x = \alpha \operatorname{cossec} C$ e $y = \beta \operatorname{cossec} C$.

Adiante desenvolvemos um exemplo com base no artigo 5 do primeiro capitulo do livro, onde Whitworth trabalha o cálculo da área de um triângulo com coordenadas perpendiculares dos vértices em relação a eixos oblíquos se dá, inicialmente, na identificação das coordenadas (Whitworth, 1866): no caso (α_1,β_1), (α_2,β_2) e (α_3,β_3) são as coordenadas dos pontos P, Q e R referenciados ao eixo oblíquo CX e CY, conforme a Figura 2 que segue.

Figura 2 – Área dos trapézios



Fonte: Whitworth (1866, p. 6)

Ao traçar linhas paralelas ao eixo oblíquo CY passando pelos vértices do triângulo PQR se encontra no eixo CX nos pontos Q', P' e R'.

Observa se que *P', Q'* e *R'* são projeções dos vértices *P*, *Q* e *R* no eixo *CX*, formando assim três trapézios: *PQQ'P', PRR'P'* e *QRR'Q'*

Utiliza-se a fórmula da área do trapézio *PQQ'P'* usando como referência sua base *P'Q'* igual a $(\alpha_1 - \alpha_2)cossec\ C$, pois por ser uma projeção de *PQ* no eixo *CX* essa expressão é a distância entre essas projeções, a cossecante em evidência se dá devido ao ajuste necessário por estarmos trabalhando em sistema de eixos oblíquos. Como as cordenadas no eixo *CY* dos pontos *Q* e *P* coincidem com as bases do trapézio *PQQ'P'*, então a expressão $½\ (\beta_1 + \beta_2)$ é a média da base menor e base maior deste trapézio. Logo, a área deste trapézio é: $½\ cossec\ C\ (\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)$. Analagomanete teremos $½\ cossec\ C\ (\beta_3 + \beta_1)(\alpha_3 - \alpha_1)$ para o trapézio *PRR'P'* e $½\ cossec\ C\ (\beta_2 + \beta_3)(\alpha_3 - \alpha_2)$ para *QRR'Q'*.

A área do triângulo se da pela relação, *PQQ'P'* + *PRR'P'*–*QRR'Q'*.

$$\begin{aligned}\triangle\ PQR &= ½\ cossec\ C\ \{(\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_3 + \beta_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \\ &\quad - (\beta_2 + \beta_3)(\alpha_3 - \alpha_2)\} \\ &= ½\ cossec\ C\ \{(\alpha_1(\beta_2 - \beta_3) + \alpha_2\ (\beta_3 - \beta_1) + \alpha_3\ (\beta_1 - \beta_2)\}\end{aligned}$$

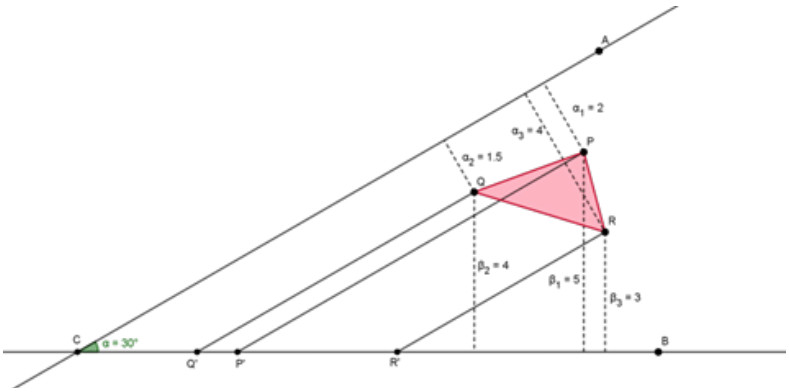
Em notação de determinantes temos:

$$A = \frac{1}{2} cossec\ C \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

que equivale a forma como ensina-se atualmente, uma vez que no caso de eixos ortogonais C=90°, logo como cossec 90°=1 a área se reduz a metade do determinante composto pelas coordenadas dos vértices adicionando uma linha ou uma coluna de elementos iguais a 1.

Adiante segue um exemplo numérico trabalhando com os eixos oblíquos, utilizando a abordagem de Whitworth (1866). Onde escolhemos o ângulo de 30°, pois a sua cossecante é igual a 2. As distâncias representadas por α_1, α_2 e α_3 fazem as ligações dos pontos P, Q e R com o eixo Y e as distancias β_1, β_2 e β_3 fazendo a ligação dos mesmos pontos com o eixo X. Com as informações da Figura 3 fazemos o cálculo da área do triângulo.

Figura 3 – Área dos trapézios exemplo numérico



Fonte: Criado pelo grupo de pesquisa

$$A = \frac{1}{2} cossec\ 30° \begin{vmatrix} 2 & 1{,}5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Percebe-se que Whitworth (1866) trabalha diretamente com a noção de área e o determinante. Ele se preocupa em justificar a forma como se calcula a área de um triângulo. A partir dessa abordagem, pode-se criar atividades interessantes ao ensino de determinante, lidando com seus aspectos geométricos. Essa abordagem não era padrão no século XIX, percebe-se isso no próximo livro analisado.

Determinantes no livro de Todhunter

No capítulo XXV, o autor introduz o conceito de determinante após apresentar a teoria das equações. Ele observa que os determinantes constituem um ramo da matemática de origem *relativamente recente*, mas que evoluiu rapidamente em importância (Todhunter, 1861). Seu objetivo é fornecer exemplos e ilustrações para que o estudante possa compreender a natureza e as propriedades dos determinantes. No capítulo XXVI, ele demonstra os principais teoremas relacionados ao tema, e no capítulo XXVII explora algumas aplicações dos determinantes na teoria das equações.

O autor apresenta o determinante como a soma ou subtração de produtos de coeficientes de duas ou mais equações que aparecem no denominador ou numerador das soluções de um sistema de equações. Ele ilustra esse processo para determinantes quadrados de ordem 2 e 3, destacando as principais propriedades. Para o caso geral de um determinante *nn x n*, ele utiliza as permutações dos coeficientes nos produtos e alterna somas e subtrações (Todhunter, 1861). A partir da página 248, o autor apresenta aplicações dos determinantes na teoria das equações, sendo a principal delas a solução de sistemas de equações. No entanto, ele não propõe exercícios para os capítulos que tratam dos determinantes, sugerindo que essa parte do conteúdo foi acrescentada como um *apêndic*e à obra, embora faça aplicações à teoria das equações (Todhunter, 1861).

CONSIDERAÇÔES FINAIS

Ao longo da pesquisa verificamos que os livros-textos selecionados se desenvolveram de acordo com um foco particular diferentes uns dos outros, e dentro de seus livros os temas eram trabalhados a fim de suprir as demandas referentes a cada um dos temas trabalhados. Com os determinantes não seria diferente, verificamos que o cálculo funciona de uma forma bem versátil.

Analisamos também diferenças em relação ao desenvolver dos textos, e como alguns possuem um caráter mais explicativo e outros mais demonstrativos. Onde os explicativos possuíam uma leitura de entendimento rápido, como os livros de Salmon (1859) e de Todhunter (1861), e os mais demonstrativos, os livros de Ferrers (1861) e Whitworth (1866), verificamos a necessidade de um entendimento prévio do assunto.

A pesquisa nos expôs a muitas aplicações geométricas de um determinante, os exemplos de Salmon trazem utilização preparatória para a discussão futura de transformação linear, o de Ferrez é trabalho que relaciona retas e cônicas e o exemplo de Whitworth (1866) foi sobre cálculo de áreas. Se diferenciando de todos os livros, Todhunter (1861) trabalha com um foco muito mais algébrico quando entra nas discussões sobre determinante.

Por fim, o trabalho realizado possui a ideia de despertar curiosidade em relação a diferentes utilidades do que chamamos de determinante, e os diferentes tipos de desenvolvimentos algébricos e geométricos.

REFERÊNCIAS

BERNARDES, A.; ROQUE, T. História da noção de matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 16, n. 31, p. 01-19, 2016.

BREWSTER, D.; *et al*. Notices Respecting New Books. In **Philosophical Magazine**, Taylor and Francis, Londres, v. 11-32, 1856-1866.

FERRERS, N. M. **An elementary treatise on trilinear co-ordinates: the method of reciprocal polars, and the theory of projections**. Macmillan and Company: Londres, 1861.

KATZ, Victor J.; PARSHALL, Karen Hunger. **Taming the unknown: A history of algebra from antiquity to the early twentieth century**. Princeton University Press, 2014.

KNOBLOCH, E. Determinants. In: GRATTAN-GUINNESS, Ivor (Ed.). **Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences**. Londres; Nova Iorque: Routledge, 2002.

SALMON, George. **Lessons introductory to the modern higher algebra**. 1. ed. [S.l.]: Hodges, Smith, and Company, 1859.

SCHUBRING, Gert. **Analysing historical mathematics textbooks**. Springer, 2022.

TODHUNTER, Isaac. **An elementary treatise on the theory of equations: with a collection of examples**. Macmillan and Company: Londres, 1861.

WHITWORTH, William Allen. **Trilinear Coordinates and other Methods of Modern Analytical Geometry of Two Dimensions: An Elementary Treatise**. Deighton, Bell and Company: Londres, 1866.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Revisitando as matrizes a partir de Cayley 1858

Revisiting matrices from Cayley's 1858 Work

Yasmin Cristina Motta Fernandes[1]
Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

Maria Luisa Mendonça Pitassi[2]
Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

Magno Luiz Ferreira[3]
Instituto Federal de Educação Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

RESUMO

Nos cursos de licenciaturas atuais observa-se um déficit ao trabalhar o conteúdo de matriz, apesar de haver uma imensa gama de aplicações, os conteúdos da teoria se tornaram algo postergado dentro da disciplina de álgebra linear. O presente artigo apresenta as definições de matriz a partir das abordagens de seu conceito inicial, adição de matrizes, multiplicação de matriz por escalar e multiplicação de matriz por matriz, desenvolvidas pelo matemático britânico Arthur Cayley em seu artigo *A Memoir on the Theory of Matrices* publicado em 1858, que se consagra como umas das primeiras publicações que investigam a teoria das matrizes como a conhecemos atualmente. Foi realizada a contextualização de suas definições utilizando a comparação com o conteúdo presente em um dos livros didáticos atuais de álgebra linear pertencente a grade curricular do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal do Rio de Janeiro do campus de Volta Redonda. O estudo mostrou que as matrizes no trabalho de Cayley estavam associadas ao sistema de equações lineares. Além disso, pode-se destacar muitos aspectos interessantes que podem ser úteis no ensino de álgebra linear, propiciando um ensino mais profundo e interligado da matemática. O trabalho conclui que a história da matemática pode ajudar na deficiência do ensino de matrizes.

Palavras-chave: Matriz; Cayley; História da Matemática.

ABSTRACT

In current undergraduate courses, there is a noticeable gap in the teaching of matrix-related content. Despite its wide range of applications, the theoretical foundations of matrices are often overlooked within linear algebra curricula. This article revisits the foundational definitions of matrices, including matrix addition, scalar multiplication, and matrix multiplication, as originally formulated by the British mathematician Arthur Cayley in his 1858 paper *A Memoir on the Theory of Matrices*. This work is regarded as one of the earliest to explore matrix theory in a form recognizable today. These definitions were contextualized by comparing them to the content found in a contemporary linear algebra textbook used in the mathematics undergraduate program at the Instituto Federal do Rio de Janeiro, Volta Redonda campus. The study revealed that matrices in Cayley's work were closely associated with systems of linear equations. Furthermore, several noteworthy aspects emerge that could be useful for teaching linear algebra, fostering a deeper and more interconnected understanding of mathematics. The study concludes that incorporating the history of mathematics can help address shortcomings in the teaching of matrices.

Keywords: Matrix; Cayley; History of Mathematics.

[1] Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: mottafernandesyc@gmail.com.

[2] Licenciando em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ). Aluno do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: malumendoncapitassi@gmail.com.

[3] Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBTT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: magno.ferreira@ifrj.edu.br.

INTRODUÇÃO

Matriz é uma parte da álgebra linear que, apesar de sua importância, tem sido deixada de lado no ensino básico e superior. Quanto a sua importância pode-se destacar as suas aplicações em áreas como engenharia, computação e física. Destacam-se as seguintes aplicações concretas: o processamento de imagens ou na análise de dados e otimização. E agora com a inserção das "inteligências artificiais" a importância das matrizes em métodos de mineração de dados e reconhecimento de padrões, destacando a relevância dessa ferramenta no aprendizado de máquina e na análise de grandes volumes de dados. Apesar destas aplicações, o relatório da Sociedade Brasileira de Matemática aponta que, no ensino médio brasileiro, o conteúdo de matrizes é frequentemente superficial ou omitido. Muitos professores não dispõem de formação adequada para ensinar o tema de maneira significativa e prática, resultando em uma abordagem que não explora todo o potencial das matrizes (SBEM, 2013, p. 29). Já no ensino superior, a apresentação das matrizes muitas vezes se limita a aspectos técnicos e operacionais, sem aprofundar as implicações práticas ou interdisciplinares.

Com isso, falar sobre o ensino de matrizes para futuros professores de matemática se torna cada vez mais relevante. E para isso, a história da matemática pode nos dar muitos problemas interessantes a investigar e que pode trazer um ensino mais significativo das matrizes. Aline Bernardes e Tatiana Roque, por exemplo, investigam a noção matemática de matriz a partir das práticas matemáticas de James Joseph Sylvester e Arthur Cayley, dois matemáticos britânicos do século XIX, da década de 1850 (Bernardes; Roque, 2016, p. 2). Destaca-se que a noção de matriz aparece após as de determinantes, sistemas lineares e formas quadráticas.

Frédéric Brechenmacher ao estudar as matrizes num período amplo (1850–1930) identificou as principais formas de representação e de práticas (Brechenmacher, 2006, p. 2). E aponta para a década de 1850 como fundamental para as práticas britânicas iniciadas por Sylvester e Cayley, em concordância com o que diz Aline Bernardes e Tatiana Roque. O primeiro trabalho a usar uma noção de matriz naquele período foi o artigo de Sylvester de 1850 "Additions to the articles," On a New Class of Theorems," and" On Pascal's Theorem". Ele afirma:

> Para esse propósito, devemos começar, não com um quadrado, mas com uma disposição retangular de termos que consistam, suponhamos, de m linhas e n colunas. Isso, por si só, não representará um determinante, mas é, por assim dizer, uma Matriz a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes ao fixar um número p, e selecionar à vontade p linhas e p colunas, cujos quadrados correspondentes podem ser chamados de determinantes da ordem p[4] (Sylvester, 1850, p. 367).

Ou seja, Sylvester trata a matriz como um arranjo de termos a partir do qual podem-se criar diferentes sistemas de determinantes, ao selecionar uma dada quantidade de linhas e colunas. Cayley fala de matriz inicialmente no artigo de título "Remarques sur la notation des fonctions algébriques", de 1855. Ele apresenta da seguinte maneira:

[4] For this purpose, we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of m lines and n columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p, and selecting at will p lines and p columns, the squares corresponding to which may be termed determinants of the pth order.

Eu uso a notação

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \alpha'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

para representar o que chamo de matriz; ou seja, um sistema de quantidades dispostas em forma de quadrado, mas completamente independentes entre si (não estou falando aqui de matrizes retangulares). Esta notação me parece muito conveniente para a teoria das equações lineares; por exemplo, eu escrevo

$$(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \left(\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \alpha'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \right)(x,\ y,\ z,\ \dots)$$

para representar o sistema de equações

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \dots, \\ \eta &= \alpha\prime x + \beta\prime y + \gamma\prime z \dots \\ \zeta &= \alpha\prime\prime x + \beta\prime\prime y + \gamma\prime\prime z \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$ [5]

(Cayley, 1855, p. 282)

Pode-se perceber que apesar das diferenças entre as noções de Sylvester e Cayley, ambos partem de um arranjo de termos com a finalidade de facilitar o trabalho matemático, seja com determinantes no modo de Sylvester, seja com sistemas lineares no modo de Cayley. As matrizes podem ser estudadas a partir de uma grande variedade de práticas, conforme apresentou Brechenmacher (2006, p. 3): "veremos todas as diferenças entre a noção original de James Joseph Sylvester (1851), que definia uma matriz como a "mãe" dos menores de um determinante, as leis do cálculo matricial de Arthur Cayley (1858), e também os métodos de decomposição matricial de Eduard Weyr (1885)". Neste trabalho seguiremos na perspectiva de Cayley, dando conta da prática de trabalhar matrizes como sistema de equações lineares. O objetivo do artigo é apresentar algumas propriedades das matrizes presentes no texto "A Memoir on the Theory of Matrices de Cayley" que é considerado um dos textos fundadores da noção de matriz.

[5] Je me sers de la notation

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \alpha'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

pour représenter ce que j'appelle une matrice; savoir un système de quantités rangées en forme de carré, mais d'ailleurs tout à fait indépendantes (je ne parle pas ici des matrices rectangulaires). Cette notation me parait très commode pour la théorie des équations linéaires ; j'écris par exemple

$$(\xi,\ \eta,\ \zeta) = \left(\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \alpha'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \right)(x,\ y,\ z,\ \dots)$$

pour représenter le système des équations

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \dots, \\ \eta &= \alpha\prime x + \beta\prime y + \gamma\prime z \dots \\ \zeta &= \alpha\prime\prime x + \beta\prime\prime y + \gamma\prime\prime z \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Destaca-se a importância de rever um dos textos fundadores do conceito de matriz no contexto do ensino de álgebra linear, uma vez que pode suscitar um ensino mais rico de álgebra linear (De Matos; Nunes, 2019, p. 10). Para facilitar a utilização no ensino, optamos por fazer um comparativo com um dos livros adotado no curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ Volta Redonda. O livro escolhido foi o de Alfredo Steinbruch, Álgebra Linear (Steinbruch *et al*, 1987), pois é um dos livros mais utilizados na disciplina de álgebra linear. Assim, a releitura de Cayley apresentada neste artigo pode trazer muitos frutos para o ensino desta disciplina, destacando vários aspectos interessantes sobre o conceito de matriz.

REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico abordado explorou o artigo de Aline Bernardes, "História da noção de matriz: Uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas", que apresenta uma narrativa sobre o desenvolvimento do que hoje se conhece como matriz, a partir de dois interesses distintos para seu uso. Este artigo buscou estabelecer um paralelo cronológico entre os acontecimentos históricos, destacando inicialmente o surgimento do conceito de determinantes nos estudos do matemático inglês Joseph Sylvester. A partir disso, Sylvester introduz as primeiras noções de matriz para problemas de natureza geométrica, especificamente para a classificação dos tipos de contato entre duas cônicas. Tais classificações são determinadas por propriedades de determinantes menores, representados em forma de uma tabela retangular, nomeada por Sylvester como matriz. Arthur Cayley foi quem adotou o conceito de matrizes como representação de sistemas e formas quadráticas. Ele definiu suas propriedades operacionais na relação entre matrizes e sistemas de equações lineares, suas propriedades multiplicativas a partir da composição de sistemas lineares ou transformações lineares, bem como a multiplicação de uma matriz por um escalar. Cayley interpreta a matriz de duas formas diferentes: ora como quantidades simples, ora como um sistema de números, com o objetivo de resolver problemas relacionados ao cálculo de potências e raízes de matrizes.

METODOLOGIA

Buscou-se seguir a abordagem de matrizes apresentada por Cayley em seu artigo de 1858, até chegar à definição de produto de matrizes. Para tornar essa apresentação mais clara, foi feita uma comparação com o livro de álgebra linear de Alfredo Steinbruch, publicado em 1987. O objetivo foi analisar a perspectiva inicial de Cayley sobre matrizes e compreender como certos aspectos foram modificados e adaptados para fins didáticos ao longo do tempo.

Os artigos "*Les matrices: formes de representation et pratiques operatoires*" de Frederic Brechenmacher e "História da noção de matriz: Uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas" de Aline Bernardes e Tatiana Roque foram utilizados para embasar essa análise, destacando o desenvolvimento das matrizes desde suas propriedades iniciais até suas aplicações didáticas.

Foram seguidas as seguintes etapas principais: levantamento e leitura dos textos originais de Cayley, Steinbruch e dos artigos complementares, com ênfase nas definições e métodos apresentados em cada obra; análise comparativa, na qual os textos foram confrontados para observar as diferenças e similaridades nas abordagens, visando compreender como o conceito de matrizes foi modificado e adaptado para o ensino; e discussão dos achados, refletindo sobre a evolução do conceito desde seu contexto original até suas adaptações didáticas, destacando as transformações necessárias para tornar o conteúdo acessível ao estudante contemporâneo.

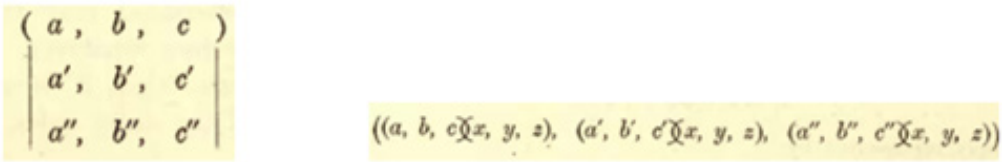
ARTIGO DE 1858

Em seu artigo de 1858 sobre matrizes, já mencionado anteriormente, Arthur Cayley introduz o conceito de matriz, considerando tanto matrizes quadradas quanto retangulares. Ele destaca, no entanto, que seus estudos demonstram que trabalhar com matrizes quadradas oferece resultados mais significativos. O texto não se limita apenas a construção do cálculo simbólico que será desenvolvido nesse trabalho, Cayley também anuncia a criação do "Teorema notável" (atualmente conhecido como Teorema de Cayley-Hamilton) que enuncia que qualquer matriz quadrada A satisfaz sua equação característica. Ao substituirmos o polinômio característico $A(\lambda)= det(A-\lambda I)$ pela matriz o resultado será a matriz nula. Tal teorema não definiu diretamente as operações com matrizes, porém resultou em implicações de conceitos como os de funções polinomiais e exponencial de matriz que fazem parte do conteúdo de produto de matrizes, por exemplo. Apesar da relevância do teorema ele não é citado ou não há destaque nos livros didáticos dos cursos de licenciatura em álgebra linear.

Uma vez que a perspectiva do pesquisador sobre as matrizes divide-se entre analisá-las como quantidade simples e como um sistema de números ele afirma que as operações com matrizes de mesma ordem são realizadas de forma semelhante ao cálculo algébrico, comportando-se como quantidades singulares com operações como adição e multiplicação. Em relação à operação de multiplicação Cayley ressalta que as matrizes operadas diferem por não serem comutativas.

A notação, no artigo de 1858, utiliza-se de letras minúsculas para representar os elementos das matrizes, e de linhas sobre essas letras para representar a posição por sua quantidade.

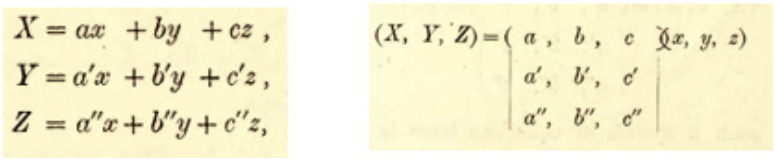
Figura 1 – Matriz e Equações lineares em Cayley



Fonte: (Cayley, 1858, p. 475, 476)

Sua definição trabalha com arranjamento de quantidades na forma de um quadrado. No lado esquerdo da figura 1, ele representa uma matriz extraída de um conjunto de equações de um sistema linear. É possível observar que os coeficientes das equações lineares são os elementos componentes da matriz. No lado direito, encontra-se a representação das equações lineares na notação utilizada por Cayley, que em nossa notação seria: $ax + by + cz = 0$, $a'x + b'y + c'z = 0$ e $a''x + b''y + c''z = 0$, ou seja, não utilizamos essa antiga notação com uso de parênteses.

Figura 2 - Sistemas de Equações na forma matricial e Sistema Linear



Fonte: (Cayley, 1858, p. 475, 476)

Nota-se, no lado esquerdo da figura 2, que os componentes da matriz são os coeficientes que multiplicam as coordenadas operadas nas equações lineares descritas no lado direito, tal organização objetiva facilitar as operações com os sistemas.

Ao cotejarmos a abordagem utilizada no artigo de Cayley com a presente no livro didático atual de Alfredo Steinbruch, notamos inicialmente uma divergência na definição de matrizes. Para Cayley a explicação é mais concreta "A noção de tal matriz surge naturalmente de uma notação abreviada para um conjunto de equações lineares" (Cayley, 1858, p. 475). Já em Steinbruch, a descrição de matrizes se limita a destacar como se define matrizes de determinada ordem, citando "Chama-se matriz de ordem por um quadro de $m \times n$ elementos (números, polinômios, funções etc.) dispostos em linhas e colunas" (Steinbruch *et al*., 1987, p. 369).

Observamos, na figura 3 abaixo, a representação de matrizes em Steinbruch que é apresentada em uma forma padronizada diferente. Por meio da notação, podemos constatar que letras maiúsculas são utilizadas para denotar a matriz, enquanto seus elementos são representados por letras minúsculas com subscritos que indicam sua posição. As diferenças, no entanto, não se limitam apenas à forma de notação. Em Steinbruch, observamos diretamente como os termos ficam organizados na matriz e sua representação em forma de equação linear. Já em Cayley, o detalhamento se concentra nos pontos de expansão do sistema, o que nos oferece uma percepção completa do arranjo dos termos. Nesse caso, a representação das equações utiliza X, Y, Z, que são igualadas à matriz que multiplica as coordenadas x, y, z. Isso permite um entendimento mais preciso de como as partes foram estruturadas.

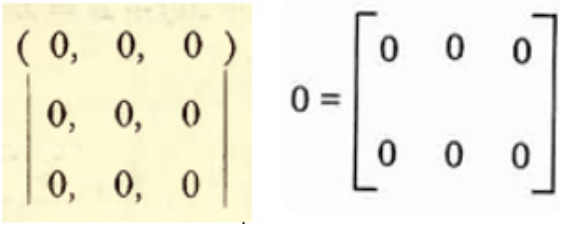
Figura 3 - Matriz e equação linear em notação atual

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 369)

Diante dessa percepção trazida pelo artigo de 1858, em que se destaca a disposição de cada termo, Cayley explica a caracterização da matriz nula como implicação de que, se todos os termos forem zero, as quantidades X, Y, Z também serão zero. Isso nos mostra, ainda que de forma singela, que os componentes de uma matriz são os mesmos da equação linear utilizada: se os elementos da matriz são zerados, a equação também será zerada. Em Steinbruch, o mesmo conteúdo é descrito com uma única frase "Uma matriz zero é a matriz cujos elementos a_{ij} são todos nulos." (Steinbruch *et al*, 1987, p. 374). No entanto, essa descrição não evidencia explicitamente a implicação gerada pelo fato de os elementos serem nulos. A forma de notação difere apenas pela ausência de parênteses na primeira linha. Além disso, a nomenclatura também sofreu alteração, sendo nomeada por Steinbruch como "matriz zero" e não "matriz nula", como era chamada por Cayley.

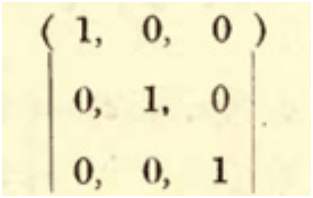
Figura 4 - Matriz nula em Cayley 1858 e em notação atual.



Fonte: (Cayley, 1858, p. 477) (Steinbruch *et al*, 1987, p. 374)

Além disso, o texto de Cayley enfatiza a noção de matriz unitária para casos em que há a existência de matrizes conversíveis (ele chama assim as operações comutativas) com uma outra matriz. Ele salienta que, ao calcular uma função racional ou integral de uma matriz, o grau é reduzido pela expressão "*n-1*", sendo "*n*" o grau da matriz. Obtém-se a descrição de matriz unitária, como descrita por Cayley, quando os valores de (X, Y, Z) são identicamente iguais a (x, y, z) e suas as diagonais principais são iguais a um. O que Cayley chamou de matriz "unitária" é hoje conhecida como matriz identidade ou matriz unidade.

Figura 5 - Matriz "unitária"



Fonte: (Cayley, 1858, p. 477)

A atual matriz unidade é apresentada no livro didático aqui trabalhado como uma matriz de qualquer ordem que tem os elementos $a_{ij} = 1$ para i = j. Sendo essa uma informação que omite a lógica de Cayley aplicada para a formação da matriz unidade.

Figura 6 - Matriz unidade em notação atual

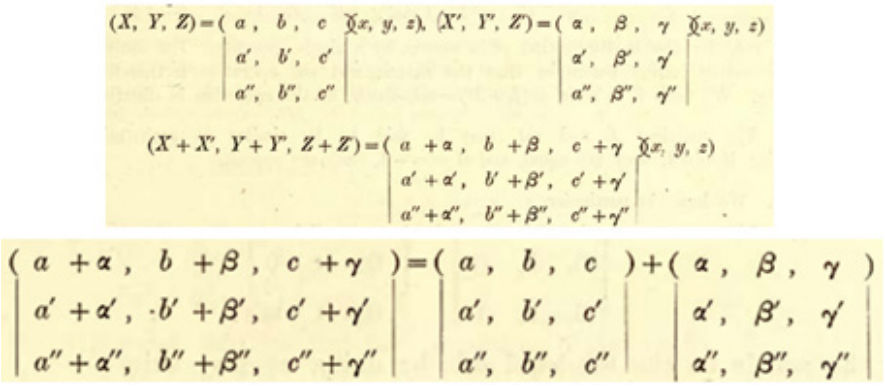
$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 373)

Matrizes são descritas no artigo de 1858 como uma quantidade única podendo ser calculadas como adição ou subtração, em que operam de forma similar ao cálculo algébrico, ao operar matrizes estamos operando automaticamente sistemas, e não se verifica alteração na matriz. Cada elemento é operado com seu correspondente.

A regra de adição proposta por Cayley define que a soma de matrizes resulta da soma dos coeficientes correspondentes de dois sistemas lineares, onde esses coeficientes estão relacionados pela posição que ocupam em relação às variáveis *x*, *y* e *z*. Essa definição pode ser utilizada para a subtração de matrizes, Cayley menciona isso, mas não desenvolve. Quando o matemático trata da adição ele afirma que essa operação é "conversível", termo que ele utiliza que equivale atualmente a propriedade comutativa. Além disso, ele mostra algumas propriedades como: não há alteração quando adicionada a matriz nula, outra consequência é que a soma de matrizes com elementos iguais em valores absolutos e sinais opostos resulta na matriz nula. Como apresentado na figura 7, a soma de matrizes pode ser calculada em forma de sistema ou na forma algébrica, dispondo os elementos a serem operados de forma adjacente.

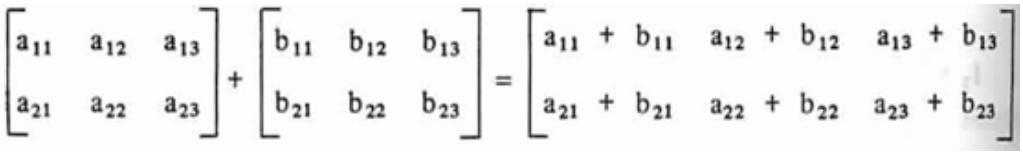
Figura 7 - Soma de matrizes



Fonte: (Cayley, 1858, p. 477)

Em Steinbruch a esquematização da soma é diretamente representada pela notação como vemos na figura 8, não há uma explicação tal como a de Cayley sobre o que é o cálculo de soma para matrizes, quais combinações de elementos devem ser somadas ou explicação da forma de se esquematizar o cálculo.

Figura 8 - Soma de matrizes em notação atual

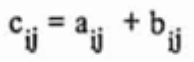


Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 474)

As motivações por trás de cada notação são diferentes. Cayley dedica atenção minuciosa à construção do sistema de soma, destacando as equações lineares e o agrupamento de seus coeficientes. Atualmente, a notação parte de uma abordagem que prioriza a esquematização e o cálculo, sem se preocupar em explicar a origem da soma das matrizes, que poderia estar ligada às operações com sistemas lineares.

Além de descrever a representação da soma, Cayley explora propriedades que hoje são bem conhecidas, como o fato de que a adição de uma matriz com a matriz nula resulta na própria matriz original. Ele também aborda a comutatividade e a associatividade, propriedades fundamentais da soma de matrizes, que igualmente aparecem definidas em Steinbruch. No entanto, Cayley não utiliza uma notação simplificada, como a que encontramos na figura 9.

Figura 9 - Termo da matriz soma



Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 375)

Adentrando no conteúdo de multiplicação de matrizes, Cayley salienta que ocorre de forma comutativa quando multiplicamos a matriz por uma única quantidade, denominado atualmente como multiplicação por escalar. Exemplificado por Cayley multiplica se o sistema por uma quantidade m .Independente de multiplicarmos por m antes ou depois do sistema o resultado é o mesmo,

temos então uma operação comutativa. Considera se também uma operação distributiva pela expressão *m(L+M)=mL+mMm(L+M)=mL+mM*. A seguir a figura que representa essa multiplicação.

Figura 10 - Multiplicação de matrizes por um escalar

$$(X, Y, Z) = m \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z) = \begin{pmatrix} ma, & mb, & mc \\ ma', & mb', & mc' \\ ma'', & mb'', & mc'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

$$m \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma, & mb, & mc \\ ma', & mb', & mc' \\ ma'', & mb'', & mc'' \end{pmatrix}$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 152)

Na obra de Steinbruch, o ensino de multiplicação de matrizes por escalar se distancia da manipulação de equações lineares junto a matriz. Ele não trabalha com a associação ao sistema, apresentando apenas como exemplo. Assim como Cayley, Steinbruch também exibe as propriedades de multiplicação por escalar, porém através de definição.

Figura 11 - Definição de multiplicação por um escalar em notação atual

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 375)

Figura 12 - Exemplo de multiplicação por um escalar

$$5 \times \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 4 & 5 \times (-2) & 5 \times 1 \\ 5 \times 3 & 5 \times (-5) & 5 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 5 \\ 15 & -25 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 375)

Figura 13 - Propriedades em notação atual da multiplicação por escalar

I) $(\lambda\mu)\,A = \lambda\,(\mu A)$

II) $(\lambda + \mu)\,A = \lambda A + \mu A$

III) $\lambda\,(A + B) = \lambda A + \lambda B$

IV) $1A = A$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 376)

A multiplicação de matriz por matriz é denominada por Cayley como composição de matriz. Observa se a composição das transformações lineares aplicadas ao sistema. O resultado da multiplicação de matrizes é expresso pela transformação linear dos valores de x, y, z em função da composição dos coeficientes em função de ξ, η, ζ.

Figura 14 - Multiplicação de matrizes em Cayley 1858

$$(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{vmatrix} (\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix} (\xi, \eta, \zeta),$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 479)

Temos como elementos resultante da composição:

Figura 15 - Processo de multiplicação

$$\begin{vmatrix} (a, b, c)(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a, b, c)(\beta, \beta', \beta''), & (a, b, c)(\gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a', b', c')(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a', b', c')(\beta, \beta', \beta''), & (a', b', c')(\gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a'', b'', c'')(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a'', b'', c'')(\beta, \beta', \beta''), & (a'', b'', c'')(\gamma, \gamma', \gamma'') \end{vmatrix} = (a, b, c)(\alpha, \beta, \gamma) \begin{vmatrix} a', b', c' \\ a'', b'', c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha', \beta', \gamma' \\ \alpha'', \beta'', \gamma'' \end{vmatrix}$$

Fonte: (Cayley, 1858, p. 479)

Onde podemos observar que os elementos na primeira matriz são integrados horizontalmente na linha, e os elementos da segunda matriz são integrados verticalmente na coluna.

Figura 16 - Organização do produto de matrizes

	$(\alpha, \alpha', \alpha'')$,	(β, β', β''),	$(\gamma, \gamma', \gamma'')$
(a, b, c)	,,	,,	,,
(a', b', c')	,,	,,	,,
(a'', b'', c'')	,,	,,	,,

Fonte: (Cayley, 1858, p. 479)

Como exemplo do caso atual, segue a conta de uma multiplicação de matrizes encontrada no livro de Alfredo Steinbruch (figura 17). O conteúdo de multiplicação de matriz por matriz é o único abordado de forma aprofundada por Steinbruch, no qual ele destaca as lógicas por traz da esquematização do cálculo, da disposição dos elementos e como operar.

Figura 17 - Multiplicação de matrizes em notação atual

Sejam as matrizes $A_{(1,4)}$ e $B_{(4,1)}$:

$$A = [4 \quad 3 \quad 2 \quad 5] \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 476)

O produto de AB é uma matriz C(1,1) = [c(1,1)], logo C(1,1) é soma dos produtos na ordem em que estão da matriz linha A com os elementos da matriz coluna B.

Figura 18 - Cálculo do produto

$$C_{11} = 4 \times 6 + 3 \times 4 + 2 \times 5 + 5 \times 3$$

$$C_{11} = 24 + 12 + 10 + 15$$

$$C_{11} = 61.$$

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 476)

Steinbruch apresenta uma organização do produto que ajuda ao estudante a entender o processo de multiplicação de matrizes na figura 19.

Figura 19 - Organização do produto

Fonte: (Steinbruch *et al*, 1987, p. 377)

Lembrando que Cayley (1858, p. 479) também apresenta uma organização do produto.

CONCLUSÃO

Para alcançar o objetivo inicial, analisamos o conceito de matriz a partir do texto de 1858 de Cayley, explorando a conceitualização, o modelo de notação e suas definições de soma e produto de matrizes, sob a perspectiva do desenvolvimento inicial da teoria das matrizes. Ficou evidente que, no trabalho de Cayley, as matrizes têm a função de facilitar o trabalho com sistemas lineares. Esse aspecto pode ser amplamente explorado nos cursos de álgebra linear atuais.

Traçamos um paralelo com a notação atual, utilizando o livro didático de Álgebra Linear do matemático Alfredo Steinbruch. Nele, observamos que o ensino de matrizes é apresentado de forma mecânica: os conteúdos abordados conduzem o estudante a aprender a montar cálculos e a operar, mas não destacam os conceitos aplicados nem a lógica subjacente. Isso limita o aluno a atuar apenas em contextos que exigem a aplicação de fórmulas, já que a abordagem do conteúdo não promove um ensino crítico ou reflexivo.

Por outro lado, ao resgatarmos as contribuições de Cayley, encontramos explicações meticulosas que preenchem lacunas no processo de ensino-aprendizagem. Esses detalhes atribuem significado ao objeto matemático trabalhado, além de situar as matrizes em um contexto de aplicações práticas no campo da álgebra linear.

Espera-se com esse estudo contribuir para um melhor ensino de álgebra linear com uma abordagem que leve em conta os aspectos históricos desta disciplina. A história da matemática pode revelar várias feições interessantes e até mesmo revolucionárias de uma disciplina, ajudando a tornar o ensino mais significativo. Vários desses aspectos por vezes se perdem ao longo do tempo, quando nos distanciamos do período em que foram desenvolvidos. Cabe a nós resgatarmo-los, para que o

diálogo com os conhecimentos passados possa ocorrer de forma a enriquecer e auxiliar nas aplicações matemáticas atuais.

REFERÊNCIAS

BERNARDES, A.; ROQUE, T. História da noção de matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 16, n. 31, p. 01-19, 2016.

BRECHENMACHER, F. Les matrices: formes de représentations et pratiques opératoires (1850-1930). **Site expert des Ecoles Normales Supérieures**., p. http://www. dma. ens. fr/culturemath/, 2006.

CAYLEY, A. Remarques sur la notation des fonctions algébriques. **Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)**, v. 50, p. 282-285, 1855.

CAYLEY, A. A memoir on the theory of matrices. **Philosophical transactions of the Royal society of London**, n. 148, p. 17-37, 1858.

DE MATOS, F. C.; NUNES, J. M. V. Práticas com matrizes a partir do estudo histórico epistemológico. **REMATEC**, v. 14, n. 32, p. 09-28, 2019.

SBEM. A formação do professor de Matemática no curso de Licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBM/SBEM. **Boletim SBEM**. Brasília: n.21,2013. 42 p. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim21.pdf. Acessado em: set 2024.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Gaston Darboux e as métricas de Cayley

Gaston Darboux and Cayley metrics

Leandro Silva Dias[1]
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ

Gérard Émile Grimberg[2]
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

RESUMO

O artigo investiga como as métricas de Cayley, um conceito fundamental da matemática do século XIX, foram abordadas tanto em periódicos acadêmicos quanto nas obras de Gaston Darboux. Ele analisa o *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* durante seus dois primeiros anos (1870–1873), destacando o papel de seus editores—particularmente Darboux—na seleção de artigos que refletiam os interesses matemáticos da época. O estudo examina a terminologia relacionada às métricas de Cayley e a conceitos associados, avaliando sua conexão com a Sexta Memória sobre os *Quantics*, de Cayley. Além disso, explora os trabalhos de Darboux que discutem explicitamente métricas ou a chamada "geometria de Cayley", analisando trechos selecionados à luz das contribuições de Cayley. Os resultados revelam que as métricas de Cayley foram amplamente difundidas e desenvolvidas na França, sendo Darboux um dos principais responsáveis por esse processo.

Palavras-chave: Arthur Cayley; Polinômios Homogêneos; Teoria dos Invariantes; Geometria Projetiva.

ABSTRACT

The article investigates how Cayley metrics, a fundamental concept in 19th-century mathematics, were addressed in both academic journals and the works of Gaston Darboux. It analyzes the *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* during its first two years (1870–1873), emphasizing the role of its editors—particularly Darboux—in selecting articles that reflected the mathematical interests of the time. The study examines terminology related to Cayley metrics and associated concepts, assessing their connection to Cayley's *Sixth Memoir on Quantics*. Additionally, it explores Darboux's works that explicitly discuss metrics or the so-called "Cayley geometry", analyzing selected excerpts considering Cayley's contributions. The findings reveal that Cayley metrics were widely disseminated and further developed in France, with Darboux playing a key role in this process.

Keywords: Arthur Cayley; Homogeneous Polynomials; Invariant Theory; Projective Geometry.

INTRODUÇÃO

As métricas de Cayley dialogaram com diversos ramos da matemática do século XIX, como a teoria dos invariantes, a geometria projetiva, as geometrias não euclidianas, e os estudos sobre superfícies, entre outros. A teoria dos invariantes começou a se desenvolver entre os matemáticos britânicos em 1841, com a publicação do artigo de George Boole sobre transformações lineares. Cayley demonstrou interesse pelo tema e publicou artigos sobre o assunto em 1845 e 1846, contribuindo significativamente para o avanço da teoria, em parceria com Sylvester e Salmon (Dias, 2013).

Os trabalhos britânicos relacionados à teoria dos invariantes apresentaram uma conexão estreita com aspectos geométricos, especialmente com a geometria projetiva (Dias, 2023). Além disso, as geometrias não euclidianas passaram a se relacionar com a teoria dos invariantes a partir da pu-

[1] Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor EBTT, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Volta Redonda, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: leandro.dias@ifrj.edu.br.

[2] Doutor pela Université Paris Diderot, PARIS 7, França. Professor grau 7 Associado 2 da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, BRASIL. E-mail: gerard.emile@terra.com.br.

blicação da Sexta Memória sobre os *quantics* de Cayley (Dias, 2019). No campo dos estudos sobre superfícies, que inclui o conceito de métricas, o trabalho de Cayley na Sexta Memória também desempenhou um papel importante, tendo sua relevância explorada posteriormente por Darboux, como será analisado nas próximas seções.

O objetivo deste trabalho é analisar como as métricas de Cayley foram apresentadas no periódico *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* e nos livros de Darboux. A escolha desses documentos se justifica por fornecerem uma perspectiva sobre como Darboux lidou com o tema a partir de 1870.

Inicialmente, analisamos o *Bulletin*, revisando todos os artigos publicados entre 1870 e 1873 que mencionam, direta ou indiretamente, as métricas de Cayley. Em seguida, aprofundamos o exame das obras de Darboux.

METODOLOGIA

Os periódicos refletem a atividade matemática da época em que foram publicados e podem ser analisados sob diferentes perspectivas, oferecendo subsídios valiosos para os historiadores em suas pesquisas. Neste estudo, o periódico foi examinado em seus dois primeiros anos de publicação, com o objetivo de identificar os interesses tanto dos autores quanto dos editores, especialmente de Darboux, já que a seleção dos artigos era responsabilidade desses últimos.

Para a análise, foram selecionados artigos ou trechos que abordassem, direta ou indiretamente, as métricas de Cayley. A pesquisa incluiu termos como "métrica", "Cayley", "absoluto", "cônica absoluta", "distância", "razão dupla" e "involução", considerando seus equivalentes em francês, a língua do periódico. A simples presença de um desses termos, no entanto, não garantia a inclusão do artigo; era necessário realizar uma leitura criteriosa para confirmar sua relação com o tema. Dessa forma, a citação ao tema poderia ser indireta, sem a menção explícita de palavras como "métrica" ou "Cayley", desde que os conceitos estivessem relacionados ao objeto de estudo. Após a seleção, os artigos escolhidos foram comparados ao trabalho de Cayley em sua Sexta Memória.

Quanto aos livros de Darboux, foram selecionados aqueles que tratavam diretamente das métricas de Cayley ou, como Darboux as denominava, da "geometria de Cayley". Os trechos selecionados abordam essa temática e foram comparados e relacionados à Sexta Memória.

MÉTRICA DE CAYLEY

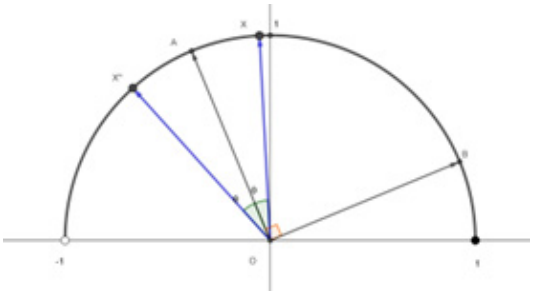
Para definir a métrica sobre a reta projetiva, Cayley chama a forma quadrática Q de "absoluto[3]". Ela desempenha um papel importante, pois a depender da escolha dessa forma quadrática trabalharemos num dado modelo geométrico. A interseção desta cônica com a reta determina dois pontos I e J, e dado dois pontos A e B conjugados com I e J, Cayley define assim a distância entre o ponto A e X, em notação moderna, como sendo:

[3] Nós consideramos o termo "absoluto" como um substantivo nesta discussão e, seguindo o que foi escrito por Cayley e Klein em seus artigos sobre o assunto, usamos o substantivo masculino para se referir à forma quadrática de referência ao estabelecer a métrica.

$$\theta = arccos \frac{P(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OX})}{\sqrt{Q(\overrightarrow{OA}).Q(\overrightarrow{OX})}}$$

A figura abaixo representa geometricamente o caso da reta projetiva. Cayley se inspira diretamente da geometria da esfera, para maiores detalhes pode-se acompanhar o desenvolvimento completo no artigo de Dias e Grimberg (2019).

Figura 1 − Métrica na reta



Fonte: Próprio autor

No caso do absoluto ser uma forma quadrática degenerada que, portanto, é representada por um ponto duplo P, recai-se na métrica euclidiana. Cayley trabalhou essa ideia, mostrando que a partir dessa abordagem o caso euclidiano é encontrado como um caso limite. Daí ele faz sua famosa afirmação de que a geometria projetiva é mais elementar que a euclidiana, o que ia numa outra direção da concepção de sua época.

Darboux vai utilizar a mesma abordagem em seus trabalhos onde ele diz que faz "geometria de Cayley", ou onde cita explicitamente a sexta memória. Ou seja, a partir de uma cônica de referência, definir uma métrica a partir de uma dada relação entre quatro pontos. Desenvolveremos mais sobre estes aspectos nas próximas seções.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

O *Bulletin* foi fundado em 1870 por Gaston Darboux e Jules Hoüel. Ainda no primeiro volume, em 1872, Clebsch (1872a) escreveu uma notícia bibliográfica sobre o seu livro, *Theorie der binären algebraischen Formen* (1872). Este livro cita Cayley, Sylvester e Salmon, como importantes matemáticos que contribuíram com o que ele chamava de "teoria das formas". Clebsch destaca o carácter geométrico da teoria, citando as memórias sobre os *quantics*. Na segunda seção do seu livro ele afirma:

> Apresento agora uma interpretação geométrica da qual as formas binárias, assim como os invariantes e covariantes que são capazes e importantes por causa de sua relação com a geometria analítica [. . .] uma ordem binária de ordem n, igual a zero, apresenta, como vimos no início, uma equação do enésimo grau, na qual x_1/x_2 é o desconhecido e, portanto, fornece n valores dessa razão. Se pensarmos agora em uma linha reta, em que cada ponto representa um valor dessa relação, uma forma binária é, em certa medida, considerada a expressão analítica do complexo dos n pontos dados pela equação correspondente. (Clebsch, 1872b, p.44, Tradução nossa[4])

[4] Ich werde jetzt eine geometrische Interpretation darlegen, deren die binären Formen, sowie die dabei auftretenden Invarianten und Covarianten fähig sind, und welche sowohl wegen ihres Zusammenhanges mit der analytischen Geometrie [. . .] Eine binäre

Clebsch (1872b) inicia a seção, como fica claro na citação acima, estabelecendo a relação existente entre os polinômios homogêneos de grau *n* com a sua respectiva interpretação geométrica. Essa abordagem é idêntica à empregada por Cayley, Sylvester e Salmon. Inclusive Clebsch faz uma nota no início da seção onde cita as memórias sobre os *quantics*, especificamente a Quinta Memória, e o livro de Fiedler (1862) para a relação entre as substituições lineares com a razão dupla. Destacamos que Fiedler (1862) foi citado também por Felix Klein em seus artigos sobre as geometrias não euclidianas, pois ele traduziu para o alemão as Seções Cônicas de Salmon, além de traduzir a Sexta Memória sobre os *quantics*. Ou seja, o livro de Clebsch é de suma importância para a compreensão de como os métodos analíticos/geométricos de Cayley foram recebidos pela comunidade matemática internacional.

Retornando à notícia apresentada ao *Bulletin* sobre este livro, podem-se fazer algumas perguntas: primeiro, por que a notícia foi escrita pelo próprio autor e não pelos editores? Segundo, qual o interesse em se publicar uma notícia tão longa, total de onze páginas, neste periódico? Para responder à primeira pergunta, podemos pensar que o tema não era do conhecimento de Darboux, nem de Hoüel. O problema desta resposta é que Darboux escreveu sobre a "geometria de Cayley" em seu livro de 1873 sobre as curvas e superfícies algébricas. Hoüel, por ser um grande divulgador das principais obras de matemática, fazendo diversas traduções, provavelmente já conhecia os trabalhos dos britânicos. Provavelmente, a resposta seria de que os editores privilegiaram o tema, colocando a notícia do próprio autor do livro, no intuito de enriquecer o debate sobre os novos aspectos algébricos/geométricos presentes no livro de Clebsch, bem como sobre os métodos dos demais matemáticos citados por ele. Isso já responde, pelo menos parcialmente, à segunda pergunta, ou seja, o tema era do interesse de Darboux e Hoüel.

No mesmo volume do *Bulletin*, os editores divulgaram o livro de Heger, sobre geometria analítica em coordenas homogêneas, também de 1872. Eles afirmam que as coordenadas homogêneas foram "introduzidas na geometria analítica por Möibus, Plücker, Hesse, Cayley, Salmon, etc."[5] (Darboux; Hoüel, 1872, p.257). Afirmam também que já havia muitos tratados contendo exposições satisfatórias em coordenadas homogêneas, citando os trabalhos de Salmon, Fiedler, Briot, Price e Painvin. Para os editores elas contêm o desenvolvimento das fórmulas mais essenciais dessa importante teoria, destacando, porém, que ainda assim o nascimento de novas coordenadas não era tão difundido quanto se desejava. Eles elogiam dizendo que o livro reúne e exibe de maneira simples, as propriedades mais essenciais das coordenadas trilineares, feixe tangencial, harmônico, quadrilateral completo, colinearidade no plano e no espaço. Além de afirmarem que o estudo dos sistemas de coordenadas pontual e tangencial é realizado simultaneamente.

Os editores citam as seguintes obras para ilustrar os primeiros trabalhos didáticos nos quais esse desenvolvimento paralelo dos sistemas de coordenas pontual e tangencial foi utilizado pela primeira vez: a Geometria Superior e as Seções Cônicas de M. Chasles; além de M. Hesse, em seu *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie des Raumes*; e M. Painvin, em seus *Principes de la Géométrie analytique*. Ou seja, Darboux e Höuel tinham um domínio bem extenso sobre o tema, citando obras de diversos matemáticos, franceses ou de outras nacionalidades.

Form nter Ordnung, gleich Null gesetzt, stellt, wie schon im Eingange bemerkt ist, eine Gleichungen Grades vor, in welcher x_1/x_2 die Unbekannte ist und welche also n Werther dieses Verhältnisses liefert. Denken wir uns nun eine Gerade, deren jeder Punkt einen Wert dieses Verhältnisses repräsentiert, so ist eine binäre Form gewissermassen als der analytische Ausdruck des Complexes der n Punkte zu betrachten, welche durch die entsprechende Gleichung gegeben sind.

[5] Introduites en Géométrie analytique par Möbius, Plücker, Hesse, Cayley, Salmon, etc.

Ainda no mesmo volume do *Bulletin*, Darboux publicou duas, das três partes, do seu artigo *Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes traces sur les surfaces algébriques*. O interessante é que este artigo mostra que Darboux conhecia bem o que fazia Cayley, pois cita diversas vezes os trabalhos de Cayley que utilizavam coordenadas homogêneas para tratar aspectos geométricos.

DARBOUX (1873)

Nosso proposito não é fazer a história das superfícies ortogonais, projeto já realizado por Croizat (2016), e sim destacar o uso de métricas não euclidianas por Darboux. Com isso, examinamos como Darboux aplica e desenvolve ideias em torno de superfícies não euclidianas e revelamos como ele estava consciente dos trabalhos de Klein e Cayley sobre as métricas não euclidianas.

O que é interessante é que até 1870, segundo Croizat, Darboux duvida ainda do interesse das métricas não euclidianas, destacando-se a comunicação de Darboux com Hoüel e Beltrami (Croizat, 2016). Hoüel traduz os trabalhos de Beltrami e Riemann, estando Darboux ciente dessas obras que tratam de superfícies não euclidianas.

Darboux propõe, em sua obra, estudar as superfícies de quarta ordem às quais ele chama de *cyclides*, sendo aquelas que possuem uma cônica dupla especial – o círculo do infinito. Ele também estuda as curvas que denominou *cycliques*, caracterizadas por terem os pontos ao infinito sobre o círculo, ou as curvas esféricas que resultam da intersecção da esfera com uma superfície do segundo grau. Neste caso, o *cyclique* é esférico de quarta ordem e o círculo diretor de segunda ordem.

Na primeira parte, Darboux estuda a transformação por *rayons vecteurs reciproques*, dos focos e das focais. Na segunda parte, ele estuda os *cycliques* planos e esféricos. A terceira parte é dedicada ao estudo dos imaginários. Ele apresenta uma nova forma de demonstrar as propriedades métricas focais das cônicas a partir de uma proposição de Chasles – *Traité des sections coniques*. Nas duas últimas partes, ele se dedica ao estudo analítico e geométrico das superfícies *cyclides* e do sistema triplo ortogonal que se pode formar com estas superfícies com a métrica de Cayley. Darboux desenvolve os princípios de Cayley em duas notas – a nota IV e V – relacionando-os com princípios e propriedades que ele aplica às superfícies de quarta ordem por ele trabalhadas.

No início do primeiro capítulo, Darboux apresenta a transformação por *rayons vecteurs reciproques*, sendo dadas as expressões:

$$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, Y = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2},$$

sendo x, y, X, Y as coordenadas dos pontos correspondentes. Darboux apresenta a forma complexa da transformação:

$$X + Yi = \frac{k^2}{x - yi}, X - Y = \frac{k^4}{x + yi}.$$

Como se pode constatar, esta transformação ocorre na geometria de inversão que num espaço n- dimensional, sendo dada uma esfera de raio r, a inversão na esfera é dada por:

$$X \mapsto \frac{r^2 x_i}{\sum_j x_j^2}.$$

A geometria de inversão preserva a dupla razão, pois sendo dados quatro pontos *x*, *y*, *z*, *w*, a dupla razão é um invariante sobre uma inversão. Logo, utilizando uma métrica baseada na dupla razão, uma inversão preserva as distâncias e os ângulos. Esta propriedade é fundamental no trabalho de Darboux com transformações por *rayons vecteurs reciproques*.

Darboux apresenta diversas características dos *cyclides* e *cycliques*, mostrando casos onde a transformação opera com *cyclides* de mesmo foco, dentre outros casos particulares, onde ocorre ortogonalidade.

A partir da terceira parte, onde são tratadas propriedades imaginárias em geometria, Darboux desenvolve a seguinte relação métrica: $e^{2i(\widehat{PMQ})} = \frac{(u-a)(v-\beta')}{(u-a')(v-\beta)}$, que, após extrair a raiz quadrada, fica $e^{i(\widehat{PMQ})} = \left(\frac{MP'}{MQ'}\right)$ (Darboux, 1873).

A relação apresentada acima permite determinar o ângulo $\widehat{PMQ}$ e pode ser expressa como o logaritmo da razão anarmônica das quatro retas *MA*, *MB*, *MI* e *MJ*. Essa abordagem, que utiliza o logaritmo da razão dupla, é conhecida como a métrica de Klein e foi desenvolvida em sua obra sobre geometrias não euclidianas.

A expressão de uma métrica partindo do logaritmo da razão anarmônica foi enunciada de certa forma por Laguerre (1853), que em seu estudo sobre a teoria dos focos apresenta o seguinte problema:

> Problema. Um sistema de ângulos *A*, *B*, *C*, etc., situado num plano, que estão relacionados por uma equação qualquer *F (A, B, C, . . .) = 0*, encontre a relação que liga os ângulos correspondentes *A′*, *B′*, *C′*, etc., quando se transforma a figura homograficamente. (Laguerre-Verly, 1853, p.64, Tradução nossa[6])

Laguerre apresenta a seguinte relação, sem nenhuma demonstração:

$$F\left(\frac{\log a}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log b}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log c}{2\sqrt{-1}}\right) = 0$$

Ou seja, o ângulo *A′*, sendo "a" a razão anarmônica fica:

$$A' = \frac{\log a}{2\sqrt{-1}}.$$

Darboux faz menção a Laguerre-Verly (1853) e a Chasles quanto ao histórico da relação métrica acima. Chasles (1870) cita igualmente Laguerre, porém dá crédito a Faure quanto a demonstração da relação métrica. Chasles afirma:

[6] Problème. Un système d'angles A, B, C, etc., situés dans un plan, étant liés par une équation quelconque F (A, B, C, . . .) = 0, trouver la relation qui lie les angles correspondants A′, B′, C′, etc., quand on transforme la figure homographiquement.

> O Senhor Laguerre simplesmente enunciou esta expressão. O Senhor Faure, capitão de artilharia, a demonstrou em um de seus trabalhos sobre a *Transformation des propriétés métriques des figures*.[7] (Chasles, 1870, p.313, Tradução nossa)

Faure trata de questões métricas relacionadas à transformação homográfica ao longo de um segmento de uma dada reta. Utilizando relações entre triângulos homólogos, Faure encontra as seguintes relações para o ângulo a', homologo a um ângulo a: $sen\ a' = \frac{1}{2}.\frac{1-r}{\sqrt{-r}}$; $cos\ a' = \frac{1}{2}.\frac{1+r}{\sqrt{-r}}$, subtraindo estas expressões uma da outra, encontrou: $cos\ a' - sin\ a'\sqrt{-1} = \sqrt{r}$.

Utilizando a relação de Euler, , ele reduz a expressão acima a forma: $e^{ix} = cos\ (x) + i.sin\ (x)$

$$a' = -\frac{\log r}{2\sqrt{-1}},$$

sendo r a razão anarmônica de quatro retas: as retas suportes do ângulo e as retas imaginárias $y = \pm\sqrt{-1}x$. (Faure, 1859)

DARBOUX (1873) E A "GEOMETRIA DE CAYLEY"

No trabalho *Sur une Classe Remarquable de Courbes et de Surfaces Algébriques et sur la Théorie des Imaginaires*, Darboux (1873) trata da geometria das relações métricas que ele chama de "geometria de Cayley". Mais especificamente nos artigos 61 e 62, além das notas III e V, onde ele faz uso das noções de distância, apresentadas inicialmente por Cayley em sua sexta memória sobre os quantics de 1859, para tratar dos cicloides e problemas relacionados às superfícies ortogonais.

Esta teoria das relações métricas de Cayley é tratada especialmente na nota V, de título: *Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure dans la géométrie* de M. Cayley. Apesar de Darboux enfatizar a autoria de Cayley, ele faz referência à obra de 1862 de Fiedler sobre as formas binárias, *Die Elemente der Neueren Geometrie und der Algebra der Binären Formen*, que possui de forma resumida o conteúdo da sexta memória de Cayley . Além disso, cita a obra de Felix Klein que trata das geometrias não euclidianas de 1871. Não há citação direta à sexta memória, e o texto nem mesmo consta nas referências de Darboux (1873), o que nos indica que Darboux deve ter tido contato com esta obra de Cayley de forma indireta, muito provavelmente influenciado pela visita de Klein à França na década de 1870.

Nessa nota V, Darboux trata principalmente das linhas geodésicas. E, para isto, ele define para "absoluto" a esfera definida pela seguinte equação:

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0.$$ (Darboux, 1873)

Então, define a distância entre dois pontos de coordenadas (x, y, z) e (x', y', z') sendo dada pelas fórmulas seguintes:

[7] M. Laguerre énonce simplement celle expression. M. Faure, capitaine d'artillerie, l'a démontrée dans un travail sur la Transformation des propriétés métriques des figures.

$$cos^2\delta = \frac{(xx' + yy' + zz' - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)} \; e$$

$$sen^2\delta = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\left(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2\right) - (xx' + yy' + zz' - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)}.$$

Darboux apresenta a métrica seguindo a mesma notação que Cayley (1859c) propõe em sua sexta memória sobre os *quantics*. Dado o ponto *(x′, y′, z′)* ser vizinho ao ponto *(x, y, z)*, então se tem:

$$d\delta = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2 - R^2) - (xdx + ydy + zdz - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)}.$$

A partir dessa métrica, Darboux passa a pesquisar as linhas geodésicas de uma superfície definida por uma equação: *f (x, y, z) = 0* (Darboux, 1873).

Ainda há vários aspectos a serem analisados, porém já podemos observar que Darboux desempenha um papel fundamental na recepção das métricas de Cayley-Klein.

Na parte 61 de seu livro, Darboux trata dos cicloides de um sistema ortogonal dada uma transformação definida. Ele trata de uma transformação que conserva os ângulos das tangentes ao plano e à superfície, utilizando neste caso as relações métricas desenvolvidas por Cayley. Darboux apresenta as seguintes relações métricas:

$$e^{iV} = R, V = \frac{1}{2i} log\, R \text{ (Darboux, 1873)}$$

Sendo *R* a razão anarmônica dos quatro planos, tangentes e ortogonais. Este caso para o cálculo dos ângulos, sendo apresentada a relação que dá a distância, numa fórmula bem parecida, com o uso do logaritmo da razão anarmônica. Darboux utiliza a relação que dá a medida do ângulo para mostrar como a dada transformação conserva os ângulos. Faz uma breve demonstração para a conservação do ângulo entre duas curvas e afirma que ela permanece para o caso de duas superfícies, ou uma superfície e uma curva.

Já na parte 62, Darboux faz generalizações das noções de normal, focais e de linhas de curvatura. Darboux faz uso de uma definição que se utiliza da superfície de uma esfera, que seria o absoluto, para definir a normal de uma superfície. Daí ele define linha de curvatura (Darboux, 1873).

Métrica de Cayley nos *Leçons sur la théorie générale des surfaces*

Darboux reuniu um belo trabalho de quatro volumes (1887-1896) em que trata da teoria das superfícies, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces et Les Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal*. O primeiro volume traz o resumo das lições que Darboux ministrou em Sorbonne durante os invernos de 1882 a 1885. Darboux pretendeu apresentar a teoria das superfícies com as novas aplicações de seu período, principalmente com as ferramentas do cálculo diferencial. Os quatro volumes são divididos em livros que, normalmente, discutem assuntos distintos. Por exemplo, o primeiro volume é dividido em três livros: o primeiro trata das aplicações à geometria da teoria dos movimentos relativos; o segundo, dos diferentes sistemas de coordenadas curvilíneas; e o terceiro, da teoria das superfícies mínimas.

O terceiro volume tem relevância quanto à recepção das métricas de Cayley-Klein, por abordar a relação desta com a teoria das linhas geodésicas e da curvatura geodésica. Este tópico é estudado no livro VI, sendo que esse terceiro volume se divide em apenas dois livros, livro VI e livro VII (este último trata da deformação das superfícies). Apresentaremos os principais apontamentos de Darboux que relacionam a métrica de Cayley-Klein aos estudos das geodésicas, nos dedicaremos, portanto, ao conteúdo do capítulo XIV do livro VI.

Já no início do capítulo XIV do livro VI, Darboux nos apresenta, em sua lista de matérias a serem abordadas no capítulo, diversos tópicos relacionados às métricas de Cayley-Klein. Os tópicos mais importantes para nosso estudo são: "Significação geométrica dos resultados precedentes; generalização das noções de distância e ângulo devido ao Senhor Cayley", "As curvas geodésicas na geometria de Cayley", "As superfícies (M) estudadas no início deste capítulo onde, na geometria Cayleyniana, seus raios de curvaturas são iguais e de sinais contrários" e "Estudo de uma transformação que permite de transportar à geometria euclidiana todas as relações entre ângulos da geometria de Cayley" (Darboux, 1894, p.471). Durante nossa análise ficará claro o que Darobux considera como geometria de Cayley, sendo que, apesar de Darboux citar diversas vezes Cayley, ele considera importante também os trabalhos de Klein que trata das geometrias não euclidianas.

O primeiro tópico que selecionamos, ou seja, significação geométrica dos resultados precedentes; generalização das noções de distância e ângulo devido ao Senhor Cayley, se encontra num quadro do estudo das superfícies mínimas, que Darboux simboliza com "(M)", relacionadas a uma dada quádrica, que ele simboliza com "(Q)". Darboux utiliza a seguinte definição de superfície mínima (M):

> Nós temos visto (no 186) que as superfícies mínimas podem ser caracterizadas pela seguinte propriedade: As duas tangentes de comprimento nulo conduzido por cada ponto da superfície devem ser duas tangentes conjugadas. É natu- ral de se estender essa definição um pouco e buscar superfícies que, se, em cada um dos seus planos tangentes e pelo ponto de contato desse plano, as duas tangentes sejam conduzidas a uma superfície fixa do segundo grau, essas duas tangentes são conjugadas relativamente à superfície procurada. Quando a superfície do segundo grau ou quádrica é reduzida ao círculo do infinito, a definição anterior coincidirá com a das superfícies mínimas. Se a quadrática for reduzida a uma cônica, a superfície procurada se tornará a transformada homográfica de uma superfície mínima. Se a quadrática (Q) se reduz a um cone, a superfície será o correlativo de uma superfície mínima. O único caso realmente novo a considerar é, portanto, o lugar onde a quádrica pertence à classe mais geral; nós a designaremos, em forma abreviada, pela letra (Q) e as superfícies procuradas serão chamadas aqui as superfícies (M). (Darboux, 1894, p.472, Tradução nossa[8])

Darboux faz uma extensa análise de como, dada uma superfície quadrática, encontrar a superfície mínima. Até que ele afirma que, para conseguir de uma maneira completa tratar dos casos

[8] Nous avons vu (no 186) que les surfaces minima peuvent être caractérisées par la propriété suivante : Les deux tangentes de longueur nulle menées par chaque point de la surface doivent être deux tangentes conjuguées. Il est naturel d'étendre un peu cette définition et de chercher les surfaces telles que, si, dans chacun de leurs plans tangents et par le point de contact de ce plan, on mène les deux tangentes à une surface fixe du second degré, ces deux tangentes soient conjuguées relativement à la surface cherchée. Quand la surface du second degré ou quadrique se réduira au cercle de l'infini, la définition précédente coïncidera avec celle des surfaces minima. Si la quadrique se réduit à une conique, la surface cherchée deviendra la transformée homographique d'une surface minimum. Si la quadrique (Q) se réduit à un cône, la surface sera la corrélative d'une surface minimum. Le seul cas réellement nouveau à envisager est donc celui où la quadrique appartient à la classe la plus générale ; nous la désignerons, pour abréger, par la lettre (Q) et les surfaces cherchées seront appelées ici les surfaces (M).

envolvidos nessa questão, deve-se considerar as generalizações das noções de ângulo e distância que são devidas a Cayley (Darboux, 1894). Darboux, ao fazer essa afirmação, cita em nota de rodapé três referências: primeira, a sexta memória sobre os *quantics* de Cayley, desta vez fazendo referência ao volume dois da coletânea de artigos de A. Cayley; segunda, à memória de Felix Klein de 1871, *Ueber die sogenante Nicht-Euklidische Geometrie dos Mathematische Annalen*; e por fim, ao seu próprio trabalho, *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, cujas principais relações com a abordagem de Cayley já indicamos. Cabe destacar que, de forma inicial, Darboux teria tido contato com as obras de Cayley de forma indireta, por via de Klein conforme analisamos em Darboux (1873), mas nessa nova publicação o autor cita diretamente a sexta memória e, além disso, faz questão de destacar a coletânea das obras de Cayley, propagando assim os métodos de Cayley para os jovens cientistas franceses. Darboux apresenta a métrica de Cayley da seguinte maneira:

> Essa generalização começa com a substituição de qualquer quádrica (Q) pelo círculo no infinito. Dados dois pontos no espaço M, M′, chamamos de distância entre esses dois pontos a função δ definida pela equação (26) $e^{2i\delta}$ = R, onde R denota a razão anarmônica de M, M′ e os dois pontos em que a reta MM′ intersecta a quádrica (Q). Se x, y, z, t; x′, y′, z′, t′ denotam as coordenadas dos dois pontos e se a quádrica (Q) é definida pela equação homogênea (27) *f(x,y,z,t) = 0*, então teremos (28) $cos\ \delta = \frac{1}{2}\frac{\left(x'\frac{\delta f}{\delta x}+y'\frac{\delta f}{\delta y}+z'\frac{\delta f}{\delta z}\right)}{\sqrt{f(x,y,z,t)f(x',y',z',t')}}$. (Darboux, 1894, p.479, Tradução nossa[9])

A equação (26) define a distância entre dois pontos M e M′ como uma função da razão anarmônica R desses pontos e dos pontos onde a reta MM′ intersecta a quádrica (Q). A razão anarmônica é uma quantidade invariante sob projeção perspectiva, o que significa que se projetarmos os pontos M e M′ e a quádrica (Q) em um novo plano, a razão anarmônica não muda.

A equação (28) define o cosseno da distância entre dois pontos M e M′ em termos das coordenadas dos pontos e da equação da quádrica (Q). Essa equação é útil para calcular a distância entre dois pontos em uma variedade projetiva a partir da equação da quádrica que define essa variedade. A distância entre dois pontos é uma quantidade importante em geometria projetiva, e essa equação fornece uma maneira conveniente de calculá-la.

Percebe-se, então, que Darboux (1894) aplica em seu livro a teoria de Cayley sobre as métricas e faz isso de forma a relacioná-la a geometria diferencial. Para ele o que fez Cayley se traduziu numa abordagem que ele chamou de "geometria de Cayley". Destaca-se que essa abordagem se tornou uma importante ferramenta para a geometria diferencial e para a teoria das superfícies, a partir das considerações de Darboux.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise apresentada evidencia o papel central de Gaston Darboux na recepção e desenvolvimento das métricas de Cayley, destacando sua atuação como editor, pesquisador e divulgador. Darboux não apenas assimilou as ideias de Cayley, mas também as expandiu, integrando-as a novos

[9] Cette généralisation a pour point de départ la substitution d'une quadrique quelconque (Q) au cercle de l'infini. Étant donnés deux points dans l'espace M, M′, appelons distance de ces deux points la fonction δ définie par l'équation (26) e2iδ = R, R désignant le rapport anharmonique de M, M′ et des deux points où la droite MM′ rencontre la quadrique (Q). Si x, y, z, t ; x′, y′, z′, t′ désignent les coordonnées des deux points et si la quadrique (Q) est définie par l'équation homogène (27) *f(x,y,z,t) = 0*, on aura (28) $cos\ \delta = \frac{1}{2}\frac{\left(x'\frac{\delta f}{\delta x}+y'\frac{\delta f}{\delta y}+z'\frac{\delta f}{\delta z}\right)}{\sqrt{f(x,y,z,t)f(x',y',z',t')}}$.

contextos matemáticos, como a geometria diferencial e o estudo de superfícies algébricas e não euclidianas.

Por meio do *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* e de suas obras, como *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Darboux contribuiu para a disseminação e consolidação das métricas de Cayley na França. Ele utilizou conceitos como a razão anarmônica e as propriedades de invariância para formular novos métodos e resultados em geometria.

Destaca-se também a importância da interação entre matemáticos de diferentes nações e períodos históricos no avanço do conhecimento. A influência das métricas de Cayley, ampliadas por Darboux, demonstra como ideias matemáticas podem ser reinterpretadas e aplicadas em diferentes contextos, consolidando sua relevância na história da matemática.

REFERÊNCIAS

CHASLES, Michel. **Rapport sur les progrès de la géométrie**. Imprimerie nationale, 1870.

CLEBSCH, R. F. A. Revue bibliographique–Clebsch (a.) Theorie der binären algebraischen formen. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques**, v. 3, n. 1, p. 225–234, 1872a.

CLEBSCH, R. F. A. **Theorie der binären algebraischen Formen**. [S.l.]: Teubner, 1872b.

CROIZAT, Barnabé. **Gaston Darboux: naissance d'un mathématicien, genèse d'un professeur, chronique d'un rédacteur**. 2016. Tese de Doutorado. Université des Sciences et Technologie de Lille-Lille I.

DARBOUX, Gaston. **Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires**. Gauthier-Villars, 1873.

DARBOUX, Gaston. **Leçons sur la théorie générale des surfaces et Les Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal**. Gauthier-Villars, 1894.

DARBOUX G.; HOÜEL, J. Revue Bibliographique–Heger (D R.) elemente der analytischen geometrie in homogenen koordinaten. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques**, v. 3, n. 1, p. 257–258, 1872.

DIAS, Leandro Silva. **Geometria e** Álgebra **nas seis primeiras memórias de Cayley sobre Quantics**. 86 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.

DIAS, L. S.; GRIMBERG, G. E. Classificação das geometrias: um diálogo entre os textos de Arthur Cayley e de Felix Klein. **Revista Brasileira de História da Ciência**, v. 12, n. 2, p. 207-224, 2019.

DIAS, Leandro Silva. **As métricas de Cayley e seus desdobramentos (1857-1895)**. 168 f. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Rio de Janeiro, 2023.

FAURE, C.-R. Transformation des propriétés métriques des figures. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Carilian-Goeury et Vor Dalmont, v. 18, p. 381–388, 1859.

FIEDLER, Wilhelm. **Die Elemente der neueren Geometrie: und der Algebra der binären Formen: ein Beitrag zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen**. Teubner, 1862.

LAGUERRE-VERLY, E. Note sur la théorie des foyers. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Carilian-Goeury et Vor Dalmont, v. 12, p. 57–66, 1853.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Cartas na mesa: etnomatemática e história da matemática com o Boi Pintadinho de Muqui-ES

Cards on the table: ethnomathematics and the history of mathematics with Boi Pintadinho from Muqui-ES

Arthur Constantino Dutra da Silva[1]
Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes

Claudia Alessandra Costa de Araujo Lorenzoni[2]
Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes

RESUMO

Este artigo, parte de uma pesquisa de mestrado profissional em andamento no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat), explora o diálogo entre a festa do Boi Pintadinho — manifestação cultural do Carnaval em Muqui (ES) — e a educação matemática a partir de uma perspectiva etnomatemática, por meio de um baralho de cartas. Fundamentado em pesquisa bibliográfica, discute-se o papel histórico do baralho como artefato cultural e sua capacidade de aproximar a matemática das práticas sociais, reconhecendo-a como construção coletiva. Nesse contexto, desenvolveu-se um baralho estilizado e jogos de cartas inspirados na festa do Boi Pintadinho, voltados à representatividade dos saberes e fazeres locais. O texto também evidencia como as atividades propostas por Bishop — contar, medir, localizar, projetar, jogar e explicar — emergem nas práticas da festividade e suas possíveis correlações com os jogos de cartas. Conclui-se destacando a importância de metodologias que entrelacem cultura, história e matemática, ressaltando como o baralho, em conjunção com a expressão popular do Boi Pintadinho, pode constituir um instrumento de formação integral.

Palavras-chave: Etnomatemática; História da Matemática; Jogos na Educação; Boi Pintadinho.

ABSTRACT

This article, part of a professional master's research project underway in the Graduate Program in Science and Mathematics Education (Educimat), explores the dialogue between the Boi Pintadinho festival — a cultural manifestation of Carnival in Muqui (ES) — and mathematics education from an ethnomathematical perspective, through a deck of cards. Based on bibliographical research, the article discusses the historical role of the deck as a cultural artifact and its ability to bring mathematics closer to social practices, recognizing it as a collective construction. In this context, a stylized deck of cards and card games inspired by the Boi Pintadinho festival were developed, aimed at representing local knowledge and practices. The text also highlights how activities proposed by Bishop — counting, measuring, locating, designing, playing, and explaining — emerge in the practices of the festival and their possible correlations with card games. It concludes by highlighting the importance of methodologies that intertwine culture, history and mathematics, emphasizing how the deck of cards, in conjunction with the popular expression Boi Pintadinho, can constitute an instrument of integral formation.

Keywords: Ethnomathematics; History of Mathematics; Games in Education; Boi Pintadinho.

INICIANDO A PARTIDA

Tomamos como ponto de partida deste texto, que é um recorte parcial de um projeto de pesquisa em andamento no Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), a premissa de que baralho atuar como meio de transmissão da cultura e história de uma manifestação popular, bem

[1] Mestrando no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) do Instituto Federal de Educação do Espírito Santo (Ifes), Vitória, Espírito Santo, Brasil. E-mail: professorarthurdutra@gmail.com.

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes). Docente na Coordenadoria de Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) do Instituto Federal de Educação do Espírito Santo (Ifes) – Campus Vitória, Espírito Santo, Brasil. E-mail: claudia.araujo@ifes.edu.br

como sua relação com a matemática. No projeto, propomos um diálogo entre as tradições da festa do Boi Pintadinho – uma das variações do folguedo do Bumba meu boi – de Muqui, Espírito Santo, e a educação matemática. A pesquisa, ancorada na perspectiva da etnomatemática, investiga de que modo as atividades matemáticas elencadas por Bishop (1988) – contar, medir, localizar, projetar, jogar e explicar –, compreendidas como práticas inerentes a praticamente todas as comunidades humanas, se entrelaçam às tradições dessa expressão cultural popular.

O diálogo proposto envolve tanto a compreensão histórica quanto a análise de como diferentes culturas transmitem saberes matemáticos em suas práticas. Nesse sentido, buscamos como Lübeck (2023):

> Uma historiografia que está em consonância com as teorias que abordam o conhecimento a partir de interstícios erigidos nos limiares que envolvem a tríade sociedade, cultura e matemática, pelas aberturas decorrentes das dinâmicas dos encontros culturais e do hibridismo resultante (Lübeck, 2023, p. 3).

Neste artigo, apresentamos elementos da pesquisa quanto a essa fundamentação bem como quanto ao recurso didático dela resultante juntamente a suas principais características. Para tanto, a metodologia adotada aqui baseia-se em uma abordagem qualitativa, por meio de uma pesquisa bibliográfica que explora uma relação entre história da matemática, através da história do baralho, a etnomatemática do Boi Pintadinho e o uso de jogos na educação matemática. Como resultado, apresentamos o protótipo de um baralho estilizado com a estética da manifestação popular e um jogo que emula ações da festa para construir uma conexão entre história, cultura e matemática.

O CORINGA: BREVE HISTÓRIA DO BOI PINTADINHO

O Boi Pintadinho integra um vasto repertório de expressões culturais no Brasil que compartilham o Boi como elemento central, como destaca Cavalcanti (2006):

> Um boi-artefato, que baila, morre e ressuscita, é foco de brincadeiras pelo país afora: 'Boi-Bumbá', no Amazonas e no Pará; 'Bumba-meu-boi', no Maranhão; 'Boi-calemba', no Rio Grande do Norte; 'Bumba-de-reis' ou 'Reis-de-boi', no Espírito Santo; 'Boi-pintadinho', no Rio de Janeiro; 'Boi-de-mamão', em Santa Catarina, entre outros. Para além da diversidade regional expressa nessas denominações, o conjunto de variantes da "brincadeira do boi" é heterogêneo e vital (Cavalcanti, 2006, p. 1).

Em Muqui, essa tradição, possivelmente originária dos Bois do Norte do Rio de Janeiro, encontrou raízes, sendo celebrada no Carnaval.

Segundo Bordalo da Silva (1981, p. 51), o enredo do auto do Boi gira em torno de um animal célebre, presenteado pelo fazendeiro à filha e confiado a um vaqueiro. Grávida, Mãe Catirina deseja comer sua carne, e o Pai Francisco acaba por abatê-lo. Com o sumiço do Boi, o vaqueiro-chefe descobre o crime, iniciando o conflito central.

Pai Francisco resiste à prisão, e os vaqueiros recorrem ao tuxaua, que o captura. Sua liberdade depende da ressurreição do Boi. Após tentativas frustradas do "dotô" e do "padre", o pajé realiza o

milagre com rituais. O Boi revive, e a celebração encerra a narrativa refletida nas apresentações do Boi Pintadinho.

Cavalcanti faz o seguinte comentário sobre essa lenda:

> A noção evolucionista de mito ocupou, assim, lugar-chave no esquema conceitual dessa "dança dramática", permitindo atribuir ao "boi" que morre e ressuscita a significação de ícone e indício de uma camada primitiva da humanidade, ainda presente na mentalidade e nas práticas das camadas populares brasileiras. O "tema mítico" da morte e da ressurreição do boi propiciaria ao folguedo uma "estrutura central", um "núcleo fixo", um "eixo", enfim, pois seria dramatizado no "entrecho" central ao qual se acoplariam as múltiplas encenações da "rapdósia" (Cavalcanti, 2006, p. 3).

Na festividade em Muqui, o Boi Pintadinho é representado por uma figura construída artesanalmente, conforme descrito no Atlas do Folclore Capixaba (Capai, 2009). A estrutura do Boi é feita de bambu ou vergalhões que formam o corpo, enquanto a cabeça, muitas vezes, é uma caveira real, adornada com chifres e enfeites. Todo o conjunto é coberto por tecidos coloridos e estampados que descem até o chão. A alegoria é conduzida por um brincante que, sob a estrutura, dá vida ao boi com danças, saltos e interações com o público. Essa performance é acompanhada por instrumentos de percussão e por outros personagens, como a Mulinha, o Espadeiro e o Jaraguá, que enriquecem o espetáculo com suas características únicas.

Os personagens que acompanham o Boi trazem uma contribuição simbólica e performática à celebração. A Mulinha, com seus movimentos engraçados e interações improvisadas, acrescenta leveza, humor e alegria ao evento, representando a descontração das manifestações populares. O Jaraguá, com sua máscara e teatralidade, evoca o mundo espiritual e o sobrenatural, reforçando o mistério e o simbolismo da tradição. Já o Espadeiro destaca-se pela habilidade na dança com espadas, simbolizando coragem e proteção, ao mesmo tempo que adiciona tensão dramática e ressalta o caráter performático da celebração.

O Boi Pintadinho, com sua estética vibrante e narrativa envolvente, mantém viva uma tradição que atravessa gerações, adaptando-se aos tempos sem perder sua essência. Em Muqui, essa manifestação segue como um símbolo de identidade cultural, reunindo brincantes e espectadores em uma celebração que mescla história, arte e devoção popular.

O TRUNFO DO BOI: ATIVIDADES MATEMÁTICAS NA CULTURA POPULAR

Nesta sessão, buscamos evidenciar a manifestação das atividades matemáticas dentro dessa tradição cultural. Para isso, sintetizamos as análises realizadas, destacando quatro temas principais – formas, figuras, ritmo e coreografia. A partir desses eixos, ilustramos a relação orgânica entre as atividades matemáticas – contar, medir, localizar, projetar, jogar e explicar – conforme apontado por Bishop (1988), que as identifica como elementos comuns a quase todas as comunidades. Dessa maneira, ressaltamos a matemática como um constructo sociocultural, articulando saberes, práticas culturais e sua historicidade, evidenciando sua intrínseca ligação com essa expressão popular.

Começamos pela criação das alegorias que envolve a atividade projetar, na qual o artesão concebe mentalmente as estruturas e enfeites, muitas vezes restritos à sua imaginação e aprimorados ao longo das gerações. A atividade medir garante proporções e dimensões adequadas, unindo estética

e funcionalidade, pois dessas formas decorativas e estruturais surge o movimento do bailado do folguedo. Bishop (1988) destaca como essa habilidade de criação mental se manifesta nas culturas:

> Portanto, é importante descrever uma atividade generalizada que sintetiza essa ideia, e escolhi chamá-la de 'projeto'. Enquanto as atividades de 'localização' se referem ao posicionamento de si mesmo e de outros objetos dentro do ambiente espacial, as atividades de projeto dizem respeito aos objetos, artefatos e tecnologia 'fabricados' que todas as culturas criam para sua vida doméstica, para comércio, para adorno, para guerra, para jogos e para propósitos religiosos (Bishop, 1988, p. 38, tradução nossa).

A figura 1 apresenta diversos elementos que ilustram essas formas, tanto das alegorias quanto dos instrumentos que acompanham o Boi Pintadinho, destacando a riqueza estética e simbólica dessa tradição. Observam-se tambores de diferentes tamanhos e formatos, que apresentam padrões nos desenhos, resultado de técnicas artesanais precisas de coloração. Esses instrumentos musicais são decorados com combinações de cores vibrantes que conferem harmonia e identidade visual ao conjunto.

Figura 1 – Formas das alegorias e instrumentos do Boi Pintadinho

Fonte: Os autores (2024)

Os trajes do Boi Pintadinho também incluem adereços bem delineados aplicados sobre tecidos coloridos e texturizados. A cabeça do boi, com chifres estilizados e detalhes tridimensionais, evidencia a habilidade na confecção artesanal, incorporando formas e proporções bem definidas. Os olhos do Boi são feitos de materiais translúcidos que refletem a luz, adicionando um aspecto moderno expressivo e dinâmico.

O tema das figuras ou adornos também envolve a atividade projetar, na qual padrões intrincados são elaborados com habilidades de desenho e compreensão intuitiva de proporções e simetrias. Essa estética característica dos festejos é transmitida organicamente entre gerações, sem treinamento formal ou manuais. Os artesãos criam de forma natural, sem regras fixas, resultando em figuras de cores vibrantes e composição rústica, expressando sua criatividade. Bishop (1988) ilustra esse processo criativo espontâneo com um exemplo:

> Quando alguém está caminhando e encontra um galho de árvore no caminho, pode remover as partes desnecessárias, cortá-lo em um comprimento conveniente e fazer uma bengala. As bengalas são todas diferentes, mas são semelhantes. Alguém tem um "design" em mente que é capaz de impor naquele galho (Bishop, 1988, p. 39, tradução nossa).

A figura 2 destaca os detalhes das figuras presentes nos trajes e adornos das alegorias, enfatizando padrões visuais e símbolos que compõem essa expressão cultural. Observa-se o uso de figuras repetitivas que são cuidadosamente bordadas em tecidos brilhantes e coloridos. O estilo simétrico cria uma harmonia visual que reflete a estética tradicional e simbólica da festividade.

Figura 2 – Figuras dos adornos que compõe as alegorias do Boi Pintadinho

Fonte: Os autores (2024)

Os detalhes incluem bordados dourados, aplicações de tecidos contrastantes em diversas cores, além de brilhos que adicionam profundidade às peças. A repetição de padrões e o uso de elementos decorativos demonstram uma compreensão intuitiva de simetria e sequência, transmitidos pela tradição e prática cultural.

As figuras possuem significados que remetem à atividade explicar, conectando narrativas culturais e simbólicas por meio da estética. Elas transitam entre o lúdico e o sagrado, comunicando valores e tradições sem necessidade de palavras. Mesmo sem um estilo único, cada composição carrega uma expressividade histórica e emocional. Nesse contexto, Bishop (1988) destaca o ato de explicar, a partir da composição das figuras, como uma atividade cognitiva essencial:

> [...] é essa atividade que eleva a cognição humana acima do nível daquela associada à mera experiência do ambiente. Ela concentra a atenção nas abstrações reais e formalizações em si que derivam das outras atividades, e onde estas estão relacionadas a responder às perguntas relativamente simples de "Quantos?", "Onde?", "Quanto?", "O quê?" e "Como?", explicar está preocupado em responder à pergunta complexa de "Por quê?" (Bishop, 1988, p. 49, tradução nossa).

O tema dos ritmos musicais envolve a atividade da contagem para marcar tempos e compassos intuitivamente, sem cálculos formais, apenas seguindo a bateria. A atividade jogar torna o ritmo um elemento lúdico, promovendo interação social e cooperação. Já a atividade medir ajusta a duração das notas e pausas de forma tão internalizada que se transforma em um movimento espontâneo do corpo, evidenciando a conexão natural entre música, dança e matemática.

> Em resumo, então, a contagem, que talvez tenhamos pensado ser uma atividade importante, mas relativamente simples, é mostrada por essa perspectiva cultural para envolver muitos aspectos, com variações sutis no tipo de linguagem e formas representacionais usadas para comunicar os produtos da contagem (Bishop, 1988, p. 27, tradução nossa).

A figura 3 retrata a energia vibrante da bateria dos festejos do Boi Pintadinho, destacando os ritmos musicais que animam e estruturam a celebração. Os instrumentos, em diferentes tamanhos e tons, são o coração pulsante do evento, gerando batidas cadenciadas que conduzem os movimentos dos participantes. Cada músico desempenha um papel crucial, contribuindo para a harmonia sonora com técnicas que refletem o aprendizado por imersão e prática contínua. A comunicação entre o mestre de bateria e os ritmistas se dá por códigos numéricos, evidenciando a matemática como uma forma de comunicação.

Figura 3 – Ritmos da bateria que acompanha a apresentação do Boi Pintadinho

Fonte: Os autores (2024)

Os participantes, vestidos com uniformes coloridos que reforçam a identidade do grupo, tocam seus instrumentos em sincronia, demonstrando a importância da contagem precisa de tempos e compassos. A sequência das batidas, marcada por padrões rítmicos repetitivos, não apenas mantém a coesão do grupo, mas também promove a interação social e o senso de comunidade.

A música, como parte central das festividades, conecta os participantes e o público, criando um ambiente de celebração coletiva. Os aprendizados musicais são transmitidos de forma oral e prática, permitindo que os integrantes internalizem de maneira orgânica as atividades matemáticas relacionadas ao tempo e à organização sequencial.

O tema da coreografia envolve a atividade de localização, garantindo a orientação espacial das alegorias e a coordenação dos movimentos de forma intuitiva, assegurando fluidez e segurança na apresentação. A atividade contagem sincroniza os passos com a música, tornando os movimentos naturais e expressivos, sem necessidade de ensaios formais excessivos.

A figura 4 retrata a coreografia dinâmica das alegorias da festa do Boi Pintadinho, destacando os movimentos coordenados e os deslocamentos dos dançarinos durante a performance. Os integrantes, manuseando alegorias vibrantes que reforçam a identidade cultural, movimentam-se em harmonia, respeitando a localização espacial e os ritmos da bateria.

Figura 4 – Coreografias das alegorias do Boi Pintadinho

Fonte: Os autores (2024)

A dança é composta por passos cuidadosamente sincronizados com a música, criando uma narrativa visual rica em significado. Os deslocamentos do Boi, com seu manto decorado, são acompanhados por gestos ritmados e movimentos fluídos que ocupam diferentes áreas.

Um brincante aprende a dançar com a alegoria de maneira prática, por meio de observação e imersão cultural, seu controle do redor é natural, a figura do Mestre contribui com situações que fujam do normal, todavia o dançarino domina o espaço da coreografia com uma naturalidade comum de quem sabe fazer.

Diante dessa análise, buscamos evidenciar que a matemática se manifesta de maneira orgânica e intuitiva na tradição do Boi Pintadinho. A interação entre formas, figuras, ritmos e coreografias revela como as atividades matemáticas estão incorporadas às práticas culturais, sem a necessidade de formalizações explícitas. Cada elemento, seja na criação das alegorias, na estruturação dos adornos ou na organização espacial dos movimentos, reflete um saber transmitido de geração em geração. Assim, essa tradição reafirma a matemática como algo vivo e dinâmico, incorporado ao cotidiano dos brincantes por meio da experiência, da prática e da criatividade coletiva.

MONTANDO O BARALHO

Ao propor o diálogo entre essa tradição e a educação matemática, temos como um dos objetivos, proporcionar representatividade a essa manifestação.

Por essa razão, adotou-se um modelo de atividade que posiciona o indivíduo como sujeito ativo do processo, promovendo um ambiente favorável à imaginação, à criação e à reflexão – aspectos essenciais da manifestação cultural – bem como o desenvolvimento do pensamento matemático. Esse contexto não apenas estimula a capacidade cognitiva, mas também estabelece conexões com as dinâmicas do Boi Pintadinho, refletindo sua criatividade e expressão cultural. A proposta é que o recurso aqui apresentado desperte o prazer em aprender de forma natural, não por um viés utilitarista, mas por meio da experimentação, da ação e da participação coletiva, elementos intrínsecos aos saberes e fazeres do Boi Pintadinho.

A escolha, portanto, concentrou-se no desenvolvimento de um baralho estilizado inspirado na festividade, acompanhado de um guia com propostas de jogos e intervenções pedagógicas. Esse material integra a dissertação em andamento, da qual apresentamos aqui um recorte.

O baralho se destaca como uma opção prática e acessível que dialoga com uma história humana, na qual se apresenta como protagonista na difusão cultural e, frequentemente, como meio para a transmissão de atividades matemáticas.

Conforme vemos em Soares (2016), acredita-se que o baralho, em sua essência, tenha raízes no mundo árabe, onde já existia um conjunto padronizado de 52 cartas, divididas em quatro grupos numerados de 1 a 10, além de três figuras ilustradas, que adicionavam mistério e estratégia ao jogo. No entanto, ainda segundo Soares (2016), há quem defenda que seu surgimento aconteceu na China, associando-se ao desenvolvimento do papel no século X, o que teria possibilitado a criação de cartas marcadas com símbolos semelhantes aos atuais ouros e paus. Ao longo do tempo, os baralhos foram absorvendo contribuições árabes e europeias, incorporando tanto os naipes inspirados em objetos cotidianos quanto às figuras que conhecemos hoje, como reis (Figura 5), damas e valetes, consolidando-se como um universo lúdico que atravessa séculos e fronteiras.

Figura 5 – Diferentes interpretações de uma ideia genérica de um "Rei".

Fonte: https://www.wopc.co.uk/the-history-of-playing-cards/

O desenvolvimento do baralho não ocorreu de forma isolada, diversas tradições culturais e históricas contribuíram para a configuração atual desse instrumento, que, ao longo do tempo, incorporou e transformou significados de diferentes contextos. Nesse sentido, a análise de Soares (2016) oferece um panorama sobre uma das primeiras versões do baralho europeu e como as tradições interferiram no seu processo de criação:

> De acordo com registros mais recentes, um dos primeiros baralhos fabricados na Europa foi o Tarô, durante o século XV, as cartas eram utilizadas inicialmente como trunfos ao jogo ocidental, entretanto devido o simbolismo das figuras, começou-se a acreditar que as cartas eram a expressão de correntes antigas de sabedoria como a cabala, o esoterismo ocidental, alquimia, budismo, iniciações egípcias, o cristianismo místico e a mitologia celta (Soares, 2016, p. 27).

A história dos jogos de cartas revela um percurso marcado pela circulação de conceitos, estratégias e padrões numéricos em distintos contextos culturais, tornando o baralho um instrumento há séculos associado a práticas sociais e intelectuais. Assim, ao optar pelo baralho, buscamos não apenas um veículo para entrelaçar cultura popular e educação matemática, mas buscamos pegar carona em um formato historicamente consolidado como mediador de significações. Em consonância com essa perspectiva, Soares (2016) traz para gente um exemplo concreto de recriação cultural dos baralhos:

> O ilustrador Anjali DSouza de Chennai, na índia, criou um baralho de cartas usando a arte popular indiana como inspiração. A motivação para o desenvolvimento desse baralho foi que com o surgimento dos jogos digitais, os adolescentes indianos estavam esque-

> cendo-se dos tradicionais jogos de tabuleiros e jogos de cartas. A ideia era criar um novo avatar (personagem) e criar uma história através das cartas (Soares, 2016, p. 32).

Veja que a proposta das cartas elaboradas por Anjali DSouza (Figura 6) mantém a estrutura original do baralho para poder utilizar sua credibilidade, e nesse espaço que ele ocupa, resgatar elementos esquecidos.

Figura 6 – Baralho de cartas inspirado em arte de caminhões e na arte popular indiana.

Fonte: https://www.wopc.co.uk/india/teen-patti-playing-cards-by-anjali-dsouza

Mesmo com o ilustrador apontando o afastamento dos jovens em relação aos jogos de cartas, essa impressão pode ser falsa se levarmos em conta que o baralho foi capaz de ultrapassar fronteiras culturais.

> O baralho, hoje, ainda é muito difundido devido às inúmeras possibilidades de utilização e a sua popularização fez com que fossem criadas várias versões digitais dos seus jogos, possibilitando ao usuário jogar partidas sozinho (sem a participação de outros jogadores), ou até mesmo competir com outras pessoas online (Soares, 2016, p. 29).

Outro modelo que guarda grande proximidade com nossa proposta é o "Baralho Cordel", da fabricante Copag, que presta homenagem à literatura de cordel, expressão marcante da cultura popular nordestina. No site oficial de venda do produto, encontramos a seguinte descrição:

> Prepare-se para uma experiência única que celebra a rica brasilidade através das cartas.
> O Cordel é uma forma popular de literatura, composta por pequenos folhetos impressos, repletos de histórias narradas em rimas simples. Trazido pelos portugueses, mas ganhou força no Norte e Nordeste, esses folhetos são pendurados em cordas para venda, daí o nome "Cordel" (Copag, 2024).

Dessa forma, mais uma vez o baralho empresta sua credibilidade e cede espaço para uma arte que vem carregada de significados, o estilo dos traços e o tema dos desenhos (Figura 7) já traz consigo uma caracterização que precisa de pouca explicação.

Figura 7 – Baralho de cartas inspirado na literatura de cordel.

Fonte: https://www.copagloja.com.br/baralho-cordel/p?srsltid=AfmBOopXJ6DQs9esOJiXBirpjpmt5uEe-x7-wKLYBrSiHueupfkgV6qSn

Portanto nosso estudo, ao optar por estilizar um baralho com a festa do Boi Pintadinho (Figura 8) adotando a estética característica dos Bumbás presentes em diversas regiões do país, não está ancorado nessa prática tradicional por mera nostalgia, mas sim por uma intencionalidade que valoriza a credibilidade histórica e cultural do artefato.

Figura 8 – Protótipo do baralho estilizado com o tema Boi Pintadinho

Fonte: Os autores (2025)

Bezerra (2023) infere que intervenções lúdicas, como as dos jogos, são especialmente adequadas para abordar aspectos históricos e multiculturais da Matemática, pois estimulam a criatividade e evocam emoções que reforçam o sentimento de pertencimento a um trabalho coletivo. Assim aproveitamos a flexibilidade e força do baralho para atender a um espectro amplo de interesses: dos mais nostálgicos, que apreciam o valor histórico e simbólico do formato, aos mais modernos, que reconhecem no artefato um potencial criativo.

DANDO AS CARTAS: BOI PINTADINHO EM JOGO

É hora de jogar. Apresentamos a estrutura concebida para o baralho e um dos jogos do guia, destacando suas conexões com o festejo e as possibilidades de intervenções adaptadas que, em um cenário criativo e imaginário, evocam as ações da manifestação do Boi Pintadinho. Como citado antes, este material integra um mestrado profissional e, no momento, encontra-se em fase de confecção, visando futuras avaliações e testagens.

A configuração das cartas foi pensada para representar aspectos essenciais do desfile do Boi Pintadinho, garantindo que cada número e figura possuam uma correspondência simbólica dentro da festividade. Assim, cada carta desempenha um papel específico na construção da narrativa lúdica, permitindo que os jogadores se familiarizem com a tradição ao mesmo tempo em que aplicam atividades matemáticas subjacentes tanto aos jogos quanto às práticas do desfile (Quadro 1).

Quadro 1 – Estrutura do baralho estilizado com o tema Boi Pintadinho

Às: O **Mestre do Boi**, liderança que coordena os movimentos e a energia do desfile. **2, 3, 4, 5:** Representam os instrumentos de percussão da bateria, essenciais para o ritmo e a cadência da festa: **Surdo, Repique, Tarol e Tamborim**. **6:** O **Espadeiro**, brincante que interage com o Boi, desviando-se de suas investidas e garantindo fluidez ao espetáculo. **7:** O **Estandarte**, símbolo visual que anuncia o grupo e carrega suas cores e identidade. **8:** Os **Foliões Adultos**, parte da festividade que acompanham e animam o percurso. **9:** Os **Foliões Crianças**, representantes da continuidade da tradição, que desde cedo vivenciam e perpetuam o festejo. **10:** A **Cidade de Muqui**, berço do Boi Pintadinho, cuja paisagem e arquitetura histórica servem de palco para a celebração. **Valete:** O **Jaguará**, personagem místico que adiciona um tom sobrenatural e imprevisível ao evento. **Dama:** A **Mulinha**, figura que dança e interage com os brincantes, trazendo leveza e graça ao cortejo. **Rei:** O próprio **Boi Pintadinho**, o protagonista da festividade, cuja presença centraliza a celebração.

Fonte: Os autores (2025)

Pensando no uso dentro da escola, antes da introdução de algum jogo, seja ele uma das propostas do guia ou qualquer outro, recomenda-se que o professor proporcione um momento inicial de exploração livre do material, especialmente se for o primeiro contato dos alunos com as cartas do Boi Pintadinho. Esse momento permite que os estudantes se familiarizem com os elementos do baralho, observando as ilustrações e relacionando-as aos números e personagens representados. Essa interação inicial estimula hipóteses sobre a organização dos jogos e sobre a manifestação cultural, favorecendo um aprendizado natural e intuitivo.

Para exemplificar, temos um dos jogos do guia e suas regras (Quadro 2), esse jogo foi pensado para as séries iniciais do Ensino Fundamental:

Quadro 2 – Jogo Dominó do desfile do Boi Pintadinho

O jogo **"Dominó do desfile do Boi Pintadinho"** simula a organização do desfile da festividade. Cada jogador participa da montagem do evento, organizando os **instrumentos, personagens e alegorias** até que o **desfile esteja completo**. **Regras do jogo** **Preparação do Baralho** Utiliza-se um baralho completo (52 cartas), incluindo todas as cartas de Ás a Rei, organizadas nos quatro naipes. O baralho é embaralhado e distribuído igualmente entre os jogadores. Cada jogador pode olhar apenas suas próprias cartas. **Início do Jogo** O jogo começa com as quatro cartas 10 (Cidade de Muqui) já colocadas na mesa, uma para cada naipe, para isso, os jogadores que as possuem começam com essas cartas e devem colocá-las no centro entre os demais jogadores. Essas cartas representam os pontos de partida do desfile e marcam o início da organização da festa. **Mecânica de Jogo** Os jogadores devem colocar as cartas de Ás a 9 em ordem decrescente, dentro do mesmo naipe, abaixo da carta 10, representando a base do desfile, representando as alegorias, o Rei (Boi Pintadinho), Dama (Mulinha) e o Valete (Jaguará) devem ser colocados em ordem crescente dentro do mesmo naipe acima do 10. Os jogadores podem jogar qualquer carta disponível que encaixe na sequência correta durante seu turno. Se um jogador não tiver uma carta válida para jogar, ele passa a vez. O jogador que conseguir descartar todas as suas cartas da sua mão ganha a partida. **Número de Jogadores** Pode ser jogado com dois a quatro participantes. Para dois jogadores, recomenda-se o uso de apenas dois naipes. Para três jogadores, recomenda-se o uso de apenas três naipes.

Fonte: Silva e Conti (2021), adaptado pelos autores (2025)

Podemos dizer que o jogo dominó da festa do Boi Pintadinho se relaciona com atividades matemáticas da manifestação de seguinte maneira descrita no Quadro 3:

Quadro 3 – Relações entre o jogo Dominó do desfile do Boi Pintadinho e as atividades matemáticas da manifestação cultural popular

Relações entre o jogo Dominó do desfile do Boi Pintadinho e as atividades e/ou ideias matemáticas da manifestação cultural popular
Formas e Figuras: O jogo envolve a organização de cartas em uma estrutura visual e sequencial, permitindo a associação de padrões e figuras que remetem à composição estética do desfile do Boi Pintadinho.
Ritmos: O desenvolvimento do jogo segue uma cadência própria, exigindo atenção ao ritmo da sequência numérica crescente e decrescente, similar ao compasso musical da festividade.
Coreografia e Localização: A disposição das cartas no espaço representa o deslocamento dos elementos do desfile, exigindo uma percepção espacial e uma estratégia para a progressão do jogo.
Projeto: A organização das cartas no jogo simula o planejamento necessário para a montagem das alegorias e da própria estrutura do desfile, envolvendo a lógica e o pensamento estratégico.
Explicação: Durante a partida, os jogadores precisam compreender e explicar suas jogadas, estabelecendo relações entre as cartas e antecipando movimentos, reforçando o pensamento analítico, ação análoga a da explicação visual das alegorias do desfile.
Contagem: A mecânica do jogo exige o reconhecimento da sequência numérica e a contagem de elementos dentro das regras, simulando a marcação de tempos e compassos presentes no festejo.

Fonte: Os autores (2025)

Durante as partidas, o professor pode realizar intervenções orais, incentivando reflexões que conectem a estrutura do jogo ao contexto da manifestação cultural popular. A seguir, apresentamos algumas sugestões de intervenções (Quadro 4) orais que auxiliam no desenvolvimento das relações das atividades matemáticas junto ao festejo do Boi Pintadinho:

Quadro 4 – Sugestões de intervenção do jogo o Dominó do desfile do Boi Pintadinho

Organização e Estrutura do Desfile – Projeto e Formas
Durante a organização das cartas na mesa, pergunte:
"Observem como os desfiles do Boi Pintadinho são estruturados. O que acontece se os personagens ou os instrumentos estiverem fora da ordem?"
Incentive os alunos a perceberem que o desfile segue uma lógica de montagem, assim como o jogo requer uma sequência correta para ser concluído.
Explique que os artesãos que constroem as alegorias também precisam planejar as formas e o posicionamento dos enfeites, garantindo que tudo esteja proporcional e equilibrado. Relacione isso com a disposição das cartas na mesa.
Ritmo e Sequência Numérica – Contagem e Coreografia
Quando um aluno estiver para jogar uma carta, pergunte:
"Na bateria do Boi Pintadinho, os músicos podem tocar fora do ritmo? O que acontece se um tarol entra antes do surdo por exemplo?"
Relacione isso à ordem numérica das cartas, mostrando como a organização da bateria na festa e a sequência do jogo exigem regularidade e padrões rítmicos.
Incentive a percepção de que o ritmo do desfile se assemelha à contagem e ordenação das cartas, onde cada número representa um momento na progressão do evento.
Posicionamento das Alegorias – Localização
Pergunte aos alunos enquanto jogam:
"Se as alegorias do Boi Pintadinho forem espalhadas sem considerar o espaço disponível, o desfile pode acontecer sem problemas? Como os organizadores sabem onde cada elemento deve ficar?"
Leve os estudantes a perceberem que o jogo exige posicionar as cartas corretamente no espaço da mesa, assim como a festa requer um planejamento espacial para a distribuição das alegorias e brincantes.
Explique que, no desfile, há uma harmonia entre espaço e movimento, o que também acontece no jogo ao seguir a sequência correta de cartas dentro de um mesmo naipe.
Estratégia e Tomada de Decisão – Explicação
Caso um aluno jogue uma carta sem pensar, pergunte:
"Se um mestre de Boi errar o comando na hora da apresentação, isso pode mudar o resultado final da festa. Como podemos planejar melhor para evitar isso?"
Relacione isso à importância do planejamento no jogo, onde cada jogada pode impactar a estratégia final.
Incentive os alunos a analisarem suas cartas antes de jogar, prevendo os próximos movimentos da partida, assim como os brincantes do desfile devem ensaiar e planejar sua performance.
Estética e Simbolismo das Cores e Formas – Explicação

Durante o jogo, pergunte: ***"Assim como as cartas, os brincantes do Boi Pintadinho usam cores vibrantes e enfeites detalhados. Por que vocês acham que essas cores e formas são importantes?"*** Relacione isso ao uso de padrões e simetrias na construção das alegorias, comparando com a maneira como os jogadores organizam as cartas na mesa. Explique que os enfeites e as cores do Boi Pintadinho também carregam significados, assim como os números e naipes do baralho e representam diferentes dimensões da festividade.

Fonte: Os autores (2025)

Essas intervenções permitem que os alunos explorem a matemática de forma prática, percebendo que os conceitos trabalhados no jogo se aproximam da própria estrutura da manifestação cultural popular, fortalecendo a conexão entre a matemática e o universo simbólico do Boi Pintadinho.

Após alguns dias de vivência com o baralho, recomenda-se um momento de registro da experiência, no qual os alunos possam refletir sobre as estratégias utilizadas, as dificuldades encontradas e a relação entre a festividade e as atividades matemáticas. Esse registro pode ser feito por meio de diálogos, desenhos ou relatos escritos.

ENCERRANDO A PARTIDA

Este estudo explorou a relação entre a festividade do Boi Pintadinho e a educação matemática sob a perspectiva da etnomatemática, evidenciando como as atividades matemáticas descritas por Bishop — contar, medir, localizar, projetar, jogar e explicar — estão intrinsecamente presentes nas práticas culturais dessa manifestação popular, além de discutir o baralho como artefato histórico e social, destacando sua capacidade de aproximar a matemática das práticas cotidianas, reconhecendo-a como uma construção coletiva. O desenvolvimento do baralho estilizado e dos jogos de cartas inspirados na festividade demonstrou o potencial de recursos didáticos que integram cultura, história e matemática, promovendo uma abordagem representativa dos saberes e fazeres locais.

Reconhecemos que a escolha dos conteúdos e das metodologias de ensino tem impacto na formação dos estudantes, ao optar pela união entre jogos e elementos culturais, oferecemos uma experiência educacional que vai além da apresentação de conteúdos técnicos, buscando o desenvolvimento integral dos alunos. O baralho e seus jogos, neste contexto, revelam-se instrumentos poderosos para engajar os estudantes, estimular a criatividade e favorecer a construção ativa do conhecimento, sobretudo quando em sua construção trazem cenários distintos que compõem toda uma história e visão de mundo.

A escolha por um baralho sustentou-se em uma história rica e diversificada, marcada pela presença em diversas culturas ao longo do tempo. Esse formato carrega uma essência de familiaridade, conectando indivíduos de diferentes idades e origens de maneira acessível e natural. Além disso, o baralho evita a impressão, muitas vezes percebida pelos alunos, de ser um recurso exclusivamente pedagógico, promovendo um ambiente mais acolhedor. Seja em apresentações de mágica na televisão ou em outros contextos, a grande maioria dos alunos já teve algum contato com um baralho, direta ou indiretamente, tornando-o uma escolha propensa ao sucesso.

Esperamos que este trabalho inspire educadores a considerar a riqueza das tradições culturais em suas práticas pedagógicas, integrando história, cultura e matemática, contribuindo para uma educação que não apenas transmite saberes, mas formar indivíduos conscientes de sua identidade cultural e capazes de atuar de forma criativa na sociedade.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Maria da Conceição Alves. **Matemáticos, Autores E Obras: Contribuições Na Divulgação Da Matemática Recreativa.** Anais–Seminário Nacional de História da Matemática, [s. l.], v. 15, 2023. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/80. Acesso em: 6 nov. 2024.

BISHOP, Alan James. **Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.

BORDALLO DA SILVA, Armando. **Contribuição ao estudo do folclore amazônico na Zona Bragantina.** Bragança: FUNARTE/Fundação Cultural de Bragança, 1981.

CAPAI, Humberto (Org.). **Atlas do folclore capixaba.** Usina de Imagem. Vitória: Secult/ES e SEBRAE/ES, 2009. Atlas. Disponível em: https://observatoriodoturismo.es.gov.br/Media/observatorio/Publicacoes/Livros/Atlas%20do%20Folclore%20Capixaba.pdf. Acesso em: 6 nov. 2024.

CAVALCANTI, Maria Laura Viveiros de Castro. **Tema e variantes do mito: sobre a morte e a ressurreição do boi.** Mana, v. 12, n. 1, p. 69-104, 2006.

COPAG. **Baralho Cordel.** Disponível em: https://www.copagloja.com.br/baralho- cordel/p?srsltid=AfmBOopXJ6DQs9esOJiXBirpjpmt5uEex7-wKLYBrSiHueupfkgV6qSn. Acesso em: 17 fev. 2025.

LÜBECK, Marcos. **Entre a história e a etnomatemática: a perspectiva historiográfica.** In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA (SNHM), 15., 2023, Maceió. Anais [...]. Maceió: SBHMat, 2023.

SILVA, Carla Mariana Rocha Brittes da; CONTI, Keli Cristina. **Problematicando: jogos de cartas para o desenvolvimento de habilidades matemáticas.** 1. ed. Belo Horizonte: Ed. das Autoras, 2021.

SOARES, **Kamila Lemas. A iconografia das cartas de baralho.** Projetica, n 7(1), p.25-36, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.5433/2236-2207.2016v7n1p25. Acesso em: 21 dez. 2024.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Indícios de saberes e fazeres etnomatemáticos presentes na Educação de Jovens e Adultos

Evidence of ethnomathematical knowledge and practices present in Youth and Adult Education

Adriana da Silva Klippel[1]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná–Unioeste

Marcos Lübeck[2]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná–Unioeste

RESUMO

A Educação de Jovens e Adultos no Brasil enfrenta desafios históricos profundos relacionados ao acesso e permanência na educação escolar. Esses entraves resultam em um público que, por diversas razões, teve muitos dos seus direitos cerceados, não tendo a educação escolar na idade adequada, mas que busca, com dignidade, conquistar o que outrora foi negado. Por isso, os educadores dessa modalidade devem adotar uma postura de respeito, considerando as vivências e as histórias dos alunos no ensino. Assim, este estudo tem como objetivo investigar os saberes e as práticas etnomatemáticas de jovens e adultos, especialmente daqueles que estão em fase de alfabetização, e como esses conhecimentos podem ser contextualizados e sistematizados nas aulas de matemática. A pesquisa justifica-se pela importância de valorizar os saberes culturais e históricos desse público específico, contribuindo para uma educação que seja mais inclusiva. A metodologia adotada é qualitativa e etnográfica, composta pela observação participante, questionários, entrevistas e diários de campo, além de uma revisão bibliográfica sobre o tema. A análise dos dados será interpretativa, com base em critérios de descrição densa. Espera-se que esta pesquisa se torne relevante para o avanço de reflexões sobre a importância da etnomatemática no processo de reconhecimento e de valorização histórica e cultural na Educação de Jovens e Adultos, contribuindo significativamente para os processos de ensino e de aprendizagem deste peculiar grupo, bem como para a formação de professores e pesquisadores no âmbito da EJA, considerando as relações entre história, cultura e matemática.

Palavras-chave: Etnomatemática; EJA; Contextualização; Vivências; Histórias.

ABSTRACT

Youth and Adult Education in Brazil faces deeply rooted historical challenges related to access to and retention in school education. These challenges result in a population that, for various reasons, has had many of its rights curtailed, not having access to education at the appropriate age, but that seeks, with dignity, to achieve what was once denied. Therefore, educators in this modality must adopt an attitude of respect, considering the experiences and stories of students in education. Thus, this study aims to investigate the ethnomathematical knowledge and practices of young people and adults, especially those in the literacy phase, and how this knowledge can be contextualized and systematized in mathematics classes. The research is justified by the importance of valuing the cultural and historical knowledge of this population, contributing to a more inclusive education. The methodology adopted is qualitative and ethnographic, consisting of participant observation, questionnaires, interviews and field diaries, in addition to a bibliographic review on the subject. The data analysis will be interpretative, based on dense description criteria. It is expected that this research will become relevant for the advancement of reflections on the importance of ethnomathematics in the process of historical and cultural recognition and appreciation in Youth and Adult Education, contributing significantly to the teaching and learning processes of this group, as well as to the training of teachers and researchers in the scope of EJA, considering the relationships between history, culture and mathematics.

Keywords: Ethnomathematics; EJA; Contextualization; Experiences; Stories.

[1] Mestranda em Ensino pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), Foz do Iguaçu/PR. Professora na Secretaria Municipal de Educação (SMED), Foz do Iguaçu, Paraná, Brasil. E-mail: adrianadasilvaklippel@gmail.com.

[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro/SP. Docente na Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), no Curso de Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGEn), Foz do Iguaçu, Paraná, Brasil. E-mail: marcoslubeck@gmail.com.

PALAVRAS INICIAIS

Irei narrar alguns momentos marcantes do meu passado para relatar como a prática pedagógica sempre fez parte da minha vida, antes mesmo de eu compreender o sentido desse ato. Minha trajetória na Educação de Jovens e Adultos (EJA) começou na infância, acompanhando minha mãe em seu trabalho. Ainda jovem, mas já cursando o magistério, fazendo companhia à minha mãe, aproveitava as oportunidades para adentrar em sala de aula e assim auxiliar os alunos dela na EJA, o que despertou em mim a alegria de ensinar.

Durante o Curso de Formação de Docentes, realizei estágio de regência em uma turma de EJA, aprofundando minha afinidade com essa modalidade. Foi ali que compreendi melhor o impacto de contribuir, ou não, para a educação de pessoas que conciliam trabalho, família e o retorno aos estudos. Mais do que ensinar, desde então, aprendi e continuo aprendendo com as suas histórias e experiências, o que enriquece minha visão de mundo e minha prática docente.

Tenho uma trajetória acumulada de treze anos em uma rede municipal, que inclui o trabalho com turmas do 1º ao 5º ano e da EJA – fase I. Em 2016, assumi a coordenação pedagógica das turmas de EJA, função que exerci por seis anos, consolidando minha paixão por essa modalidade e seu potencial transformador. Em 2023, retornei à docência, optando novamente pela EJA, em uma escola com forte significado pessoal e profissional.

Com o desejo de aprimorar minha prática e compreender melhor os saberes culturais dos alunos da EJA, sempre busquei especialização e, agora, como mestranda em um Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGEn), almejo aprofundar os estudos sobre as matemáticas presentes no cotidiano e nas histórias desses alunos. Essa jornada reforça meu compromisso em promover um ensino significativo e inclusivo, contribuindo para o desenvolvimento de todos os envolvidos no processo educativo.

INTRODUÇÃO

Pesquisar a Educação de Jovens e Adultos envolve compreender que seus alunos, por diversos motivos, tiveram o direito à educação negado ou negligenciado durante a infância ou adolescência. Assim, ensinar na EJA exige mais do que simplesmente transmitir conteúdos; é essencial valorizar as histórias, vivências e conhecimentos trazidos pelos estudantes, que frequentemente enfrentam desafios além da simples reconexão com o aprendizado formal.

Muitos alunos, ao retornarem à escola, sentem que seu saber e fazer cotidianos são desconsiderados, o que pode levar à desvalorização de suas competências e à crença de que são incapazes de aprender, especialmente no campo da alfabetização matemática. Por isso, é crucial adotar atitudes que respeitem os saberes adquiridos em suas vivências e promovam uma relação de confiança e valorização mútua. Como afirmou Freire (2023, p. 62), "o respeito devido à dignidade do educando não me permite subestimar, pior ainda, zombar, do saber que ele traz consigo para a escola".

Portanto, é necessário, que os docentes conheçam e compreendam os conhecimentos construídos por esses jovens e adultos antes de chegarem à sala de aula, considerando seu contexto sociocultural, profissional ou doméstico. Além de tornar mais claras as relações entre o saber extraclasse e o saber matemático escolar, essa compreensão contribui para o desenvolvimento de práticas pedagó-

gicas mais direcionadas e assertivas para esse público. A história da matemática e as histórias de vida dos alunos podem colaborar nesse processo.

Na Educação Matemática, encontramos um suporte teórico para investigar esses conhecimentos produzidos fora do âmbito escolar, por meio da etnomatemática, uma área que estuda os saberes originados do ambiente cultural das pessoas e grupos. Considerar essa abordagem no ensino e aprendizagem da EJA é relevante, pois esses alunos não chegam sem conhecimentos, ao contrário, muitas vezes, seus saberes e fazeres são ignorados ou desvalorizados elo sistema escolar.

Com base nos estudos que venho iniciando, procuro considerar a importância de conhecer e compreender como esses conhecimentos são produzidos por nossos alunos. Além disso, dada a dificuldade de compreensão quando o professor utiliza termos técnicos e atividades que não se relacionam com as experiências cotidianas dos alunos, é urgente continuar investigando. Nesse contexto, surge a seguinte questão: Quais saberes e fazeres etnomatemáticos os alunos da Educação de Jovens e Adultos em alfabetização possuem, e como esses conhecimentos podem ser problematizados no ensino da matemática?

O objetivo principal da pesquisa é investigar saberes e fazeres etnomatemáticos nas histórias de vida de alunos jovens e adultos em alfabetização, identificando aqueles que podem ser contextualizados no ensino escolar da matemática. Para isso, pretendemos: investigar os saberes e fazeres etnomatemáticos de alunos da EJA em alfabetização; identificar quais saberes e fazeres podem ser contextualizados e problematizados no ensino da matemática escolar da EJA; apresentar possíveis relações entre os saberes e fazeres dos alunos da EJA e o conhecimento escolar ensinado pelos professores de matemática; e destacar a importância social e histórica desses saberes e fazeres para a alfabetização e o fortalecimento cultural dos alunos da EJA, levando em consideração as histórias de como as matemáticas se produzem nesse grupo social.

REFERÊNCIAL TEÓRICO

A Educação de Jovens e Adultos e a atuação docente

No contexto do Brasil, nos deparamos com um número significativo de jovens e adultos analfabetos, sendo em torno de 11.4 milhões de pessoas com 15 anos ou mais[3] (IBGE, 2022), além de outros que retornam ao Ensino Fundamental depois de se afastarem por um período. Em alguns casos, procuram pelo primeiro acesso à alfabetização. Desse modo, retornam após terem sido excluídos do sistema educacional regular, por razões que vão desde fracassos escolares à necessidade de ingresso precoce no mercado de trabalho (Fantinato, 2004).

Em termos teóricos, Nascimento (2013) afirma que a EJA é uma modalidade do Ensino Fundamental e do Ensino Médio que possibilita à muitas pessoas jovens e adultas, que não tiveram acesso ao conhecimento escolar em idade adequada, a oportunidade para iniciar ou dar continuidade aos seus estudos, sendo, portanto, uma modalidade de ensino que visa garantir um direito àqueles que foram excluídos dos bancos escolares ou que antes não tiveram uma chance de acessá-los.

[3] De acordo com dados informados pela Agência de Notícias IBGE, mensurados no censo demográfico de 2022, o Brasil possui 11,4 milhões de pessoas analfabetas com 15 anos ou mais. Disponível em: https://encurtador.com.br/ZDExe. Acesso em: 06 mar. 2025.

Portanto, para nos situar sobre quem são os sujeitos da EJA, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional–LDBEN, Lei nº 9394/96, em conformidade com a Constituição Federal do Brasil, de 1988, traz em seu artigo 37, o seguinte:

> Art. 37. A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos nos ensinos fundamental e médio na idade própria e constituirá instrumento para a educação e a aprendizagem ao longo da vida.
> § 1º Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.
> § 2º O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si. § 3º A educação de jovens e adultos deverá articular-se, preferencialmente, com a educação profissional (Brasil, 1996).

Nesse mesmo viés, a Proposta Pedagógica Curricular para as Séries Iniciais do Ensino Fundamental, estabelecida pela Associação dos Municípios do Oeste do Paraná – AMOP, ao dispor das necessidades educacionais especiais, trata da EJA como:

> Modalidade educacional que atende o aluno trabalhador, com o objetivo do compromisso com a formação humana e com acesso à cultura geral, de modo que aprimore a sua consciência crítica e adote atitudes e compromissos político, para o desenvolvimento de sua autonomia intelectual, fornecendo subsídios para que se afirmem como sujeitos ativos, críticos e democráticos. A educação deve voltar-se à formação na qual os alunos possam aprender refletir de modo crítico, agindo com responsabilidade individual ou coletiva, participando do trabalho e da vida coletiva, enfrentando problemas novos, construindo soluções com agilidade e rapidez, partindo do uso adequado de conhecimentos científicos, tecnológicos e sócio históricos (AMOP, 2020, p. 116).

No Brasil, a potencialização dos movimentos com objetivo de discutir e propor políticas públicas para a EJA se deu na segunda metade da década de 1990, sobretudo, com a mobilização e participação de diversos segmentos sociais, tais como Organizações Não-Governamentais (ONGs), movimentos sociais, Governos Municipais e Estaduais, universidades, organizações empresariais (Sistema "S") (SEED, 2006).

Em resposta a esse movimento, que ocorria em âmbito nacional, o Paraná criou o Fórum Paranaense de EJA, em fevereiro de 2002. "Tal instância tornou mais forte a articulação das instituições governamentais, não-governamentais, empresariais, acadêmicas e movimentos sociais, em reuniões plenárias regionais e nos Encontros Paranaenses de EJA" (SEED, 2006, p. 22).

As leituras supracitadas apontam que os jovens e adultos analfabetos, ou ainda, que não vão à escola, historicamente, têm sido caracterizados por políticas educacionais a eles destinadas, em um sentido assaz depreciativo, como sujeitos "analfabetos", "não-escolarizados". Na prática, a valorização sociocultural do saber escolar hegemônico leva jovens e adultos a procurarem acessos a ele por meio do ingresso ou reingresso, mesmo que tardio, pela escolarização (Fantinato, 2004), pois a "educação é um ato político" (D'Ambrosio, 2007a, p. 85), e por si só, já faz uma diferença.

O adulto, parte do proletário, traz consigo uma matemática sua, própria, isto é, uma matemática particular. Portanto, é preciso, a partir dela, trabalhar para ele poder entender a matemática dos

livros e poder aplicá-la no seu trabalho e na vida, dando-lhe a oportunidade do domínio básico da escrita e da matemática elementar, instrumentos fundamentais para aquisição de conhecimentos novos e mais avançados (Santos, 2004). Assim, quando falamos em EJA, recorremos ao que diz Fonseca (2020, p. 14): "estamos falando de uma ação educativa dirigida a um sujeito de escolarização básica incompleta ou jamais iniciada e que acorre aos bancos escolares na idade adulta ou na juventude."

Quando pensamos no ensino de matemática na EJA, precisamos fazer ainda um outro exercício de reflexão (e de ação) para que as matemáticas se apresentem de forma mais significativa, que sejam percebidas como "uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, entender, manejar e conviver [...], dentro de um contexto natural e cultural" (D'Ambrosio, 2005, p. 82). Assim, "a função do professor é a de um associado aos alunos na consecução de uma tarefa, e consequentemente, na busca de novos conhecimentos. Alunos e professores devem crescer, social e intelectualmente, no processo" (D'Ambrosio, 2007a, p. 90) que aí se constitui, dialogicamente e ininterruptamente.

Historicamente, os espaços de discussão voltados a EJA e seu eventual currículo são limitados. Concordamos com Pompeu et al (2024) quando mencionam a necessidade de ampliar as comunidades de compartilhamento de ideias e de práticas pedagógicas por meio de espaços formativos. Um espaço para isso pode ser constituído com a comunidade que estuda e pesquisa a história da matemática, por exemplo, suas relações com o ensino e as demais tendências em Educação Matemática.

Fonseca (2020, p. 85) afirma que as propostas na EJA possuem, portanto, uma perspectiva política nítida, são "coerentes com o propósito de contribuir para a conquista de melhores e mais inclusivas condições de cidadania para seus alunos e alunas". As ideias de D'Ambrosio (1990; 2005; 2007a; 2023) para a Educação Matemática na EJA corroboram nisto. De fato, a teoria é importante, porém, é na prática histórica que os conhecimentos se consolidam, gerando novos. Cintila aqui a necessidade de proporcionar momentos para integrar teorias e vivências, conteúdos e experiências, docência e discência (Freire, 2023).

Diante das ideias e apontamentos apresentados, percebemos desde a necessidade de se criar políticas públicas que viabilizem o acesso e permanência para esse público, tanto quanto um currículo que se componha de conteúdos a serem problematizados, e que se pense de maneira respeitosa o ato de ensinar na EJA.

Conforme descrito nas Diretrizes Curriculares da Educação de Jovens e Adultos, "a atuação do educador da EJA é fundamental para que os educandos percebam que o conhecimento tem a ver com o seu contexto de vida, que é repleto de significação" (SEED, 2006, p. 40). Emerge como medida fundamental a necessária formação de professores, especificamente habilitados e profissionalizados para atuarem na EJA.

Fantinato (2004) acredita que o afastamento do mundo da vida cotidiana e do mundo da escola talvez viesse a ser menor se os professores e profissionais da educação compreendessem melhor os motivos que levam alunos a resistirem à passagem dos conhecimentos práticos aos conhecimentos escolares. Em complemento a essa ideia, Antunes (2021) diz o seguinte:

> Por desconhecimento das vivências dos alunos, a escola e o professor tomam como referência o seu próprio ambiente cultural, sua cultura, as suas experiências pessoais em

> detrimento das dos alunos, e esse é um dos equívocos que a etnomatemática pretende suprimir, valorizando o saber/fazer cultural de todos os indivíduos, contextualizando também a realidade sociocultural dos alunos (Antunes, 2021, p. 25).

Todavia, a atitude do professor deve ser de valorizar os conhecimentos e as formas de expressões que cada aluno traz de suas experiências de vida e dos grupos sociais e culturais a que estão inseridos, para que o sucesso no processo de socialização possa ser um aliado na garantia da permanência do jovem, adulto e idoso em sala de aula (Brasil, 2002). Do contrário,

> O ensino da matemática poderá contribuir para um novo episódio de evasão da escola, na medida em que não consegue oferecer aos alunos da EJA razões ou motivação para nela permanecerem, reproduzindo as fórmulas de discriminação etária, cultural ou social para justificar insucessos dos processos de ensino-aprendizagem (Fonseca, 2020, p. 37).

Visto a diversidade de culturas presentes em uma sala de aula, "o professor deve ter a segurança para administrar de forma eficiente todas essas personalidades com argumentos, diálogos e pertinência" (Pontes, 2018, p. 170), pois "não é possível respeito aos educandos, à sua dignidade, a seu ser formando-se, à sua identidade fazendo-se, se não se levam em consideração às condições em que eles vêm existindo, se não se reconhece à importância dos "conhecimentos de experiências feitos" com que chegam à escola" (Freire, 2023, p. 62).

Em um estudo sobre cultura, Lübeck (2017) afirma que na escola prevalece não apenas a diversidade de culturas e histórias, mas habilidades, competências, motivações, perspectivas, modos de aprendizagem, necessidades educacionais, carências, estilos de vida e tantas outras, como numa turma de EJA, em que cada aluno tem sua formação humana, distinta da dos demais colegas, e para atender essa diversidade, é imprescindível trabalhar as percepções e atitudes dos professores, habituados a ministrarem uma aula homogeneizadora, sem diversificar as suas metodologias, em outros termos, objetivando como produto final um alunado estandardizado, de espectro único, por assim dizer, que pouco de original poderá oferecer se conseguir chegar ao término do processo.

Freire (2023, p. 42) afirma que "a questão da identidade cultural, de que fazem parte a dimensão individual e a classe dos educandos, cujo respeito é absolutamente fundamental na prática educativa progressista, é um problema que não pode ser desprezado." Além disso,

> O caráter formativo do ensino da matemática assume na EJA um especial sentido de atualidade quando se dispõe a mobilizar ali, naquela noite, naquela aula, uma emoção que é presente, que comove os sujeitos, jovens e adultos, aprendendo e ensinando matemática, enquanto resgata e atualiza vivências, sentimentos, cultura, num processo de confronto à história do conhecimento matemático (Fonseca, 2020, p. 25).

Para Arroyo (2005), é importante partir dos saberes, conhecimentos, histórias, interrogações e significados que aprenderam em suas trajetórias de vida, constituindo desta forma um ponto de partida onde se percebe uma pedagogia que se preocupa com o diálogo entre os saberes escolares e os saberes sociais.

Concordando com Oliveira (2023, p. 5), "entendemos que a educação básica deve-se apresentar como locus de diferentes perspectivas históricas e matemáticas, valorizando a multiculturalidade

na qual estamos inseridos." Nesse sentido, perceber o conhecimento etnomatemático presente nos saberes e fazeres dos alunos emerge uma perspectiva de ensino na qual não subalternizamos a história e a cultura existente nos conhecimentos próprios, nem superestimamos os saberes escolares, mas que aí entrelaçam-se todos.

Com vistas a uma concepção mais humanizadora da educação, ensinar exige reflexão crítica sobre as práticas escolares e extraclasse, e aos docentes cabe fazer e pensar isso. Nesses termos, "a prática docente, crítica implicante do pensar certo, envolve o movimento dinâmico, dialético, entre o fazer e o pensar sobre o fazer", em que, então, "o próprio discurso teórico, necessário à reflexão crítica, tem que ser de tal modo concreto que quase se confunda com a prática" (Freire, 2023, p. 40). Diante disso, ser docente na EJA é assumir uma postura de construção de conhecimentos em comunhão com os alunos, e nessa dinâmica, promover a formação de indivíduos pensantes e críticos.

A Etnomatemática e sua importância para o ensino de Matemática na EJA

A definição apresentada por D'Ambrosio (1990, p. 18) diz que "etnomatemática é a matemática praticada dentro de um grupo cultural identificável, tal como sociedades nacionais tribais, grupos de trabalho, categorias de crianças de uma certa faixa etária, classes profissionais, classes trabalhadoras, etc." Ainda, para D'Ambrosio (2005), a etnomatemática pode ser compreendida em diferentes dimensões: dimensão conceitual, dimensão histórica, dimensão cognitiva, dimensão epistemológica, dimensão política e dimensão educacional. Com esse pensar, acreditamos na viabilidade de pesquisar os saberes matemáticos presentes nos saberes de alunos(as) que frequentam as salas da EJA, pois, assim estaremos direcionando nosso olhar atento para aquelas pessoas cujo conhecimento não se dá apenas pela escola, mas especialmente pela sua história de vida.

Conforme Fantinato (2004), os primeiros estudos etnomatemáticos voltaram-se para a investigação das matemáticas presentes em contextos culturais diferentes do ambiente escolar ou acadêmico, que buscava estes conhecimentos nas práticas cotidianas dos grupos estudados.

Em relação à EJA, a etnomatemática pode exercer uma função fundamental no estudo da Educação Matemática e para a alfabetização dos jovens e adultos, uma vez que torna possível estabelecer um maior reconhecimento da diversidade cultural que compõe este ambiente escolar (Souza et al, 2020). De fato, "acreditando [...] que o homem é um animal amarrado a teias de significados que ele mesmo teceu, assumo a cultura como sendo essas teias e a sua análise" (Geertz, 2008, p. 4). Assim, percebemos que a cultura é um elemento significativo no processo formativo das pessoas, é como dizer que são as marcas adquiridas ao longo dos processos constitutivos da vida e da história dos seres humanos, pelo meio ao qual pertencem.

Voltando nosso pensamento para os alunos da EJA, notamos que esses detêm muitos saberes e dominam diversos fazeres em seu cotidiano, portanto, "as distintas maneiras de fazer e de saber que caracterizam uma cultura, são parte do conhecimento compartilhado e do comportamento compatibilizado. Assim, como o comportamento e o conhecimento, as maneiras de saber e de fazer também estão em permanente interação" (D'Ambrosio, 2023, p. 20).

Os saberes presentes nas práticas cotidianas, como os saberes matemáticos que se compõem no interior de um grupo, saberes estes compartilhados e interpretados pelo próprio grupo cultural, apresentam-se, normalmente, de forma diferente daquele presente nos livros escolares (Monteiro, 1998), o que é muito bom, diga-se de passagem, pois "a diversidade cultural representa o potencial

criativo da humanidade" (D'Ambrosio, 2007a, p. 28). Contudo, eis uma ressalva aos docentes da EJA, que tenham consciência dessa diversidade.

> O reconhecimento que as ideias matemáticas, substanciadas nos processos de comparar, classificar, quantificar, medir, organizar, inferir e de concluir, são próprias da natureza humana. Em todo ser humano, cérebro e mente se organizam para execução desses processos. Esses processos são deflagrados por motivações, que têm origem no ambiente natural, social e cultural em que se encontra o indivíduo. Portanto, a matemática é espontânea, própria do indivíduo, motivado pelo seu ambiente natural, social e cultural (D'Ambrosio, 2007b, p. 17).

Estudar e defender as ideias do programa etnomatemática se dá por acreditarmos que a matemática está muito além de apenas memorizar códigos e realizar cálculos, pelo contrário, acreditamos nela como uma maneira de interação com o meio, "como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal, diversificada nas suas origens e na sua evolução" (D'Ambrosio, 2009, p. 19). Para Geertz (2008), a perspectiva cultural está no pressuposto de que o ambiente natural, o meio onde se vive e convive, ou seja, o mercado, a casa, o trabalho, a família... irão constituir o pensamento humano. Nesse aspecto, a escola também é um ambiente formador, visto que os indivíduos de um grupo–a turma–estão inseridos nesse meio, diariamente.

Assim, é relevante buscar pelo respeito na educação, "por meio de uma educação matemática que esteja repleta de valores culturais, sociais e éticos, como os que a etnomatemática comumente enfatiza nas suas investigações. Essa busca é alimentada pela esperança de que os melhores dias da humanidade ainda estão para chegar" (Lübeck, 2013, p. 168). O aporte para esse respeito, é o que buscamos ao desenvolver o ato docente, por meio da abordagem etnomatemática, onde os valores culturais e sociais, sejam parte do componente didático.

A estratégia mais promissora para promoção do respeito na educação, em sociedades que estão em transição da subordinação para a autonomia, é no sentido de recuperar a dignidade de seus indivíduos, dando a devida importância para as suas raízes culturais. Portanto, como vertente, a etnomatemática nos faz pensar que é imprescindível acolher e respeitar as raízes de cada um sem rejeitar ninguém, e num processo síntese, reforçar as próprias raízes (D'Ambrosio, 2023). Nesse sentido, a historiografia contribui com a etnomatemática ao revelar como diferentes povos e culturas desenvolveram formas próprias de pensar e fazer matemática ao longo do tempo.

Diante disso, fica expressa a importância de considerar a historiografia pelo Programa Etnomatemática, o que reflete respeito por parte dos pesquisadores ao adotar tal perspectiva, como dito por Lübeck (2023, p. 4) "com a consciência de que todo etnomatemático deve ser um historiador e que todo historiador seja antes um etnomatemático, tratamos do valor que há no entendimento do ser/saber/fazer/conviver de grupos singulares, um elemento de máxima relevância às pessoas que buscam viver na/com/a diversidade e almejam transpassar diferenças".

Assim, compreendemos que a historiografia permite novas formas de ensinar e aprender matemática, pois, busca entender como se desenvolveram as matemáticas ao logo do tempo, e assim, contribuindo para a valorização de diferentes formas de pensamento matemático, respeitando os saberes de diferentes grupos, promovendo uma educação matemática mais respeitosa, equitativa e inclusiva. Além disso, podemos dizer que a historiografia da etnomatemática, nos ajuda a repensar a

forma como a matemática é ensinada, promovendo um ensino mais próximo da realidade de nossos alunos, e assim proporcionando uma aprendizagem mais significativa.

METODOLOGIA

Para investigar quais são os saberes e fazeres etnomatemáticos dos alunos da EJA, como são produzidos historicamente e como podem se relacionar com os conteúdos escolares, estamos realizando uma pesquisa de caráter qualitativo, considerando o que dizem Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 70), de que "esse tipo de pesquisa pode envolver levantamento bibliográfico, realização de entrevistas, aplicação de questionários ou testes ou até mesmo estudo de casos". Seus fundamentos teóricos permitem desvelar processos que dificilmente poderiam ser expressos por números quantitativos, proporcionando a construção de novas abordagens sobre o universo da produção humana, bem como a revisão e criação de novos conceitos durante a investigação (Minayo, 2023).

Inicialmente, para cumprir com o rigor ético exigido nas pesquisas qualitativas envolvendo seres humanos, este projeto de pesquisa foi encaminhado para tramitação ao Comitê de Ética em Pesquisa[4], e assim todas as ações e riscos foram esclarecidos, cumprindo com as exigências de controle entre pesquisador e participante, informamos em tempo que já obtivemos o parecer favorável no segundo semestre de 2024.

Assim, pensamos em observar aulas *in loco* e coletar informações junto aos alunos e com os professores que atuam na EJA com a disciplina de matemática, além de buscar informações com os próprios educandos e pesquisar com eles seus conhecimentos (não escolarizados), e assim poder conhecê-los mais de perto, desse modo nosso estudo terá uma base na etnografia.

> Justamente ao compreender o que é a etnografia, ou mais exatamente, o que é a prática da etnografia, é que se pode começar a entender o que representa a análise antropológica como forma de conhecimento. Devemos frisar, no entanto, que essa não é uma questão de métodos. Segundo a opinião dos livros-textos, praticar a etnografia é estabelecer relações, selecionar informantes, transcrever textos, levantar genealogias, mapear campos, manter um diário, e assim por diante (Geertz, 2008, p. 4).

Complementando, Angrosino e Flick (2009, p. 30) descrevem a pesquisa qualitativa etnográfica como "[...] a arte e a ciência de descrever um grupo humano–suas instituições, seus comportamentos interpessoais, suas produções materiais e suas crenças". Dessa forma, entendemos que, no decorrer da pesquisa, analisaremos histórias e experiências dos indivíduos, as interações e a comunicação que ocorre entre o grupo.

A pesquisa está sendo realizada no município de Foz do Iguaçu/PR na rede pública municipal de educação, que atualmente conta com 50 unidades de Ensino Fundamental–anos iniciais, sendo que apenas seis unidades ofertam a modalidade de EJA, e o quadro de profissionais atualmente é composto por doze professores.

Dessas unidades, a Escola Municipal João Adão da Silva é o local onde estamos realizando a maior parte das atividades de observação pertinentes a pesquisa. Essa escola oferta matrículas para alunos de 1ª a 4ª etapas do Ensino Fundamental – I, tendo em média 30 a 40 alunos matriculados

[4] Número do Parecer Consubstanciado CEP/UNIOESTE nº 7.107.023.

a depender do acesso e permanência durante o período letivo. Grande parte da população desta região do município não possui muito poder aquisitivo e são pessoas com baixo nível de escolaridade. Outro fator a ponderar é a proximidade com a pesquisadora, que é lotada nesta instituição, o que garante o acesso ao campo e gera uma facilidade de imersão.

Quanto aos alunos e professores participantes, a sua seleção foi realizada por acessibilidade, critério que envolve proximidade, disponibilidade, bem como disposição em colaborar com a pesquisadora e a pesquisa. Contudo, conforme disposto pela Resolução nº 510/16 do Conselho Nacional de Ética em Pesquisas, os participantes são convidados a assinarem o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), bem como iremos garantir o sigilo das informações e a utilização dos dados apenas será feita para a divulgação científica, ressaltando a utilização do anonimato na aplicação de questionários e entrevistas, observações e descrições, além da adoção de codinomes, quando houver a necessidade de mencionar os dados analisados.

A pesquisa que propomos iniciou com uma pesquisa bibliográfica que, segundo Fonseca (2002, p. 32), "a pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos", onde buscamos as contribuições de autores e pesquisadores que entrelaçam a Educação de Jovens e Adultos, Alfabetização Matemática e a Etnomatemática, entre outros temas que julgarmos pertinentes para pesquisa, estabelecendo padrões que irão dar suporte aos conceitos e orientar critérios de desenvolvimento às atividades.

Nesta pesquisa, o trabalho de observação do campo é essencial e permite que se estabeleça maior proximidade e interação entre pesquisador e os atores/sujeitos, e dessa forma, conhecer mais a fundo a realidade do contexto em que se aplica e a cultura envolvida. Aliás, "a descrição de uma cultura requer observação participante, trabalho de campo (durante um tempo suficiente) e interação pessoal (intersubjetividade, empatia) em um contexto natural" (Moreira, 2011, p. 85).

As observações iniciaram no segundo semestre de 2024 estendendo-se ao primeiro semestre de 2025, para que se colete a quantidade de informações necessárias, pois, segundo Angrosino (2009), a observação participante não é um método em si, mas um estilo de pesquisar que combina o papel do investigador, com as técnicas da observação para a recolha de dados, como entrevistas, análise documental, narrativas, histórias, artefatos etc., enfim, é uma maneira de realizar pesquisas e estudos etnográficos, que situa o investigador em meio ao grupo cultural e contexto estudado na tentativa de descrever sua cultura ou uma parte dela.

Eventualmente, realizaremos entrevistas semiestruturadas, instrumento muito utilizado nas pesquisas em educação e ensino, pois, como nossa pesquisa tem um caráter etnográfico, as entrevistas nos possibilitarão uma aproximação desejada com a realidade dos alunos, quer dizer, "é por meio de entrevistas que realizamos pesquisas baseadas em narrativas de vida, igualmente denominadas como histórias de vida, histórias biográficas, etnobiografias e história oral" (Minayo, 2023, p. 59).

O diário de campo será adotado como instrumento principal de coleta, que talvez seja o mais importante para esta pesquisa. Minayo (2023, p. 65) define o diário de campo como "caderninho, caderneta, ou um arquivo eletrônico no qual descrevemos todas as informações que não fazem parte do material formal de entrevistas em suas várias modalidades", visto que neste serão anotadas todas as observações pertinentes aos saberes e fazeres dos alunos durante as aulas ou atividades propostas pelos professores de matemática, bem como da presença de relações saberes e fazeres nas próprias atividades ofertadas, como se delineiam, as principais estratégias utilizadas, a forma como se enten-

de e percebe as relações do saber sociocultural com o saber escolarizado, dentre tantas surpresas e situações que podem surgir.

Para complementar a pesquisa e enriquecê-la no sentido de entrelaçar informações, iremos coletar dados referentes aos olhares dos docentes, a respeito dos saberes e fazeres de seus alunos, se costumam considerar esses conhecimentos antes de planejar as aulas, realizando um levantamento de dados por meio de um questionário.

> Pode-se definir questionário como a técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado etc (Gil, 2008, p. 121).

Os dados coletados no decorrer da pesquisa serão analisados e interpretados por meio de uma análise interpretativa, à luz da descrição densa, técnica pensada por Clifford Geertz, que "objetiva proporcionar a compreensão das estruturas significantes implicadas na ação social observada, que necessita primeiramente ser apreendida para depois ser apresentada" (Talamoni, 2014, p. 54).

Ao aplicar essa técnica para analisar e a interpretar os dados coletados, estaremos externalizando conhecimentos culturais do grupo, de modo que outros poderão também conhecê-los. Assim, descrever de maneira pretensamente densa, à moda de um etnógrafo, um saber/fazer social, quem o faz, "ao fazê-lo, ele o transforma de acontecimento passado, que existe apenas em seu próprio momento de ocorrência, em um relato, que existe em sua inscrição e que pode ser consultado novamente" (Geertz, 2008, p. 14).

Talamoni (2014) aponta que a descrição densa objetiva ampliar o âmbito do discurso humano, e justifica a importância da presença do pesquisador no local de pesquisa, estreitando a relação e o diálogo entre pesquisador e pesquisado, bem como da sua imersão nesta cultura. A autora destaca que o pesquisador precisa estabelecer comunicações com seus pares e com os sujeitos pesquisados, para que assim se aproprie de códigos e se aprofunde na interpretação acerca dos eventos observados.

Pensando nisso, compactuamos a ideia de Geertz (2008) que devemos estar imersos no meio observado e mergulhar no meio delas, devido a importância a qual essa tarefa se configura para alcançar os resultados da pesquisa, onde o pesquisador deverá estar atento às locuções registradas para que prossiga com as suas interpretações. Temos ciência que o trabalho do pesquisador ao analisar e descrever suas observações exige extrema atenção, admitindo uma identidade no trabalho de escrever o texto final, que se configura por evidenciar os fatos observados, os saberes e fazeres presentes na EJA.

RESULTADOS ESPERADOS

Com esta pesquisa, esperamos contribuir com a Educação Matemática, especialmente na EJA, evidenciando os saberes e fazeres socioculturais produzidos ao longo do tempo pelos alunos dessa modalidade. Dessa forma, como educadores, devemos estar atentos a repensar nossas práticas docentes, de modo a não anular o conhecimento próprio de cada educando, respeitando sua história e contexto no qual ele produz conhecimento, atribuindo maior sentido ao aprendizado.

Almejamos, ainda, que nossa pesquisa contribua para o fortalecimento de práticas pedagógicas que busquem contextualizar e problematizar saberes e fazeres culturais, considerando a importância de compreender historicamente o processo de construção e evolução dos conhecimentos matemáticos. Queremos destacar que as histórias de cada grupo social e cultural são parte fundamental para dar sentido ao aprendizado, permitindo uma ruptura com os padrões que consideram apenas o saber escolarizado como forma legítima de aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Examinar as histórias de como as matemáticas se desenvolvem em diferentes grupos humanos, levando em consideração os saberes e as práticas de cada cultura, é uma tarefa que nos inspira profundamente. A investigação etnomatemática permite entender que a matemática não é uma linguagem universalmente homogênea, mas sim uma construção humana, dinâmica e multifacetada, que se adapta às necessidades e contextos específicos de cada sociedade. Como pesquisadores, nosso papel é promover reflexões que sejam não apenas acadêmicas, mas também significativas no processo de formação de futuros educadores. Ao desenvolver a pesquisa, acreditamos em sua contribuição para a construção de uma prática pedagógica que seja sensível às múltiplas realidades culturais, respeitando as histórias e tradições matemáticas de diferentes povos. Isso, por sua vez, prepara novos professores para exercerem sua profissão de maneira mais ética, de maneira respeitosa e sensível a história e à cultura do outro.

Nesse sentido, é necessário fortalecer os estudos e as pesquisas voltadas às ideias centrais do Programa Etnomatemática, especialmente quando essas são abordadas a partir de uma perspectiva historiográfica, que vai além da etnografia. Adotar uma visão historiográfica amplia a compreensão sobre as diferentes trajetórias das práticas matemáticas ao longo do tempo, ressaltando o impacto histórico das tradições matemáticas nas sociedades contemporâneas. Esse olhar ampliado enriquece o campo da etnomatemática, e também oferece novos caminhos para a pesquisa, permitindo que se explorem as múltiplas formas de entender e aplicar a matemática em diferentes grupos culturais. Ao integrar essas abordagens, podemos construir uma narrativa mais completa, que valorize as riquezas das diversidades matemáticas e, ao mesmo tempo, promova um entendimento mais profundo das maneiras de pesquisar e ensinar essas diversas expressões do saber e fazer.

REFERÊNCIAS

AMOP. Associação dos Municípios do Oeste do Paraná. **Proposta Pedagógica Curricular**: ensino fundamental (anos iniciais). Cascavel: AMOP, 2020.

ANGROSINO, Michael; FLICK, Uwe. (Coord.). **Etnografia e observação participante**. Tradução de José Fonseca. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ANTUNES, Paulo Rafael. A **Etnomatemática no espaço de uma feira agroecológica**: (re)conhecendo saberes e fazeres locais. 2021. 76 folhas. Dissertação (Mestrado em Ensino) – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, Foz do Iguaçu, 2021.

ARROYO, Miguel González. Educação de Jovens-Adultos: um campo de direitos e de responsabilidade pública. In: Leôncio Soares; Maria Amélia Giovanetti; Nilma Lino Gomes. (Org.). **Diálogos na Educação de Jovens e Adultos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL. Lei nº 9394/96. L**ei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em: 20 jul. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Proposta curricular para educação de jovens e adultos**. Volume 1. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 6. ed., Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2023.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática e História da Matemática. In: FANTINATO, Maria Cecília de Castelo Branco. (Org.). **Etnomatemática** – novos desafios teóricos e pedagógicos. Niterói: Editora da UFF, 2009, p. 17-28.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 14. ed. Campinas: Papirus, 2007a.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Entrevista concedida à professora Suzetti Geraldi Montenegro Perrotta. Entrevista com professor Ubiratan D'Ambrosio. **Revista Dialogia**, v. 6. p. 15-20. São Paulo, 2007b.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Sociedade, Cultura, Matemática e seu Ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo: Ática, 1990. 88p.

FANTINATO, Maria Cecília de Castello Branco. A construção de saberes matemáticos entre jovens e adultos do Morro de São Carlos. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, p. 110-211, 2004.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 2.ed. Campinas, 2007.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: Saberes necessários à prática educativa. 76. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2023.

FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. **Educação Matemática de Jovens e Adultos**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

GEERTZ, Clifford. **A interpretação das culturas**. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

LÜBECK, Marcos. **Utopia e Esperança**: do mito da terra sem males à educação etnomatemática. 2013. 185f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2013.

LÜBECK, Marcos. Cultura, diversidade e educação etnomatemática. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática–EPREM, 14., Cascavel. **Anais eletrônicos** [...]. Cascavel: SBEM/PR, 2017, p. 1-11. Disponível em: https://www.ogeogebra.com.br/sbemparana/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/325/140. Acesso em: 06 mar. 2025.

LÜBECK, Marcos. Entre a história e a matemática: a perspectiva historiográfica. In: Seminário Nacional de História da Matemática–SNHM, 15., 2023, Maceió. **Anais eletrônicos** [...]. Maceió: SBHMat, 2023, p. 1-16. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/123. Acesso em: 12 jan. 2025.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **Pesquisa Social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 2023.

MOREIRA. Marco Antonio. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

NASCIMENTO, Sandra Mara do. **Educação de Jovens e Adultos na visão de Paulo Freire**. 2013. 43 f. Monografia (Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino)–Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Paranavaí, 2013.

OLIVEIRA, Zaqueu Vieira. História da Matemática e ensino: dialogando com Paulo Freire, Boaventura de Sousa Santos e Vandana Shiva. In: Seminário Nacional de História da Matemática–SNHM, 15., 2023, Maceió. **Anais eletrônicos** [...]. Maceió: SBHMat, 2023, p 1-10. Disponível em: https://snhm.com.br/anais/article/view/97. Acesso em: 14 jan. 2025.

POMPEU, Carla Cristina; VALLE, Julio César Augusto do; SANTOS, Priscila Ribeiro dos. Comunidades de compartilhamento na formação continuada de professores/as que ensinam matemática na EJA. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 10. p. 1-20, 2024.

PONTES, Edel Alexandre Silva. A arte de ensinar e aprender matemática na educação básica: um sincronismo ideal entre professor e aluno. **Psicologia & Saberes**, v. 7, n. 8, p. 163-173, 2018.

SANTOS, Maria Auxiliadora Antunes dos. A Educação Matemática na alfabetização de Jovens e Adultos: formação de alfabetizadores. In: Congresso Brasileiro de Extensão Universitária Belo Horizonte, 2., 2004, Belo Horizonte. **Anais** [...]. Belo Horizonte: UFMG, 2004, p. 1-8.

SEED. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação de Jovens e Adultos**. Curitiba: SEED, 2006.

SOUZA, Ligiane Oliveira dos Santos et al. A Importância da Etnomatemática na Educação de Jovens e Adultos na Escola Estadual 07 de Setembro no Município de Barra do Bugres – MT. **Revista Psicologia & Saberes**, v. 9, n. 14, p. 103-111. 2020.

TALAMONI, Ana Carolina Biscalquini. O programa da descrição densa. In: Ana Carolina Biscalquini Talamoni. **Os nervos e os ossos do ofício**: uma análise etnológica da aula de anatomia. São Paulo: Editora UNESP, 2014, p. 53-66.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Janelas do tempo: experiência de ensino em uma escola pública de Belém do Pará

Windows of time: teaching experience in a public school in Belém of Pará

Edna Machado da Silva[1]
Universidade Federal do Pará – UFPA
Secretaria de Educação do Estado do Pará – SEDUC

João Cláudio Brandemberg[2]
Universidade Federal do Pará – UFPA

RESUMO

Apresenta-se um relato de experiência sobre uma ação pedagógica com uso de História da Matemática no Ensino de Matemática, em uma escola pública estadual, de Ensino Médio, de Belém-PA. A escola apresentava dificuldades de ensino, de aprendizagem e de realização de atividades da área de Matemática nos três turnos. Estabeleceu-se como objetivo investigar os efeitos de uma exposição de História da Matemática para professores e estudantes de uma escola pública estadual de Belém-PA. A ação foi proposta pela coordenadora de área de Matemática, professora da escola lócus da experiência e membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino e História da Matemática (GEHEM), cujos estudos inspiraram e fundamentaram a realização da Exposição de História da Matemática: Janelas do tempo. A experiência aconteceu de agosto a outubro de 2024 e envolveu uma equipe de sete professores de Matemática e seus alunos, na produção de materiais a serem expostos em diferentes formatos relacionando História da Matemática com os objetos de conhecimentos planejados para o terceiro bimestre letivo da escola, na disciplina de Matemática, e mais uma exposição visual e dialogada na biblioteca da escola por meio de um percurso feito com cartazes nas janelas da biblioteca. Como resultado, os alunos elaboram vídeos, cartazes, poemas, cenários, esculturas, pinturas e outros, a fim de expor os conhecimentos adquiridos na execução das pesquisas orientadas pelos professores de cada turma. No processo de construção, os estudantes desenvolveram aprendizagem, protagonismo e engajamento estudantil e os professores de matemática ampliaram as possibilidades de suas práticas pedagógicas.

Palavras-Chave: Ensino de Matemática; História da Matemática; Experiência de ensino.

ABSTRACT

This is an experience report on a pedagogical action using the History of Mathematics in Mathematics Teaching, in a public state high school in Belém-PA. The school had difficulties in teaching, learning and carrying out activities in the area of Mathematics in the three shifts. The objective was to investigate the effects of an exhibition of History of Mathematics for teachers and students of a public state school in Belém-PA. The action was proposed by the coordinator of the Mathematics area, a teacher at the school where the experience took place and a member of the Study and Research Group on Teaching and History of Mathematics (GEHEM), whose studies inspired and supported the creation of the Exhibition of History of Mathematics: Windows of Time. The experience took place from August to October 2024 and involved a team of seven Mathematics teachers and their students, in the production of materials to be displayed in different formats relating the History of Mathematics with the objects of knowledge planned for the third academic semester of the school, in the Mathematics discipline, and another visual and dialogic exhibition in the school library through a route made with posters in the library windows. As a result, the students created videos, posters, poems, scenarios, sculptures, paintings and others, in order to display the knowledge acquired in the execution of the research guided by the teachers of each class. In the construction process, the students developed learning, protagonism and student engagement and the Mathematics teachers expanded the possibilities of their pedagogical practices.

Keywords: Mathematics Teaching; History of Mathematics; Teaching Experience.

[1] Mestre em Ensino de Matemática (UEPA). Estudante de Doutorado em Educação Matemática (UFPA), Professora de Matemática da Educação Básica (SEDUC/PA), Belém, Pará, Brasil. E-mail: edna.yris.zeus@gmail.com.
[2] Doutor em Educação (UFRN). Professor Titular (UFPA), Belém, Pará, Brasil. E-mail: brand@ufpa.br.

INTRODUÇÃO

Este relato trata-se da apresentação dos resultados e experiências vivenciadas durante uma exposição de História da Matemática, em uma escola pública estadual, localizada no bairro do Guamá, em Belém do Pará. A idealizadora do evento e uma das autoras deste relato é doutoranda em Educação Matemática no Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), da Universidade Federal do Pará (UFPA), e, professora de Matemática do quadro efetivo da Secretaria de Educação do Estado do Pará (SEDUC-PA), sendo que em uma das escolas onde atua, além de professora, desenvolve a função de coordenadora da área de Matemática.

Os estudos realizados no Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino e História da Matemática (GEHEM), que se reúne às quintas-feiras no Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA (IEMCI), afetaram diretamente na desenvoltura laboral da professora que viu na função de coordenadora a oportunidade de expandir para toda a escola o uso da História da Matemática no ensino, o que desenvolvia em suas turmas do Ensino Médio, como forma de estimular o interesse e a curiosidade pela Matemática. Além disso, houve a oportunidade, também, de compartilhar com os colegas da equipe de Matemática da escola um trabalho articulado com o planejamento escolar de todas as séries, turnos e modalidades de ensino que funcionam na escola, incentivando adoção da História da Matemática como componente metodológica no ensino da Matemática, na perspectiva de Brandemberg (2021).

> Nos garantindo uma oportunidade de compartilhar uma matemática que historicamente se consolida como uma produção sociocultural humana, onde os aspectos do cotidiano, da escola e da academia ao se mesclarem, criam as possibilidades de comparação das estratégias de solução antigas com as atuais, identificando as vantagens e as desvantagens do uso de uma ou de outra (Brandemberg, 2021, p. 26).

Para criar essas possibilidades e estratégias, o trabalho dos professores se deteve em orientar os educandos na investigação e discussão sobre diferentes momentos da evolução da matemática, em diferentes épocas e por diferentes povos. Além dos conhecimentos matemáticos, buscou-se evidenciar aspectos sociais, culturais, econômicos e políticos das sociedades estudadas. A mensagem passada para os estudantes foi de que fariam uma viagem no tempo buscando explorar as circunstâncias e necessidades que levaram ao desenvolvimento de determinados objetos matemáticos e da linguagem matemática.

Com relação à escola, lócus da experiência, trata-se de uma escola de Ensino Médio regular e de Educação de Jovens e Adultos (EJA), que funciona em três turnos e conta com cerca de 1300 estudantes moradores da periferia de Belém-PA e com uma equipe de sete professores de matemática, que para cada turma ministram 5 aulas semanais de 45 minutos. Os estudantes apresentam muitas dificuldades de aprendizagem em Matemática, as quais os fazem demonstrar pouco interesse pela disciplina, culminando com baixo desempenho escolar. Além disso, a escola apresenta uma dificuldade de desenvolver ações pedagógicas coordenadas nos turnos da tarde e da noite, por motivos que não compõem o presente relato.

Em agosto de 2024, durante o planejamento pedagógico da escola, foi proposto pela coordenadora de Matemática e aprovado pela equipe da área e pela coordenação pedagógica uma ação pedagógica com o objetivo de envolver os alunos com os objetos de conhecimento a serem ministrados no terceiro bimestre letivo, de forma mais ativa e protagonista.

No período da exposição os estudantes produziram cartazes, esculturas, poemas, pinturas, vídeos, apresentações em *power point,* áudios, cenários teatrais, instrumentos de medição e de astronomia e apresentações orais. Concomitantemente ás aulas do bimestre, os professores orientaram os trabalhos em sala de aula. A coordenadora promoveu palestras com especialista da área de História da Matemática e organizou junto com a servidora da biblioteca da escola um conjunto de imagens afixadas nas janelas da biblioteca, que simulavam um percurso de viagem no tempo desde a pré-história até a modernidade, daí o título da exposição: Janelas do Tempo.

Diante do desafio de motivar os estudantes da escola em tela e de desenvolver a aprendizagem dos objetos de conhecimento por meio da História da Matemática, a experiência partiu da seguinte questão: *Quais os efeitos de uma exposição de História da Matemática para o ensino e aprendizagem de Matemática?* Para responder essa provocação estabeleceu-se como objetivo *investigar os efeitos de uma exposição de História de Matemática para professores e estudantes de uma escola pública estadual de Belém-PA.*

Ao compartilhar essa experiência deseja-se divulgar o aprendizado e resultados que a equipe de professores de matemática vivenciou, na tentativa de minimizar as dificuldades de aprendizagem de matemática por meio do uso da História da Matemática no ensino de Matemática.

Nas seções a seguir apresenta-se um detalhamento do embasamento teórico e metodológico da experiência, planejamento, execução e resultados.

O QUE NOS INSPIROU A ABRIR AS JANELAS DO TEMPO

Ao relatar essa experiência vivenciada em uma escola pública estadual de Belém-PA, se apresenta também os pressupostos teóricos e formativos da professora idealizadora da Exposição de História da Matemática: Janelas do tempo, realizada de agosto a outubro de 2024. Os estudantes que cursaram a séries do Ensino Médio nesse ano, tiveram sua aprendizagem do Ensino Fundamental afetada pela epidemia de COVID-19, em 2020 e 2021, quando a rede estadual do Pará ficou em modalidade remota de ensino. Assim, a tentativa de mitigar as dificuldades de ensino e aprendizagem em Matemática que a escola enfrentava, é importante dizer que a experiência buscou envolver a escola como um todo numa imersão na História da Matemática, considerando que

> Como professores de matemática, nossas **práticas** pedagógicas se organizam de forma intencional ou não para atender as expectativas educacionais exigidas por uma dada comunidade social. Nesse sentido, tais práticas em sua constituição, enfrentam um dilema social: sua representatividade e valoração advêm dos pactos sociais, isto é, das negociações e deliberações coletivas (Brandemberg, 2021, p. 24, grifo do autor).

Nesse sentido, a experiência só foi possível de ser realizada devido à colaboração e parceria da equipe gestora e pedagógica da escola, haja vista que acreditaram nessa ação inovadora, embora ao longo da execução tenham surgido muitas dúvidas sobre o que fazer e como fazer. Salienta-s que as inspirações para a idealização dessa ação pedagógica teve fundamentação nos estudos realizados no grupo de pesquisa GEHEM, onde se desenvolve pesquisas sobre Ensino e História da Matemática. Dentre as obras estudadas pelo grupo estão as de José D'Assunção Barros, as quais tratam sobre fontes históricas e Historiografia. Algo que inspirou significativamente a idealização da exposição foi o seguinte trecho:

> Até o atual momento, a Fonte Histórica é de fato o único recurso que permite ao historiador acessar uma época e uma sociedade que não estão mais presentificados.
> [...]
> Isso só poderá se modificar algum dia se surgir futuramente alguma tecnologia capaz de visualizar períodos no passado ("visores do tempo", por exemplo), ou se um dia forem descobertas formas de viajar através do tempo como nas "máquinas do tempo" que tem sido propostas pela imaginação dos autores de iniciação científica até lá, sem recursos como estes, que até o momento fazem parte da ficção, a Fonte Histórica tem sido ela mesma a única "máquina do tempo" disponível para o historiador. (Barros, 2022, p. 27).

Diante dessa inspiração fundamentada, buscou-se proporcionar na escola uma viagem no tempo por meio da História da Matemática. Misturou-se Matemática e História com criatividade e imaginação, aliado a boa vontade e colaboração. A professora responsável pela biblioteca, que é professora de geografia, interessou-se pela temática e sugeriu como espaço para exposição as janelas de seu espaço laboral, como ilustra o registro fotográfico.

Figura 1 – Espaço da exposição visual e dialogada.

Fonte: Exposição de História da Matemática: Janelas do Tempo (2024).

As janelas da biblioteca da escola como espaço de exposição visual e dialogada foi a ideia inicial do planejamento escolar para a área da Matemática. Depois a ideia foi se ampliando e tomando forma mais diversificada, consistente e colaborativa do planejamento a execução da ação pedagógica com uso de História da Matemática. Como indica De Sousa (2020, p.19), são muitos os argumentos para o uso de História da Matemática no Ensino, pois possibilita um trabalho pedagógico que promove: a autonomia intelectual; uma conscientização epistemológica; o desenvolvimento de pensamento crítico e de uma tomada de consciência e de avaliação de diferentes usos sociais da matemática; a apreciação da beleza da matemática; inclusão social via resgate de identidade cultural de grupos sociais discriminados no contexto escolar; seleção de tópicos, problemas ou episódios considerados motivadores da aprendizagem da matemática escolar.

Assim, o potencial pedagógico da História da Matemática para o ensino de Matemática fundamentou o desenvolvimento da experiência que se relata. Para melhor estruturar o relato de experiência, cumpre informar a perspectiva dessa apresentação.

> O Relato de experiência é um tipo de produção de conhecimento, cujo texto trata de uma vivência acadêmica e/ou profissional em um dos pilares da formação universitária (ensino, pesquisa e extensão), cuja característica principal é a descrição da intervenção. Na construção do estudo é relevante conter embasamento científico e reflexão crítica (Mussi; Flores; Almeida, 2021, p. 65).

Mussi, Flores e Almeida (2021, p.66) apresentam uma sugestão de roteiro para construção de relato de experiência, o qual se adaptou para o presente relato. O roteiro consiste em estabelecer elementos de cada seção do texto, norteados por perguntas facilitadoras para descrição. Na descrição de procedimentos, por exemplo, as perguntas norteadoras adaptadas foram: Quando (data)? Quanto tempo (horas, dias ou meses)? Quais são as características do local e onde fica situado geograficamente (cidade, estado e país)? Do que se trata a experiência? Como a atividade foi desenvolvida? Qual foi o tipo de intervenção realizada? Qual o perfil ou característica destas pessoas? O que foi usado como material na intervenção? O que foi feito? E como foi feito? Quais foram as formas e materiais utilizados para coletar as informações?

Algumas respostas para perguntas norteadoras foram supracitadas, de modo que tais perguntas foram explicitadas apenas para compreensão da metodologia de roteiro de relato de experiência adotado.

DESCRIÇÃO DOS PROCEDIMENTOS

Na primeira semana de agosto de 2024, aconteceu a jornada pedagógica e o planejamento escolar da instituição de ensino localizada no bairro do Guamá, em Belém do Pará, onde os alunos do Ensino Médio regular têm entre 15 e 18 anos de idade, nos turnos da manhã, tarde, e, os estudantes da Educação de Jovens e Adultos e de ensino regular no turno da noite. Na ocasião, a equipe de Matemática da escola reuniu-se com a direção e coordenação pedagógica para planejar as ações da área da Matemática para o segundo semestre de 2024. A coordenadora de área propôs que fosse desenvolvida uma ação articulada entre os objetos de conhecimentos a serem estudados e a História da Matemática, sendo que a orientação foi de que os professores orientassem as pesquisas realizadas pelos alunos e a modalidade de exposição por eles desenvolvida. Os objetos de conhecimento definidos e as sugestões de temas propostos para o bimestre estão organizados no quadro 1.

Quadro 1 – Objetos de conhecimentos e Temas da exposição.

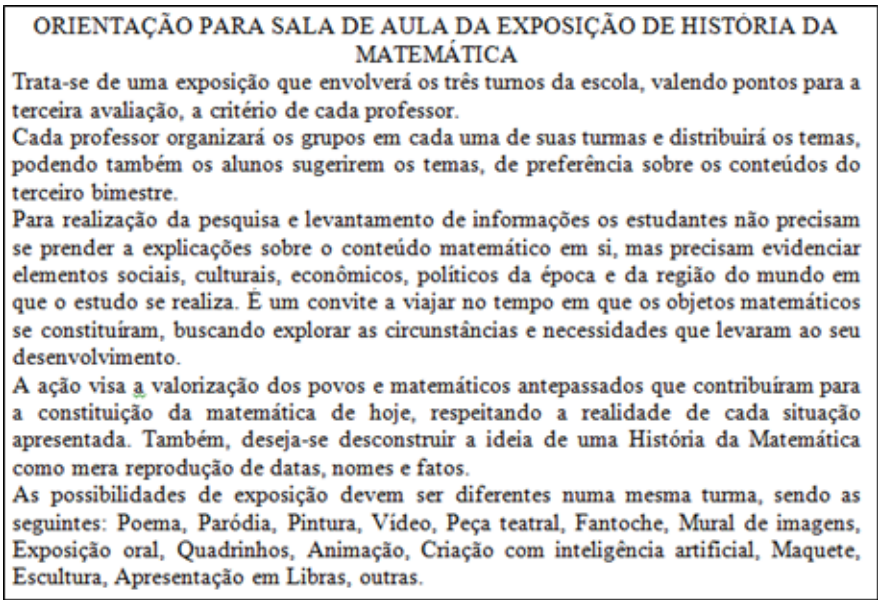
Série	Objetos de conhecimento	Temas da exposição
1º ano regular	- Função do 1°grau (Retomar ou concluir) - Função do 2° grau.	-Matemática agrária e comercial na Babilônia. -Papiro de Rhind (Ahmes) -Polêmicas sobre a origem da fórmula resolutiva da Equação do 2º grau. -Jean Bernoulli e Leibniz, origem da palavra função e sua primeira definição. -Aplicações do estudo de funções no Antigo Egito. -Aplicações do estudo de funções na Mesopotâmia (Sumérios). -Chu Shih-chieh e a técnica especial para a resolução da equação do 2° grau na obra Ssu-yüan yá-chien (Precioso espelho dos quatro elementos). - René Descartes e o método geométrico para obtenção da raiz positiva.

2º ano regular	- Funções Trigonométricas (Retomar ou concluir) - Análise Combinatória	- Al Battani (Ptolomeu de Bagdad) e as tábuas dos senos. -Johan Müller (Regiomontanus) e a "Tabulae Directionum". -Erastótenes de Cirene e a circunferência da Terra. -Hiparco de Niceia e a 1ª tábua trigonométrica. - François Viète e as fórmulas das funções trigonométricas. -Isaac Newton e o movimento dos planetas. - Euclides de Alexandria (325 a.C.–265 a.C.), que escreveu sobre os coeficientes do desenvolvimento do binômio. - Arquimedes de Siracusa e o quebra-cabeça "Stomachion" (estômago, em grego)–Raciocínio combinatório. - Bernard Frenicle de Bessye a análise combinatória dos quadrados mágicos.
3º ano regular	- Geometria Espacial (retomar e concluir) - Geometria Analítica	-Tokens do período neolítico, controle contábil por meio das formas geométricas. - Johanes Kepler e a mensuração do volume de barris de vinho. - O princípio de Cavalieri. - Isaac newton e o cálculo de volume e área. -Euclides e Apolônio: os antecedentes históricos da geometria analítica. - Pierre de Fermat e a Introdução aos Lugares Planos e Sólidos. -Renè Descartes e a introdução da Geometria Analítica.
1ª Etapa EJA	- Função do 1ºgrau (Retomar ou concluir) - Função do 2º grau.	-Matemática agrária e comercial na Babilônia. -Papiro de Rhind (Ahmes) -Aplicações do estudo de funções no Antigo Egito. -Aplicações do estudo de funções na Mesopotâmia (Sumérios).
2ª Etapa EJA	- Análise Combinatória	- Euclides de Alexandria (325 a.C.–265 a.C.), que escreveu sobre os coeficientes do desenvolvimento do binômio. - Arquimedes de Siracusa e o quebra-cabeça "Stomachion" (estômago, em grego)–Raciocínio combinatório. - Bernard Frenicle de Bessye a análise combinatória dos quadrados mágicos.

Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

Após a fase de proposição, foi necessário elaborar um roteiro norteador para os professores para melhor orientação dos trabalhos e para que fosse evitada a repetição de temas e formas de apresentação. A forma de apresentação foi o ponto chave e de maior entrave da execução da proposta, pois alguns professores da equipe e alunos tenderam para fazer apresentações com *power point* com reprodução de feitos, datas e nomes. Essa situação foi diligenciada pela coordenadora que elaborou para equipe um documento com as orientações do trabalho como segue:

Figura 2 – Roteiro para sala de aula.



ORIENTAÇÃO PARA SALA DE AULA DA EXPOSIÇÃO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Trata-se de uma exposição que envolverá os três turnos da escola, valendo pontos para a terceira avaliação, a critério de cada professor.

Cada professor organizará os grupos em cada uma de suas turmas e distribuirá os temas, podendo também os alunos sugerirem os temas, de preferência sobre os conteúdos do terceiro bimestre.

Para realização da pesquisa e levantamento de informações os estudantes não precisam se prender a explicações sobre o conteúdo matemático em si, mas precisam evidenciar elementos sociais, culturais, econômicos, políticos da época e da região do mundo em que o estudo se realiza. É um convite a viajar no tempo em que os objetos matemáticos se constituíram, buscando explorar as circunstâncias e necessidades que levaram ao seu desenvolvimento.

A ação visa a valorização dos povos e matemáticos antepassados que contribuíram para a constituição da matemática de hoje, respeitando a realidade de cada situação apresentada. Também, deseja-se desconstruir a ideia de uma História da Matemática como mera reprodução de datas, nomes e fatos.

As possibilidades de exposição devem ser diferentes numa mesma turma, sendo as seguintes: Poema, Paródia, Pintura, Vídeo, Peça teatral, Fantoche, Mural de imagens, Exposição oral, Quadrinhos, Animação, Criação com inteligência artificial, Maquete, Escultura, Apresentação em Libras, outras.

Fonte: Documentos da Exposição de História da Matemática: Janelas do Tempo (2024).

Na Figura 2 foi omitido o nome da escola e dos professores da equipe como critério de eticidade. As orientações não apresentaram rigidez nos procedimentos e serviu para articular e diversificar os trabalhos e pesquisas desenvolvidas pelos estudantes.

Após toda equipe de professores estar orientada, iniciou-se a execução, nos meses de agosto e setembro os estudantes se dedicaram na pesquisa e produção dos trabalhos para exposição. Paralelo a isso, a coordenadora contatou palestrantes, reservou os espaços para exposição, assessorou professores e estudantes com materiais e produziu material de divulgação impressa e digital para redes sociais.

Para atender a demanda de produção de vídeos, foi construída uma tenda para simulação de um planetário, para encenação de episódios da História da Matemática que envolveram astronomia, trigonometria e navegação, como ilustra a figura 3.

Figura 3 – Planetário/cenário.

Fonte: Registro da Exposição de História da Matemática: Janelas do Tempo (2024).

Os recursos financeiros utilizados na execução foram todos financiados pelos próprios professores e estudantes participantes da experiência, entretanto a equipe gestora deu liberdade de ação e disponibilizou os espaços e horários, sem comprometer o horário de aula de outras disciplinas e de outras atividades da escola.

As exibições do material produzido pelos alunos foram apresentadas em sala de aula ou ficaram expostos em diferentes espaços da escola durante os meses de setembro e outubro. Na biblioteca da escola, a coordenadora exibiu para as turmas dos três turnos a exposição visual e dialogada num percurso pelas janelas da biblioteca. Nas exibições havia também contribuições da professora

responsável pela biblioteca a respeito do tempo geológico da Terra e outras informações culturais, políticas, econômicas das sociedades destacadas nas Janelas do Tempo.

RESULTADOS

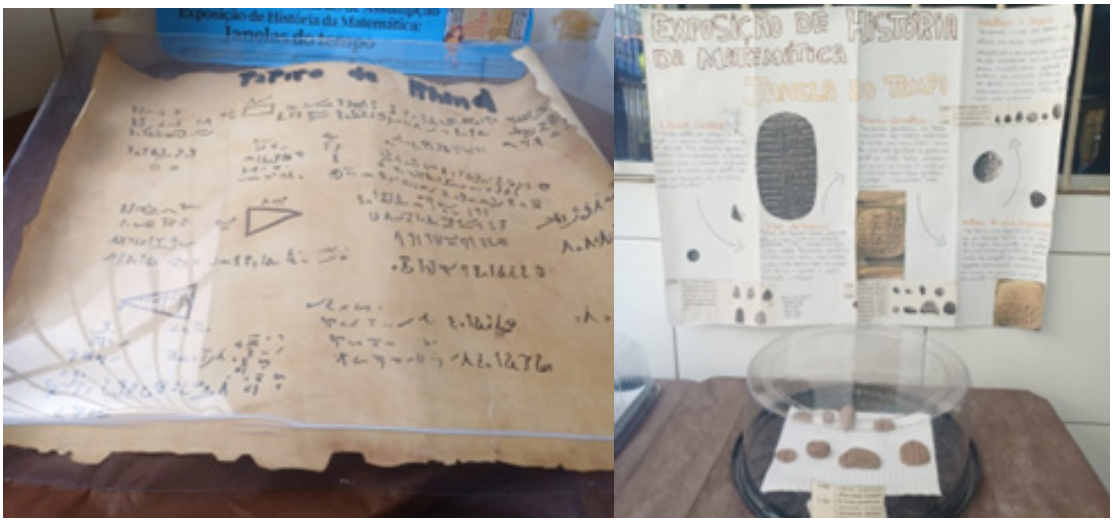
É relevante informar que no processo da experiência houve dificuldades de execução e de aceitação da proposta, tanto por parte dos estudantes, quanto por parte dos professores, demonstrando inicialmente baixo engajamento pela ação pedagógica. Assim, não houve um alcance total da ação pedagógica na escola, entratanto foi possível desenvolver atividades relativas a ação pedagógica nos três turnos, efeito considerado como ponto exitoso da experiência.

Como produto dos trabalhos, foram produzidos apresentações em *power point*, vídeos, cartazes, poemas, maquetes, pinturas, esculturas, apresentações orais, roteiros de peça teatral, cenário para encenação, instrumentos de astronomia e trigonometria e um mini museu de História da Matemática.

O mini museu de História da Matemática

A seguir, apresenta-se uma galeria de imagens dos produtos dos estudantes, que ficaram na expostos para apreciação da comunidade escolar.

Figura 4 – Réplica Papiro de Rhind e Tokens do Neolítico.



Fonte: Registros da Exposição de História da Matemática: Janelas do tempo (2024).

A figura 4 ilustra algumas réplicas costruídas pelos estudantes para retratar a Matemática de diferentes épocas e povos. A réplica do papiro de Rhind foi elaborada por um grupo de estudantes do 1º ano do ensino médio para explorarem o estudo de funções. Os tokens do período neolítivo foram esculpidos por estudantes do 2º ano do ensino médio para explicarem o surgimento das formas geométricas tridimensionais.

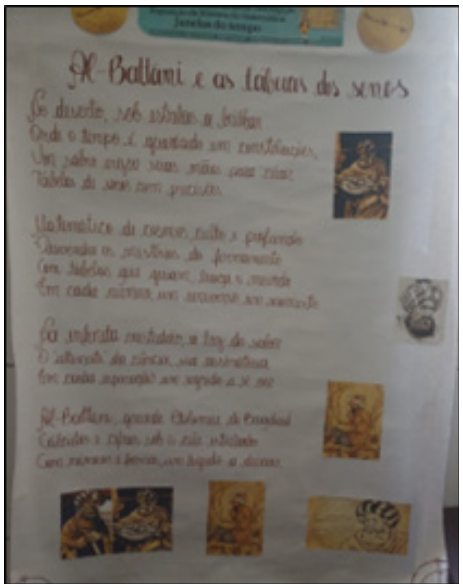
Figura 5 – Mini Museu de História da Matemática.

Fonte: Registros da Exposição de História da Matemática: Janelas do tempo (2024).

A figuras 5 ilustra os trabalhos produzidos pelos estudantes que ficaram expostos no mini museu de História da Matemática, no refeitório da escola. Os trabalhos são de diferentes turmas e orientados por diferentes professores. Ao expressarem o que aprenderam, os estudantes também evidenciaram as realidades sociais de diferentes épocas e civilizações, dando destaque a forma como a Matemática serviu a humanidade para resolver seus problemas.

Alguns poemas também foram elaborados pelos estudantes, dos quais dá-se destaque ao poema ilustrado na figura 8, pois as autoras, além de escreverem o poema, também o transformaram em cartaz para ficar exposto no mini museu.

Figura 6 – Poema sobre Al-Battani e suas contribuições sobre trigonometria.



Fonte: Registros da Exposição de História da Matemática: Janelas do tempo (2024).

Em todos os poemas elaborados pelos estudantes foi possível constatar o envolvimento deles com a pesquisa realizada, para fundamentar suas impressões sobre a temática em textos autorais. Protagonismo e sensibilidade conduziram a aprendizagem dos sujeitos da experiência.

As produções audiovisuais

Alguns grupos optaram por criar videos para a exposição digital, todos os roteiros foram por eles mesmos elaborados, com muita criatividade por meio dos conhecimentos apreendidos. Tais vídeos foram compartilhados nas redes sociais da escola e da coordenadora do evento.

Os temas para os quais os estudantes elaboraram seus roteiros foram os mais diversos, tais como: Johan Muller e a *tabulae directionum*; Bernoulli e Leibniz: como surgiu o nome *função*; Eratóstenes de Cirene e a circunferência da Terra. Os sujeitos criaram o roteiro e atuaram nesses vídeos em variados cenários, dentro e fora da escola.

O nível de capacidade de elaboração, argumentação e domínio de conteúdo desses estudantes fez com que jovens tímidos se revelassem verdadeiros atores e roteiristas. Superprodução fomentada com conhecimento, criatividade e baixo custo.

As Janelas do Tempo

Conforme explicado antes, a coordenadora elaborou um percurso com imagens que retratam diferentes épocas e civilizações para demonstrar a evolução da Matemática ao longo da história da humanidade. No percurso por oito janelas, a professora enfatizou como a Matemática foi responsável pela criação de diferentes tecnologias que foram sendo aprimoradas ao longo de gerações, tais como a numeração e as técnicas contábeis.

O diálogo estabelecido com as turmas aconteceu de formas diferentes, pois se buscou partir de indagações aos sujeitos sobre os conhecimentos que já possuíam sobre as sociedades destacadas, havendo uma troca e complementação de conhecimentos.

A figura 7 ilustra cada uma das janelas que serviram de roteiro para a viagem no tempo pela pré-história, mesopotâmia, antigo Egito, Grécia Antiga, Índia dos séculos XII ao XVI e sociedade Inca.

Figura 7 – Cartazes das Janelas do Tempo

Fonte: Registros da Exposição de História da Matemática: Janelas do tempo (2024).

A figura 7 apresenta cada um dos cartazes do roteiro da exposição principal da ação pedagógica realizada. Cada uma das janelas teve um cartaz em tamanho A3, os quais foram afixados nas janelas da biblioteca da escola como ilustrado na figura 1.

Os efeitos dessa parte da experiência, além de ter sido um momento de aprendizado, também, tornou-se uma oportunidade de formação, haja vista que nenhum dos professores participantes, inclusive a idealizadora, jamais haviam vivenciado uma prática de ensino envolvendo História da Matemática com essa magnitude.

De forma alternada com a apresentação das janelas, na biblioteca, os estudantes participaram de palestras ministradas por um professor especialista em História da matemática, da Universidade da Estadual do Pará (UEPA), cujo tema foi: *As matemáticas, das definições ás curiosidades e anedotas.*

Avalia-se que as dificuldades da equipe de Matemática em executar atividades de ensino com uso de História da Matemática possa ser uma fragilidade da formação inicial. Silva e Chaquiam (2023) investigaram a autoeficácia de professores em adotar História da Matemática em suas aulas, isto é, o sentimento de confiança que o indivíduo tem nas próprias habilidades e capacidades pessoais de realizar tais ações pedagógicas. Nessa pesquisa constatou-se autoeficácia negativa sobre o uso de História de Matemática no ensino na formação inicial de professores de Matemática quando não têm percepção de suas potencialidades para o ensino.

> Dentre os relatos mais recorrentes, evidenciou-se uma visão limitada a partir da finalidade da disciplina, visto que essa servisse apenas para relatar sobre fatos relacionados ao surgimento de conteúdos matemáticos, muito embora não soubessem como utilizá-la em sala de aula. (Silva; Chaquiam, 2023, p. 10).

Ao compartilhar a experiência com a Exposição de História da Matemática: Janelas do tempo, fez-se uma demonstração de que é possível realizar o uso eficaz e exitoso da História da Matemática no ensino de Matemática, e promover efeitos positivos em estudantes, na prática docente em Matemática, bem como na comunidade escolar. A experiência teve como desdobramento uma prática formativa para os professores de Matemática da escola, pois, a partir dessa ação tiveram a oportunidade de ampliar sua visão sobre as potencialidades didáticas e pedagógicas da História da Matemática no Ensino de Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O relato de experiência ora apresentado mobilizou uma escola pública estadual da periferia de Belém-PA para olhar para História e entender o significado da Matemática para a evolução da humanidade, como quem olha por uma janela para ver tempo passar diante dos olhos.

As dificuldades de ensino e aprendizagem e as de coordenação de atividades nos diferentes turnos e modalidades de Ensino Médio da escola lócus da pesquisa, no ano de 2024, foram mitigadas por meio de uma ação pedagógica com uso de História da Matemática como componente metodológica no ensino de Matemática.

Iniciativas como essa poderiam ganhar maior proporção na rede de ensino e alcançar mais estudantes com maior investimento da secretaria de educação e maior envolvimento de professores de Matemática.

Embora a experiência tenha partido da área de Matemática, também houve episódios de participação de professores das áreas de Linguagem, Ciências Naturais e Ciências Humanas, devido ao teor multidisciplinar da ação pedagógica vivenciada.

As possibilidades multifacetadas da exposição (poemas, vídeos, apresentações orais, *power points*, esculturas, pinturas, debates, vídeos, áudios, roteiros e cenários teatrais, cartazes, desenhos e outros) demonstraram a diversidade de possibilidades de promover protagonismo e engajamento estudantil, por meio de ações pedagógicas com História da Matemática.

Os estudantes e professores que participaram das diferentes vertentes da exposição demonstravam entusiasmo em participar e em saber mais, outro efeito positivo da experiência relatada.

A experiência também foi uma demonstração da importância de práticas educativas que aproximem a universidade e escola.

AGRADECIMENTOS

Os autores do presente relato de experiência de ensino agradecem a gestão escolar e a coordenação pedagógica da EEEM Alexandre Zacharias de Assumpção, em especial ao diretor Prof. Dr. Adriano Santos de Mesquita e a vice-diretora Cláudia Vilhena; aos professores da escola, em especial a professora Ana Lilia Silva dos Santos e o professor Jhonatan Santos; ao prof. Dr. Miguel Chaquiam, pelas palestras proferidas; ao Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino e História da Matemática (GEHEM).

REFERÊNCIAS

BARROS, José D'Assunção. **A historiografia como fonte histórica**. Editora Vozes. Petrópolis-RJ. 2022.

BRANDEMBERG, João Cláudio. Sobre textos históricos e o ensino de conteúdos matemáticos. In: PEREIRA, Ana Carolina Costa; MARTINS, Eugeniano Brito (Orgs.). **Investigações científicas envolvendo a História da matemática sob o olhar da pluralidade**. Editora CRV. Curitiba, 2021. p. 23-34.

DE SOUSA, Giselle Costa. **Aliança entre história da matemática e tecnologias via investigação matemática**: reflexões e práticas. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

MUSSI, Ricardo Franklin de Freitas; FLORES, Fábio Fernandes; ALMEIDA, Claudio Bispo de. Pressupostos para a elaboração de relato de experiência como conhecimento científico. **Revista Práxis Educacional.** v. 17, n. 48, p. 60-77, out./dez. 2021.

DE SOUSA, Giselle Costa. **Aliança entre história da matemática e tecnologias via investigação matemática**: reflexões e práticas. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

SILVA, Edna Machado: CHAQUIAM, Miguel. Contribuições da disciplina história da matemática àautoeficáciana formação inicial de professores. **Anais**. XV SNHM. Seminário Nacional de História da Matemática. Maceió-AL, 2023. Disponível em: < https://snhm.com.br/anais/article/view/66/8>. Acesso em: 20 dez. 2024.

Pôsteres

arte: leandro selister | @lselister

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Constituição do Acervo Histórico do Instituto de Física e Matemática da UFPel

Constitution of the Historical Collection of the Institute of Physics and Mathematics of UFPel

Caio Leandro Costa da Silva[1]
Universidade Federal de Pelotas – UFPEL

Diogo Franco Rios[2]
Universidade Federal da Bahia – UFBA

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar os primeiros resultados de uma pesquisa de iniciação científica relacionada com a constituição do Acervo Histórico do Instituto de Física e Matemática (IFM) da Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), instituto criado em 1969, quando da criação da própria UFPEL, no contexto da Reforma Universitária Brasileira realizada naqueles anos. A construção do Acervo Histórico articula vestígios documentais mantidos na sede do IFM, no Campus do Capão do Leão, e os documentos do Instituto preservados no Arquivo Geral da UFPEL, visando contribuir para a valorização da preservação documental do IFM e promover reflexões sobre o papel histórico do Instituto na formação de pesquisadores e professores de matemática. Como metodologia geral da constituição do Acervo do IFM realiza-se um trabalho de identificação, localização, organização, higienização e catalogação dos itens encontrados, com o intuito de preservá-los e disponibilizá-los posteriormente para a comunidade acadêmica. Como metodologia deste trabalho, realizamos um levantamento geral dos documentos existentes e, a partir disso, foram feitas algumas reflexões e classificações do material encontrado, como o porquê de estarem onde estão, qual seria a relevância deles agora, julgar se poderão ser incluídos no acervo do IFM. Como resultado, apresentamos dados desse levantamento geral feito tanto no Acervo Geral quanto nos documentos disponíveis no Campus do Capão do Leão, trazendo uma primeira classificação dos conjuntos de documentos existentes e, também, considerações a respeito de um documento encontrado que merece destaque por ser o único documento encontrado até o momento que traz vestígios referentes a disciplinas de Matemática nos primeiros anos do IFM: uma pasta contendo folhas de diários de classe em anos próximos à 1970, que se encontra, assim como a maioria dos documentos, em estado de preservação delicada, devido às condições precárias de armazenamento, porém, uma pasta motivadora para o projeto, deixando-nos cada vez mais interessados em investigar.

Palavras-chave: Acervo Histórico; Universidade Federal de Pelotas; Instituto de Física e Matemática; História da Matemática; Preservação Documental.

ABSTRACT

This study aims to present the initial results of a scientific initiation research project related to the constitution of the Historical Collection of the Institute of Physics and Mathematics (IFM) at the Federal University of Pelotas (UFPel). The institute was established in 1969, alongside the foundation of UFPel itself, within the context of the Brazilian University Reform carried out in those years. The construction of the Historical Collection brings together documentary traces preserved at the IFM headquarters, located at the Capão do Leão Campus, and documents from the Institute stored in UFPel's General Archive. The objective is to contribute to the appreciation of IFM's documentary preservation and to foster reflections on the historical role of the Institute in training researchers and mathematics teachers. The general methodology for constituting the IFM Collection involves identifying, locating, organizing, cleaning, and cataloging the items found, aiming at their preservation and subsequent availability to the academic community. For this study, we conducted a general survey of existing documents and, based on this, carried out reflections and classifications regarding the materials found—examining why they are located where they are, their relevance today, and whether they should be included in the IFM collection. As a result, we present data from this general survey conducted both in the

[1] Licenciando em Matemática pela Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: caiosilva140602@gmail.com.

[2] Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia (UFBA)/Universidade Estadual de Feira da Santana (UEFS). Docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil. E-mail: riosdf@ufba.br.

General Archive and among the documents available at the Capão do Leão Campus, providing an initial classification of the existing document sets. Additionally, we highlight a particular document of significance—the only one found so far containing traces related to Mathematics courses in the early years of IFM: a folder containing class journal sheets from around 1970. This document, like most others, is in a fragile state of preservation due to poor storage conditions. However, this discovery has been a strong motivator for the project, further fueling our interest in investigation.

Keywords: Historical Collection; Federal University of Pelotas; Institute of Physics and Mathematics; History of Mathematics; Document Preservation.

REFERÊNCIAS

BÚRGIO, Elisabete Zardo; DALCIN, Andréia; DA SILVA, Circe Mary Silva; RIOS, Diogo Franco; PEREIRA, Luiz Henrique Ferraz; FISCHER, Maria Cecília Bueno. (orgs.). **Saberes matemáticos nas escolas normais do Rio Grande do Sul (1889–1970).** 2020, São Leopoldo, p. 13-17; p. 69-91.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo; FISCHER, Maria Cecília Bueno; RIOS, Diogo Franco; SIQUEIRA FILHO, Moyses Gonçalves; WIELEWSKI, Gladys Denise; FRANÇA, Iara da Silva; SILVA, Martha Raíssa Iane Santana; BARROS, Silvia de Castro; PEZZIN, Ana Claudia; PATROCÏNIO, Margarida Célia; MELLO, Mélany dos Santos. A matemática na formação de normalistas. In: PINTO, Neuza Bertoni; VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Saberes matemáticos em circulação no Brasil dos documentos oficiais às revistas pedagógicas, 1890-1970**. São Paulo: Livraria da Física, 2016, p. 187-243.

SANCHES, Teresa. Autoritária e modernizante, a reforma universitária completa 50 anos. **Notícias da Universidade Federal de Minas Gerais.** Minas Gerais, 2018. https://ufmg.br/comunicacao/noticias/autoritaria-e-modernizante-reforma-universitaria completa-50-anos

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Geometria, Egito e Número de Ouro: oficina de desenho geométrico da grande pirâmide

Geometry, Egypt and the Golden Number: geometric drawing workshop of the great pyramid

Carlos Eduardo Massuquetto Zanon[1]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Ana Cristina Corrêa Munaretto[2]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

RESUMO

Outrora gigantescos túmulos construídos pelos egípcios a 4500 anos para abrigar os restos mortais de seus faraós falecidos Quéops, Quéfren e Miquerinos, as Pirâmides de Gizé, localizadas no Platô de Guiza, agora são um Patrimônio Mundial da UNESCO e uma das Sete Maravilhas do Mundo. Utilizando geometria de régua e compasso, os arquitetos do Antigo Egito desenvolveram métodos específicos para o desenho e a execução desta obra colossal. Este trabalho relata a oficina apresentada no evento IV Gaussemana, a semana acadêmica de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Curitiba, onde foi realizada uma pesquisa a respeito da construção e da história da Grande Pirâmide do Egito, da matemática envolvida na sua estrutura e da sua relação com o Número de Ouro. Com base neste estudo, foi ministrada uma oficina durante o evento, na qual os inscritos acompanharam as instruções dadas e desenharam o retângulo áureo e, com base nele, a Grande Pirâmide de Gizé.

Palavras-chave: Geometria; Número de Ouro; Pirâmide; Desenho Geométrico; História.

ABSTRACT

Once gigantic tombs built by the Egyptians 4,500 years ago to house the remains of their deceased pharaohs Khufu, Khafra, and Menkaure, the Pyramids of Giza, located on the Giza Plateau, are now a UNESCO World Heritage Site and one of the Seven Wonders of the World. Using ruler and compass geometry, the architects of Ancient Egypt developed specific methods for the design and execution of this colossal work. This work reports on the workshop presented at the IV Gaussemana event, the academic week of Mathematics at the Federal Technological University of Paraná, Curitiba campus, where research was carried out regarding the construction and history of the Great Pyramid of Egypt, the mathematics involved in its structure and its relationship with the Golden Number. Based on this study, a workshop was held during the event, in which the participants followed the instructions given and drew the golden rectangle and based on it, the Great Pyramid of Giza.

Keywords: Geometry; Golden Number; Pyramid; Geometric Drawing; History.

REFERÊNCIAS

BRAGA, M. O. L. Pirâmides de Gizé. **História do Mundo**, [S. l.], p. 1 a 2, 1 jan. 2023. Disponível em: https://www.historiadomundo.com.br/curiosidades/piramide-de-gize.htm. Acesso em: 18 abr. 2024.

JUNIOR, E. Pirâmides do Egito: um símbolo de prosperidade e força. **Revista Oeste**, [S. l.], p. 1 a 2, 26 mar. 2023. Disponível em: https://revistaoeste.com/mundo/piramides-do-egito-um-pouco-sobre-essas-construcoes/. Acesso em: 18 abr. 2024.

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: carlosz@alunos.utfpr.edu.br.

[2] Doutora em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Professora na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus de Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: munaretto@utfpr.edu.br.

LIVIO, Mario. **Razão áurea**: a história de FI, um número surpreendente. Rio de Janeiro, RJ: Record, 2006.

@Phant0m_un1verse. Finding the 51° 50‘ slope angle of the Great Pyramid using the Golden Ratio Rectangle: The Great Pyramid also squares the circle, and contains the Earth and Moon size ratio in its geometry. Instagram, 3 fev. 2023. Disponível em: https://www.instagram.com/reel/CoNoI-mteGD/?igsh=ZWJncmRzODRnZXdr. Acesso em: 24 abr. 2024.

SILVA, A. J. **O número de ouro na educação básica**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)–Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos–SP, 2018. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6903545. Acesso em: 20 abr. 2024.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

História em quadrinhos como recurso didático para o ensino do sistema de numeração decimal

Comic books as a teaching resource for the decimal numbering system

Matheus Eduardo Olimpio Sabino[1]
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS

RESUMO

Este projeto tem como objetivo compreender potencialidades da história em quadrinhos no processo de ensino do sistema de numeração decimal para estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esta pesquisa parte da necessidade de entender os processos envolvidos no ensino da matemática no ensino básico. Assim, pretende-se responder ao seguinte questionamento: de que maneira um guia didático digital auxiliaria na inserção de histórias em quadrinhos no processo de ensino do sistema de numeração decimal para estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental? Nesse sentido, este trabalho será desenvolvido a partir de uma pesquisa bibliográfica, em que documentos serão analisados a fim de reunir informações sobre o uso da história em quadrinhos na educação, bem como, os aspectos atrelados em sua inserção na sala de aula de maneira mais significativa. Posteriormente, será investigado como os professores da referida etapa escolar abordam o sistema de numeração decimal aos estudantes, e para essa análise, será empregado o uso da História Oral como procedimento metodológico, visto que, esta permite um enriquecimento das experiências compartilhadas pelos professores durante as entrevistas. Ressalta-se ainda, que este trabalho será desenvolvido em um processo contínuo com os docentes entrevistados. Como resultado desta pesquisa, pretende-se elaborar um guia didático digital, no qual será produzido por meio de uma plataforma *on-line*. Neste produto educacional, serão apresentados tutoriais do processo de criação de histórias em quadrinhos, possibilitando que o docente utilize-o juntamente com seus alunos, de modo a consolidar a aprendizagem do sistema de numeração decimal, reunindo assim, conceitos interdisciplinares, como a arte, a linguagem, a história e a matemática.

Palavras-chave: História na Matemática; Material Pedagógico; Ensino Fundamental; HQ.

ABSTRACT

This project aims to understand the potential of comic books in teaching the decimal numeral system to students of elementary education. This research arises from the need to understand the processes involved in teaching mathematics at the basic education level. The study seeks to answer the following question: how could a digital teaching guide support the integration of comic books into the process of teaching the decimal numeral system to students of elementary education? In this context, the work will be developed based on bibliographic research, where documents will be analyzed to gather information on the use of comic books in education, as well as the aspects related to their integration into the classroom in a more meaningful way. Subsequently, the study will investigate how teachers in this educational stage address the decimal numeral system with students. Oral History will be employed as a methodological procedure, as it allows for the enrichment of the experiences shared by teachers during interviews. It should also be noted that this work will be developed as an ongoing process with the interviewed teachers. As a result of this research, the aim is to develop a digital teaching guide, which will be produced through an online platform. This educational product will present tutorials on the process of creating comic books, enabling teachers to use it with their students to consolidate the learning of the decimal numeral system, thus integrating interdisciplinary concepts such as art, language, history, and mathematics.

Keywords: History in Mathematics; Pedagogical Material; Elementary School; Comics.

REFERÊNCIAS

CALAZANS, Flávio. **Histórias em quadrinhos na escola**. São Paulo: Paulus, 2004.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

[1] Mestrando no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Matemática, Dourados, Mato Grosso do Sul, Brasil. E-mail: omatheus.eduardo@outlook.com.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Uma breve apresentação da *L'Álgebra* de Rafael Bombelli

A brief presentation of *L'Álgebra* by Rafael Bombelli

Bernadete Barbosa Morey[1]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte–UFRN

Ana Paula Pereira do Nascimento Silva[2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte–IFRN

RESUMO

O presente trabalho é recorte de uma tese de doutorado em curso que visa desenvolver um modelo de análise que ultrapassa o relato histórico tradicional, abordando questões epistemológicas frequentemente negligenciadas. Fundamentado na Teoria da Objetivação de Luis Radford, o estudo de baseia nessa abordagem teórica como guia para a análise da *L'Algebra* de Rafael Bombelli, explorando a construção dos conceitos algébricos e suas implicações epistemológicas. A origem da obra ainda apresenta aspectos não totalmente esclarecidos, especialmente no que diz respeito à data de sua redação original (manuscrito). Na carta dedicatória dirigida a Monsenhor Rufini presente na primeira edição impressa, Bombelli menciona ter composto a obra durante o período em que as obras no Vale de Chiana estavam quase abandonadas, e que contou com a colaboração de seu concidadão Francesco Maria Salando e de seu irmão Ercole. Publicada em 1572 em Bolonha, a obra continha apenas três dos cinco livros presentes no manuscrito. Os dois últimos volumes, que abordam geometria e álgebra geométrica, permaneceram perdidos até 1923, quando o historiador Ettore Bortolotti localizou dois manuscritos inéditos em Bolonha, um dos quais inclui os cinco livros. A obra *L'Algebra* de Rafael Bombelli é um marco fundamental na história da álgebra renascentista, pois introduz conceitos inovadores que impactaram o desenvolvimento da disciplina, como a solução de equações cúbicas irredutíveis e a utilização de raízes quadradas de números negativos. Bombelli teve um papel crucial na sistematização do conhecimento algébrico da época, organizando-o de maneira progressiva e sem lacunas, o que permitiu um avanço significativo na compreensão e aplicação das técnicas algébricas. Assim sendo, essa obra reflete o contexto intelectual e científico da Itália do século XVI, evidenciando a transição e evolução das práticas matemáticas durante o Renascimento, período de intensa transformação cultural e científica, que contribuiu para a construção das bases da álgebra moderna.

Palavras-chave: Matemática Renascentista Italiana; Rafael Bombelli; *L'Algebra*.

ABSTRACT

This paper is an excerpt from an ongoing doctoral thesis that aims to develop an analytical model that goes beyond the traditional historical narrative, addressing epistemological issues that are often neglected. Based on Luis Radford's Theory of Objectivation, the study relies on this theoretical approach as a guide for analyzing *L'Algebra* by Rafael Bombelli, exploring the construction of algebraic concepts and their epistemological implications. The origins of the work still present aspects that are not fully clarified, particularly regarding the date of its original composition (manuscript). In the dedicatory letter addressed to Monsignor Rufini, included in the first printed edition, Bombelli mentions that he composed the work during a period when the works in the Chiana Valley were almost abandoned, and that he received the collaboration of his fellow citizen Francesco Maria Salando and his brother Ercole. Published in 1572 in Bologna, the work initially contained only three of the five books present in the manuscript. The last two volumes, dealing with geometry and geometric algebra, remained lost until 1923, when historian Ettore Bortolotti located two unpublished manuscripts in Bologna, one of which included all five books. *L'Algebra* by Rafael Bombelli is a fundamental milestone in the history of Renaissance algebra, as it introduced innovative concepts that impacted the development of the discipline, such as the solution of irreducible cubic equations and the use of square roots of negative numbers. Bombelli played a crucial role in systematizing the algebraic knowledge of his time, organizing it progressively and without gaps, which allowed a significant advancement in the understanding and application of algebraic techniques. Therefore, this work reflects the intellectual and scientific context of 16th-century Italy, highlighting the transition and evolution of

[1] Doutora pela Universidade Amizade dos Povos (RUDN). Professora da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: bernadetemorey@gmail.com.

[2] Mestre pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN), São Paulo do Potengi, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: paulinha_lu2@yahoo.com.br.

mathematical practices during the Renaissance, a period of intense cultural and scientific transformation that contributed to the foundations of modern algebra.

Keywords: Italian Renaissance Mathematics; Rafael Bombelli; *L'Algebra*.

REFERÊNCIAS

BOMBELLI, Rafael. **L'Algebra Prima edizione Integrale** Introduzione di U. Fori – Prefazione di E. Bortolotti, 1ª edição integral, Feltrini Editore Milano, 1966.

BOMBELLI, Rafael. **L'algebra–parte maggiore dell'arimetica divisa in tre libri.** Bologna: Giovanni Rossi, 1572.

BOMBELLi, Rafael. **L'algebra–Opera**. Bologna: Giovanni Rossi, 1579.

FULVI, Valeria. **L'Algebra di Rafael Bombelli:** Nuova trascrizione e commento. 2012. 608f. Dissertação (Curso de Mestrado em Matemática) – Universidade de Bolonha, Faculdade de Ciências Matemáticas, Físicas e Naturais, Bolonha, 2012.

RADFORD, L. **On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics:** Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, Forthe Learning of Mathematics**,** 1997, p. 26-33.

RADFORD, L. Culture and cognition: Towards an anthropology of mathematical thinking. In: ENGLISH, L. (Ed.). **Handbook of International Research in Mathematics Education**, 2. ed. New York: Routledge, Taylor and Francis, 2008, p.439–464.

RADFORD, L. Cultura e historia: dos conceptos dificiles y controversiales en aproximaciones contemporaneas en la educación matemática. In: MENDES, Iran Abreu; SILVA, Carlos Aldemir Farias da (Eds.). **Cultura, Práticas Sociais e Educação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

RADFORD, L. **Teoria da Objetivação:** uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem matemática; tradução Bernadete B. Morey e Shirley T Gobara. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Perspectiva na obra *Cônicas* de Apolônio: traçando caminhos e tradições

Perspective in Apollonius' *Conics*: tracing paths and traditions

Pã Montenegro[1]
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

RESUMO

O trabalho apresenta o projeto de doutoramento que visa investigar a obra Cônicas de Apolônio de Perga, com foco nas inovações que ele trouxe ao estudo das seções cônicas, observando que todas podem ser obtidas a partir de um mesmo cone qualquer, e não apenas de um corte único de cones retos, ou seja, varia-se o ângulo da seção, não mais o cone. O objetivo principal é analisar como Apolônio tratou a questão da perspectiva em suas seções cônicas, inclusive estabelecendo uma nomenclatura que permanece até hoje. A pesquisa se justifica pela escassez de estudos acadêmicos sobre a História da Matemática Grega no Brasil, especialmente no que diz respeito a Apolônio. A metodologia proposta inclui uma análise bibliográfica de fontes primárias e secundárias, com ênfase na obra de Apolônio e em comentadores como Eutócio e Papo. Além disso, o estudo pretende examinar a questão da perspectiva no contexto grego, como a relação entre matemática e arquitetura, utilizando a obra de Vitrúvio como referência para entender a terminologia e as práticas de perspectiva em construções. Os resultados esperados incluem uma compreensão mais profunda da obra de Apolônio, traçando as práticas matemáticas do século II AEC e a recepção imediata desses estudos dentro da matemática grega.

Palavras-chave: Cônicas; Apolônio de Perga; Perspectiva; Matemática Grega; História da Matemática.

ABSTRACT

This work presents the doctoral research project that aims to investigate the books of Conics, from Apollonius of Perga, focusing on the innovations he introduced to the study of conic sections. Notably, he demonstrated that all conic sections can be obtained from a single arbitrary cone rather than solely from a unique cut of right cones—meaning that the section's angle is varied rather than the cone itself. The main goal is to analyze how Apollonius addressed the issue of perspective in his conic sections, including the establishment of a designation that remains in use to this day. This research is justified by the lack of academic studies on the History of Greek Mathematics in Brazil, particularly concerning Apollonius. The proposed methodology includes a bibliographic analysis of primary and secondary sources, with an emphasis on Apollonius' work and commentators such as Eutocius and Pappus. Furthermore, the study aims to examine the concept of perspective in the Greek context, particularly the relationship between mathematics and architecture. Vitruvius' works will serve as a reference to understand the terminology and perspective techniques used in construction. The expected outcomes include a deeper understanding of Apollonius' work, tracing the mathematical practices of the 2nd century BCE and the immediate reception of these studies within Greek mathematics.

Keywords: Conics; Apollonius of Perga; Perspective; Greek Mathematics; History of Mathematics.

REFERÊNCIAS

APOLÔNIO DE PERGA. **Apollonii Pergaei**: Quae Graece Exstant. Org. I. L. Heiberg. 2 Volumes. Leipzig: Teubner. 1891.

FEDERSPIEL, Michel. Notes critiques sur le livre I des Coniques d'Apollonius de Pergè. **Revue des Études Grecques**. Tomo CVII, p. 203-218. 1994.

FRIED, M. N.; UNGURU, Sabetai. Apollonius of Perga's Conica: Text, Context, Subtext. **Mnemosyne Supplement**, n. 222, Leiden: Brill. 2001.

[1] Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ). Doutorando em Ensino e História da Matemática e da Física no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: p.montenegro@ufrj.br.

HEATH, Thomas Little. **A History of Greek Mathematics**. Volume II. Nova Iorque: Dover Publications, Inc. 2018 [1921]

VER EECKE, Paul. **Les Coniques d'Apollonius de Perge**: Œuvres traduites pour la première fois du grec en français. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. 1963.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Tratado sobre a determinação do seno de 1°

Treatise on the determination of the sine of 1°

Ana Paula Pereira do Nascimento Silva[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte–IFRN

Bernadete Barbosa Morey[2]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte–UFRN

RESUMO

O trabalho apresenta um estudo matemático acerca do Tratado sobre a determinação do seno de 1° (Risala fi ishikhraj jaib daraja wahida). Esse tratado foi escrito originalmente em árabe pelo astrônomo islâmico Salah al-Din Musa Pasha (1364-1436), também conhecido por Kazi-Zade ar-Rumi. Nossa intenção é apresentar à comunidade acadêmica brasileira um período da história – e os trabalhos surgidos naquele contexto – que ainda carece de publicações: a matemática islâmica medieval. O objetivo do referido tratado era alcançar uma maior precisão para o sen(1°); sua motivação surgiu da necessidade de aprimorar as tabelas astronômicas, em função dos avanços nos estudos astronômicos. O tratado de ar-Rumi sobre a determinação do seno de 1° investiga a resolução de equações cúbicas, fundamentando-se no método desenvolvido por al-Kashi, o qual é atualmente conhecido como método do ponto fixo (iterativo linear). Utilizando o teorema de Ptolomeu e regras aritméticas, ar-Rumi deduziu uma equação cúbica do tipo $x = (p+x^3)/q$, que determina o valor da corda de 2° e consequentemente o seno de 1°. Assim, para o desenvolvimento deste trabalho, tomamos por base Aaboe (1954, 2002), Azarian (2019) e a tradução do russo para o português de ar-Rumi (1960) que está em andamento. Observamos que os conhecimentos matemáticos mobilizados por Kazi-Zade e al-Kashi para alcançar uma aproximação mais precisa para o sen(1°) oferecem um método de resolução de equações cúbicas que ainda é pouco explorado pelos estudantes, incluindo aqueles da Licenciatura em Matemática. Portanto, esperamos que o estudo matemático desta obra possibilite a utilização de uma fonte original em sala de aula, permitindo a exploração de conteúdos como mudança de base, operações com números em diferentes bases numéricas e o método iterativo como uma alternativa para a resolução de equações.

Palavras-chave: História da Matemática Medieval Islâmica; Kazi-Zade ar-Rumi; Tratado sobre a determinação do seno de 1°.

ABSTRACT

This paper presents a mathematical study on the *Treatise on the Determination of the Sine of 1°* (Risala fi ishikhraj jaib daraja wahida). This treatise was originally written in Arabic by the Islamic astronomer Salah al-Din Musa Pasha (1364-1436), also known as Kazi-Zade ar-Rumi. Our aim is to introduce to the Brazilian academic community a period of history — and the works emerging from that context — that still lacks publications: medieval Islamic mathematics. The goal of the mentioned treatise was to achieve greater accuracy for sin(1°); its motivation arose from the need to improve astronomical tables due to advancements in astronomical studies. Ar-Rumi's treatise on the determination of the sine of 1° investigates the resolution of cubic equations, based on the method developed by al-Kashi, which is currently known as the fixed-point method (linear iterative). Using Ptolemy's theorem and arithmetic rules, ar-Rumi derived a cubic equation of the form $x = (p+x^3)/q$, which determines the value of the chord of 2° and consequently the sine of 1°. Therefore, for the development of this work, we based our research on Aaboe (1954, 2002), Azarian (2019), and the ongoing Portuguese translation of ar-Rumi's work from Russian (1960). We observe that the mathematical knowledge mobilized by Kazi-Zade and al-Kashi to achieve a more precise approximation for sin(1°) offers a method for solving cubic equations that is still underexplored by students, including those in Mathematics Education programs. Thus, we hope that the mathematical study of this work will enable the use of an original source in the classroom, allowing the exploration of topics such as base change, operations with numbers in different numerical bases, and the iterative method as an alternative for solving equations.

Keywords: History of Medieval Islamic Mathematics; Kazi-Zade ar-Rumi; Treatise on the Determination of the Sine of 1°.

[1] Mestre pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN), São Paulo do Potengi, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: paulinha_lu2@yahoo.com.br.

[2] Doutora pela Universidade Amizade dos Povos (RUDN). Professora da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. E-mail: bernadetemorey@gmail.com.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. 2º ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

AABOE Asger. **Al-Kashi's Iteration Method for the Determination of Sin 1°**, Scripta Mathematica, Vol.20, p. 24-29, 1954.

AZARIAN, M. K., An Overview of Mathematical Contributions of Ghiyath al-Dın Jamshıd Al--Kashı [Kashanı], **Mathematics Interdisciplinary Research**. [s.l.], v.4, p. 11 – 19, 2019. https://mir.kashanu.ac.ir/article_88765.html

AZARIAN, Mohammad K. **A study of Risala al-watar wa'l Jaib** ("The treatise on the chord and sine"), Forum Geom. P. 229 – 242, 2015.

BRUMMELEN, Van Glen. **The mathematics of the heavens and the earth: the early history of trigonometry.** New Jersey: Princeton University Press, 2009.

MOREY, Bernadete. **O início da historiografia em russo sobre a matemática islâmica**. Anais do XII Seminário Nacional de História da Matemática–SNHM. 2017.

PTOLOMEU. **Almagest.** Traduzido por G. J. Toomer. Princeton: Princeton University Press, 1998.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Uma visão histórica do cálculo: a guerra entre Newton e Leibniz

A historical view of calculus: the war between Newton and Leibniz

Fernando Rodrigo Rafaeli[1]
Instituto de Matemática e Estatística–UFU

Nicollas Luduvichack Barbosa Amaral[2]
Instituto de Física – UFU

RESUMO

O cálculo, como um campo formalmente desenvolvido, começa no século XVII com as contribuições fundamentais de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz que, de forma independente, desenvolveram os conceitos de derivada e integral. Antes desse período, o conceito de movimento e variação já era discutido por matemáticos da Antiguidade, como os gregos, apesar disso a matemática moderna ainda não havia desenvolvido as ferramentas necessárias para lidar com essas ideias de maneira sistemática. Arquimedes (século III a.C.) usou métodos que antecipavam ideias de integração e de soma infinitesimal, como a técnica da exaustão. No Renascimento, com a ascensão do pensamento científico e da geometria analítica, principalmente com René Descartes e Pierre de Fermat, começaram a surgir os conceitos e as ferramentas para uma maior formalização do cálculo. Já no final desse século, enquanto Newton, em Cambridge, desenvolvia o conceito de *fluxões*, que mais tarde foi interpretado como a derivada, Leibniz, na Alemanha, trabalhava em um sistema de cálculo. A abordagem de Leibniz era mais formal e suas notações eram mais sistemáticas, o que tornou seu método mais acessível para outros matemáticos. A grande controvérsia entre Newton e Leibniz é conhecida como a Guerra do Cálculo: ambos os matemáticos acusaram um ao outro de plágio. Nossa problemática está inspirada nessa controvérsia, em como elaborar uma abordagem junto à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I que explore a plausibilidade dos argumentos de cada um dos protagonistas (a história interna do conceito de integral). Nesse sentido, temos como objetivo articular as diversas aproximações do conceito de área ao longo da história, formando uma sequência didática para o aprendizado nessa disciplina. Nos apoiamos em uma metodologia qualitativa de cunho documental de fontes secundárias e de referência. Nossos resultados apontam para um maior envolvimento dos estudantes quando comparado com os cursos centrados em livros-texto usuais que abordam esse conteúdo.

Palavras-chave: História do Cálculo; Leibniz; Newton.

ABSTRACT

The calculus, as a formally well-developed field, began in the 17th century with the fundamental contributions of Isaac Newton and Gottfried Wilhelm Leibniz, who independently developed the concepts of derivatives and integrals. Before this period, the concept of motion and variation had already been discussed by ancient mathematicians, such as the Greeks; however, modern mathematics had not yet developed the necessary tools to systematically address these ideas. Archimedes (3rd century BC) employed methods that anticipated ideas of integration and infinitesimal summation, such as the method of exhaustion. During the Renaissance, with the rise of scientific thought and analytic geometry, particularly through the works of René Descartes and Pierre de Fermat, the concepts and tools for a more formal development of calculus began to emerge. By the end of the century, while Newton in Cambridge was developing the concept of fluxions, later interpreted as the derivative, Leibniz in Germany was working on a system of calculation. Leibniz's approach was more formal, and his notations were more systematic, which made his method more accessible to other mathematicians. The major controversy between Newton and Leibniz is known as the Calculus War: both mathematicians accused each other of plagiarism. Our research is inspired by this controversy, particularly in how to develop an approach within the Differential and Integral Calculus course that explores the plausibility of the arguments from each of the protagonists (the internal history of the integral concept). In this regard, our goal is to articulate the various historical approaches to the concept of area, constructing a didactic sequence for teaching within this discipline. We rely on a qualitative methodology based on documentary sources and secondary reference materials. Our findings indicate a higher level of student engagement compared to courses focused on standard textbooks that cover this content.

Keywords: History of calculus; Leibniz; Newton.

[1] Doutor em Matemática Aplicada (Unicamp). Docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. E-mail: rafaeli@ufu.br.
[2] Graduando em Licenciatura Física da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil. E-mail: nluduvichack@ufu.br.

REFERÊNCIAS

BARDI, Jason Socrates. **A guerra do cálculo**. Rio de Janeiro: Record, 2008.

BARON, Margaret E.; BOS, Henk Jan Maarten. **Curso de história da matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. UnB., 1985.

HEATH, Thomas L. **The works of Archimedes.** Dover, 2002.

BRANDEMBERG, João Cláudio. **Uma história da integral:** de Arquimedes a Lebesgue. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática –** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar-Brasil, 2012.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Logaritmos: uma conexão entre Michael Stifel e John Napier

Logarithms: a connection between Michael Stifel and John Napier

André Marques dos Santos[1]
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Unesp

RESUMO

Durante os séculos XVI e XVII, a Europa testemunhou um crescimento significativo no comércio, nas navegações, além do avanço de diversas áreas como física, astronomia e geografia. Neste cenário, os logaritmos surgiram como uma ferramenta para simplificar cálculos numéricos cada vez mais complexos que essas áreas do conhecimento exigiam. Em suas obras *Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614) e Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1619), John Napier (1550-1617) apresentou o conceito de Logaritmo por meio do método geométrico-cinemático, que relaciona o movimento de um ponto através de um segmento de reta e um outro ponto que se move por uma semirreta. A correspondência entre o tempo e a distância desses movimentos pode ser descrita como relações entre termos de uma Progressão Geométrica e termos de uma Progressão Aritmética. Essas relações entre sucessões numéricas estão presentes na obra *Arithmetica Integra* (1544) de Michael Stifel (1487-1567). Desta forma, este projeto, em estágio inicial, através de uma pesquisa bibliográfica e documental, propõe uma análise historiográfica das obras supracitadas, tendo como objetivo os seguintes resultados: identificar possíveis influências de Stifel no desenvolvimento dos Logaritmos, e de que maneira suas ideias podem ter auxiliado nas obras de Napier, bem como encontrar conexões entre as obras, e estabelecer convergências e/ou divergências entre as ideias dos autores.

Palavras-chave: Logaritmos; Progressões; História da Matemática

ABSTRACT

During the 16th and 17th centuries, Europe witnessed significant growth in commerce, navigation, and the advancement of various fields such as physics, astronomy, and geography. In this context, logarithms emerged as a tool to simplify increasingly complex numerical calculations that these areas of knowledge demanded. In his works *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614) and *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1619), John Napier (1550-1617) presented the concept of logarithms through the geometric-kinematic method, which relates the movement of a point along a line segment to another point moving along a half-line. The correspondence between the time and distance of these movements can be described as relationships between terms of a Geometric Progression and terms of an Arithmetic Progression. These relationships between numerical sequences are present in Michael Stifel's (1487-1567) work *Arithmetica Integra* (1544). Thus, this project, in its initial stage, through bibliographic and documentary research, proposes a historiographical analysis of the aforementioned works, aiming for the following results: to identify possible influences of Stifel in the development of logarithms, and how his ideas may have aided Napier's works, as well as to find connections between the works, and to establish convergences and/or divergences between the authors' ideas.

Keywords: Logarithms; Progressions; History of Mathematics.

REFERÊNCIAS

MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira**. Natal: SBHMat, 2002.

NAPIER, J. **Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio**. Scotland: Edimburgo. Andreae Hart, 1614.

NAPIER, J. **Mirifici logarithmorum canonis Constructio**. Scotland: Edimburgo. Andreae Hart, 1619.

[1] Mestrando na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Rio Claro, São Paulo, Brasil. E-mail: andre.marques-santos@unesp.br .

SMITH, David Eugene. The Law of Exponents in the Works of the Sixteenth Century. In: KNOTT, C. G. (ed.). **The Napier Tercentenary**. London: The Royal Society of Edinburgh, 1915. p. 81-91.

STIFEL, M. **Arithmetica integra.** Cum praefatione Philippi Melanchthonis. Noremberg. Johannes Petreius, 1544.

Anais do XVI Seminário Nacional de História da Matemática / Marcos Lübeck e Rafael Montoito (organizadores).
Rio Claro/SP: SBHMat, 2025 .ISSN: 2236–4102

Utilizando os Sona para calcular o Máximo Divisor Comum de dois números inteiros

Using Sona to calculate the Greatest Common Divisor of two integers

Patrícia Nunes da Silva[1]
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

RESUMO

Os sona pertencem à cultura do povo Tchokwe e de grupos relacionados que vivem no leste de Angola e em regiões vizinhas, como a Zâmbia e a República Democrática do Congo. Em 2023, a UNESCO reconheceu essa tradição ao inscrevê-la na Lista Representativa do Patrimônio Cultural Imaterial da Humanidade. Os sona são desenhos geométricos traçados na areia pelos membros mais velhos para narrar histórias e transmitir conhecimentos aos mais jovens. Este estudo investiga a relação entre os sona e o máximo divisor comum (MDC) de dois números inteiros, destacando o rico conteúdo matemático presente nesses desenhos e seu potencial como recurso pedagógico no ensino do conceito de MDC. A abordagem, ao integrar aspectos lúdicos e culturalmente significativos, visa engajar estudantes do Ensino Fundamental II de forma mais atraente. A pesquisa baseou-se em uma revisão bibliográfica, com ênfase em estudos que exploram a aplicabilidade dos sona no ensino de matemática, valorizando abordagens inovadoras e motivadoras. Há uma rica bibliografia (artigos, dissertações, livros didáticos e outras publicações) que analisa seu potencial didático, incluindo sua utilização na identificação de padrões, simetrias e progressões aritméticas, além de possibilitar abordagens transdisciplinares. No caso do MDC, há um teorema que conecta os sona a esse conceito matemático. Algumas obras propõem atividades experimentais para que os estudantes intuam a validade desse teorema. Este estudo apresenta atividades práticas que instigam os alunos a responderem questões como: quantas linhas contínuas são necessárias para criar cada desenho na areia? Existe um padrão ou regra que determine o número de linhas? Como as linhas e colunas de pontos podem auxiliar na identificação dessa regularidade? Por fim, o trabalho oferece uma demonstração geométrica detalhada do teorema, contribuindo para sua compreensão e reafirmando os sona como uma ferramenta didática valiosa e culturalmente enriquecedora.

Palavras-chave: Etnomatemática; Tchokwe; Sona; Máximo divisor comum.

ABSTRACT

The sona belong to the culture of the Tchokwe people and related groups living in eastern Angola and neighboring regions, such as Zambia and the Democratic Republic of Congo. In 2023, UNESCO recognized this tradition by inscribing it on the Representative List of the Intangible Cultural Heritage of Humanity. The sona are geometric drawings traced in the sand by elder members to narrate stories and transmit knowledge to younger generations. This study investigates the relationship between sona and the greatest common divisor (GCD) of two integers, highlighting the rich mathematical content embedded in these drawings and their potential as a pedagogical resource for teaching the concept of GCD. By integrating playful and culturally significant aspects, this approach aims to engage middle school students in a more appealing way. The research is based on a literature review, emphasizing studies that explore the applicability of sona in mathematics education, valuing innovative and motivating approaches. There is a vast bibliography (articles, dissertations, textbooks, and other publications) analyzing their didactic potential, including their use in identifying patterns, symmetries, and arithmetic progressions and enabling transdisciplinary approaches. Regarding GCD, a theorem connects sona to this mathematical concept. Some studies propose experimental activities to help students intuitively grasp the theorem's validity. This study presents practical activities encouraging students to answer questions such as: How many continuous lines are needed to create each sand drawing? Is there a pattern or rule that determines the number of lines? How can the rows and columns of points assist in identifying this regularity? Finally, the study provides a detailed geometric proof of the theorem, contributing to its comprehension and reaffirming sona as a valuable and culturally enriching didactic tool.

Keywords: Ethnomathematics; Tchokwe; Sona; Greatest common divisor.

[1] Doutorado em Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor Associado da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: nunes@ime.uerj.br.

REFERÊNCIAS

BARROS, Pedro Henrique Alves. **A Geometria Sona e suas possibilidades de aplicação no âmbito da educação básica**. 2019. 134 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

DOMITE, Maria do Carmo Santos; VALLE, Júlio César Augusto do. O pensamento matemático e a formação da identidade cultural: ressonâncias e consonâncias, **Revista Educação e Linguagens**, v. 4, p. 127-139, 2015. https://doi.org/10.33871/22386084.2015.4.7.127-139.

GERDES, Paulus. **Geometria Sona**: Reflexões sobre uma Tradição de Desenho em Povos da África ao Sul do Equador. Maputo: Instituto Superior Pedagógico; 1993.

JABLAN, Slavik; RADOVIĆ, Ljiljana; SAZDANOVIĆ, Radmila; ZEKOVIĆ, Ana. Mirror-curves and knot mosaics. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 64, p. 527-543, 2012. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.12.042.

REID, Denise Taunton; TROWELL, Sandra Davis. SONA: An Activity for Exploring the GCF. **Mathematics Teaching in the Middle School**, V. 24, p. 116-122, 2018. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.24.2.0116.

Sobre os Organizadores

Marcos Lübeck

Graduado em Matemática (Licenciatura) pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) - Santa Maria/RS. Mestre e Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (Unesp) - Rio Claro/SP. Professor Associado da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste) - Foz do Iguaçu/PR, no Curso de Matemática (Licenciatura) e no Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGEn). Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase nas Relações entre História, Cultura, Ensino e Matemática, atuando com os seguintes temas: Educação Matemática e Inclusão Escolar; Etnomatemática e Diversidade; História da Matemática de Diferentes Culturas; Metodologias Alternativas de Ensino; Formação de Professores de Matemática. É Membro (e atual Vice-Presidente) da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e da Red Internacional de Etnomatemática (RedINET).

Rafael Montoito

Licenciado em Matemática e Bacharel em Filosofia pela Universidade Federal de Pelotas (UFPel). Foi professor substituto na Universidade Federal de Pelotas (UFPel), na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) e na Universidade Estadual Paulista (UNESP - Campus Bauru). Concluiu o mestrado na área de Educação Matemática, na UFRN (sua dissertação analisa as características matemáticas das obras de Lewis Carroll, grande escritor e matemático inglês que se utilizava de uma linguagem literária para ensinar conteúdos matemáticos, sobretudo lógica e geometria euclidiana) e o doutorado em Educação para a Ciência (sua tese compreende a tradução de um livro de Carroll, até então inédito em português, e outros capítulos que comentam esta obra). Posteriormente, fez pós-doutorado na University of Birmingham (Inglaterra), analisando os diários e correspondências de Carroll. Atualmente segue investigando as inter-relações entre a literatura e a matemática, o lógico e o imaginário no ambiente de aprendizagem, trabalhando com a ideia de que ensinar a ler e a escrever é um compromisso de todas as disciplinas. Também se interessa por outras inter-relações com a matemática, tais como as que se pode perceber/apreender em outras manifestações artísticas, tais como a pintura, o cinema, a confecção de mapas etc. É professor, desde 2010, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense (IFSUL - Campus Pelotas), onde orienta mestrandos e doutorandos no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (UFPel), investigando aspectos intra e extraescolares relativos ao ensino, à aprendizagem e à formação de professores; num âmbito mais geral, estuda como os diferentes tipos de narrativas (literatura, vídeos, cinema, imagens, fotos, jornais etc) podem ser potencializados para a discussão de assuntos relativos à educação no cenário da pós-modernidade. É líder do GENEP (Grupo de Estudos em Narrativas e Educação na Pós-modernidade) e membro do grupo HIFEM (História, Filosofia e Educação Matemática).